Introducción al análisis de circuitos

Boylestad

Décima edición

PEARSON
Prentice Hall®

DÉCIMA EDICIÓN

Introducción al análisis de circuitos

Robert L. Boylestad

TRADUCCIÓN
Ing. Carlos Mendoza Barraza
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

Ing. José de la Cera Alonso
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

REVISIÓN TÉCNICA
M. en C. Agustín Suárez Fernández
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Autónoma Metropolitana
Plantel Iztapalapa

Dr. Juan Carlos Sánchez García
Ing. Gonzalo Duchén Sánchez
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Instituto Politécnico Nacional
Unidad Culhuacán



MÉXICO • ARGENTINA • BRASIL • COLOMBIA • COSTA RICA • CHILE • ECUADOR
ESPAÑA • GUATEMALA • PANAMÁ • PERÚ • PUERTO RICO • URUGUAY • VENEZUELA

Datos de catalogación bibliográfica

BOYLESTAD, ROBERT L.

Introducción al análisis de circuitos

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2004

ISBN: 970-26-0448-6
Área: Universidad

Formato: 21 × 27 cm Páginas 1248

Edición en español

Editor:	Guillermo Trujano Mendoza
	e-mail: guillermo.trujano@pearsoned.com
Supervisora de desarrollo:	Diana Karen Montaño González
Supervisor de producción:	Enrique Trejo Hernández

DÉCIMA EDICIÓN, 2004
D. R. © 2004 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco No. 500-5° piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.
Reg. Núm. 1031.

ISBN 970-26-0448-6

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 05 04 03 02

PEARSON
Educación ®

Para Else Marie
Alison, Mark, Kelcy, Morgan y Cody
Eric, Rachel y Samantha
Stacey, Jonathan y Britt
Johanna

Prefacio

A medida que escribía este prefacio para la décima edición de *Análisis introductorio de circuitos*, me fue imposible no reflexionar sobre los pasados 34 años de su historia. Hubo momentos en que fue particularmente difícil identificar los temas que se habían actualizado, si un nuevo tema debía añadirse, si el desarrollo se encontraba a un nivel adecuado o si era matemáticamente muy complejo, si la cobertura computacional debía ser ampliada, etc. Por fortuna, sin embargo, las preguntas de los estudiantes, tanto en las sesiones de clase como en los laboratorios, en combinación con los comentarios de los colegas y revisores, me ayudaron a definir las áreas que requerían rediseñarse y los temas que debían añadirse. No obstante, en mi interés por satisfacer a todos, el libro adquirió un tamaño que me obligó a considerar seriamente la posibilidad de eliminar secciones e incluso capítulos completos. Sin embargo, la reacción general ante tal cambio fue tan negativa que me pareció mejor alternativa aceptar simplemente el hecho de que todo material nuevo podría ser considerado para su inclusión únicamente si alguna parte del libro cuyo tamaño fuese similar pudiera eliminarse.

Siempre resulta interesante que, cuando me siento a escribir el prefacio para una edición, ya me encuentre al tanto de los cambios que se presentarán en la siguiente. Por ejemplo, al enfocarme sobre el área de cómputo para esta edición, sentí una fuerte necesidad de conservar las descripciones detalladas que aparecen con las aplicaciones de PSpice, Mathcad y Electronics Workbench. Sin embargo, la calidad de la literatura de apoyo ha mejorado de forma importante en años recientes, llevándome a pensar que la mayor parte del detalle será eliminada en la onceava edición; posiblemente sólo se proporcionarán los archivos de salida e impresiones. Uno de los retos que más disfruto con cada nueva edición es llegar a algo realmente innovador que apoye el proceso de aprendizaje. En la novena edición esto significó añadir numerosos ejemplos prácticos, y en la octava fue el detalle ofrecido para dar soporte a la versión Windows de PSpice. Retrocediendo hasta la quinta edición (1987), recuerdo que se discutió acerca de si era conveniente presentar el análisis por computadora en el texto con la adición de programas en BASIC. Evidentemente, hacerlo fue una decisión acertada cuando observamos la cobertura que se ofrece a tal análisis en la mayoría de los textos actuales. En otra edición, el punto medular consistió en decidir la ampliación del capítulo inicial sobre operaciones matemáticas, dado que observé que muchos estudiantes carecían de la formación adecuada para el trabajo a seguir. La revisión es un proceso continuo que ofrece un reto maravilloso para futuras ediciones.

Los cambios más evidentes en esta edición están en el área de cómputo. Me encontraba satisfecho con la versión de la familia OrCAD 9.2 Lite Edition, que me permitía migrar desde la versión 8. Recuerdo que cuando finalmente me sentí seguro utilizando la versión DOS de PSpice, se presentó la versión de Windows; entonces me di cuenta de que aun cuando había desarrollado mi habilidad en el modo DOS, debía aprender ese nuevo enfoque. Al principio estuve renuente y me centraba en señalar todo aquello que no me gustaba acerca de la versión Windows. Sin embargo, mediante la práctica, y con el tiempo, advertí que evidentemente ese sería el camino del futuro; y, por supuesto, ahora aprecio el cambio. Lo mismo sucedió, en cierta forma, cuando ya estaba familiarizado con la versión 8 de PSpice y se introdujo la versión 9 (bajo un nuevo propietario titular) con varios cambios. Durante cierto periodo permanecí con la versión 8 en lugar de hacer el cambio; no obstante, la empresa Cadence Design Systems realizó un esfuerzo importante para suavizar los cambios y restablecer su cercana asociación con la versión de MicroSim. Ha llegado el momento de migrar a la nueva versión. La mayor parte de los cambios se encuentran en la interfaz de usuario y en algunas de las secuencias de simulación; sin embargo, el lector puede estar seguro de que si se encuentra familiarizado con la versión 8 y dedica algunos minutos a revisar el material introductorio de este texto, la nueva versión pronto le parecerá tan amigable como la anterior. De hecho, con seguridad agradecerá algunos de los cambios que se realizaron.

Para esta edición se incorporó la versión Multisim 2001 de Electronics Workbench como respuesta a su creciente uso por parte de varias instituciones. Tiene la notable ventaja de permitir el uso de instrumentos reales para realizar las mediciones, proporcionando a los estudiantes una experiencia de laboratorio al utilizar la computadora.

Por último, decidí permitir que Mathcad jugara un papel activo en el proceso de aprendizaje. En la actualidad los estudiantes son muy rápidos para aprender la forma de aplicar los paquetes de software, así que supuse que la habilidad para realizar operaciones matemáticas complejas con la computadora únicamente los incitaría a familiarizarse más con los métodos por computadora. Todavía recuerdo los tiempos en que los estudiantes permanecían sentados experimentando cierto temor cuando les mostraba la forma de realizar algunas operaciones básicas con ayuda de la computadora. En la actualidad, debo permanecer en alerta constante para responder a las preguntas que hacen y,

tengo que reconocerlo, en ocasiones necesito efectuar alguna investigación antes de poder contestarles adecuadamente.

La cobertura de C++ permanece igual como respuesta a los comentarios positivos de los usuarios actuales. Sin embargo, con la incorporación de Electronics Workbench, y apoyado en observaciones de los revisores, decidí eliminar los programas en BASIC y sus descripciones.

Durante los últimos años, he recibido numerosos comentarios acerca del orden de los últimos capítulos del libro. En esta ocasión, revisé minuciosamente ese contenido y decidí que algunos de los cambios recomendados eran válidos y debían ser realizados. Sin embargo, debo admitir que el nuevo orden es principalmente resultado de mi propia experiencia de enseñanza y de cómo percibí que los temas debían ser cubiertos en un texto introductorio. El orden de las secciones numeradas en el capítulo 12 (Inductores) también fue modificado para asegurar que los temas más importantes se cubrieran al principio, y que la utilización de la ecuación general para el comportamiento transitorio se presentara lo antes posible a fin de que pudiera aplicarse a lo largo del capítulo.

Otros cambios evidentes incluyen la eliminación del material que rodeaba la presentación de los superconductores debido a que las explicaciones requerían una formación más allá del nivel actual de los estudiantes. También, ahora el término *rms* se utiliza prácticamente de forma exclusiva en lugar de *eff* como sucedía en ediciones anteriores. En la descripción del álgebra fasorial, las letras **A**, **B** y **C** se reemplazaron por **X**, **Y** y **Z** para ofrecer un puente entre las operaciones matemáticas y los parámetros de red. En el capítulo 10 sobre capacitores, la ecuación general para el comportamiento transitorio se presenta lo antes posible para permitir su aplicación a lo largo del capítulo. De hecho, ahora se utiliza a lo largo del capítulo 24 de manera que los estudiantes no tengan que remitirse a las ecuaciones básicas de definición presentadas con anterioridad.

En la dirección de Internet:

www.pearsoneducacion.net/boylestad

se encuentran ejercicios, aplicaciones prácticas y archivos de circuitos, tanto para Electronics Workbench como para Multisim.

Un paquete completo de material de apoyo acompaña a este texto e incluye:

Manual de soluciones para el instructor
Archivo para exámenes
Administrador de exámenes de Prentice Hall (banco de pruebas electrónico)
Transparencias de Powerpoint® en CD-ROM
Suplementos para el instructor en CD-ROM
Sitio web de complemento:

www.pearsoneducacion.net/boylestad

Para información sobre este material contacte al representante de Pearson Educación.

De la misma forma que con cada edición, varias personas fueron de gran ayuda en el desarrollo del contenido de la presente. Mis agradecimientos más sinceros a Jerry Sitbon por tomarse el tiempo para responder a mis muchas preguntas acerca de todo tema y por ayudarme a definir el contenido en áreas específicas del texto. El profesor Franz Monssen, con su amplia experiencia en la aplicación de paquetes de software, fue muy útil en el desarrollo de la exposición de la nueva versión de PSpice. Para esta edición, la editora de desarrollo Kate Linser apoyó en la búsqueda de información específica, manteniendo un registro de todos los detalles necesarios y definiendo un canal transparente que permitió completar el texto. Un agradecimiento especial también para Sigmund Årseth por la pintura especial que honra la portada.

A lo largo de los años, el equipo de producción en Columbus Ohio ha demostrado ser excelente, en todo el sentido de la palabra. Rex Davidson, editor de producción y buen amigo mío, de alguna forma consigue eliminar toda la presión que genera el proceso de producción. Mis editores, Scott Sambucci y Denis Williams, siempre están disponibles para ayudar a tomar decisiones importantes y hacer todo lo necesario con el propósito de asegurar que el texto publicado tenga todos los elementos necesarios para llegar a ser un éxito. Aprecio profundamente la capacidad de Lara Dimmick, asistente editorial, para hacerse cargo de una montaña de detalles. Mi correctora, Maggie Diehl, continúa sorprendiéndome con las preguntas y sugerencias que formula para mejorar el texto.

Por último, quiero agradecer a todos ustedes, los lectores, por creer en este libro a lo largo de los años. La escritura y revisión del texto conforman un esfuerzo que me ha dado tal grado de satisfacción y gusto, que espero continúe en el futuro. No existe nada que disfrute más que atender a los comentarios de quienes actualmente usan el texto, y quizá de los usuarios de alguna de las ediciones anteriores. Les aseguro que no existirá comunicación de ustedes sin respuesta de mi parte. Mis mejores deseos para un año escolar saludable, productivo y agradable.

Reconocimientos

Quiero agradecer a las siguientes personas por sus distintas aportaciones a lo largo de las muchas ediciones de este libro de texto.
Derek Abbot – Universidad de Adelaida, Australia
Don Abernathy – Instituto de Tecnología DeVry
Andrew H. Andersen, Jr. – Colegio de la Comunidad de Brookdale
James L. Antonakos – Colegio de la Comunidad Broome
Sohail Anwar – Universidad Estatal de Pennsylvania
Jeff Beasley – Universidad Estatal de Nuevo México
Tom Bellarmine – Universidad de Florida A&M

Bill Boettcher – Instituto Técnico Vocacional de Albuquerque
Joe Booker – Instituto de Tecnología DeVry
Mohamed Brihoum – Instituto de Tecnología DeVry
O. J. Brittingham – Instituto de Tecnología DeVry
Charles Bunting – Universidad Old Dominion
Kern Butler – Town and Country Electric, Inc.
Mauro Caputi – Universidad Hofstra
Richard Cliver – Instituto de Tecnología de Rochester
Joseph Coppola – Universidad Estatal de Nueva York
Lester W. Cory – Universidad del Sudeste de Massachusetts
Thomas M. Crapo – Colegio Ricks
Gerald L. Doutt – Instituto de Tecnología DeVry
John Dunbar – Instituto de Tecnología DeVry
Derrek Butler Dunn – Universidad Estatal de Carolina del Norte A&T
Richard Fleming – Universidad Estatal de Midwestern
Marion R. Fox – Colegio Estatal de Rose
Kenneth Frament – Instituto de Tecnología DeVry
George Fredericks – Colegio Técnico de la Comunidad Estatal de Northeast
Alberto Gomez-Rivas – Universidad de Houston
Robert Herrick – Universidad de Purdue
Robert J. Hofinger – Universidad de Purdue
Tania Hrynewycz – Instituto de Tecnología DeVry
James Hurny – Instituto de Tecnología de Rochester
Frank Jump – Colegio de la Comunidad de North Seattle
Rajiv Kapadia – Universidad Estatal de Minnesota
Robert Katz
Mohammad I. Khan – Colegio Séneca
Ali Khidar – Instituto de Tecnología DeVry
Kathleen L. Kitto – Universidad Western Washington
Dave Krispinsky – Instituto de Tecnología de Rochester
Noel Looser – Corporación Omega
M. David Luneau, Jr. – Universidad de Arkansas
Bill Mack – Colegio de la Comunidad del Área de Harrisburg
Leei Mao – Colegio Técnico de Greenville
Robert Martin – Colegio de la Comunidad de Northern Virginia
Tim Christensen – Cadence Design Systems
Tom Minnich – Instituto de Tecnología de la Universidad de West Virginia
Jalil Moghaddasi – Colegio de la comunidad de Bronx/CUNY
Mike O’Rear – Instituto Técnico de Chattahoochee
Said Oucheriah – Universidad de Northern Illinois
Carol Parcels – Hewlett-Packard Corporation
Jay Porter – Universidad A&M de Texas
Robert Powell – Colegio de la Comunidad de Oakland
Sandra L. Powell – Texas Instruments
Carl E. Priode – Universidad Estatal de Shawnee
Vic Quiros – Instituto de Tecnología DeVry
Richard Skovhol – Universidad Aeronáutica Embry-Riddle
Paul T. Svatik – Colegio de la Comunidad de Owens
Barbara Sweeney – Archivos de AT&T
Eric Tisdale – Universidad Estatal de Ball
Domingo L. Uy – Universidad de Hampton
Thomas A. Varetoni – Instituto de Tecnología DeVry
Misty Watson – Instituto de Tecnología DeVry
Lynda Wilkinson – Colegio de la Comunidad de North Seattle
Mayor Jim Wise – Academia Naval de Estados Unidos



Resumen del contenido

Contenido

6
Circuitos en paralelo 169

7
Redes en serie-paralelo 213

8
Métodos de análisis y temas seleccionados (cd) 255

9
Teoremas de redes 321

10
Capacitores 375

15

Circuitos de ca en serie y en paralelo 629

16

Redes de ca en serie-paralelo 709

17

Métodos de análisis y temas seleccionados (ca) 743

18

Teoremas de redes (ca) 791

19

Potencia (ca) 849

20

Resonancia 887

25

Circuitos no senoidales 1123

26

Análisis de sistemas: una introducción 1149

Apéndices

Apéndice A

Apéndice B

Apéndice C

Apéndice D

Apéndice E

Apéndice F

Apéndice G

Apéndice H

Índice 1220

1

Introducción

1.1 LA INDUSTRIA ELÉCTRICA/ELECTRÓNICA

La creciente sensibilidad a las tecnologías mostrada por parte de Wall Street es una clara evidencia de que la industria eléctrica/electrónica tendrá un impacto arrollador sobre el desarrollo futuro en una amplia gama de áreas que afectan nuestro estilo de vida, nuestra salud en general y nuestras habilidades. Incluso en el campo de las artes, donde inicialmente sus integrantes estaban determinados a no utilizar métodos tecnológicos, actualmente se están adoptando algunas de las nuevas e innovadoras tecnologías que permiten la exploración en áreas donde nunca antes se pensó que sería posible llegar. El nuevo enfoque de Windows para la simulación por computadora ha logrado que los sistemas de cómputo sean mucho más amigables y accesibles para el usuario común, dando por resultado un mercado en expansión que a su vez estimula el crecimiento en ese campo. Tener una computadora en el hogar será, eventualmente, tan común como en la actualidad es el caso del teléfono o la televisión. De hecho, estos tres dispositivos se encuentran integrados ya en una sola unidad.

Al parecer, cada faceta de nuestra vida se encuentra afectada por adelantos que parecen surgir a un ritmo cada vez mayor. Para la persona que no es experta, el logro más obvio en años recientes es el reducido tamaño de los sistemas eléctricos/electrónicos. Los aparatos de televisión ahora son los suficientemente pequeños como para caber en una mano y tienen una capacidad de batería que les permite ser mucho más autónomos. Existen computadoras, con una gran capacidad de memoria, más pequeñas que este libro de texto. El tamaño de los receptores de radio únicamente se encuentra limitado por nuestra capacidad para leer los números inscritos sobre la carátula del cuadrante. Los audífonos para compensar deficiencias auditivas ya no quedan a la vista, y los marcapasos son mucho más pequeños y confiables. Esta reducción en el tamaño se debe principalmente a un maravilloso adelanto de las últimas décadas: el **circuito integrado (CI)**, el cual fue desarrollado por primera vez a finales de la década de 1950 y actualmente alcanza el punto donde el corte de líneas de 0.18 micrómetros es algo común. El circuito integrado que se muestra en la figura 1.1 es el procesador Intel® Pentium® 4, el cual tiene 42 millones de transistores sobre un área de tan sólo 0.34 pulgadas cuadradas. Intel Corporation presentó recientemente un documento técnico donde da a conocer transistores de 0.02 micrómetros (20 nanómetros), los cuales fueron desarrollados en sus laboratorios de investigación de silicio. Estos diminutos y ultra rápidos transistores permitirán colocar cerca de mil millones de ellos sobre una pieza de silicio no mayor que la uña de un dedo. Los microprocesadores construidos a partir de estos transistores podrán operar a cerca de 20 GHz; con lo cual sólo queda preguntarnos hasta dónde llegará el desarrollo de tales tecnologías.

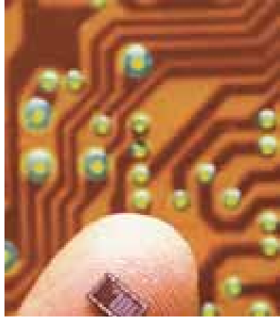


FIGURA 1.1
Circuito integrado de computadora sobre la yema de un dedo. (Cortesía de Intel Corp.)

Resulta natural preguntarnos acerca de los límites de crecimiento en el área tecnológica cuando consideramos los cambios acontecidos en las últimas décadas. En lugar de seguir una curva continua de desempeño que pudiera ser predecible, la industria está sujeta a grandes cambios eventuales que surgen alrededor de importantes desarrollos en el campo. Indicios recientes muestran que el nivel de miniaturización continuará, pero a un paso más moderado. En la actualidad el interés se centra sobre el incremento en calidad y productividad (el porcentaje de circuitos integrados que funcionan luego del proceso de producción).

La historia revela que han existido picos y valles en lo que se refiere al crecimiento de la industria, pero que los ingresos siguen creciendo a un ritmo estable y los recursos destinados a la investigación y el desarrollo continúan dominando una creciente porción del presupuesto. El área cambia a una velocidad que requiere de recapacitación constante desde el nivel inicial hasta el directivo. Muchas compañías han instituido sus propios programas de capacitación e impulsado a las universidades locales a que desarrollen programas con los cuales puedan asegurarse de que los procedimientos y conceptos de más actualidad están siendo aplicados por sus empleados. Un periodo de relajamiento podría resultar desastroso para una compañía que maneja productos competitivos.

Sin importar el tipo de presiones que en este campo puedan ejercerse sobre un individuo para que se mantenga actualizado tecnológicamente, existe un evidente beneficio a su favor: una vez que se entienda clara y correctamente un concepto o procedimiento, éste dará frutos a lo largo de la carrera del individuo en cualquier nivel de la industria. Por ejemplo, una vez que se entienda una ecuación fundamental como la ley de Ohm (Capítulo 4), ésta no será *reemplazada* por alguna otra ecuación a medida que se considere teoría más avanzada. Se trata de una relación de cantidades fundamentales que puede tener aplicación en el escenario más especializado. Además, cuando se ha comprendido un procedimiento o método de análisis, puede aplicarse a una amplia (sino es que infinita) variedad de problemas, haciendo innecesario aprender una nueva técnica para cada ligera variación en el sistema. El contenido de este libro es tal que cada segmento de información tendrá una aplicación en cursos más avanzados y no será reemplazado por un nuevo conjunto de ecuaciones y procedimientos, a menos que lo requiera el área de aplicación específica. Incluso entonces, los nuevos procedimientos serán por lo general una aplicación ampliada de los conceptos presentados en el texto.

Por tanto, resulta de capital importancia que el material presentado en este curso introductorio sea clara y precisamente comprendido, ya que finca las bases para tratar con el material a seguir y que se aplicará a lo largo de su trabajo profesional en esta excitante área en crecimiento.

1.2 UNA HISTORIA BREVE

En las ciencias, cuando una hipótesis es comprobada y aceptada se vuelve uno de los bloques de construcción del área de estudio, con lo cual se propicia que se lleven a cabo investigación y desarrollo adicionales. Naturalmente, mientras haya más piezas disponibles de un rompecabezas, más obvio resultará el camino hacia una posible solución. De hecho, la historia demuestra que incluso un solo desarrollo puede ser la clave que provoque un efecto de multiplicación que lleve a la ciencia a un nuevo nivel en cuanto a conocimiento e impacto se refiere.

Si tiene oportunidad, lea alguna de las muchas publicaciones que presentan la historia de los descubrimientos en el campo científico. Por restricciones de espacio, en este libro únicamente será posible ofrecer un breve análisis. Existen muchos más investigadores, de los que es posible incluir aquí, cuyos trabajos a menudo han proporcionado claves para la solución de algunos conceptos de gran importancia.

Como se mencionó, existen periodos caracterizados por lo que parece ser una explosión de interés y desarrollo en áreas particulares. En nuestra presentación de los inventos, descubrimientos y teorías de finales del siglo XVIII hasta principios del XIX, usted podrá apreciar cómo surgieron de forma rápida y frenética. Cada nuevo concepto amplía las posibilidades de aplicación en más áreas, de manera que es prácticamente imposible rastrear los desarrollos seleccionando un área de interés en particular y siguiendo a lo largo de ésta. A medida que conozca, por medios como radio, televisión e Internet, sobre el desarrollo, tenga presente que ya ocurrían avances progresivos similares en áreas de telégrafos, teléfonos, generación de energía, fonógrafos, electrodomésticos, etcétera.

Existe una tendencia común, al estudiar sobre los grandes científicos, inventores e innovadores, de creer que su contribución fue un esfuerzo completamente individual. En muchos casos no fue así. De hecho, la mayoría de los principales investigadores eran amigos o asociados que se ofrecían apoyo mutuo y aliento en sus esfuerzos por explorar distintas teorías. Cuando menos, se encontraban al tanto de los trabajos de unos y otros; esto en la medida de lo posible para los tiempos en que una carta era generalmente el mejor medio de comunicación. Observe en particular la cercanía de fechas durante los periodos de desarrollo acelerado. Al parecer, el logro de una persona alentaba los esfuerzos de alguien más o posiblemente proporcionaba la clave para continuar un trabajo en el área de interés.

Durante las primeras etapas, los investigadores no eran ingenieros eléctricos, electrónicos o de computación como los conocemos actualmente. En la mayoría de los casos se trataba de físicos, químicos, matemáticos o incluso filósofos; además, no provenían de sólo una o dos comunidades del Viejo Mundo. En los siguientes párrafos se proporciona el país de origen de los principales investigadores para mostrar que prácticamente toda comunidad establecida tuvo un impacto sobre el desarrollo de las leyes fundamentales de los circuitos eléctricos.

A medida que avance por los capítulos restantes del libro, observará que varias de las unidades de medición presentan el nombre del principal investigador

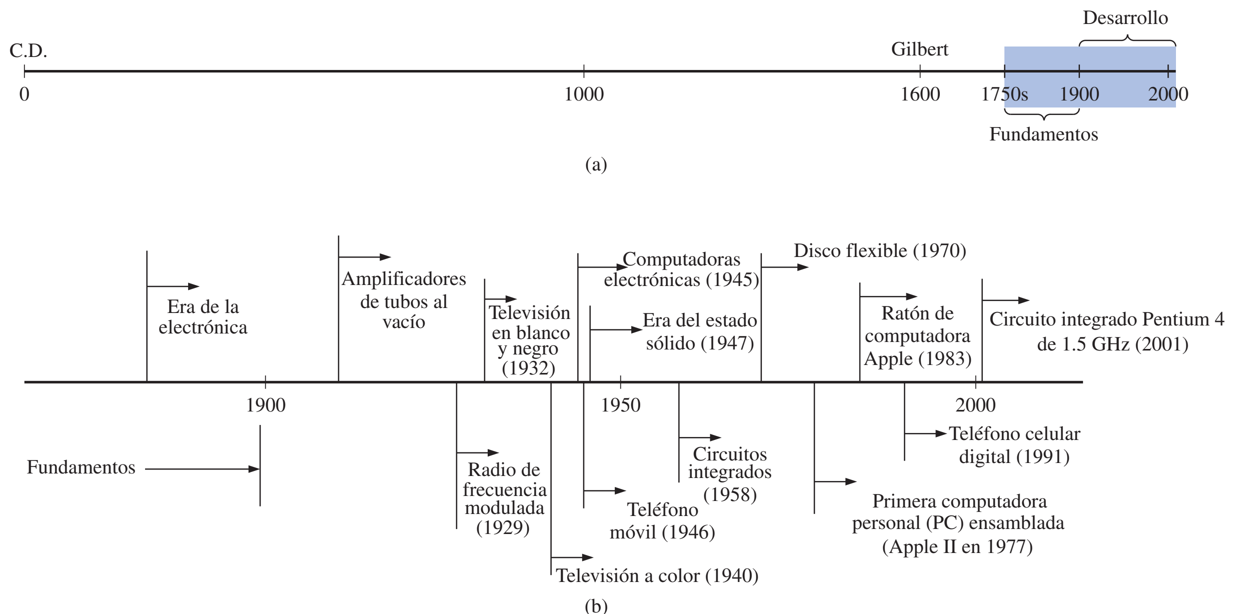


FIGURA 1.2
Gráficas de tiempo: (a) largo alcance; (b) ampliado.

en las áreas pertinentes —*volt* debido al conde Alessandro Volta, *ampere* debido a André Ampère, *ohm* gracias a Georg Ohm, etc.—, lo cual es un reconocimiento a sus importantes aportaciones al nacimiento de un campo de estudio tan significativo.

En la figura 1.2 se proporciona una gráfica de tiempo que presenta un número limitado de grandes descubrimientos, principalmente para identificar periodos específicos de rápido desarrollo y mostrar lo lejos que hemos llegado en las últimas décadas. En esencia, el nivel de vanguardia actual es resultado de esfuerzos que iniciaron formalmente hace cerca de 250 años, siendo el progreso de los últimos 100 años casi exponencial.

A medida que usted lea la breve exposición siguiente, trate de imaginarse el creciente interés en el campo, y el entusiasmo y emoción que debió haber acompañado a cada nuevo descubrimiento. Aunque algunos de los términos utilizados pueden parecerle nuevos y esencialmente sin sentido, el resto de los capítulos los explicarán por completo.

El inicio

Se ha jugado con el fenómeno de la **electricidad estática** desde la antigüedad. Los griegos denominaron a la sustancia de resina fósil utilizada comúnmente para demostrar los efectos de la electricidad estática como *electrón*, sin embargo no se realizó un estudio formal de la materia hasta que William Gilbert investigó el fenómeno en 1600. En los años siguientes, individuos como Otto von Guericke —construyó la primera máquina para generar grandes cantidades de carga— y Stephen Gray —fue capaz de transmitir carga eléctrica a largas distancias utilizando hilos de seda— continuaron la investigación de carga electrostática. Charles DuFay demostró que las cargas se atraen o se repelen, esto lo llevó a pensar que existen dos tipos de carga (teoría que se acepta actualmente mediante nuestra definición de cargas positivas y negativas).

Muchas personas creen que el verdadero comienzo de la era electrónica reside en los trabajos de Pieter van Musschenbroek y Benjamín Franklin. En 1745, van Musschenbroek presentó la **jarra Leyden** para almacenamiento de carga eléctrica (el primer capacitor) y demostró el choque eléctrico (y, por tanto, el poder de esta nueva forma de energía). Franklin empleó la jarra Leyden casi siete años más tarde para determinar que los relámpagos son simplemente descargas eléctricas, y se extendió sobre otras teorías importantes que incluyen la definición de los dos tipos de carga como *positiva* y *negativa*. A partir de este punto, nuevos descubrimientos y teorías parecieron presentarse a mayor velocidad conforme creció el número de individuos que realizaban investigaciones en el área.

En 1784, Charles Coulomb demostró en París que la fuerza entre cargas se encuentra en relación inversa al cuadrado de la distancia entre las cargas. En 1791, Luigi Galvani, profesor de anatomía en la Universidad de Bologna, Italia, efectuó experimentos sobre los efectos de la electricidad en nervios y músculos de animales. La primera **celda voltaica**, junto con su capacidad para producir electricidad mediante la acción química de un metal disolviéndose en ácido, fue desarrollada por otro italiano, Alessandro Volta, en 1799.

La fiebre activada en el campo eléctrico prosiguió a principios del siglo XIX con Hans Christian Oersted, profesor de física sueco, al anunciar en 1820 una relación entre magnetismo y electricidad que sirvió como fundamento para la teoría del **electromagnetismo** como la conocemos ahora. En el mismo año, un físico francés, André Ampère, demostró que existen efectos magnéticos alrededor de todo conductor portador de corriente y que estos conductores portadores de corriente pueden atraerse y repelerse entre sí tal como lo hacen los imanes. En el periodo de 1826 a 1827, un físico alemán, Georg Ohm, presentó una importante interrelación entre el potencial, la corriente y la resistencia, a la que

nos referimos actualmente como la *ley de Ohm*. En 1831, un físico inglés, Michael Faraday, demostró su teoría de la *inducción electromagnética*, en la que una corriente variable dentro de una bobina puede inducir una corriente variable en otra bobina, incluso cuando las dos bobinas no se encuentren directamente conectadas. Además, Faraday realizó un amplio trabajo sobre un dispositivo de almacenamiento que denominó condensador, y al que actualmente nos referimos con el término de *capacitor*. Él presentó la idea de añadir un dieléctrico entre las placas de un capacitor para incrementar la capacidad de almacenamiento (Capítulo 10). James Clerk Maxwell, profesor escocés de filosofía natural, realizó amplios análisis matemáticos para desarrollar lo que actualmente conocemos como *ecuaciones de Maxwell*, las que respaldan los esfuerzos de Faraday por asociar los efectos eléctricos y magnéticos entre sí. Maxwell también desarrolló la *teoría electromagnética de la luz* en 1862, la cual, entre otras cosas, revela que las ondas electromagnéticas viajan a través del aire a la velocidad de la luz (186,000 millas por segundo o 3×10^8 metros por segundo). En 1888, un físico alemán, Heinrich Rudolph Hertz, mediante experimentos con ondas electromagnéticas de baja frecuencia (microondas), consolidó las predicciones y ecuaciones de Maxwell. A mediados del siglo XIX, el profesor Gustav Robert Kirchhoff presentó una serie de leyes acerca de los voltajes y corrientes que encuentran aplicación práctica en todo nivel y área de este campo (Capítulos 5 y 6). En 1895, otro físico alemán, Wilhelm Röntgen, descubrió las ondas electromagnéticas de alta frecuencia, comúnmente denominadas en la actualidad como *Rayos X*.

Hacia finales del siglo XIX ya se habían establecido un número importante de ecuaciones, leyes y relaciones fundamentales, y varios campos de estudio que incluyen la electrónica, la generación de energía y los aparatos de cálculo, comenzaron a desarrollarse en serio.

La era de la electrónica

Radio El verdadero comienzo de la era de la electrónica se encuentra abierto al debate, y en ocasiones se atribuye a los esfuerzos de los primeros científicos que aplicaron potenciales a través de cubiertas de cristal al vacío. Sin embargo, muchos lo atribuyen a Thomas Edison, quien al añadir un electrodo metálico a un tubo al vacío descubrió que se establecía una corriente entre el electrodo y el filamento cuando se aplicaba voltaje positivo al electrodo. El fenómeno, demostrado en 1883, se denominó **efecto Edison**. En el periodo siguiente, la transmisión de ondas de radio y el desarrollo de la radio recibieron amplia atención. En 1887, Heinrich Hertz transmitió en su laboratorio ondas de radio por primera vez, gracias al esfuerzo que realizó al verificar las ecuaciones de Maxwell. En 1896, un científico italiano, Guglielmo Marconi (identificado generalmente como el padre de la radio), demostró que podían enviarse señales de telégrafo a través del aire desde grandes distancias (2.5 kilómetros) utilizando una antena en tierra. En el mismo año, Aleksandr Popov transmitió lo que probablemente fue el primer mensaje de radio a través de unas 300 yardas. El mensaje se denominó *"Heinrich Hertz"* en honor a los primeros trabajos de Hertz. En 1901, Marconi estableció una comunicación de radio a través del océano Atlántico.

En 1904, John Ambrose Fleming amplió los esfuerzos de Edison para desarrollar el primer diodo, denominado comúnmente como **válvula de Fleming**, que de hecho es el primero de los *dispositivos electrónicos*. Este dispositivo imprimió un profundo impacto sobre el diseño de los detectores que se encuentran dentro de la sección receptora de los radios. En 1906, Lee De Forest añadió un tercer elemento a la estructura al vacío y creó el primer amplificador: el triodo. Poco después, en 1912, Edwin Armstrong construyó el primer circuito

regenerador para mejorar la capacidad de recepción, y luego empleó la misma aportación para desarrollar el primer oscilador no mecánico. Hacia 1915 ya se transmitían señales de radio por todo Estados Unidos, y en 1918 Armstrong solicitó una patente para el circuito superheterodino, utilizado en prácticamente todos los aparatos de televisión y radio, que permite la amplificación a una sola frecuencia en lugar de al rango completo de señales de entrada. Los principales componentes de los radios de nuestros días ya se encontraban en su sitio desde entonces, y las ventas de aparatos de radio se elevaron desde unos cuantos millones de dólares a principios de la década de 1920 hasta cerca de mil millones en la década de 1930, verdaderos años dorados de la radio que incluyeron una gran variedad de producciones para los radioescuchas.

Televisión La década de 1930 también representó los comienzos de la era de la televisión, a pesar de que el desarrollo del cinescopio se inició años antes con Paul Nipkow y su *telescopio eléctrico* en 1884, y con John Baird y su larga lista de éxitos que incluyen la transmisión de imágenes de televisión a través de líneas telefónicas en 1927 y mediante ondas de radio en 1928, así como la transmisión simultánea de imágenes y sonido en 1930. En 1932, la NBC instaló la primera antena de televisión comercial sobre el edificio del Empire State en la ciudad de Nueva York, y RCA inició transmisiones regulares en 1939. La guerra desaceleró el desarrollo y las ventas, pero a mediados de la década de 1940 el número de aparatos de televisión creció desde unos miles hasta millones. La televisión a color se volvió popular a principios de la década de 1960.

Computadoras El primer sistema de cómputo puede rastrearse hasta Blaise Pascal, en 1642, con su máquina mecánica para sumar y restar números. En 1673 Gottfried Wilhelm von Leibniz empleó la *rueda de Leibniz* para incorporar la multiplicación y la división al rango de operaciones, y en 1823 Charles Babbage desarrolló la **máquina de diferencias** para añadir las operaciones matemáticas de seno, coseno, logaritmos y otras. En los años siguientes se efectuaron algunos adelantos, pero los sistemas continuaron siendo básicamente mecánicos hasta la década de 1930, cuando se presentaron sistemas electromecánicos empleando componentes como relevadores. No fue sino hasta la década de 1940 que los sistemas fueron completamente electrónicos. Resulta importante observar que incluso cuando IBM se constituyó en 1924, no participó en la industria del cómputo sino hasta 1937. En 1946, un sistema completamente electrónico y conocido como **ENIAC** se construyó en la Universidad de Pennsylvania; contenía cerca de 18,000 bulbos y pesaba 30 toneladas, pero era varias veces más rápido que la mayoría de los sistemas electromecánicos. Aun cuando se construyeron otros sistemas basados en bulbos, no fue sino hasta el nacimiento de la era del estado sólido cuando los sistemas de cómputo experimentaron un cambio radical en cuanto a tamaño, velocidad y capacidad.

La era del estado sólido

En 1947, los físicos William Shockley, John Bardeen y Walter H. Brattain, investigadores de los laboratorios Bell Telephone, efectuaron una demostración del **transistor** de punto de contacto (Figura 1.3), un amplificador construido completamente con materiales de estado sólido que no requería de vacío, cubierta de vidrio ni la aplicación de un voltaje para calentar el filamento. A pesar de una renuencia inicial debida a la gran cantidad de material disponible sobre diseño, análisis y síntesis de redes de bulbos, la industria eventualmente aceptó esta nueva tecnología como la tendencia del futuro. En 1958 se desarrolló el primer **circuito integrado** (**CI**) en Texas Instruments, y en 1961 Fairchild Corporation fabricó el primer circuito integrado comercial.

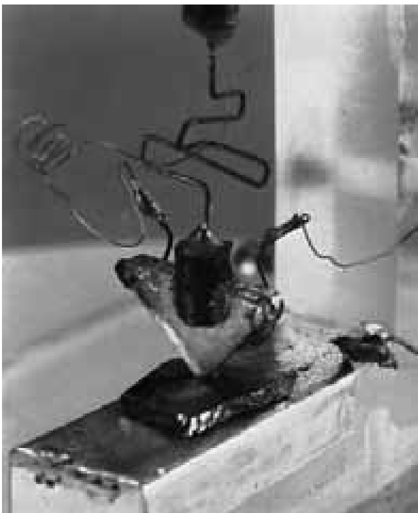


FIGURA 1.3
El primer transistor. (Cortesía de los laboratorios Bell, AT&T.)

Resulta imposible revisar adecuadamente la historia completa del campo eléctrico/electrónico en sólo unas páginas. El esfuerzo aplicado en este texto, tanto mediante la exposición como en las gráficas de tiempo de la figura 1.2, va en el sentido de mostrar el increíble progreso logrado en este campo durante los último 50 años. Al parecer, el crecimiento es verdaderamente exponencial desde principios del siglo XIX, planteando la pregunta de ¿a partir de aquí hacia donde nos dirigimos? La gráfica de tiempo sugiere que probablemente las próximas décadas presentarán importantes e innovadoras aportaciones que podrían iniciar una curva de desempeño con incluso mayor crecimiento que el actual.

1.3 UNIDADES DE MEDICIÓN

En cualquier campo técnico resulta naturalmente importante entender los conceptos básicos y el impacto que éstos tendrán sobre ciertos parámetros, sin embargo, la aplicación de esas reglas y leyes será acertada solamente si se utilizan de forma adecuada las operaciones matemáticas involucradas. En particular, es vital que se comprenda y aprecie la importancia de aplicar la unidad adecuada de medición a una cantidad. Los estudiantes, por lo general, desarrollan una solución numérica pero deciden no aplicar una unidad de medición al resultado debido a que se encuentran un tanto inseguros con respecto a la unidad pertinente. Considere, por ejemplo, la siguiente ecuación fundamental de física:

$$v = \frac{d}{t} \qquad \begin{aligned} v &= \text{velocidad} \\ d &= \text{distancia} \\ t &= \text{tiempo} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por el momento, asuma que la siguiente información se obtuvo para un objeto en movimiento:

$$d = 4000 \text{ pies}$$
$$t = 1 \text{ min}$$

y v se desea en millas por hora. A menudo, sin duda ni consideración, simplemente se sustituyen los valores numéricos en la ecuación, obteniéndose el resultado

$$v = \frac{d}{t} = \frac{4000 \text{ pies}}{1 \text{ min}} = \cancel{4000 \text{ mi/h}}$$

Como se ve, la solución está completamente equivocada. Si el resultado se desea en *millas por hora*, la unidad de medición para la distancia debe ser *millas*, y para el tiempo, *horas*. En seguida, cuando el problema se analice adecuadamente, la magnitud del error demostrará la importancia de asegurarse de que:

el valor numérico que se sustituya dentro de una ecuación debe contar con la unidad de medición especificada por la ecuación.

La siguiente pregunta surge de inmediato: ¿cómo convertir la distancia y el tiempo a las unidades adecuadas de medición? En una sección posterior se presenta un método para hacerlo, pero por ahora se tiene que:

$$1 \text{ mi} = 5280 \text{ pies}$$
$$4000 \text{ pies} = 0.7576 \text{ mi}$$
$$1 \text{ min} = \tfrac{1}{60} \text{ h} = 0.0167 \text{ h}$$

Al sustituir en la ecuación (1.1), tenemos:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{0.7576 \text{ mi}}{0.0167 \text{ h}} = 45.37 \text{ mi/h}$$

lo cual es significativamente distinto al resultado que se obtuvo antes.

Para complicar aún más la cuestión, suponga que la distancia se presenta en kilómetros, como es ahora el caso en muchas señales de caminos. Primero, debemos observar que el prefijo *kilo* indica un múltiplo de 1000 (se presentará en la sección 1.5), para luego encontrar el factor de conversión entre kilómetros y millas. Si este factor no se encuentra fácilmente disponible, deberemos ser capaces de efectuar la conversión entre unidades utilizando los factores de conversión entre metros y pies o pulgadas, según se describe en la sección 1.6.

Antes de sustituir los valores numéricos dentro de una ecuación, con propósitos de comparación, intente establecer un rango razonable de soluciones. Por ejemplo, si un automóvil recorre 4000 pies en un minuto, ¿resulta razonable pensar que la velocidad será de 4000 mi/h? ¡Obviamente no lo es! Este procedimiento de autoverificación es particularmente importante en estos días de la calculadora portátil, cuando podrían aceptarse resultados ridículos simplemente porque así aparecen en la pantalla digital del instrumento.

Por último,

si una unidad de medición es aplicable a un resultado o segmento de datos, entonces deberá ser también aplicable al valor numérico.

Establecer que $v = 45.37$ sin incluir la unidad de medición *mi/h* no tiene sentido.

La ecuación (1.1) no es difícil, mediante una sencilla manipulación algebraica se obtendrá la solución para cualquiera de las tres variables; sin embargo, a la luz de las preguntas que surgen a partir de esta ecuación, el lector podría preguntarse si la dificultad asociada con una ecuación se incrementará en la misma proporción que el número de términos contenidos en ella. En sentido amplio, este no será el caso. Desde luego, existe un mayor margen para cometer un error matemático cuando se trabaja con una ecuación compleja, pero una vez que se selecciona el sistema de unidades adecuado y se localiza cada término de forma correcta, deberá encontrarse sólo un ligero incremento en la dificultad asociado con una ecuación que requiere un mayor número de cálculos matemáticos.

En resumen, antes de sustituir los valores numéricos dentro de una ecuación, asegúrese por completo de lo siguiente:

1. ***Cada cantidad cuenta con la unidad de medición adecuada según lo define la ecuación.***
2. ***Se sustituye la magnitud adecuada de cada cantidad según lo determina la ecuación definida.***
3. ***Toda cantidad se encuentra en el mismo sistema de unidades (o según lo define la ecuación).***
4. ***La magnitud del resultado es de naturaleza razonable cuando se compara con el nivel de las cantidades sustituidas.***
5. ***Se aplica al resultado la unidad de medición apropiada.***

1.4 SISTEMAS DE UNIDADES

En el pasado, los *sistemas de unidades* más utilizados fueron el sistema métrico y el sistema inglés, como lo describe la tabla 1.1. Observe que mientras el sistema inglés se basa en un solo estándar, el sistema métrico se encuentra subdividido en dos estándares interrelacionados: el **MKS** y el **CGS**. En la tabla 1.1 se comparan las cantidades fundamentales de estos sistemas junto con sus abreviaturas. Los sistemas MKS y CGS obtienen sus nombres de las unidades de medición empleadas con cada sistema; el sistema MKS utiliza *M*etros, *K*ilogramos y *S*egundos, mientras que el CGS emplea *C*entímetros, *G*ramos y *S*egundos.

De forma comprensible, la utilización de más de un sistema de unidades en un mundo que va reduciendo su tamaño de forma continua, gracias al avance de los desarrollos técnicos en las comunicaciones y el transporte, podría intro-

TABLA 1.1
Comparación de los sistemas de unidades inglés y métrico.

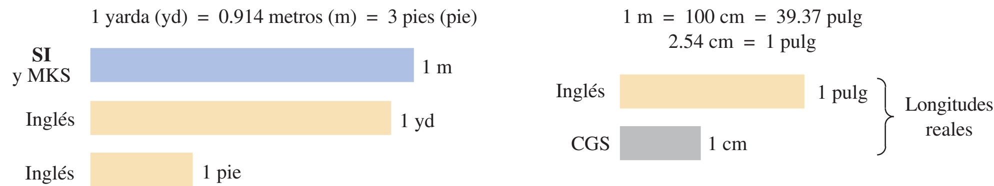
Inglés	**Métrico**		
	MKS	**CGS**	**SI**
Longitud: Yarda (yd) (0.914 m)	Metro (m) (39.37 pulg) (100 cm)	Centímetros (cm) (2.54 cm = 1 pulg)	**Metro (m)**
Masa: **Slug** (14.6 kg)	Kilogramo (kg) (1000 g)	Gramos (g)	**Kilogramo (kg)**
Fuerza: **Libra** (lb) (4.45 N)	Newton (N) (100,000 dinas)	Dina	**Newton (N)**
Temperatura: Fahrenheit (°F) $\left(=\frac{9}{5}°C + 32\right)$	Celsius o Centígrados (°C) $\left(=\frac{5}{9}(°F - 32)\right)$	Centígrados (°C)	**Kelvin (K)** K = 273.15 + °C
Energía: Pie-libra (pie-lb) (1.356 joules)	Newton-metro (N•m) o joule (J) (0.7376 pie-lb)	Dinas-centímetros o erg (1 joule = 10^7 ergs)	**Joule (J)**
Tiempo: Segundo (s)	Segundo (s)	Segundo (s)	**Segundo (s)**

ducir algunos problemas innecesarios en la comprensión básica de cualquier información técnica. Cada vez es más evidente la necesidad de adoptar un conjunto estándar de unidades de medición por parte de las distintas naciones. La Oficina Internacional de Pesos y Medidas ubicada en Sèvres, Francia, fue sede de la Conferencia General de Pesos y Medidas, en la cual participaron representantes de todas las naciones del mundo. En 1960, la Conferencia General adoptó un sistema denominado Le Système International d'Unités (Sistema Internacional de Unidades), abreviado **SI**. Desde entonces, el SI fue adoptado por el Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos, Inc. (IEEE) en 1965 y por el Instituto de Estándares de los Estados Unidos de América (USASI) en 1967 como un estándar para toda la literatura científica y de ingeniería.

Para propósitos de comparación, se presentan las unidades de medición del SI y sus abreviaturas en la tabla 1.1. Estas abreviaturas son las que por lo regular se aplican a cada unidad de medición y se han seleccionado cuidadosamente para asegurar que sean las vigentes. Por esta razón, es importante que se utilicen cuando sean aplicables para asegurar un entendimiento universal. Observe las similitudes del SI con el sistema MKS. Este texto utilizará, siempre que sea posible y práctico, las principales unidades y abreviaturas del SI, en un esfuerzo por respaldar la necesidad de aplicar un sistema universal. Aquellos lectores que requieran información adicional acerca del sistema SI deberán ponerse en contacto con la oficina de información de la Sociedad Estadounidense para la Educación en Ingeniería (ASEE American Society for Engineering Education).*

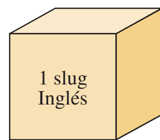
*American Society for Engineering Education (ASEE), 1818 N Street N.W., Suite 600, Washington, D.C. 20036-2479; (202) 331-3500; http://www.asee.org/.

Longitud:



Masa:

1 slug = 14.6 kilogramos



1 kilogramo = 1000 g



Fuerza:

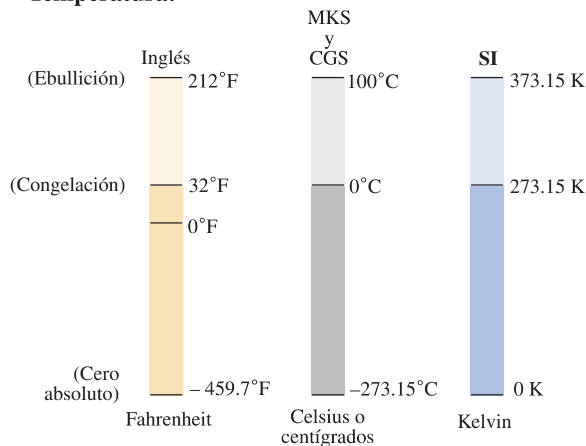






1 libra (lb) = 4.45 newton (N)
1 newton = 100,000 dinas (din)

Temperatura:



$$°F = \frac{9}{5}°C + 32°$$

$$°C = \frac{5}{9}(°F - 32°)$$

$$K = 273.15 + °C$$

Energía:





1 pie lb = 1.356 joules
1 joule = 10^7 ergs

FIGURA 1.4
Comparación de unidades de los distintos sistemas de unidades.

La figura 1.4 deberá ayudar al lector a desarrollar cierta sensibilidad para las magnitudes relativas de las unidades de medición de cada sistema de unidades. Observe en la figura la magnitud relativamente pequeña de las unidades de medición del sistema CGS.

Existe un estándar para cada unidad de medición de cada sistema. Los estándares de algunas unidades son muy interesantes.

El **metro** se definió originalmente en 1790 como 1/10,000,000 la distancia a nivel del mar entre el Ecuador y cualquier polo terrestre, longitud que se conserva físicamente en una barra de platino-iridio en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia.

El metro se define actualmente con referencia a la velocidad de la luz al vacío, la cual es igual a 299,792,458 m/s.

El kilogramo se define como una masa igual a 1000 veces la masa de un centímetro cúbico de agua pura a 4°C.

Este estándar se conserva en forma de un cilindro de platino-iridio en Sèvres.

El **segundo** se definió originalmente como 1/86,400 del día solar medio. Sin embargo, la rotación de la Tierra se encuentra en desaceleración en casi un segundo cada diez años.

El segundo se redefinió en 1967 como 9,192,631,770 periodos de la radiación electromagnética emitida por una transición particular del átomo de cesio.

1.5 CIFRAS SIGNIFICATIVAS, PRECISIÓN Y REDONDEO

En esta sección se enfatiza la importancia de estar consciente de la procedencia de los datos, la forma en que se presenta un número, y cómo debe ser manejado. Por lo regular escribimos los números de distintas maneras prestando poca atención al formato utilizado, al número de dígitos que deben incluirse y a la unidad de medición que será aplicada.

Por ejemplo, mediciones de 22.1″ y 22.10″ implican un distinto nivel de precisión. La primera cifra sugiere que la medición se realizó con un instrumento cuya precisión es de sólo décimas de unidad; la segunda cifra se obtuvo mediante instrumentación capaz de tomar lectura hasta centésimas. Por tanto, el empleo de ceros en un número tendrá que ser manejado con cuidado y las implicaciones deberán ser comprensibles.

En general, existen dos tipos de números, los *exactos* y los *aproximados*. Los números exactos son precisos al número exacto de dígitos presentados, de la misma forma que sabemos que existen 12 manzanas en una docena y no 12.1. A lo largo de este texto, los números que aparecen en las descripciones, diagramas, y ejemplos se consideran como *exactos*, por lo que una batería de 100 V puede escribirse como 100.0 V, 100.00 V, etc., debido a que es de 100 V en cualquier nivel de precisión. Los ceros adicionales no se incluyen debido a propósitos de claridad. Sin embargo, en el ambiente de laboratorio, donde continuamente se están tomando mediciones y el nivel de precisión puede variar de un instrumento a otro, es importante comprender cómo trabajar con los resultados. Cualquier lectura obtenida en el laboratorio deberá considerarse *aproximada*. Las escalas analógicas y sus agujas indicadoras pueden ser difíciles de leer, e incluso el medidor digital sólo proporciona algunos dígitos específicos en su pantalla y se encuentra limitado al número de dígitos que puede exhibir, quedándonos la duda acerca de los dígitos menos significativos que no se muestran en la pantalla.

Es posible determinar la precisión de una lectura mediante el número de *cifras significativas (dígitos)* presentes. Las cifras significativas son aquellos enteros (del 0 al 9) que pueden suponerse como precisos para que la medición se realice. El resultado de esto es que todos los números distintos de cero se consideran significativos, y los ceros lo serán únicamente en ciertos casos. Por ejemplo, los ceros en el número 1005 se consideran significativos debido a que definen el tamaño del número y a que están rodeados de dígitos distintos de cero. Sin embargo, para un número como 0.064, los dos ceros no se consideran significativos debido a que solo se emplean para definir la ubicación del punto decimal y no para la precisión de la lectura. Para el número 0.4020, el cero a la izquierda del punto decimal no es significativo, pero los otros dos sí los son ya que definen la magnitud del número y la precisión de la cuarta posición de la lectura.

Al sumar números aproximados, es importante asegurarse de que la precisión de las lecturas sea consistente de principio a fin. Para añadir una cantidad que es precisa sólo hasta décimas de número a un número con precisión de

milésimas, se obtendrá un total que tenga precisión sólo hasta las décimas. No es posible esperar que la lectura tenga un mayor nivel de precisión para mejorarla con solo una precisión de décimas.

En la adición o sustracción de números aproximados, la cantidad con el menor nivel de precisión determinará el formato de la solución.

En la multiplicación y división de números aproximados, el resultado contará con la misma cantidad de cifras significativas que el número con la menor cantidad de cifras significativas.

Para números aproximados (y exactos en tal caso), a menudo es necesario *redondear* el resultado; es decir, se debe decidir el nivel apropiado de precisión y alterar el resultado de acuerdo con ello. El procedimiento aceptado para efectuar esto es simplemente observar el dígito que sigue al último dígito que aparece en la forma redondeada, y añadir un 1 al último dígito si éste es mayor o igual a 5, o dejarlo sin cambio si es menor que 5. Por ejemplo, $3.186 \cong 3.19 \cong 3.2$, dependiendo del nivel de precisión deseado. El símbolo $\cong$ significa *aproximadamente igual a*.

EJEMPLO 1.1 Realice las operaciones indicadas con los siguientes números aproximados y efectúe el redondeo hasta el nivel apropiado de precisión.

a. $532.6 + 4.02 + 0.036 = 536.656 \cong$ **536.7** (según lo determina 532.6)
b. $0.04 + 0.003 + 0.0064 = 0.0494 \cong$ **0.05** (según lo determina 0.04)
c. $4.632 \times 2.4 = 11.1168 \cong$ **11** (según lo determinan los dos dígitos significativos de 2.4)
d. $3.051 \times 802 = 2446.902 \cong$ **2450** (según lo determinan los tres dígitos significativos de 802)
e. $1402/6.4 = 219.0625 \cong$ **220** (según lo determinan los dos dígitos significativos de 6.4)
f. $0.0046/0.05 = 0.0920 \cong$ **0.09** (según lo determina el dígito significativo de 0.05)

1.6 POTENCIAS DE DIEZ

A partir de la magnitud relativa de las distintas unidades de medición, debe ser evidente que con frecuencia se encontrarán en las ciencias tanto números muy pequeños como muy grandes. Para disminuir la dificultad de las operaciones matemáticas con números que presenten tal variación de tamaño, por lo general se emplean las *potencias de diez*. Esta notación aprovecha la ventaja de las propiedades matemáticas de las potencias de diez. La notación utilizada para representar números que son potencias enteras de diez es la siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= 10^0 & 1/10 &= 0.1 = 10^{-1} \\ 10 &= 10^1 & 1/100 &= 0.01 = 10^{-2} \\ 100 &= 10^2 & 1/1000 &= 0.001 = 10^{-3} \\ 1000 &= 10^3 & 1/10{,}000 &= 0.0001 = 10^{-4} \end{aligned}$$

Observe en particular que $10^0 = 1$, y, de hecho, cualquier cantidad elevada a la potencia cero es igual a 1 ($x^0 = 1$, $1000^0 = 1$, y etc). También observe que los números de la lista mayores que 1 están asociados con potencias positivas de diez, y los menores que 1 están asociados con potencias negativas de diez.

Un método rápido para determinar la potencia apropiada de diez es colocar un apóstrofo a la derecha del número 1 en cualquier lugar que éste se encuentre;

luego comenzar a contar a partir de ahí el número de lugares a la derecha o la izquierda hasta llegar al punto decimal. Desplazarse a la derecha indica una potencia de diez positiva, mientras que el movimiento hacia la izquierda indica una potencia negativa. Por ejemplo,

$$10{,}000.0 = 1\underbrace{0,000}_{1\ 2\ 3\ 4}. = 10^{+4}$$

$$0.00001 = 0.\underbrace{00001}_{5\ 4\ 3\ 2\ 1} = 10^{-5}$$

A continuación se presentan algunas ecuaciones matemáticas importantes, así como relaciones pertenecientes a potencias de diez, junto con algunos ejemplos. En cada caso, n y m pueden ser cualquier número real positivo o negativo.

$$\frac{1}{10^n} = 10^{-n} \qquad \frac{1}{10^{-n}} = 10^n \tag{1.2}$$

La ecuación (1.2) muestra claramente que el desplazamiento de una potencia de diez del denominador al numerador, o a la inversa, requiere simplemente cambiar el signo de la potencia.

EJEMPLO 1.2

a. $\dfrac{1}{1000} = \dfrac{1}{10^{+3}} = 10^{-3}$

b. $\dfrac{1}{0.00001} = \dfrac{1}{10^{-5}} = 10^{+5}$

El producto de potencias de diez:

$$(10^n)(10^m) = 10^{(n+m)} \tag{1.3}$$

EJEMPLO 1.3

a. $(1000)(10{,}000) = (10^3)(10^4) = 10^{(3+4)} = 10^7$

b. $(0.00001)(100) = (10^{-5})(10^2) = 10^{(-5+2)} = 10^{-3}$

La división de potencias de diez:

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^{(n-m)} \tag{1.4}$$

EJEMPLO 1.4

a. $\dfrac{100{,}000}{100} = \dfrac{10^5}{10^2} = 10^{(5-2)} = 10^3$

b. $\dfrac{1000}{0.0001} = \dfrac{10^3}{10^{-4}} = 10^{(3-(-4))} = 10^{(3+4)} = 10^7$

Advierta el uso de paréntesis en el inciso (b) para asegurar que se establece el signo correcto entre los operadores.

La potencia de potencias de diez:

$$(10^n)^m = 10^{(nm)} \tag{1.5}$$

EJEMPLO 1.5

a. $(100)^4 = (10^2)^4 = 10^{(2)(4)} = 10^8$
b. $(1000)^{-2} = (10^3)^{-2} = 10^{(3)(-2)} = 10^{-6}$
c. $(0.01)^{-3} = (10^{-2})^{-3} = 10^{(-2)(-3)} = 10^6$

Operaciones aritméticas básicas

Analicemos ahora el empleo de las potencias de diez para realizar algunas operaciones aritméticas básicas a partir de números que no sólo sean potencias de diez. El número 5000 puede expresarse como $5 \times 1000 = 5 \times 10^3$, y el número 0.0004 puede expresarse como $4 \times 0.0001 = 4 \times 10^{-4}$. Evidentemente, 10^5 puede expresarse también como 1×10^5 si con esto se clarifica qué operación debe efectuarse.

Adición y sustracción Para efectuar la adición y la sustracción utilizando potencias de diez, la potencia de diez *debe ser la misma para cada término*; es decir,

$$A \times 10^n \pm B \times 10^n = (A \pm B) \times 10^n \tag{1.6}$$

La ecuación (1.6) cubre todas las posibilidades, sin embargo, los estudiantes regularmente prefieren recordar una descripción verbal de la forma en que se realiza la operación.

La ecuación (1.6) establece que:

al sumar o restar números en el formato de potencias de diez, debe asegurarse que la potencia de diez es la misma para cada número. Luego separe los multiplicadores, realice la operación requerida, y aplique la misma potencia de diez al resultado.

EJEMPLO 1.6

a. $6300 + 75{,}000 = (6.3)(1000) + (75)(1000)$
$= 6.3 \times 10^3 + 75 \times 10^3$
$= (6.3 + 75) \times 10^3$
$= \mathbf{81.3 \times 10^3}$

b. $0.00096 - 0.000086 = (96)(0.00001) - (8.6)(0.00001)$
$= 96 \times 10^{-5} - 8.6 \times 10^{-5}$
$= (96 - 8.6) \times 10^{-5}$
$= \mathbf{87.4 \times 10^{-5}}$

Multiplicación En general,

$$(A \times 10^n)(B \times 10^m) = (A)(B) \times 10^{n+m} \tag{1.7}$$

cual muestra que las *operaciones con potencias de diez pueden separarse de las operaciones con multiplicadores.*

La ecuación (1.7) establece que:

al multiplicar números en el formato de potencias de diez, primero calcule el producto de los multiplicadores y luego determine la potencia de diez a partir del resultado de sumar los exponentes de potencias de diez.

EJEMPLO 1.7

a.
$$\begin{aligned}(0.0002)(0.000007) &= [(2)(0.0001)][(7)(0.000001)]\\ &= (2 \times 10^{-4})(7 \times 10^{-6})\\ &= (2)(7) \times (10^{-4})(10^{-6})\\ &= \mathbf{14 \times 10^{-10}}\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}(340{,}000)(0.00061) &= (3.4 \times 10^{5})(61 \times 10^{-5})\\ &= (3.4)(61) \times (10^{5})(10^{-5})\\ &= 207.4 \times 10^{0}\\ &= \mathbf{207.4}\end{aligned}$$

División En general,

$$\frac{A \times 10^n}{B \times 10^m} = \frac{A}{B} \times 10^{n-m} \tag{1.8}$$

lo que nuevamente muestra que las *operaciones con potencias de diez pueden separarse de la misma operación con multiplicadores.*

La ecuación (1.8) establece que:

al dividir números en el formato de potencias de diez, primero calcule el resultado de dividir los multiplicadores. Luego determine la potencia asociada al resultado restando la potencia de diez del denominador de la potencia de diez del numerador.

EJEMPLO 1.8

a.
$$\frac{0.00047}{0.002} = \frac{47 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-3}} = \left(\frac{47}{2}\right) \times \left(\frac{10^{-5}}{10^{-3}}\right)$$
$$= \mathbf{23.5 \times 10^{-2}}$$

b.
$$\frac{690{,}000}{0.00000013} = \frac{69 \times 10^{4}}{13 \times 10^{-8}} = \left(\frac{69}{13}\right) \times \left(\frac{10^{4}}{10^{-8}}\right)$$
$$= \mathbf{5.31 \times 10^{12}}$$

Exponenciación En general,

$$(A \times 10^n)^m = A^m \times 10^{nm} \tag{1.9}$$

lo cual nuevamente permite la separación de la *operación con potencias de diez de los multiplicadores*.

La ecuación (1.9) establece que:

al calcular la exponenciación de un número en el formato de potencias de diez, primero separe el multiplicador de la potencia de diez y determine cada uno de forma independiente. El componente de potencias de diez se calcula multiplicando la potencia de diez por la potencia que se determinará.

EJEMPLO 1.9

a. $(0.00003)^3 = (3 \times 10^{-5})^3 = (3)^3 \times (10^{-5})^3$
$= \mathbf{27 \times 10^{-15}}$

b. $(90{,}800{,}000)^2 = (9.08 \times 10^7)^2 = (9.08)^2 \times (10^7)^2$
$= \mathbf{82.4464 \times 10^{14}}$

En particular, recuerde que las siguientes operaciones no son las mismas. Una es el producto de dos números en el formato de potencias de diez, mientras que la otra es un número en el formato de potencias de diez elevado a una potencia. Como se observa a continuación, los resultados de cada una son muy diferentes:

$$(10^3)(10^3) \neq (10^3)^3$$
$$(10^3)(10^3) = 10^6 = 1{,}000{,}000$$
$$(10^3)^3 = (10^3)(10^3)(10^3) = 10^9 = 1{,}000{,}000{,}000$$

Notaciones de punto fijo, de punto flotante, científica y de ingeniería

Existen, en general, cuatro formas en las que pueden presentarse los números cuando se emplea una computadora o una calculadora. Si no se hace uso de las potencias de diez, los números se representan en las **notaciones de punto flotante** o **de punto fijo**. El formato de punto fijo requiere que el punto decimal aparezca en el mismo lugar en cada ocasión. En el formato de punto flotante, el punto decimal aparece en una ubicación definida por el número que se desplegará. La mayoría de las computadoras y calculadoras permiten elegir entre la notación fija o la de punto flotante. En el formato fijo, el usuario puede seleccionar el nivel de precisión para el resultado en décimas, centésimas, milésimas, etc. Luego, todo resultado ajustará el punto decimal en un solo lugar, tal como en los siguientes ejemplos que utilizan precisión de milésimas:

$$\frac{1}{3} = \mathbf{0.333} \qquad \frac{1}{16} = \mathbf{0.063} \qquad \frac{2300}{2} = \mathbf{1150.000}$$

Si se opta por el formato de punto flotante, los resultados se mostrarán de la siguiente manera para las operaciones anteriores:

$$\frac{1}{3} = \mathbf{0.333333333333} \qquad \frac{1}{16} = \mathbf{0.0625} \qquad \frac{2300}{2} = \mathbf{1150}$$

Las potencias de diez se ajustarán a la notación fija o a la de punto flotante si el número es muy pequeño o muy grande como para desplegarse adecuadamente.

La **notación científica** (también llamada *estándar*) y la **notación de ingeniería** emplean las potencias de diez con restricciones sobre la mantisa (el multiplicador) o sobre el factor de escala (el exponencial de la potencia de diez). La notación científica requiere que el punto decimal aparezca inmediatamente después del primer dígito mayor o igual a 1 pero menor a 10, luego, se coloca la potencia de diez junto al número (por lo general, después de la notación de exponencial E), incluso si éste debe ser la potencia 0. Algunos ejemplos:

$$\frac{1}{3} = \mathbf{3.33333333333E{-}1} \qquad \frac{1}{16} = \mathbf{6.25E{-}2} \qquad \frac{2300}{2} = \mathbf{1.15E3}$$

Dentro de la notación científica, es posible seleccionar tanto el formato fijo como el de punto flotante. En los ejemplos anteriores se utilizó el punto flotante. Si se selecciona el formato fijo y se configura a una precisión de milésimas, se obtendrá el siguiente resultado para las operaciones anteriores:

$$\frac{1}{3} = \mathbf{3.333E{-}1} \qquad \frac{1}{16} = \mathbf{6.250E{-}2} \qquad \frac{2300}{2} = \mathbf{1.150E3}$$

El último formato en presentarse es la **notación de ingeniería**, la cual especifica que todas las potencias de diez deben ser múltiplos de 3, y que la mantisa debe ser mayor o igual a 1 pero menor a 1000. Esta restricción en las potencias de diez se debe a que a ciertas de estas potencias se les asignaron prefijos, los cuales se presentarán en los próximos párrafos. Al emplear la notación de ingeniería en el modo de punto flotante se obtendrán los siguientes resultados para las operaciones anteriores:

$$\frac{1}{3} = \mathbf{333.333333333E{-}3} \qquad \frac{1}{16} = \mathbf{62.5E{-}3} \qquad \frac{2300}{2} = \mathbf{1.15E3}$$

Al utilizar la notación de ingeniería con una precisión de tres lugares se obtiene:

$$\frac{1}{3} = \mathbf{333.333E{-}3} \qquad \frac{1}{16} = \mathbf{62.500E{-}3} \qquad \frac{2300}{2} = \mathbf{1.150E3}$$

Prefijos

En la notación de ingeniería, a potencias de diez específicas se les asignaron prefijos y símbolos, como se muestra en la tabla 1.2, los cuales permiten reconocer fácilmente la potencia de diez y proporcionan un mejor canal de comunicación entre especialistas de la tecnología.

TABLA 1.2

Factores de multiplicación	Prefijo del SI	Símbolo del SI
$1{,}000{,}000{,}000{,}000 = 10^{12}$	tera	T
$1{,}000{,}000{,}000 = 10^{9}$	giga	G
$1{,}000{,}000 = 10^{6}$	mega	M
$1{,}000 = 10^{3}$	kilo	k
$0.001 = 10^{-3}$	mili	m
$0.000\ 001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0.000\ 000\ 001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$	pico	p

EJEMPLO 1.10

a. 1,000,000 ohms $= 1 \times 10^{6}$ ohms
$= 1$ megaohm (MΩ)

b. 100,000 metros $= 100 \times 10^{3}$ metros
$= 100$ kilómetros (km)

c. 0.0001 segundo $= 0.1 \times 10^{-3}$ segundos
$= 0.1$ milisegundo (ms)

d. 0.000001 faradio $= 1 \times 10^{-6}$ faradio
$= 1$ microfaradio (μF)

Aquí se presentan algunos ejemplos con números que no son estrictamente potencias de diez.

EJEMPLO 1.11

a. 41,200 m es equivalente a 41.2×10^3 m = 41.2 kilómetros = **41.2 km**
b. 0.00956 J es equivalente a 9.56×10^{-3} J = 9.56 milijoules = **9.56 mJ**
c. 0.000768 s es equivalente a 768×10^{-6} s = 768 microsegundos = **768 μs**
d. $$\frac{8400 \text{ m}}{0.06} = \frac{8.4 \times 10^3 \text{ m}}{6 \times 10^{-2}} = \left(\frac{8.4}{6}\right) \times \left(\frac{10^3}{10^{-2}}\right) \text{m}$$
$$= 1.4 \times 10^5 \text{ m} = 140 \times 10^3 \text{ m} = 140 \text{ kilómetros} = \mathbf{140\ km}$$
e. $$(0.0003)^4 \text{ s} = (3 \times 10^{-4})^4 \text{ s} = 81 \times 10^{-16} \text{ s}$$
$$= 0.0081 \times 10^{-12} \text{ s} = 0.008 \text{ picosegundos} = \mathbf{0.0081\ ps}$$

1.7 CONVERSIÓN ENTRE NIVELES DE POTENCIAS DE DIEZ

A menudo es necesario convertir de una potencia de diez a otra. Por ejemplo, si un medidor efectúa la medición en kilohertz (kHz), quizá podría ser necesario encontrar el nivel correspondiente en megahertz (MHz), o si se mide el tiempo en milisegundos (ms), tal vez se necesitaría calcular el tiempo correspondiente en microsegundos (μs) para usarlo en una gráfica. El proceso no resulta difícil cuando tenemos presente que un aumento o una disminución en las potencias de diez deberán estar asociados con el efecto opuesto del factor multiplicador. Este procedimiento se describe mejor mediante algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.12

a. Convierta 20 kHz a megahertz
b. Convierta 0.01 ms a microsegundos
c. Convierta 0.002 km a milímetros

Soluciones:

a. En el formato de potencias de diez:

$$20 \text{ kHz} = 20 \times 10^3 \text{ Hz}$$

La conversión requiere que encontremos el factor multiplicador que aparece en el espacio siguiente:

Incrementar en 3

$$20 \times 10^3 \text{ Hz} \Rightarrow \underline{\quad} \times 10^6 \text{ Hz}$$

Reducir en 3

Dado que la potencia de diez se *incrementará* por un factor de *tres*, el factor multiplicador deberá reducirse desplazando el punto decimal *tres* lugares a la izquierda, como se muestra a continuación:

$$\underbrace{020.}_{3} = 0.02$$

y $$20 \times 10^3 \text{ Hz} = 0.02 \times 10^6 \text{ Hz} = \mathbf{0.02\ MHz}$$

b. En el formato de potencias de diez:

$$0.01 \text{ ms} = 0.01 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Reducir en 3

y $$0.01 \times 10^{-3} \text{ s} = \underline{\quad} \times 10^{-6} \text{ s}$$

Incrementar en 3

Debido a que la potencia de diez será *reducida* por un factor de tres, el factor multiplicador deberá ser *incrementado* desplazando el punto decimal tres lugares a la derecha, de la siguiente forma:

$$0.\underbrace{010}_{3} = 10$$

y $$0.01 \times 10^{-3}\text{ s} = 10 \times 10^{-6}\text{ s} = \mathbf{10\ \mu s}$$

Al comparar -3 con -6 se tiende a pensar que la potencia de diez se incrementó, pero tenga presente en su estimación de incremento o reducción del multiplicador que 10^{-6} es mucho menor que 10^{-3}.

c.

Reducir en 6

$$0.002 \times 10^{3}\text{ m} \Rightarrow ___ \times 10^{-3}\text{ m}$$

Incrementar en 6

En este ejemplo debemos ser muy cuidadosos porque la diferencia entre $+3$ y -3 es un factor de 6, ello implica que el factor de multiplicación se modifique de la siguiente forma:

$$0.\underbrace{002000}_{6} = 2000$$

y $$0.002 \times 10^{3}\text{ m} = 2000 \times 10^{-3}\text{ m} = \mathbf{2000\ mm}$$

1.8 CONVERSIÓN DENTRO DE Y ENTRE SISTEMAS DE UNIDADES

La conversión, tanto dentro de los sistemas de unidades como entre éstos, es un proceso que no puede evitarse en el estudio de cualquier campo técnico. Sin embargo, se trata de una operación que se efectúa tan a menudo de forma incorrecta que se incorporó esta sección para ofrecer un método que, si se aplica convenientemente, llevará al resultado correcto.

Existe más de un método para realizar el proceso de conversión, de hecho, algunas personas prefieren determinar de forma mental si el factor de conversión se multiplica o se divide. Este enfoque es aceptable para ciertas operaciones elementales, pero arriesgado para operaciones más complejas.

El procedimiento que se describe aquí se comprenderá mejor al analizar un problema sencillo como es el de la conversión de pulgadas a metros. Específicamente, buscamos convertir 48 pulg (4 pies) a metros.

Si multiplicamos 48 pulg por un factor de 1, la magnitud de la cantidad permanecerá igual:

$$48\text{ pulg} = 48\text{ pulg }(1) \qquad \textbf{(1.10)}$$

Ahora veamos el factor de conversión, que para este ejemplo es:

$$1\text{ m} = 39.37\text{ pulg}$$

Al dividir ambos lados del factor de conversión por 39.37 pulg se obtendrá el siguiente formato:

$$\frac{1\text{ m}}{39.37\text{ pulg}} = (1)$$

Observe que el resultado final es la razón 1 m/39.37 pulg igual a 1, como es de esperar ya que son cantidades iguales. Si ahora sustituimos este factor (1) en la ecuación (1.10), obtenemos:

$$48 \text{ pulg } (1) = 48 \cancel{\text{pulg}} \left(\frac{1 \text{ m}}{39.37 \cancel{\text{pulg}}} \right)$$

lo cual ocasiona la cancelación de las pulgadas como unidad de medición y deja a los metros como unidad de medición. Además, dado que 39.37 se encuentra en el denominador, debe dividirse entre 48 para terminar la operación:

$$\frac{48}{39.37} \text{ m} = \mathbf{1.219 \text{ m}}$$

Ahora revisemos el método, que cuenta con los siguientes pasos:

1. ***Prepare el factor de conversión para formar un valor numérico de (1) colocando en el denominador la unidad de medición que será eliminada de la cantidad original.***
2. ***Realice las operaciones matemáticas requeridas para obtener la magnitud adecuada para la unidad de medición restante.***

EJEMPLO 1.13

a. Convierta 6.8 min a segundos
b. Convierta 0.24 m a centímetros

Soluciones:

a. El factor de conversión es:

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

Dado que los minutos serán eliminados como unidad de medición, deberán aparecer en el denominador del factor (1), como se muestra:

Paso 1: $$\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) = (1)$$

Paso 2: $$6.8 \text{ min}(1) = 6.8 \cancel{\text{min}} \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}} \right) = (6.8)(60) \text{ s} = \mathbf{408 \text{ s}}$$

b. El factor de conversión es:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

Dado que los metros serán eliminados como unidad de medición, deberán aparecer en el denominador del factor (1), como se muestra:

Paso 1: $$\left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right) = 1$$

Paso 2: $$0.24 \text{ m}(1) = 0.24 \cancel{\text{m}} \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \cancel{\text{m}}} \right) = (0.24)(100) \text{ cm} = \mathbf{24 \text{ cm}}$$

Los productos (1)(1) y (1)(1)(1) siguen siendo 1. Utilizando este hecho, podemos realizar una serie de conversiones dentro de la misma operación.

EJEMPLO 1.14

a. Determine el número de minutos que hay en medio día.
b. Convierta 2.2 yardas a metros.

Soluciones:

a. Al realizar la conversión de días a horas a minutos —asegúrese siempre de que la unidad de medición a ser eliminada se encuentre en el denominador— se obtiene la siguiente secuencia:

$$0.5 \text{ días}\left(\frac{24 \text{ h}}{1 \text{ día}}\right)\left(\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}}\right) = (0.5)(24)(60) \text{ min}$$
$$= \mathbf{720\ min}$$

b. Al realizar la conversión de yardas a pies a pulgadas a metros se obtendrá:

$$2.2 \text{ yardas}\left(\frac{3 \text{ pies}}{1 \text{ yardas}}\right)\left(\frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}}\right)\left(\frac{1 \text{ m}}{39.37 \text{ pulg}}\right) = \frac{(2.2)(3)(12)}{39.37} \text{ m}$$
$$= \mathbf{2.012\ m}$$

Los ejemplos siguientes son variaciones de los anteriores en situaciones prácticas.

EJEMPLO 1.15

a. En Europa, Canadá, y en muchos otros lugares del mundo, el límite de velocidad automovilística se señala en kilómetros por hora. ¿A qué velocidad en millas por hora corresponden 100 km/h?
b. Determine la velocidad en millas por hora de un competidor que puede correr una milla en 4 minutos.

Soluciones:

a. $$\left(\frac{100 \text{ km}}{\text{h}}\right)(1)(1)(1)(1)$$
$$= \left(\frac{100 \text{ km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right)\left(\frac{39.37 \text{ pulg}}{1 \text{ m}}\right)\left(\frac{1 \text{ pie}}{12 \text{ pulg}}\right)\left(\frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ pies}}\right)$$
$$= \frac{(100)(1000)(39.37)}{(12)(5280)} \frac{\text{mi}}{\text{h}}$$
$$= \mathbf{62.14\ mi/h}$$

Muchos viajeros emplean 0.6 como factor de conversión para simplificar los cálculos; es decir,

$$(100 \text{ km/h})(0.6) \cong 60 \text{ mi/h}$$

y

$$(60 \text{ km/h})(0.6) \cong 36 \text{ mi/h}$$

b. Al invertir el factor 4 min/1 mi a 1 mi/4 min, podemos proceder de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1 \text{ mi}}{4 \text{ min}}\right)\left(\frac{60 \text{ min}}{\text{h}}\right) = \frac{60}{4} \text{ mi/h} = \mathbf{15\ mi/h}$$

1.9 SÍMBOLOS

A lo largo del texto se utilizarán varios símbolos que quizá el lector no ha tenido oportunidad de emplear; algunos se definen en la tabla 1.3 y otros más se definirán en el texto a medida que se requieran.

TABLA 1.3

Símbolo	Significado
$\neq$	Diferente $6.12 \neq 6.13$
$>$	Mayor que $4.78 > 4.20$
$\gg$	Mucho mayor que $840 \gg 16$
$<$	Menor que $430 < 540$
$\ll$	Mucho menor que $0.002 \ll 46$
$\geq$	Mayor que o igual a $x \geq y$ se satisface para $y = 3$ y $x > 3$ o $x = 3$
$\leq$	Menor que o igual a $x \leq y$ se satisface para $y = 3$ y $x < 3$ o $x = 3$
$\cong$	Aproximadamente igual a $3.14159 \cong 3.14$
Σ	Sumatoria de $\Sigma\,(4 + 6 + 8) = 18$
$\mid\ \mid$	Magnitud absoluta de $\lvert a \rvert = 4$, donde $a = -4$ o $+4$
$\therefore$	Por tanto $x = \sqrt{4} \quad \therefore x = \pm 2$
$\equiv$	Por definición Establece una relación entre dos o más cantidades

1.10 TABLAS DE CONVERSIÓN

Las tablas de conversión como las que aparecen en el apéndice B pueden ser muy útiles cuando el tiempo no permita la aplicación de los métodos descritos en este capítulo. Sin embargo, aunque dichas tablas pudieran parecer fáciles de utilizar, ocurren errores frecuentes ya que las operaciones que aparecen en sus encabezados no siempre se efectúan adecuadamente. En todo caso, al utilizarlas, intente establecer mentalmente algún orden de magnitud para las cantidades a determinar en comparación con la magnitud de la cantidad en su conjunto original de unidades. Esta sencilla operación deberá evitar que se presenten resultados extravagantes, los cuales tendrán lugar si la operación de conversión se aplica de forma incorrecta.

Por ejemplo, considere la siguiente información de una tabla de conversión:

La conversión de	a	Multiplicado por
millas	metros	1.609×10^3

La conversión de 2.5 millas a metros requerirá entonces que multipliquemos 2.5 por el factor de conversión, es decir,

$$2.5 \text{ mi}(1.609 \times 10^3) = 4.0225 \times 10^3 \text{ m}$$

La conversión de 4000 metros a millas requerirá de un proceso de división:

$$\frac{4000 \text{ m}}{1.609 \times 10^3} = 2486.02 \times 10^{-3} = 2.48602 \text{ mi}$$

En cada una de las operaciones anteriores, no debería ser difícil darse cuenta de que 2.5 mi se convertirán en algunos miles de metros y que 4000 m resultarán en unas cuantas millas. Como se indicó, este tipo de razonamiento previo eliminará la posibilidad de obtener resultados de conversión que pudieran ser ridículos.

1.11 CALCULADORAS

En algunos textos, el empleo de la calculadora no se analiza con detalle. En lugar de eso, se deja a los estudiantes el ejercicio general de elegir una calculadora adecuada y aprender a usarla correctamente por su cuenta. Sin embargo, es necesario incluir alguna introducción acerca del uso de la calculadora para eliminar los resultados extravagantes que se obtienen —y que generalmente el usuario defiende con vigor ya que la calculadora así los presenta— por un entendimiento incorrecto de los procesos mediante los cuales la calculadora realiza las distintas tareas. El tiempo y el espacio no permiten dar aquí una explicación detallada de todas las posibles operaciones, pero se asume que el siguiente análisis instruirá al usuario en el hecho de que es importante entender la forma en que una calculadora procede con un cálculo y no esperar que la unidad acepte información indiscriminada y genere siempre una respuesta correcta.



FIGURA 1.5
Calculadora Texas Instruments TI-86. (Cortesía de Texas Instruments, Inc.)

Al seleccionar una calculadora (científica para nuestro caso), asegúrese de que tenga la capacidad de operar sobre números complejos (polares y rectangulares), los cuales serán descritos detalladamente en el capítulo 13. Por ahora, únicamente busque estos términos en el índice del manual de operación y asegúrese de que aparecen y se analizan las operaciones básicas con ellos. Luego, tome conciencia de que algunas calculadoras realizan las operaciones mediante un número mínimo de pasos mientras que otras pueden requerir una serie grande o compleja de pasos. Platique con su profesor si se encuentra inseguro acerca de su adquisición. Para este texto, se seleccionó la calculadora TI-86 que se muestra en la figura 1.5 debido a la forma en que maneja los números complejos.

Configuración inicial

El formato y la precisión son los dos primeros parámetros que deben configurarse en cualquier calculadora científica. Para la mayor parte de las calculadoras las alternativas de formato son *Normal* (Normal), *Scientific* (Científica), e *Engineering* (Ingenieril). En la calculadora TI-86, al presionar la tecla de segunda función (amarilla) seguida MODE se proporciona una lista de alternativas para efectuar la configuración inicial. En las calculadoras que no cuenten con la alternativa de MODE consulte el manual de operación para averiguar la forma en que se establece el formato y el nivel de precisión.

A continuación se muestran ejemplos de cada caso:

Normal: $1/3 = 0.33$
Científica: $1/3 = 3.33\text{E}-1$
Ingenieril: $1/3 = 333.33\text{E}-3$

Observe que en el formato Normal el punto decimal se coloca simplemente en la ubicación más lógica. El formato Científico asegura que el número que antecede al punto decimal sea un solo dígito seguido de la potencia de diez requerida. El formato Ingenieril garantizará siempre que la potencia de diez sea un múltiplo de 3 (tanto si es positivo, negativo o cero).

En los ejemplos anteriores la precisión fue de centésimas. Para configurar esta precisión en la TI-86, regrese a la opción de MODE seleccione 2 para representar una precisión de dos lugares, o de centésimas.

Es probable que al principio se encuentre más cómodo utilizando el modo Normal y la precisión de centésimas. Sin embargo, a medida que comience a analizar redes, verá que el modo Ingenieril es más apropiado dado que usted se encontrará trabajando con niveles de componentes y resultados que cuentan con potencias de diez a las que se les han asignado abreviaturas y nombres. No obstante, el modo Científico podría ser la mejor alternativa para efectuar un análisis en particular. En cualquier caso, tome el tiempo necesario para familiarizarse con las diferencias existentes entre los distintos modos, y aprenda a configurarlos en su calculadora.

Orden de las operaciones

Aunque poder configurar el formato y la precisión es importante, estas características no son el origen de los resultados extravagantes que en ocasiones surgen debido al empleo incorrecto de la calculadora. Los resultados inadecuados ocurren principalmente porque los usuarios no toman en cuenta que, sin importar lo sencilla o compleja que pueda ser una ecuación, la calculadora efectúa las operaciones requeridas en un orden específico.

Por ejemplo, la operación:

$$\frac{8}{3+1}$$

por lo regular se teclea como:

$$\boxed{8}\,\boxed{\div}\,\boxed{3}\,\boxed{+}\,\boxed{1} = \frac{8}{3} + 1 = 2.67 + 1 = 3.67$$

lo cual es completamente incorrecto (ya que la respuesta es 2).

El usuario debe saber que la calculadora ***no*** efectuará primero la suma y luego la división. De hecho, la suma y la resta son las últimas operaciones efectuadas en toda ecuación. Por tanto, es muy importante que el lector estudie y comprenda claramente los siguientes párrafos con el fin de poder utilizar de manera adecuada la calculadora.

1. Las primeras operaciones a ser realizadas por la calculadora pueden establecerse mediante el uso de ***paréntesis ( )***. No importa qué operaciones se encuentren dentro de los paréntesis, éstos indican simplemente que esa parte de la ecuación se debe calcular primero. No existe límite del número de paréntesis permitido en cada ecuación —todas las operaciones dentro de paréntesis se realizarán primero—. Para el ejemplo anterior, veamos que si se añaden paréntesis, como se muestra a continuación, la suma se realizará primero y así se obtendrá la respuesta correcta:

$$\frac{8}{(3+1)} = \boxed{8}\boxed{\div}\boxed{(}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{)} = \frac{8}{4} = \mathbf{2}$$

2. Luego, se calculan las ***potencias y raíces***, tales como x^2, $\sqrt{x}$, etcétera.
3. En seguida se efectúan la ***Negación*** (aplicar un signo negativo a una cantidad) y las ***operaciones de una sola tecla*** como sen, $\tan^{-1}$, etcétera.
4. Luego se realiza ***la multiplicación y la división***.
5. Y por último ***la suma y la resta***.

Quizá pueda tomarle tiempo y práctica recordar el orden en que se efectúan las operaciones en una calculadora, pero al menos ya está consciente de que éste existe y que ignorarlo puede ocasionar resultados sin sentido.

EJEMPLO 1.16

a. Determine

$$\sqrt{\frac{9}{3}}$$

b. Encuentre

$$\frac{3+9}{4}$$

c. Determine

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$$

Soluciones:

a. Las siguientes operaciones con calculadora generarán el resultado incorrecto de 1 porque la operación de raíz cuadrada se realizará antes que la de división.

$$\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{9}\boxed{\div}\boxed{3} = \frac{\sqrt{9}}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Sin embargo, cuando reconocemos que es necesario dividir primero 9 entre 3, podemos utilizar paréntesis, como se muestra en seguida, para definir a esta operación como la primera que debe realizarse, con lo que se obtendrá la respuesta correcta:

$$\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{(}\boxed{9}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{)} = \sqrt{\left(\frac{9}{3}\right)} = \sqrt{3} = \mathbf{1.67}$$

b. Si el problema se teclea como aparece, se obtendrá la respuesta incorrecta 5.25.

$$\boxed{3}\boxed{+}\boxed{9}\boxed{\div}\boxed{4} = 3 + \frac{9}{4} = 5.25$$

Mediante el empleo de paréntesis para asegurar que la suma se calcule antes que la división, se obtendrá la respuesta correcta según se muestra a continuación:

$$\boxed{(}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{9}\boxed{)}\boxed{\div}\boxed{4} = \frac{(3+9)}{4} = \frac{12}{4} = \mathbf{3}$$

c. Dado que la división se realizará primero, el resultado correcto se obtiene cuando simplemente se realizan las operaciones como se indica. Es decir,

$$\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{4}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{6}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{\div}\boxed{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \mathbf{1.08}$$

1.12 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

El empleo de las computadoras en el proceso educativo ha crecido exponencialmente en la última década. Muy pocos textos en este nivel introductorio no incluyen alguna presentación de las actuales técnicas de computadora. De hecho, la acreditación oficial de un programa de tecnología puede estar en función de la profundidad con que se incorporan los métodos por computadora en el programa.

No existe duda de que el conocimiento básico de métodos computacionales es algo que el estudiante de nivel profesional debe obtener en cualquier programa de dos o cuatro años. El mercado laboral espera que los egresados cuenten con conocimientos básicos del lenguaje técnico computacional y cierta experiencia práctica.

Para algunos estudiantes, la idea de tener que volverse competentes en el uso de una computadora puede ocasionar un sentimiento de inseguridad e incomodidad. Sin embargo, usted puede estar seguro de que mediante una adecuada experiencia de aprendizaje y práctica, la computadora puede resultar muy “amigable” y útil, así como una herramienta de apoyo para el desarrollo y la aplicación de sus habilidades técnicas en un ambiente profesional.

El estudiante que recién ingresa al mundo de las computadoras puede elegir entre dos alternativas para desarrollar las habilidades de cómputo necesarias: el estudio de lenguajes de computadora y el empleo de paquetes de software.

Lenguajes

Existen diversos lenguajes que proporcionan línea directa de comunicación con la computadora y las operaciones que ésta puede efectuar. Un **lenguaje** es un conjunto de símbolos, letras, palabras o declaraciones que el usuario puede ingresar a la computadora. El sistema de cómputo “entenderá” estas entradas y las ejecutará en el orden establecido por una serie de comandos denominados **programas**. Un programa le indica a la computadora lo que debe hacer sobre una base secuencial de línea por línea en el mismo orden que un estudiante realizaría las operaciones a mano. La computadora sólo puede responder a los comandos que ingresa el usuario. Esto implica que el programador conozca completamente la secuencia de operaciones y cálculos requeridos para obtener una solución particular. En otras palabras, la computadora sólo puede responder a la entrada del usuario, no cuenta con alguna forma misteriosa de proporcionar las soluciones a menos que se le indique cómo obtener éstas. Un análisis extenso puede dar por resultado un programa que contenga cientos o miles de líneas. Una vez escrito, el programa debe ser verificado cuidadosamente con el propósito de asegurar que los resultados tengan significado y sean válidos para un rango esperado de variables de entrada. Por tanto, escribir un programa puede ser un proceso largo y tedioso, pero tenga presente que una vez probado y validado, puede almacenarse en memoria para uso futuro. El usuario puede estar seguro de que cualquier resultado posterior tendrá un nivel de precisión alto y requerirá un mínimo de tiempo y esfuerzo. Algunos de los lenguajes más comunes aplicados al campo eléctrico/electrónico actualmente incluyen C++, QBASIC, Pascal y FORTRAN. Cada uno de éstos cuenta con su propio conjunto de comandos y declaraciones para comunicarse con la computadora, pero todos pueden emplearse para realizar el mismo tipo de análisis.

Este texto incluye **C++** en su desarrollo debido a su creciente popularidad en la comunidad educativa. El lenguaje C fue desarrollado primeramente en los Laboratorios Bell para establecer un vínculo de comunicación eficiente entre el usuario y el lenguaje de máquina de la unidad central de procesamiento (CPU) de una computadora. La popularidad que este lenguaje ha ganado en la industria y la academia se debe a sus características de alto nivel (fácilmente entendible por el usuario) con una conexión eficiente al sistema operativo de la computadora. El lenguaje C++ se implantó como una extensión del lenguaje C para apoyar el desarrollo de programas utilizando un enfoque mejorado, modular, que vaya de lo general a lo particular.

En todo caso, no se asume que la cobertura de C++ en este libro sea suficiente para permitir el desarrollo de programas adicionales. Su incorporación tiene propósitos meramente introductorios: revelar la apariencia y las características del lenguaje, y seguir el desarrollo de algunos programas sencillos. Una exposición adecuada de C++ requeriría un curso entero, o al menos un programa extensivo suplementario para cubrir los muchos vacíos de esta presentación.

Paquetes de software

El segundo enfoque para el análisis por computadora, los **paquetes de software**, evita la necesidad de conocer un lenguaje en particular; de hecho, el usuario puede no conocer el lenguaje que se utilizó para desarrollar los programas incluidos en un paquete de software. Todo lo que se requiere es el conocimiento de cómo capturar los parámetros del circuito, definir las operaciones que se realizarán y obtener los resultados, y el paquete hará el resto. Los pasos individuales hacia una solución se encuentran más allá de las necesidades del usuario —todo lo que él necesita es tener una idea acerca de cómo introducir los parámetros del circuito en la computadora y cómo obtener los resultados—. En este punto se encuentran dos de las preocupaciones del autor con respecto a los paquetes de programas: conseguir una solución sin tener la menor idea de cómo se llega a ella o si los resultados son válidos o están completamente fuera de lugar. Es muy importante que el estudiante esté consciente de que la computadora debe ser utilizada como una herramienta de apoyo —¡no debe permitirse que controle el ámbito y el potencial del usuario! Por tanto, a medida que avancemos a través de los capítulos del texto, asegúrese de comprender claramente los conceptos presentados antes de acudir a la computadora en busca de apoyo y eficiencia.

Todo paquete de software cuenta con un **menú** que define el rango de aplicaciones del paquete. Una vez que el software se cargue en la computadora, el sistema podrá efectuar todas las operaciones que aparecen en el menú en la forma que éste fue programado para hacerlo. Tenga presente, sin embargo, que si se solicita un tipo de análisis particular que no se encuentre en el menú, el paquete de software no será capaz de generar los resultados deseados. El paquete se encuentra limitado únicamente a aquellas manipulaciones establecidas por el equipo de programadores que desarrollaron el paquete de software. En tales situaciones el usuario deberá acudir a otro paquete de software o escribir un programa utilizando alguno de los lenguajes mencionados.

En términos generales, si en el mercado se encuentra disponible un paquete de software que realice un análisis particular, entonces deberá utilizarse en lugar de desarrollar rutinas. Los paquetes de software más populares son producto de muchas horas de esfuerzo por parte de equipos de programadores con años de experiencia. Sin embargo, si los resultados no se encuentran en el formato deseado o si el paquete de software no proporciona todos los resultados esperados, entonces deberá aprovecharse el talento innovador del usuario para desarrollar un paquete de software. Como se observó, cualquier programa

desarrollado por el usuario, siempre que supere las pruebas de rango y precisión, puede ser considerado un paquete de software de su autoría para uso futuro.

A lo largo de este texto se utilizarán tres paquetes de software: OrCAD PSpice 9.2 de Cadence, Multisim de Electronics Workbench y Mathcad 2000 de MathSoft, los cuales aparecen en la figura 1.6. A pesar de que PSpice y Electronics Workbench se encuentran diseñados para analizar circuitos electrónicos, existen suficientes diferencias entre ambos como para justificar la cobertura independiente de cada uno. El creciente uso de cierta forma de apoyo matemático en el entorno educativo e industrial justifica la presentación y el uso de Mathcad en el texto. No existe ningún requisito de que el usuario adquiera los tres paquetes para poder avanzar con el contenido de este texto. La principal razón para incorporarlos aquí fue simplemente presentar cada uno y demostrar cómo pueden ayudar en el proceso de aprendizaje. En la mayoría de los casos, se ofrece suficiente detalle para utilizar realmente el paquete de software y trabajar con los ejemplos que se proporcionan, aunque podría resultar útil contar con alguien a quien acudir en caso de que surjan dudas. Además, la literatura que da soporte a los tres paquetes ha mejorado de forma importante en años recientes, y deberá encontrarse disponible en las librerías o casas editoriales.

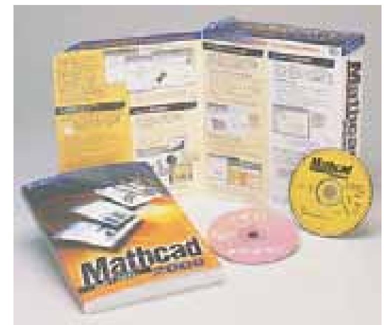
El apéndice A presenta todos los requisitos de sistema e incluye la forma en que puede ponerse en contacto con cada compañía.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 1.6
Paquetes de software: (a) OrCAD (PSpice), de Cadence, versión 9.2; (b) Multisim de Electronics Workbench; (c) Mathcad 2000 de MathSoft.

PROBLEMAS

Nota: Los problemas con mayor dificultad están señalados con un asterisco (*) en todo el texto.

SECCIÓN 1.2 Una historia breve

1. Visite la biblioteca local (en su escuela o comunidad) y describa el grado en que proporciona literatura y apoyo de computadoras para las tecnologías, en particular, electricidad, electrónica, electromagnetismo y computadoras.
2. Seleccione un área de interés particular en este campo y escriba un breve reporte sobre la historia del tema.
3. Seleccione un individuo de particular importancia en este campo y escriba una breve reseña de su vida y sus aportaciones principales.

SECCIÓN 1.3 Unidades de medición

4. Determine la distancia en pies recorrida, durante 1 minuto, por un automóvil que viaja a 50 mi/h.
5. ¿Cuántas horas le tomaría a una persona caminar 12 millas si su ritmo promedio es de 15 min/milla?

SECCIÓN 1.4 Sistemas de unidades

6. ¿Existe alguna ventaja relativa asociada con el sistema métrico en comparación con el sistema inglés respecto a longitud, masa, fuerza y temperatura? Si es así, explique.

7. ¿Cuál de los cuatro sistemas de unidades que aparecen en la tabla 1.1 tiene las unidades más pequeñas de longitud, masa y fuerza? ¿Cuándo podría emplearse más eficazmente este sistema?

*8. ¿Cuál sistema de la tabla 1.1 se encuentra más cercano en definición al SI? ¿En qué se diferencian los dos sistemas? ¿Por qué piensa que las unidades de medición del SI se seleccionaron de la forma que se muestra en la tabla 1.1? Proporcione los mejores motivos que pueda sin acudir a literatura adicional.

9. ¿Cuál es la temperatura ambiente (68°F) en los sistemas MKS, CGS y SI?

10. ¿Cuántos pies-libras de energía, están asociados con 1000 J?

11. ¿Cuántos centímetros hay en $\frac{1}{2}$ yarda?

SECCIÓN 1.6 Potencias de diez

12. Expresе los siguientes números como potencias de diez:
a. 10,000 **b.** 0.0001
c. 1000 **d.** 1,000,000
e. 0.0000001 **f.** 0.00001

13. Utilizando sólo las potencias de diez que se muestran en la tabla 1.2, exprese los siguientes números en lo que a su criterio sea la forma más lógica para cálculos futuros:
a. 15,000 **b.** 0.03000
c. 7,400,000 **d.** 0.0000068
e. 0.00040200 **f.** 0.0000000002

14. Realice las siguientes operaciones y exprese su respuesta como potencia de diez:
a. $4200 + 6{,}800{,}000$
b. $9 \times 10^4 + 3.6 \times 10^3$
c. $0.5 \times 10^{-3} - 6 \times 10^{-5}$
d. $1.2 \times 10^3 + 50{,}000 \times 10^{-3} - 0.006 \times 10^5$

15. Realice las siguientes operaciones y exprese su respuesta como potencia de diez:
a. (100)(100) **b.** (0.01)(1000)
c. $(10^3)(10^6)$ **d.** (1000)(0.00001)
e. $(10^{-6})(10{,}000{,}000)$ **f.** $(10{,}000)(10^{-8})(10^{35})$

16. Realice las siguientes operaciones y exprese su respuesta como potencia de diez:
a. (50,000)(0.0003)
b. 2200×0.08
c. (0.000082)(0.00007)
d. $(30 \times 10^{-4})(0.0002)(7 \times 10^8)$

17. Realice las siguientes operaciones y exprese su respuesta como potencia de diez:
a. $\dfrac{100}{1000}$ **b.** $\dfrac{0.01}{100}$
c. $\dfrac{10{,}000}{0.00001}$ **d.** $\dfrac{0.0000001}{100}$
e. $\dfrac{10^{38}}{0.000100}$ **f.** $\dfrac{(100)^{1/2}}{0.01}$

18. Realice las siguientes operaciones y exprese su respuesta como potencia de diez:
a. $\dfrac{2000}{0.00008}$ **b.** $\dfrac{0.00408}{60{,}000}$
c. $\dfrac{0.000215}{0.00005}$ **d.** $\dfrac{78 \times 10^9}{4 \times 10^{-6}}$

19. Realice las siguientes operaciones y exprese su respuesta como potencia de diez:
a. $(100)^3$ **b.** $(0.0001)^{1/2}$
c. $(10{,}000)^8$ **d.** $(0.00000010)^9$

20. Realice las siguientes operaciones y exprese su respuesta como potencia de diez:
a. $(2.2 \times 10^3)^3$
b. $(0.0006 \times 10^2)^4$
c. $(0.004)(6 \times 10^2)^2$
d. $((2 \times 10^{-3})(0.8 \times 10^4)(0.003 \times 10^5))^3$

21. Realice las siguientes operaciones y exprese su respuesta en notación científica:
a. $(-0.001)^2$ **b.** $\dfrac{(100)(10^{-4})}{10}$
c. $\dfrac{(0.001)^2(100)}{10{,}000}$ **d.** $\dfrac{(10^2)(10{,}000)}{0.001}$
e. $\dfrac{(0.0001)^3(100)}{1{,}000{,}000}$ ***f.** $\dfrac{[(100)(0.01)]^{-3}}{[(100)^2][0.001]}$

*22. Realice las siguientes operaciones y exprese su respuesta en notación ingenieril:
a. $\dfrac{(300)^2(100)}{10^4}$ **b.** $[(40{,}000)^2][(20)^{-3}]$
c. $\dfrac{(60{,}000)^2}{(0.02)^2}$ **d.** $\dfrac{(0.000027)^{1/3}}{210{,}000}$
e. $\dfrac{[(4000)^2][300]}{0.02}$
f. $[(0.000016)^{1/2}][(100{,}000)^5][0.02]$
g. $\dfrac{[(0.003)^3][(0.00007)^2][(800)^2]}{[(100)(0.0009)]^{1/2}}$ (todo un reto)

SECCIÓN 1.7 Conversión entre niveles de potencias de diez

23. Llene los espacios en blanco de las siguientes ecuaciones:
a. $6 \times 10^3 =$ ____ $\times 10^6$
b. $4 \times 10^{-4} =$ ____ $\times 10^{-6}$
c. $50 \times 10^5 =$ ____ $\times 10^3 =$ ____ $\times 10^6$
$=$ ____ $\times 10^9$
d. $30 \times 10^{-8} =$ ____ $\times 10^{-3} =$ ____ $\times 10^{-6}$
$=$ ____ $\times 10^{-9}$

24. Realice las siguientes conversiones:
a. 2000 μs a milisegundos
b. 0.04 ms a microsegundos
c. 0.06 μF a nanofarads
d. 8400 ps a microsegundos
e. 0.006 km a milímetros
f. 260×10^3 mm a kilómetros

SECCIÓN 1.8 Conversión dentro de y entre sistemas de unidades

En los problemas 25 y 27, convierta lo siguiente:

25. **a.** 1.5 min a segundos
b. 0.04 h a segundos
c. 0.05 s a microsegundos
d. 0.16 m a milímetros
e. 0.00000012 s a nanosegundos
f. 3,620,000 s a días
g. 1020 mm a metros

26. **a.** 0.1 μF (microfarads) a picofarads
b. 0.467 km a metros
c. 63.9 mm a centímetros
d. 69 cm a kilómetros
e. 3.2 h a milisegundos
f. 0.016 mm a micrómetros
g. 60 cm cuadrados (cm^2) a metros cuadrados (m^2)

***27.** **a.** 100 pulg a metros
b. 4 pies a metros
c. 6 lb a newton
d. 60,000 dinas a libras
e. 150,000 cm a pies
f. 0.002 mi a metros (5280 pies = 1 milla)
g. 7800 m a yardas

28. ¿A cuánto equivale una milla en pies, yardas, metros y kilómetros?

29. Calcule la velocidad de la luz en millas por hora utilizando la velocidad definida en la sección 1.4.

30. Calcule la velocidad en millas por hora de una masa que va a 50 pies en 20 segundos.

31. ¿Cuánto tiempo en segundos le tomará a un automóvil que va a 100 mi/h recorrer el equivalente a un campo de futbol (100 yd)?

32. Convierta 6 mi/h a metros por segundo.

33. Si un atleta puede remar a un ritmo de 50 m/min, ¿cuántos días le tomará cruzar el océano Atlántico (≅3000 mi)?

34. ¿Cuánto tiempo le tomará a un corredor cubrir una carrera de 10 km si mantiene un paso de 6.5 min/mi?

35. Las monedas de cuarto de dólar miden cerca de una pulgada de diámetro. ¿Cuántas de éstas monedas se requerirían para cubrir un campo de futbol (100 yd) de un extremo a otro?

36. Compare el tiempo total en horas para cruzar Estados Unidos (≅3000 mi) a una velocidad promedio de 55 mi/h contra una velocidad promedio de 65 mi/h. ¿Cuál es su reacción con respecto al tiempo total requerido contra el factor de seguridad?

***37.** ¿Qué distancia en metros cubrirá una masa que va a 600 cm/s en 0.016 horas?

***38.** Cada primavera se realiza una carrera de 86 pisos en el edificio de 102 pisos Empire State en la ciudad de Nueva York. Si usted fuera capaz de subir 2 escalones/segundo, ¿cuánto tiempo le tomaría llegar al piso 86 si cada piso tiene 14 pies de alto y cada escalón mide unas 9 pulgadas?

***39.** Cada primavera se realiza una carrera de 86 pisos en el edificio de 102 pisos Empire State en la ciudad de Nueva York. Si usted fuera capaz de subir 2 escalones/segundo, ¿cuánto tiempo le tomaría llegar al piso 86 si cada piso tiene 14 pies de alto y cada escalón mide unas 9 pulgadas?

***40.** Si la carrera del problema 38 fuera efectuada sobre una distancia horizontal, ¿cuánto tiempo le tomaría a un corredor que es capaz de correr una milla en 5 minutos cubrir la distancia? Compare esto con el récord de velocidad del problema 39. ¡La gravedad es sin duda un factor que debe ser considerado!

SECCIÓN 1.10 Tablas de conversión

41. Utilizando el apéndice B, determine el número de:
a. BTU en 5 J de energía
b. Metros cúbicos en 24 oz de líquido
c. Segundos en 1.4 días
d. Pintas en 1 m^3 de líquido

SECCIÓN 1.11 Calculadoras

Realice las siguientes operaciones haciendo uso de una calculadora:

42. $6(4 + 8)$

43. $\sqrt{3^2 + 4^2}$

44. $\tan^{-1} \frac{4}{3}$

45. $\sqrt{\frac{400}{6^2 + 10}}$

SECCIÓN 1.12 Análisis por computadora

46. Investigue la disponibilidad de cursos de computación y tiempo de computadora en su plan de estudios. ¿Cuáles son los lenguajes que se emplean y los paquetes de cómputo más populares?

47. Escriba una lista de cinco lenguajes comunes de computación con algunas características de cada uno de ellos. ¿Por qué cree usted que algunos lenguajes son mejores para el análisis de circuitos eléctricos que otros?

GLOSARIO

C++ Lenguaje de computadora con enlace de comunicación eficiente entre el usuario y el lenguaje de máquina de la unidad central de procesamiento (CPU) de una computadora.

Celda voltaica Dispositivo de almacenamiento que convierte energía química en energía eléctrica.

Circuito integrado (CI) Estructura minúscula que contiene un amplio número de dispositivos electrónicos diseñados para realizar un conjunto particular de funciones.

Efecto Edison Establecimiento de un flujo de carga entre dos elementos en un tubo al vacío.

Electricidad estática Carga inmóvil en estado de equilibrio.

Electromagnetismo La relación entre efectos magnéticos y eléctricos.

ENIAC La primera computadora completamente electrónica.

Jarra Leyden Uno de los primeros dispositivos de almacenamiento de cargas.

Joule (J) Unidad de medición para la energía en el sistema MKS o en el SI. Es igual a 0.7378 pies-libras en el sistema inglés, y 10^7 ergios en el CGS.

Kelvin (K) Unidad de medición para la temperatura en el SI. Es igual a 273.15 + °C en los sistemas MKS y CGS.

Kilogramo (kg) Unidad de medición para la masa en el sistema MKS y el SI. Es igual a 1000 gramos en el sistema CGS.

Lenguaje Vínculo de comunicación entre el usuario y la computadora utilizado para definir las operaciones a efectuar y los resultados que se desplegarán o imprimirán.

Libra (lb) Unidad de medición para la fuerza en el sistema inglés. Es igual a 4.45 newton en el SI o el MKS.

Máquina de diferencias Una de las primeras calculadoras mecánicas.

Menú Listado de posibilidades generado por la computadora para que el usuario determine la siguiente operación que ha de realizarse.

Metro (m) Unidad de medición para la longitud en el SI o el MKS. Es igual a 1.094 yardas en el sistema inglés y a 100 centímetros en el CGS.

Newton (N) Unidad de medición para la fuerza en el SI y el MKS. Es igual a 100,000 dinas en el sistema CGS.

Notación científica Método para describir números muy grandes o muy pequeños mediante el uso de potencias de diez, las cuales requieren que el multiplicador sea un número entre 1 y 10.

Notación de ingeniería Método de notación que especifica que todas las potencias de diez empleadas para un número sean múltiplos de 3 con una mantisa mayor o igual a 1 pero menor que 1000.

Notación de punto fijo Notación que utiliza el punto decimal en una ubicación particular para definir la magnitud de un número.

Notación de punto flotante Notación que permite que la magnitud de un número defina el lugar donde el punto decimal deberá ser colocado.

Paquete de software Programa de computadora desarrollado para realizar operaciones específicas de análisis y diseño o para generar resultados con un formato particular.

Programa Lista secuencial de comandos, instrucciones, etc., para realizar una tarea específica mediante una computadora.

PSpice Paquete de software diseñado para analizar distintos sistemas eléctricos y electrónicos de cd, ca y transitorios.

Segundo (s) Unidad de medición para el tiempo en los sistemas MKS, inglés, CGS y el SI.

Sistema CGS Sistema que emplea los *C*entímetros, *G*ramos y *S*egundos como sus unidades fundamentales de medida.

Sistema Internacional (SI) Convención de unidades adoptada por la IEEE, en 1965, y la USASI, en 1967, como el Sistema Internacional de Unidades (*S*ystème *I*nternational d'Unités).

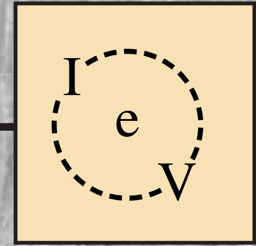
Sistema MKS Sistema que utiliza al *M*etro, al *K*ilogramo y al *S*egundo como sus unidades fundamentales de medida.

Slug Unidad de medición para la masa en el sistema inglés. Es igual a 14.6 kilogramos en el SI o el MKS.

Transistor El primer amplificador semiconductor.

Válvula de Fleming Fue el primer dispositivo electrónico, el diodo.

2



Corriente y voltaje

2.1 LOS ÁTOMOS Y SU ESTRUCTURA

Un conocimiento básico de los conceptos fundamentales de corriente y voltaje requiere cierto grado de familiaridad con el átomo y su estructura. El átomo más simple es el de hidrógeno, y está formado por dos partículas básicas, el **protón** y el **electrón**, en las posiciones relativas que se muestran en la figura 2.1(a). El **núcleo** del átomo de hidrógeno es el protón, una partícula cargada positivamente. *El electrón que gira alrededor posee una carga negativa de magnitud igual a la carga positiva del protón.* En todos los demás elementos

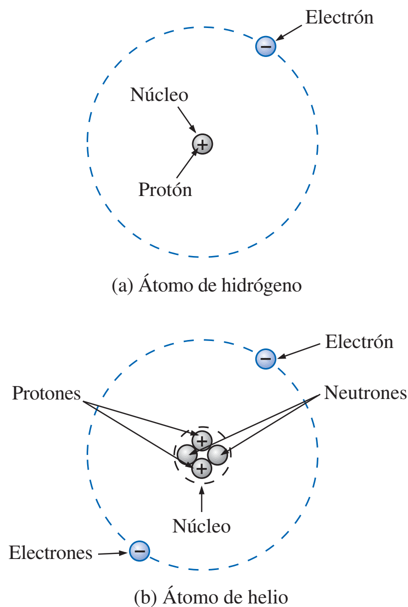


FIGURA 2.1
Los átomos de hidrógeno y de helio.



químicos hasta ahora conocidos, el núcleo contiene también **neutrones**, los cuales son ligeramente más pesados que los protones y no cuentan con carga eléctrica. El átomo de helio, por ejemplo, cuenta con dos neutrones además de los dos electrones y los dos protones, como se muestra en la figura 2.1(b). *En todos los átomos neutros el número de electrones es igual al número de protones*. La masa del electrón es igual a 9.11×10^{-28} g, y la del protón y el neutrón es igual a 1.672×10^{-24} g. La masa del protón (o neutrón) es, por tanto, aproximadamente 1836 veces la del electrón. El radio del protón, del neutrón y del electrón se encuentra en el orden de magnitud de 2×10^{-15} m.

Para el caso del átomo de hidrógeno, el radio de la órbita más pequeña que sigue el electrón es de cerca de 5×10^{-11} m. El radio de esta órbita es aproximadamente 25,000 veces el radio del electrón, el protón o el neutrón. Esto equivale aproximadamente a una esfera del tamaño de una moneda de diez centavos de dólar girando alrededor de otra esfera del mismo tamaño situada a más de un cuarto de milla de distancia.

Distintos átomos tendrán diferente número de electrones dentro de las capas concéntricas alrededor del núcleo. La primera capa, la cual es la más cercana al núcleo, puede contener sólo dos electrones. Si un átomo llegara a tener tres electrones, el tercer electrón deberá ir a la siguiente capa. La segunda capa puede contener un máximo de ocho electrones; la tercera, 18; y la cuarta, 32; según lo determina la ecuación $2n^2$, donde n es el número de la capa. Estas capas, por lo regular, se simbolizan por un número ($n = 1, 2, 3, \ldots$) o por letras ($n = k, l, m, \ldots$).

Cada capa se divide a su vez en subcapas, donde la primera subcapa puede contener un máximo de dos electrones; la segunda subcapa, seis electrones; la tercera, diez electrones; y la cuarta, catorce electrones; según se muestra en la figura 2.2. Por lo general, las subcapas se simbolizan mediante las letras *s, p, d,* y *f,* en ese orden, hacia el exterior del núcleo.

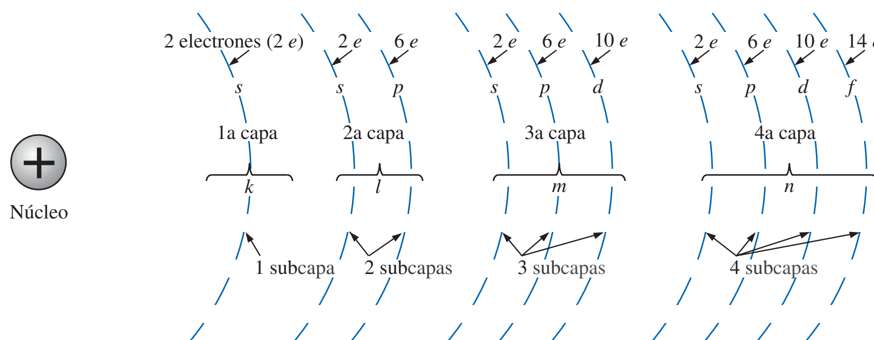


FIGURA 2.2
Capas y subcapas de la estructura atómica.

Mediante experimentación se determinó que *cargas distintas se atraen y cargas iguales se repelen*. La fuerza de atracción o de repulsión entre los cuerpos cargados Q_1 y Q_2 puede determinarse mediante la **ley de Coulomb**:

$$F \text{ (atracción o repulsión)} = \frac{kQ_1Q_2}{r^2} \quad \text{(newton, N)} \qquad \textbf{(2.1)}$$

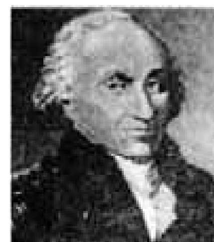
donde F se encuentra en newton, k = una constante = 9.0×10^9 N·m²/C², Q_1 y Q_2 son las cargas en coulombs (se presentarán en la sección 2.2), y r es la distancia en metros entre las dos cargas. En particular, observe el término

cuadrático r en el denominador, que ocasiona una rápida disminución de los niveles de F ante valores crecientes de r. (Veáse Figura 2.3.)

Por tanto, en el átomo los electrones se repelerán entre sí, y protones y electrones se atraerán entre sí. Dado que el núcleo está compuesto de muchas cargas positivas (protones), existirá una fuerza de atracción grande para los electrones en las órbitas cercanas al núcleo [observe los efectos de una carga grande Q y una distancia pequeña r en la ecuación (2.1)]. A medida que la distancia entre el núcleo y los electrones situados en las órbitas se incrementa, la fuerza de atracción disminuye hasta que alcanza su menor nivel en la última subcapa exterior (la mayor r). Gracias al debilitamiento de las fuerzas de atracción, se requerirá gastar menos energía para extraer un electrón de una capa exterior que de una interior. También, por lo general es posible extraer electrones más fácilmente de átomos que cuentan con subcapas exteriores incompletas *y*, además, que tienen pocos electrones. Estas propiedades del átomo que permiten la movilización de electrones bajo ciertas condiciones son esenciales para crear movimiento de cargas. Sin tal movimiento, este texto no podría continuar —ya que nuestras cantidades básicas dependen de él.

El **cobre** es el material utilizado con mayor frecuencia en la industria eléctrica/electrónica. El análisis de su estructura atómica ayudará a identificar la causa de sus amplias aplicaciones. El átomo del cobre (Figura 2.4) cuenta con un electrón más de los electrones necesarios para completar las tres primeras capas. Esta capa exterior incompleta, que cuenta con un solo electrón, y la distancia entre este electrón y el núcleo muestran que al vigésimo noveno electrón lo atrae muy débilmente el átomo de cobre. Si este vigésimo noveno electrón adquiere suficiente energía del entorno como para abandonar su átomo padre, se le denomina **electrón libre**. En una pulgada cúbica de cobre a temperatura ambiente, existen aproximadamente $1.4 \times 10^{+24}$ electrones libres. Otros metales que presentan las mismas propiedades del cobre, pero en distinto grado, son la plata, el oro, el aluminio y el tungsteno. En la sección 3.2 se presenta un análisis adicional de los conductores y sus características.

Francés
(Angoulème, París)
(1736-1806)
Científico e inventor
Ingeniero militar,
Indias Occidentales



Cortesía de
Smithsonian Institution
Fotografía núm. 52,597

Asistió a la escuela de ingeniería de Mezieres, la primera escuela de este tipo. Formuló la *ley de Coulomb*, la cual define la fuerza entre dos cargas eléctricas y, de hecho, es una de las principales fuerzas existentes en las reacciones atómicas. Realizó una amplia investigación sobre la fricción que se da en maquinarias y molinos de viento, y sobre la elasticidad del metal y de las fibras de seda.

FIGURA 2.3
Charles Augustin de Coulomb.

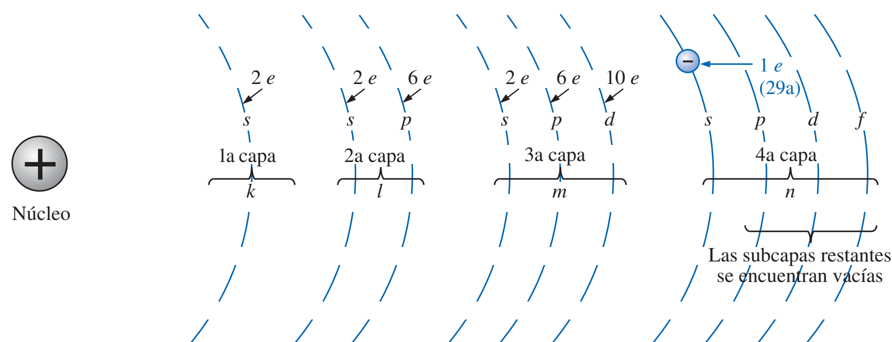
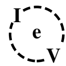


FIGURA 2.4
El átomo de cobre.

2.2 CORRIENTE

Considere un alambre de cobre de longitud pequeña cortado por un plano imaginario perpendicular, de tal forma que genere el corte transversal circular que se muestra en la figura 2.5. A temperatura ambiente, sin fuerzas externas aplicadas, dentro de este alambre de cobre se presenta un movimiento aleatorio



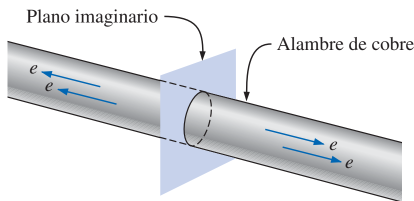


FIGURA 2.5
Movimiento aleatorio de electrones dentro de un alambre de cobre sin "presión" externa (voltaje) aplicada.

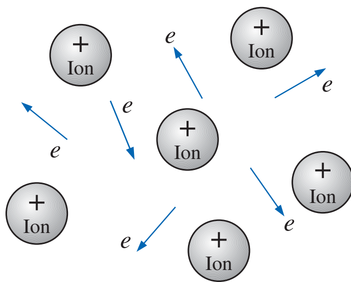


FIGURA 2.6
Movimiento aleatorio de electrones libres en una estructura atómica.

de electrones libres creado por la energía térmica que los electrones adquieren del medio ambiente. Cuando los átomos pierden sus electrones libres, adquieren una carga neta positiva y se les denomina **iones positivos**. Los electrones libres se encuentran listos para moverse dentro de estos iones positivos y abandonar el área general del átomo padre, mientras que los iones positivos únicamente oscilan en una posición fija media. Por esta razón,

el electrón libre es el portador de carga en un alambre de cobre o en cualquier otro conductor sólido de electricidad.

En la figura 2.6 se bosqueja una disposición de iones positivos y electrones libres. Dentro de esta disposición, los electrones libres se encuentran continuamente ganando o perdiendo energía por virtud del cambio en su dirección y velocidad. Algunos de los factores responsables de este movimiento aleatorio incluyen (1) las colisiones con iones positivos y con otros electrones, (2) las fuerzas de atracción para los iones positivos, y (3) la fuerza de repulsión que existe entre los electrones. Este movimiento aleatorio de electrones libres es tal que, durante cierto periodo, el número de electrones que se traslada hacia la derecha del corte transversal de la figura 2.5 es exactamente igual al que se traslada hacia la izquierda.

En ausencia de fuerzas externas aplicadas, el flujo neto de carga en un conductor hacia cualquier dirección es cero.

Ahora, conectemos un alambre de cobre entre las dos terminales de una batería y un foco, como se muestra en la figura 2.7, para crear el más simple de los circuitos eléctricos. La batería, gracias a la energía química, colocará una carga neta positiva en una terminal y una carga neta negativa en la otra terminal. En el instante en que la conexión final se realice, los electrones libres (carga negativa) se desplazarán hacia la terminal positiva, mientras los iones positivos que permanecen en el alambre de cobre simplemente oscilarán en una posición media fija. La terminal negativa es una "fuente" de electrones a ser extraídos cuando los electrones del alambre de cobre se desplacen hacia la

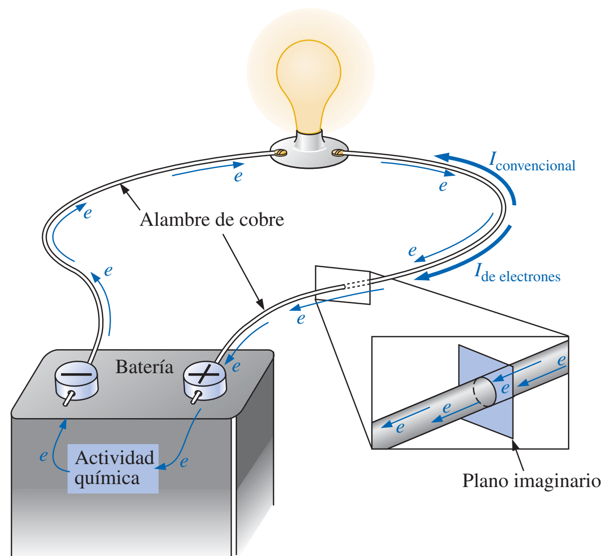


FIGURA 2.7
Circuito eléctrico básico.

terminal positiva. La actividad química de la batería absorberá los electrones situados en la terminal positiva y mantendrá un suministro continuo de electrones en la terminal negativa. El flujo de carga (electrones) a través del foco calentará el filamento de éste mediante fricción hasta el punto en que se vuelva incandescente y emita la luz deseada.

Si 6.242×10^{18} *electrones* se desplazan a una velocidad uniforme a través de la sección transversal circular de la figura 2.7 en 1 *segundo*, el flujo de carga, o *corriente,* se dice ser de 1 **ampere** (A), en honor de André Marie Ampère (Figura 2.8). El análisis del capítulo 1 muestra claramente que esto es una enorme cantidad de electrones que cruzan a través de la superficie en 1 segundo. La corriente asociada con sólo unos cuantos electrones por segundo es irrelevante y de poco valor práctico. Con el propósito de establecer valores numéricos que permitan comparaciones inmediatas entre niveles, se definió un **coulomb** (C) de carga como la carga total asociada con 6.242×10^{18} electrones. La carga asociada con un electrón podrá determinarse entonces a partir de:

$$\text{Carga/electrón} = Q_e = \frac{1\text{ C}}{6.242 \times 10^{18}} = 1.6 \times 10^{-19}\text{ C}$$

La corriente en amperes puede calcularse ahora utilizando la siguiente ecuación:

$$I = \frac{Q}{t} \qquad \begin{aligned} I &= \text{ampere (A)} \\ Q &= \text{coulombs (C)} \\ t &= \text{segundos (s)} \end{aligned} \qquad \textbf{(2.2)}$$

La letra mayúscula I se eligió a partir de la palabra francesa utilizada para referirse a la corriente: *intensité*. La abreviatura del SI para cada cantidad que aparece en la ecuación (2.2) se proporciona a la derecha de la ecuación. La ecuación muestra de forma clara que para intervalos iguales de tiempo, a mayor carga que fluya a través del cable, más intensa será la corriente.

Mediante manipulaciones algebraicas, es posible determinar las otras dos cantidades de la siguiente forma:

$$Q = It \qquad \text{(coulombs, C)} \qquad \textbf{(2.3)}$$

y

$$t = \frac{Q}{I} \qquad \text{(segundos, s)} \qquad \textbf{(2.4)}$$

EJEMPLO 2.1 La carga que fluye a través de la superficie imaginaria de la figura 2.7 es de 0.16 C cada 64 ms. Determine la corriente en ampere.

Solución: Ecuación (2.2):

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{0.16\text{ C}}{64 \times 10^{-3}\text{ s}} = \frac{160 \times 10^{-3}\text{ C}}{64 \times 10^{-3}\text{ s}} = \mathbf{2.50\ A}$$

EJEMPLO 2.2 Determine el tiempo requerido para que 4×10^{16} electrones crucen a través de la superficie imaginaria de la figura 2.7 si la corriente es de 5 mA.

Solución: Determine Q:

$$4 \times 10^{16}\ \cancel{\text{electrones}} \left(\frac{1\text{ C}}{6.242 \times 10^{18}\ \cancel{\text{electrones}}} \right) = 0.641 \times 10^{-2}\text{ C}$$
$$= 0.00641\text{ C} = 6.41\text{ mC}$$

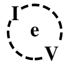
Francés
(Lyon, París)
(1775-1836)
Matemático y físico
Profesor de matemáticas, École Polytechnique en París



Cortesía de Smithsonian Institution Fotografía núm. 76,524

El 18 de septiembre de 1820, presentó un nuevo campo de estudio, la *electrodinámica*, dedicado al efecto de la electricidad en movimiento, que incluye la interacción entre corrientes dentro de conductores adyacentes y la acción recíproca de los campos magnéticos cercanos. Construyó el primer *solenoide* y demostró la forma en que podía comportarse como un imán (el primer *electroimán*). Sugirió el nombre de *galvanómetro* para un instrumento destinado a medir los niveles de corriente.

FIGURA 2.8
André Marie Ampère.



Calcule t [Ecuación (2.4)]:

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{6.41 \times 10^{-3}\ \text{C}}{5 \times 10^{-3}\ \text{A}} = \mathbf{1.282\ s}$$

Una segunda mirada a la figura 2.7 mostrará que las dos direcciones del flujo de carga han sido indicadas. Una de ellas se denomina *flujo convencional*, y la otra *flujo de electrones*. En este texto únicamente se manejará el flujo convencional por una variedad de motivos, incluyendo el hecho de que es el más utilizado en las instituciones educativas y en la industria, además de ser el empleado en el diseño de los símbolos de los dispositivos electrónicos y el preferido popularmente en la mayor parte de los paquetes de software de computadora. La controversia del flujo es resultado de un supuesto que se hizo, cuando se descubrió la electricidad, con respecto a que era la carga positiva la partícula que se movía en los conductores metálicos. La elección del flujo convencional con seguridad no causará mayor dificultad ni confusión en los capítulos siguientes. Una vez que la dirección de I se establece, el asunto queda olvidado y el análisis puede continuar sin confusión.

Consideraciones de seguridad

Es importante observar que incluso niveles bajos de corriente que pasen a través del cuerpo humano pueden causar serios y peligrosos efectos secundarios. Resultados experimentales muestran que el cuerpo humano comienza a reaccionar ante corrientes de sólo unos cuantos miliamperes. A pesar de que la mayoría de los individuos pueden soportar corrientes de hasta 10 mA por muy cortos periodos sin desarrollar serios efectos secundarios, cualquier corriente superior a los 10 mA debe ser considerada peligrosa. De hecho, corrientes de 50 mA pueden causar severas descargas, y corrientes por encima de los 100 mA llegan a ser fatales. En la mayoría de los casos la resistencia de la piel humana, cuando se encuentra seca, es lo suficientemente alta como para limitar la corriente a través del cuerpo a niveles relativamente seguros para los niveles de voltaje que típicamente se encuentran en el hogar. Sin embargo, tenga presente que cuando la piel se encuentra húmeda debido a la transpiración, el aseo personal, etc., o cuando la barrera de la piel está rota como consecuencia de una herida, su resistencia baja drásticamente y los niveles de corriente pueden elevarse a niveles peligrosos con las mismas descargas de voltaje. En general, por tanto, recuerde simplemente que *el agua y la electricidad no se mezclan*. Afortunadamente, existen dispositivos de seguridad en los hogares actuales [tales como el sistema de interrupción de corriente por falla de tierra (GFCI) que se presentarán en el Capítulo 4] que están diseñados específicamente para utilizarse en áreas húmedas como baños y cocinas, pero los accidentes suceden. Trate la electricidad con respeto —no con miedo.

2.3 VOLTAJE

El flujo de carga descrito en la sección anterior se establece mediante una "presión" externa derivada de la energía que una masa tiene por virtud de su posición: **energía potencial**.

Energía, por definición, es la *capacidad para realizar trabajo*. Si una masa (m) se eleva a cierta altura (h) por encima de un plano de referencia, tendrá un coeficiente de energía potencial expresado en *joules* (J) que está determinado por:

$$W \text{ (energía potencial)} = mgh \qquad \text{(joules, J)} \qquad \textbf{(2.5)}$$

donde g es la aceleración gravitacional (9.754 m/s^2). La masa adquiere así el "potencial" para realizar un trabajo tal como aplastar un objeto colocado sobre el plano de referencia. Si el peso se eleva más, la masa tendrá un mayor coeficiente de energía potencial y podrá realizar trabajo adicional. Existe una obvia *diferencia de potencial* entre las dos alturas por encima del plano de referencia.

En la batería de la figura 2.7, la acción química interna establecerá (mediante un gasto de energía) una acumulación de cargas negativas (electrones) sobre una terminal (la terminal negativa) y cargas positivas (iones positivos) sobre la otra (la terminal positiva). Con esto se establece un "posicionamiento" de las cargas que originará una **diferencia de potencial** entre las terminales. Si se conecta un conductor entre las terminales de la batería, los electrones en la terminal negativa tendrán suficiente energía potencial como para sobreponerse a las colisiones con otras partículas en el conductor, y a la repulsión que se origina por cargas similares, para poder alcanzar la terminal positiva a la que son atraídos.

La carga puede elevarse a un mayor nivel de potencial mediante el gasto de energía de una fuente externa, o puede perder energía potencial a medida que viaje a través de un sistema eléctrico. En todo caso, por definición:

Se presentará una diferencia de potencial de 1 volt (V) entre dos puntos si se intercambia 1 joule (J) de energía al mover 1 coulomb (C) de carga entre los dos puntos.

La unidad de medición **volt** se eligió en honor a Alessandro Volta (Figura 2.9).

De forma gráfica, si se requiere un joule de energía (1 J) para mover la carga de un coulomb (1 C) de la figura 2.10 desde una posición x hasta una posición y, la diferencia de potencial o voltaje entre los dos puntos será de un volt (1 V). Si la energía requerida para mover la carga de 1 C se incrementa a 12 J debido a fuerzas adicionales de oposición, entonces la diferencia de potencial se incrementará a 12 V. El voltaje es entonces una señal de cuánta energía se encuentra involucrada en el movimiento de una carga entre dos puntos en un sistema eléctrico. Y de forma inversa, mientras mayor sea el nivel de voltaje de una fuente de energía tal como en una batería, más energía se encontrará disponible para mover cargas a través del sistema. Observe en el análisis anterior que siempre se encuentran implicados dos puntos cuando se habla de voltaje o diferencia de potencial. En el futuro, por tanto, será muy importante recordar que:

una diferencia de potencial o voltaje siempre se mide entre dos puntos en el sistema. Al cambiar cualquier punto puede cambiar la diferencia de potencial entre los dos puntos bajo análisis.

En general, la diferencia de potencial entre dos puntos es determinada mediante:

$$V = \frac{W}{Q} \quad \text{(volts)} \tag{2.6}$$

A través de manipulaciones algebraicas obtenemos:

$$W = QV \quad \text{(joules)} \tag{2.7}$$

y

$$Q = \frac{W}{V} \quad \text{(coulombs)} \tag{2.8}$$

Italiano
(Como, Pavia)
(1745-1827)
Físico
Profesor de física,
Pavia, Italia



Cortesía de Smithsonian Institution Fotografía núm. 55,393

Inició experimentos eléctricos a los 18 años de edad trabajando con otros investigadores europeos. Su principal aportación fue el desarrollo de una fuente de energía eléctrica a partir de una acción química en 1800. Por vez primera, la energía eléctrica se encontró disponible sobre una base continua y pudo ser utilizada con propósitos prácticos. Desarrolló el primer *condensador* conocido actualmente como *capacitor*. Fue invitado a París para demostrar la *celda voltaica* a Napoleón. El Congreso Eléctrico Internacional que se reunió en París en 1881 honró sus esfuerzos al elegir el *volt* como la unidad de medición para la fuerza electromotriz.

FIGURA 2.9
Conde Alessandro Volta.

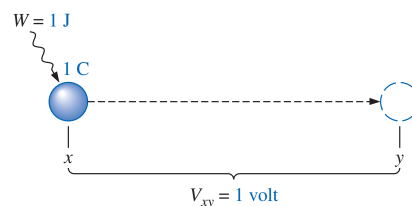


FIGURA 2.10
Unidades de medida para el voltaje.



EJEMPLO 2.3 Encuentre la diferencia de potencial entre dos puntos en un sistema eléctrico si se consumen 60 J de energía por una carga de 20 C entre estos dos puntos.

Solución: Con la ecuación (2.6):

$$V = \frac{W}{Q} = \frac{60\ \text{J}}{20\ \text{C}} = \mathbf{3\ V}$$

EJEMPLO 2.4 Determine la energía consumida al mover una carga de 50 μC mediante una diferencia de potencial de 6 V.

Solución: Con la ecuación (2.7):

$$W = QV = (50 \times 10^{-6}\ \text{C})(6\ \text{V}) = 300 \times 10^{-6}\ \text{J} = \mathbf{300\ \mu J}$$

La notación juega un papel muy importante en el análisis de sistemas eléctricos y electrónicos. Con el objeto de distinguir entre fuentes de voltaje (baterías y similares) y caídas en el potencial a través de elementos disipadores, se utilizará la siguiente notación:

E para fuentes de voltaje (volts)
V para caídas de voltaje (volts)

Una fuente ocasional de confusión es la terminología aplicada a este tema. Los términos que se encuentran con frecuencia incluyen *potencial, diferencia de potencial, voltaje, diferencia de voltaje (caída o elevación),* y *fuerza electromotriz.* Como se observó en la descripción anterior, algunos de éstos se utilizan indistintamente. Las siguientes definiciones se proporcionan para apoyar el entendimiento del significado de cada término:

Potencial: El voltaje en un punto con respecto a otro punto dentro del sistema eléctrico. Por lo general, el punto de referencia es tierra, la cual se encuentra a un potencial de cero.

Diferencia de potencial: La diferencia algebraica de potencial (o voltaje) entre dos puntos de una red.

Voltaje: Cuando se encuentra aislado, igual que el potencial, es el voltaje en un punto con respecto a cierta referencia tal como tierra (0 V).

Diferencia de voltaje: La diferencia algebraica en voltaje (o potencial) entre dos puntos del sistema. Una caída o una elevación de voltaje es tal como su nombre lo indica.

Fuerza electromotriz (emf del inglés electromotive force): La fuerza que establece el flujo de carga (o corriente) en un sistema debido a la aplicación de una diferencia de potencial. Este término ya no se aplica mucho en la literatura actual, sino que se asocia principalmente con fuentes de energía.

En resumen, la **diferencia de potencial** (en volts) aplicada por una fuente de voltaje en un circuito eléctrico es la “presión” ejercida para poner al sistema en movimiento y “causar” el flujo de carga o corriente a través del sistema eléctrico. Una analogía mecánica del voltaje aplicado es la presión aplicada al agua en una fuente. El flujo de agua resultante a través del sistema es equivalente al flujo de carga a través de un circuito eléctrico. Sin la presión aplicada por el grifo, el agua simplemente se asentará en la manguera, de la misma forma que los electrones de un alambre de cobre no cuentan con una dirección general sin un voltaje aplicado.

2.4 FUENTES DE ALIMENTACIÓN FIJAS (cd)

La terminología *cd* utilizada en el encabezado de esta sección es una abreviatura del término **corriente directa**, el cual engloba los distintos sistemas eléctricos en que existe un flujo de carga *unidireccional* ("en una sola dirección"). En los capítulos siguientes se tratará mucho más esta terminología. Por ahora, consideraremos únicamente aquellas fuentes que proporcionan un voltaje fijo o corriente.

Fuentes de voltaje de cd

Debido a que la fuente de voltaje de cd es la más familiar de los dos tipos de fuentes de alimentación conocidos, será analizada en primer lugar. El símbolo empleado para todas las fuentes de voltaje de cd en este texto se muestra en la figura 2.11; donde las longitudes relativas de las barras indican las terminales que representan.

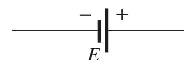


FIGURA 2.11
Símbolo para una fuente de voltaje de cd.

Las fuentes de voltaje de cd pueden dividirse en tres amplias categorías: (1) baterías (acción química), (2) generadores (electromecánicas), y (3) fuentes de alimentación (rectificadas).

Baterías

Información general Para la persona sin conocimiento del tema, una batería es la fuente de cd más común. Por definición, una batería (palabra derivada de la expresión "batería de celdas") consiste en una combinación de dos o más **celdas** similares, siendo una celda la fuente fundamental de energía eléctrica desarrollada mediante la conversión de energía química o solar. Todas las celdas o pilas pueden dividirse en tipos **primario** o **secundario**. Las del tipo secundario son recargables, mientras que las del primario no. Es decir, la reacción química de la celda secundaria puede ser invertida para restaurar su capacidad. Las dos baterías recargables más comunes son las unidades de ácido-plomo (empleadas principalmente en los automóviles) y la batería de níquel-cadmio (utilizada en calculadoras, herramientas, unidades de flash fotográfico, rasuradoras eléctricas, etc.). La ventaja evidente de la unidad recargable es el reducido costo asociado con el hecho de no tener que reemplazar continuamente celdas primarias descargadas.

Todas las celdas que se presentan en este capítulo excepto la **celda solar**, la cual absorbe energía de la luz incidente en la forma de fotones, establecen una diferencia de potencial a costa de energía química. Además, cada una cuenta con un *electrodo* positivo y uno negativo, y un **electrolito** para completar el circuito entre los electrodos situados dentro de la batería. El electrolito es el elemento de contacto y la fuente de los iones necesarios para efectuar la conducción entre las terminales.

Pilas primarias alcalinas y de yodo-litio La batería común alcalina utiliza un ánodo de zinc pulverizado (+); un electrolito de hidróxido de potasio (metal alcalino); y un cátodo de dióxido de manganeso y carbón (−) como se muestra en la figura 2.12(a). Observe en particular, en la figura 2.12(b), que mientras más grande sea la unidad cilíndrica mayor será la capacidad de corriente. La unidad de linterna está diseñada principalmente para uso de largo plazo. La figura 2.13 muestra dos unidades primarias de yodo-litio con un área de aplicación y un nivel que serán presentados más adelante en esta sección.

Pila secundaria de ácido-plomo Para la unidad secundaria de ácido-plomo que se muestra en la figura 2.14, el electrolito es de ácido sulfúrico y los electrodos son de plomo (Pb) esponjado y de peróxido de plomo (PbO_2). Cuando se aplica

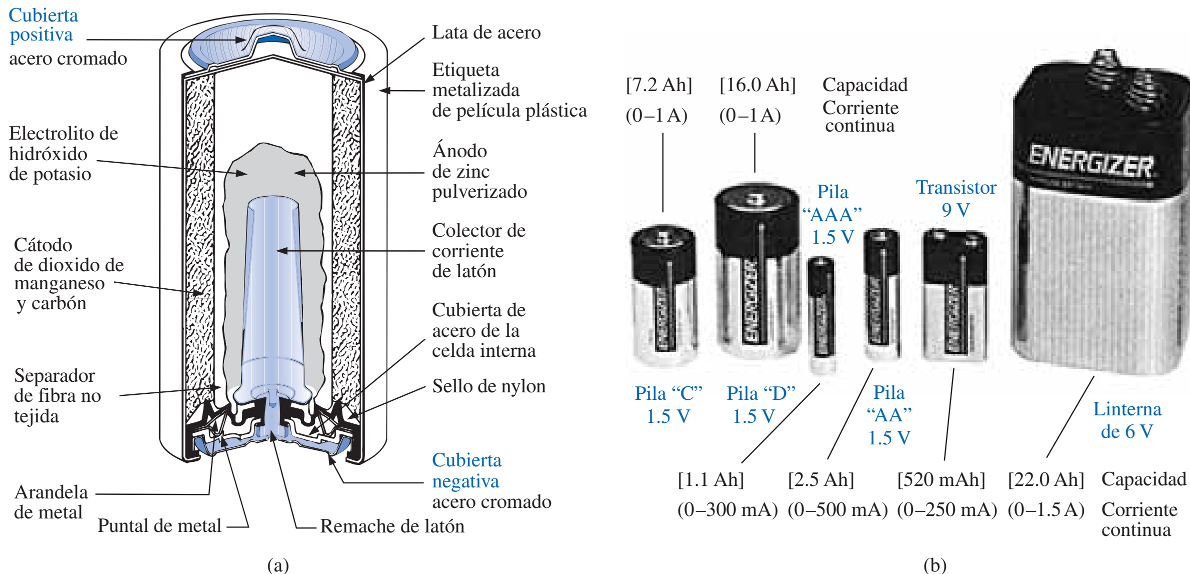


FIGURA 2.12
(a) Corte de una pila alcalina cilíndrica Energizer®; (b) pilas primarias Eveready® Energizer. (Cortesía de Eveready Battery Company, Inc.)

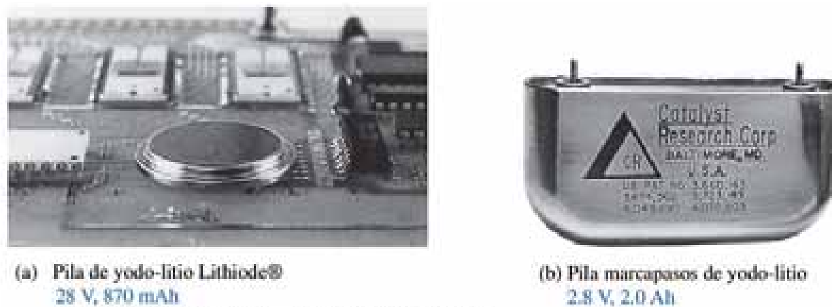


FIGURA 2.13
Pilas primarias de yodo-litio. (Cortesía de Catalyst Research Corp.)

una carga a las terminales de la batería, se da una transferencia de electrones desde el electrodo de plomo esponjado hasta el electrodo de peróxido de plomo a través de la carga. Esta transferencia de electrones continuará hasta que la batería se encuentre completamente descargada. El tiempo de descarga está determinado según qué tanto se ha diluido el ácido y qué tan denso es el recubrimiento de sulfato de plomo en cada placa. El estado de descarga de una pila de almacenamiento de plomo puede determinarse midiendo la **gravedad específica** del electrolito con un hidrómetro. La gravedad específica de una sustancia está definida como la proporción del peso de un volumen dado de la sustancia respecto al peso de un volumen equivalente de agua a 4ºC. Para el caso de las baterías completamente cargadas, la gravedad específica deberá encontrarse entre 1.28 y 1.30. Cuando esta gravedad cae a 1.1, la batería debe ser recargada.

Dado que la celda de almacenamiento de plomo es una celda secundaria, puede recargarse en cualquier momento durante la fase de descarga mediante

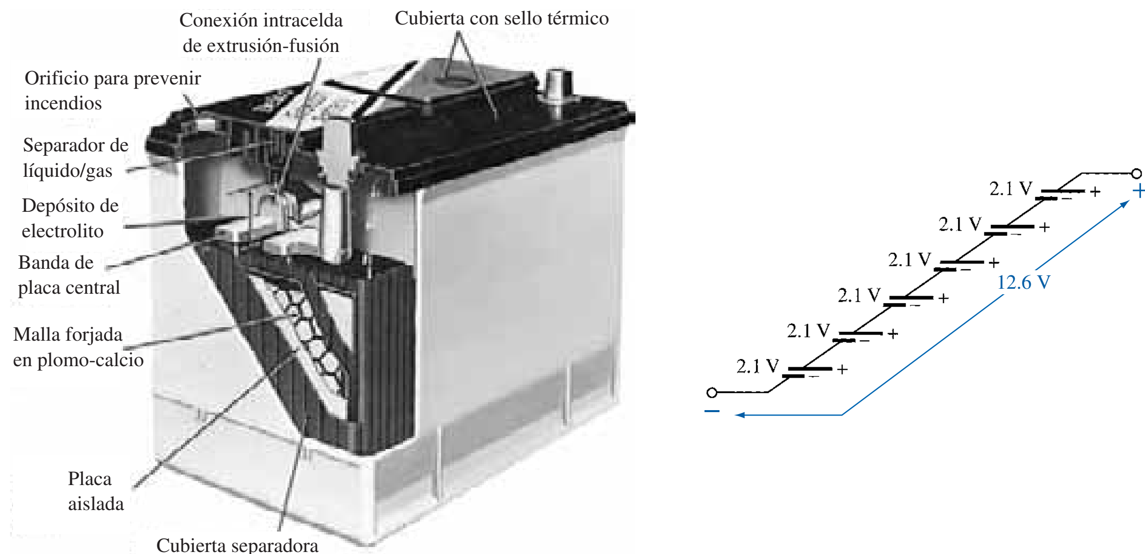
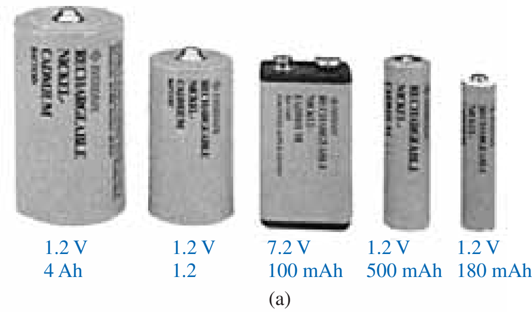


FIGURA 2.14
Batería de ácido-plomo de 12 V (en realidad de 12.6 V) libre de mantenimiento. (Cortesía de Delco-Remy, una división de General Motors Corp.)

la simple aplicación de una **fuente de corriente de cd** externa a través de la pila, la cual hará circular corriente a través de la celda en dirección opuesta a aquella con la que la celda proporciona corriente a la carga. Esto eliminará el sulfato de plomo de las placas y restaurará la concentración de ácido sulfúrico.

La salida de una celda de almacenamiento de plomo durante la mayor parte de la fase de descarga es de cerca de 2.1 V. En las baterías comerciales de almacenamiento de plomo empleadas en los automóviles, es posible producir 12.6 V mediante seis celdas colocadas en serie, como se muestra en la figura 2.14. En general, las baterías de almacenamiento de ácido-plomo se utilizan en situaciones donde se requiere corriente alta durante periodos relativamente cortos. En algún tiempo todas las baterías de ácido-plomo eran ventiladas. Los gases creados durante el ciclo de descarga podían escapar, y las tapas de ventilación proporcionaban acceso para reemplazar el agua o electrolito y verificar el nivel de ácido con un hidrómetro. Emplear una rejilla fabricada a partir de una banda de aleación forjada de plomo-calcio en lugar de la rejilla fundida de plomo-antimonio comúnmente utilizada dio por resultado baterías libres de mantenimiento, como la que aparece en la figura 2.14. La estructura de plomo-antimonio era susceptible a corrosión, sobrecarga, escape de gases, empleo de agua y autodescarga, sin embargo, la mejora en el diseño con la rejilla de plomo-calcio eliminó o redujo sustancialmente la mayoría de estos problemas.

Parecería que con todos los años de avances en la tecnología alrededor de las baterías, actualmente podrían encontrarse disponibles unidades más pequeñas y poderosas. Sin embargo, cuando se trata del automóvil eléctrico, que poco a poco está ganando interés y popularidad, la batería de ácido-plomo sigue siendo la fuente principal de alimentación. Un “auto de servicio”, fabricado en Noruega y empleado sobre una base de prueba en San Francisco para viajes típicos de empleados, tiene un peso total de 1650 libras, de las cuales 550 (un tercio de su peso) corresponden a las baterías recargables de plomo-ácido. Aunque el auto de servicio podrá viajar a velocidades de 55 mph, su alcance se limita a 65 millas por carga. Así que los viajes para cubrir largas distancias con factores de peso significativamente reducidos en las baterías dependerán de nuevos e innovadores enfoques en el diseño de éstas.



(a)



Batería Eveready® BH 500
1.2 V, 500 mAh
Aplicación: Donde la altura vertical es una gran limitación

(b)

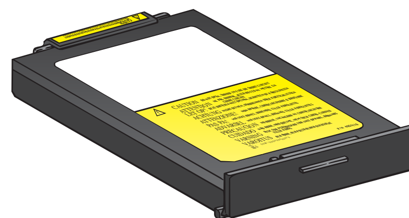
FIGURA 2.15
Baterías recargables de níquel-cadmio. (Cortesía de Baterías Eveready.)

Pila secundaria de níquel-cadmio La batería de níquel-cadmio es recargable y en años recientes ha sido objeto de enorme interés y desarrollo. Para aplicaciones como linternas, rasuradoras, televisiones portátiles, taladros de potencia, etc., la batería de níquel-cadmio (Ni-Cad) de la figura 2.15 es la batería secundaria de preferencia debido a que los niveles de corriente son menores y el periodo de descarga continua es por lo general mayor. Una batería típica de níquel-cadmio puede sobrevivir cerca de 1000 ciclos de carga/descarga durante un periodo que puede durar años.

Es importante recordar que cuando un aparato o sistema requieren una batería Ni-Cad, no deberá emplearse una batería primaria. El aparato o sistema pueden tener una red interna de carga que podría no funcionar con una celda primaria. Además, sea consciente de que todas las baterías de Ni-Cad ofrecen 1.2 V por pila, mientras que la mayoría de las pilas primarias comunes ofrecen por lo general 1.5 V por celda. Existe cierta ambigüedad acerca de qué tan seguido deberá recargarse una pila secundaria. Para la amplia mayoría de situaciones, la batería puede ser utilizada hasta que se presente algún indicio de que el nivel de energía es bajo, como podría ser una luz atenuada en una linterna, menor potencia de un taladro, o un indicador intermitente si es que el equipo cuenta con uno. Tenga presente que las celdas secundarias cuentan con cierta “memoria”. Si se recargan continuamente después de utilizarse por sólo un periodo corto, comenzarán a funcionar como unidades de corto tiempo y realmente presentarán fallas en cuanto a mantener la carga por el periodo originalmente establecido. En cualquier caso, trate siempre de evitar una descarga “dura”, la cual resulta cuando consume completamente toda la energía de la pila. Demasiados ciclos de descargas duras reducirán la vida útil de la batería. Por último, tenga presente que el mecanismo de carga en las baterías de níquel-cadmio es muy diferente del instalado en las baterías de ácido-plomo. La batería de níquel-cadmio se carga mediante una fuente de corriente constante, con el voltaje terminal manteniéndose bastante uniforme a lo largo de todo el ciclo de carga. La batería de ácido-plomo se carga mediante una fuente de voltaje constante, permitiendo que la corriente varíe según el estado de la batería. La

capacidad de la batería de Ni-Cad se incrementa de forma casi lineal a lo largo de la mayor parte del ciclo de carga. Es posible observar que las baterías de Ni-Cad se encuentran relativamente tibias cuando se cargan. Mientras menor sea el nivel de capacidad de la batería cuando se carga, mayor será la temperatura de la celda. A medida que la batería se aproxime a la capacidad nominal, la temperatura de la celda se acercará a la temperatura ambiente.

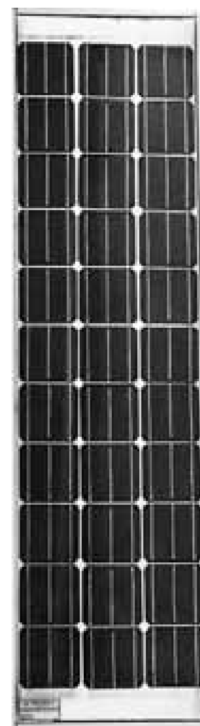
Pilas secundarias de níquel-hidrógeno e hidruro de níquel-metal Otros dos tipos de celda secundaria incluyen las celdas de níquel-hidrógeno e hidruro de níquel-metal. En la actualidad, las aplicaciones de la celda de níquel-hidrógeno se encuentran limitadas principalmente a los vehículos espaciales, donde se requieren baterías de alta densidad de energía que sean resistentes y confiables y puedan soportar un gran número de ciclos de carga /descarga durante un periodo relativamente grande. La celda de hidruro de níquel-metal es realmente un híbrido de las celdas de níquel-cadmio y de níquel-hidrógeno que combina las características positivas de cada una de éstas para crear un producto con un nivel de energía alto en un empaque pequeño, además tiene un largo ciclo de vida. A pesar de ser relativamente caro, este híbrido es una opción válida para aplicaciones tipo computadora portátil, como se muestra en la figura 2.16.



10.8 V, 2.9 Ah,
600 mA (pantalla monocromática),
900 mA (pantalla a color)

FIGURA 2.16
Batería de hidruro de níquel-metal (Ni-MH) para la computadora portátil IBM.

Celda solar En la figura 2.17 se muestra una **celda solar** de 40 W de alta densidad y parte de su información asociada, así como las áreas de aplicación. Debido a que el máximo nivel de potencia en watts disponible en un día soleado promedio es de 100 mW/cm^2, y a que las eficiencias de conversión se encuentran actualmente entre 10 y 14%, la energía máxima disponible por centímetro cuadrado para la mayoría de las unidades comerciales se halla entre 10 y 14 mW. Sin embargo, para el caso de un metro cuadrado, el rendimiento será de 100 a 140 W. En sus cursos de electrónica se presentará un tratamiento más detallado de la celda solar. Por ahora es importante comprender que una iluminación fija de la celda solar proporcionará un voltaje de cd prácticamente estable para distintas cargas; desde relojes hasta automóviles.



Módulo solar de alta densidad de 40 W Celdas cuadradas de 100 mm × 100 mm (4″ × 4″) utilizadas para proporcionar energía máxima en un mínimo de espacio. El módulo de 33 celdas en serie suministra una muy intensa corriente de carga de batería de 12 V para un amplio rango de temperaturas (desde −40°C hasta 60°C).

FIGURA 2.17
Módulo solar. (Cortesía de Motorola Semiconductor Products.)

Valor nominal ampere-hora Las baterías cuentan con un valor nominal de su capacidad dado en ampere-hora (Ah) o miliamperes-hora (mAh). Algunos de estos valores se incluyeron en las figuras anteriores. Una batería con un **valor nominal de 100 ampere-hora**, teóricamente, proporcionará una corriente estable de 1 A por 100 h, 2 A por 50 h, 10 A por 10 h, y así sucesivamente, según lo determina la siguiente ecuación:

$$\text{Vida (en horas)} = \frac{\text{valor nominal ampere-hora (Ah)}}{\text{consumo en ampere (A)}} \quad \textbf{(2.9)}$$

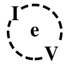
Sin embargo, dos factores que afectan este valor nominal son la temperatura y el ritmo de descarga. La pila Eveready® BH 500 tipo disco que se muestra en la figura 2.15, cuenta con las características terminales que aparecen en la figura 2.18. En esta figura se observa que:

la capacidad de una batería de cd disminuye ante el incremento en la corriente demandada

y

la capacidad de una batería de cd disminuye a temperaturas relativamente bajas y altas (en comparación con la temperatura ambiente).

Para la unidad de 1 V de la figura 2.18(a), el valor nominal se encuentra justo por encima de 500 mAh para una corriente de descarga de 100 mA, pero cae a



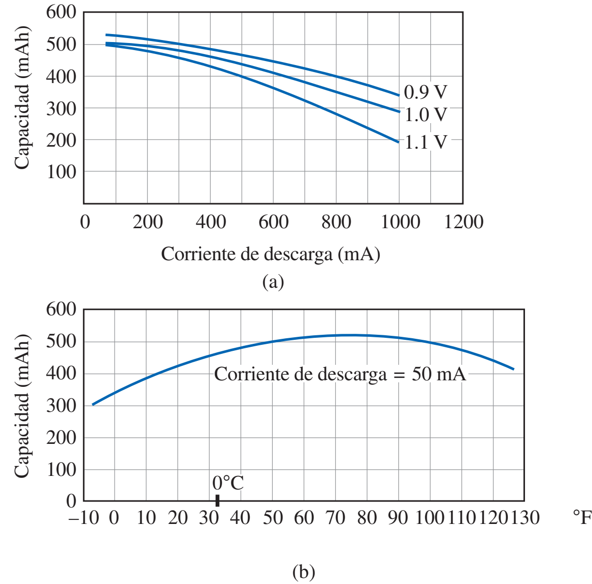


FIGURA 2.18
Características de la pila Eveready® BH 500: (a) la capacidad nominal en función de la corriente de descarga; (b) capacidad nominal en función de la temperatura. (Cortesía de Baterías Eveready.)

cerca de 300 mAh para 1 A. Sin embargo, para una unidad que es menor a 1.5 pulgadas de diámetro y menor a 0.5 pulgadas de espesor, éstas son características terminales excelentes. La figura 2.18(b) muestra que el nivel máximo de mAh (para un consumo de corriente de 50 mA) se presenta cerca de los 75°F (≅24°C), o justo por encima de la temperatura ambiente promedio. Observe que la curva cae a derecha e izquierda de este valor máximo. Todos sabemos de la reducción en la "potencia" de una batería a bajas temperaturas. Observe que ésta cae a casi 300 mAh para –8°F.

En la figura 2.19 se muestra otra curva de interés, la cual proporciona el voltaje esperado de la pila a un consumo particular durante cierto periodo de utilización de horas. Es notable que el tiempo de descarga en horas entre 50 y 100 mA sea mucho mayor que entre 100 y 150 mA, incluso cuando el incremento en la corriente sea el mismo entre los niveles. En general,

el voltaje en las terminales de una batería de cd disminuye de acuerdo con el tiempo de descarga a un consumo de corriente particular.

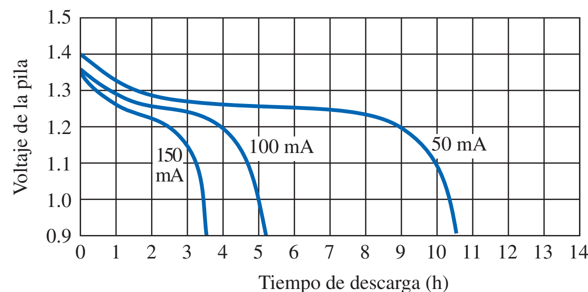


FIGURA 2.19
Curvas de descarga de la pila Eveready® BH 500. (Cortesía de Baterías Eveready.)

EJEMPLO 2.5

a. Determine la capacidad en miliampere-horas y la vida en minutos para la pila BH 500 de 0.9 V que muestra la figura 2.18(a) si la corriente de descarga es de 600 mA.
b. ¿A qué temperatura el valor nominal de mAh de la pila que muestra la figura 2.18(b) será del 90% de su valor máximo si la corriente de descarga es de 50 mA?

Soluciones:

a. A partir de la figura 2.18(a), la capacidad a 600 mA es de aproximadamente 450 mAh. De esta forma, a partir de la ecuación (2.9),

$$\text{Vida} = \frac{450\text{ mAh}}{600\text{ mA}} = 0.75\text{ h} = \mathbf{45\ minutos}$$

b. A partir de la figura 2.18(b), el nivel máximo es de aproximadamente 520 mAh. El nivel de 90% será, por tanto, de 468 mAh, presentándose justo por encima del punto de congelación en **1°C** y a la temperatura de **45°C**.

Generadores El **generador de cd** es muy diferente a una batería, tanto en construcción (Figura 2.20) como en el modo de operar. Cuando el eje del generador se encuentra en rotación a la velocidad nominal, como consecuencia del torque aplicado de alguna fuente externa de energía mecánica, se presentará un voltaje de nivel específico a través de las terminales externas. El voltaje terminal y la capacidad de manejo de energía del generador de cd son, por lo general, mayores que los de la mayoría de las baterías, y su vida útil está determinada únicamente por su construcción. Los generadores de cd utilizados de manera comercial son típicos de la variedad de 120 o 240 V. Como se señaló en esta sección, para los propósitos de este texto, no se hará ninguna distinción entre los símbolos de una batería y de un generador.

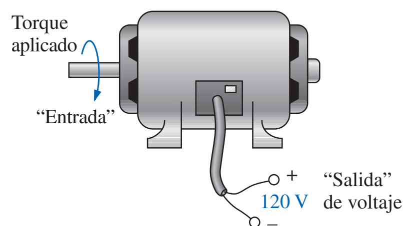


FIGURA 2.20
Generador de cd.

Fuentes de alimentación La fuente de cd que se encuentra con más frecuencia en el laboratorio emplea procesos de **rectificación** y *filtrado* como medios para obtener un voltaje continuo de cd. Ambos procesos serán cubiertos con todo detalle en sus cursos básicos de electrónica. En resumen, un voltaje que varía en el tiempo (como podría ser el voltaje disponible en un contacto doméstico) se convierte a otro de magnitud fija. En la figura 2.21 se muestra una fuente de cd de laboratorio de este tipo.

La mayoría de las fuentes de laboratorio tienen una salida de voltaje regulado y ajustable con tres terminales disponibles, como se indica en las figuras 2.21 y 2.22(a). En la figura 2.22 (a) también se muestra el símbolo para potencial cero o tierra (la referencia). Si se requieren 10 V por arriba del potencial de tierra, entonces se realizarán las conexiones como se muestra en la figura 2.22(b). Si se requieren 15 V por debajo del potencial de tierra, entonces las conexiones serán las mostradas en la figura 2.22(c). Si se realizan las conexiones que se muestran en la figura 2.22(d), decimos que tenemos un voltaje "flotante" de 5 V dado que el nivel de referencia no se encuentra incluido. Rara vez se utiliza la configuración de la figura 2.22(d) debido a que no protege al operador proporcionándole una trayectoria directa de baja resistencia a tierra y no establece una tierra común para el sistema. En todo caso, las terminales positivas y negativas deben ser parte de cualquier configuración de circuito.



FIGURA 2.21
Fuente de cd de laboratorio. (Cortesía de Leader Instruments Corporation.)

Fuentes de corriente de cd

La amplia variedad de tipos y las aplicaciones de las fuentes de voltaje de cd han ocasionado que se convierta en un dispositivo bastante familiar, siendo sus

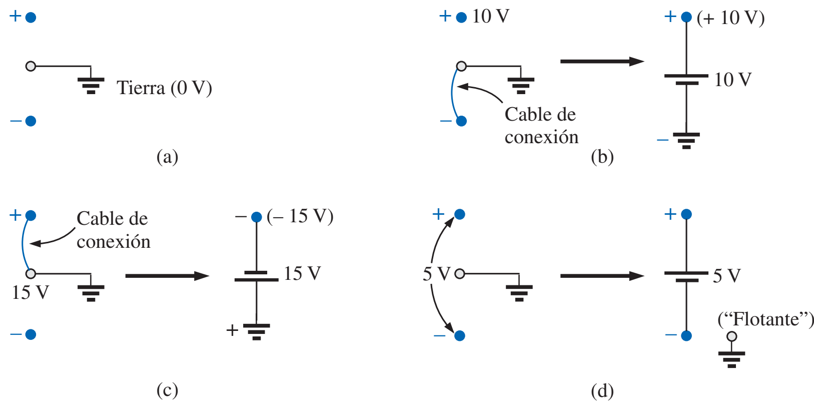


FIGURA 2.22
Fuente de laboratorio de cd: (a) terminales disponibles; (b) voltaje positivo con respecto a (c.r.a.) tierra; (c) voltaje negativo c.r.a. tierra; (d) fuente flotante.

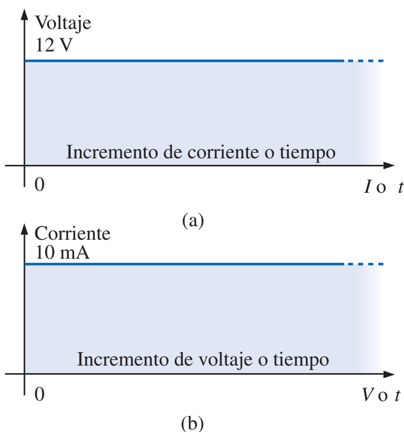


FIGURA 2.23
Características en las terminales: (a) fuente de voltaje ideal; (b) fuente de corriente ideal.

características comprendidas, al menos de forma básica, por personas no expertas. Por ejemplo, es conocido que una batería de automóvil de 12 V cuenta con un voltaje terminal de 12 V (al menos aproximadamente), incluso cuando el consumo de corriente por parte del automóvil pueda variar bajo distintas condiciones de operación. En otras palabras, *una fuente de voltaje de cd idealmente proporcionará un voltaje terminal fijo, incluso cuando la demanda de corriente de un sistema eléctrico/electrónico pueda variar,* como se ilustra en la figura 2.23(a). Una **fuente de corriente de cd** es el dual de una fuente de voltaje; es decir,

la fuente de corriente proporcionará, de forma ideal, una corriente fija a un sistema eléctrico/electrónico, incluso cuando existan variaciones en el voltaje de sus terminales en la forma que lo determine el sistema,

como se ilustra en la figura 2.23(b). No se alarme si el concepto de una fuente de corriente le parece extraño o algo confuso en este punto; en capítulos posteriores será cubierto con gran detalle. Además, en cursos básicos de electrónica obtendrá una mayor experiencia.

2.5 CONDUCTORES Y AISLANTES

Diferentes tipos de alambre colocados a través de las dos terminales de batería propiciarán que sean distintas las cantidades de carga que fluyan entre las terminales. Muchos factores, tales como características de densidad, movilidad y estabilidad de un material, son responsables de estas variaciones en el flujo de carga. Sin embargo, en general,

conductores ***son aquellos materiales que permiten un flujo generoso de electrones con muy poca fuerza externa (voltaje) aplicada.***

Además,

típicamente, los buenos conductores tienen sólo un electrón en la órbita de valencia (la más alejada del núcleo).

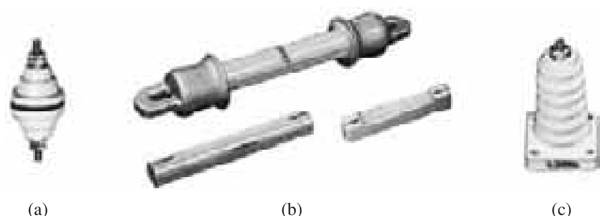
Dado que el **cobre** se utiliza con mayor frecuencia, actúa como el estándar de comparación para la conductividad relativa que se presenta en la tabla 2.1. Observe que el aluminio, el cual tiene cierto uso comercial, posee únicamente 61% del nivel de conductividad del cobre, pero tenga presente que esto debe ponderarse contra factores de costo y peso.

TABLA 2.1
Conductividad relativa de distintos materiales.

Metal	Conductividad relativa (%)
Plata	105
Cobre	**100**
Oro	70.5
Aluminio	61
Tungsteno	31.2
Níquel	22.1
Hierro	14
Constantan	3.52
Nicromo	1.73
Calorita	1.44

Los aislantes ***son aquellos materiales que tienen pocos electrones y que necesitan de la aplicación de un mayor potencial (voltaje) para establecer un nivel de corriente que se pueda medir.***

Una aplicación común del material aislante es el recubrimiento del alambre que transporta corriente, el cual, si se dejara sin aislar, podría ocasionar peligrosos efectos secundarios. Las personas que reparan las líneas de alimentación eléctrica utilizan guantes de caucho y permanecen de pie sobre tapetes de hule como medidas de seguridad cuando trabajan con líneas de transmisión de alto voltaje. En la figura 2.24 aparecen distintos tipos de aislantes y sus aplicaciones.



(a) (b) (c)

FIGURA 2.24
Aislantes: (a) bujes aislados mediante un panel; (b) aislantes extensibles de antena; (c) aislantes de porcelana. (Cortesía de Herman H. Smith, Inc.)

Sin embargo, debe señalarse que incluso el mejor aislante tendrá una ruptura (permitiendo que la carga fluya por él) si se le aplica un potencial lo suficientemente grande. En la tabla 2.2 se presentan los esfuerzos de ruptura de algunos

TABLA 2.2
Esfuerzos de ruptura de algunos aislantes comunes.

Material	Esfuerzos promedio de ruptura (kV/cm)
Aire	30
Porcelana	70
Aceites	140
Baquelita	150
Caucho	270
Papel (recubierto de parafina)	500
Teflón	600
Vidrio	900
Mica	2000

aislantes comunes. De acuerdo con esta tabla, para aislantes con la misma forma geométrica, se requeriría 270/30 = 9 veces el potencial del aire para hacer pasar corriente a través del caucho, y aproximadamente 67 veces el voltaje para hacer pasar la corriente a través de la mica en comparación con el aire.

2.6 SEMICONDUCTORES

Los Semiconductores ***son un grupo específico de elementos que presentan características ubicadas entre las de los aislantes y las de los conductores.***

El prefijo *semi*, incluido en la terminología, está definido en el diccionario como *medio, parcial* o *entre*, de acuerdo con su uso. Toda la industria electrónica depende de esta clase de materiales debido a que los dispositivos electrónicos y los circuitos integrados (CI) se construyen de materiales semiconductores. Aun cuando el *silicio* (Si) es el material más utilizado, el *germanio* (Ge) y el *arseniuro de galio* (GaAs) también se utilizan en muchos dispositivos importantes.

Los materiales semiconductores tienen, por lo general, cuatro electrones en la órbita de valencia exterior.

Los semiconductores se caracterizan, además, por ser fotoconductores y tener un coeficiente de temperatura negativo. La fotoconductividad es un fenómeno donde los fotones (pequeños paquetes de energía) de la luz incidente pueden incrementar la densidad de portadores de carga en el material y, por tanto, el nivel de flujo de carga. Un coeficiente de temperatura negativo indica que la resistencia (una característica que se describirá con detalle en el siguiente capítulo) disminuirá ante un incremento en la temperatura (lo opuesto a la mayoría de los conductores). En los capítulos siguientes se analizarán más los semiconductores así como en sus cursos básicos de electrónica.

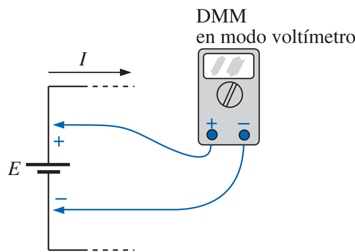


FIGURA 2.25
Conexión del voltímetro para una lectura positiva (+).

2.7 AMPERÍMETROS Y VOLTÍMETROS

Es importante poder medir los niveles de corriente y de voltaje de un sistema eléctrico para verificar su operación, aislar problemas de funcionamiento e investigar efectos imposibles de predecir en el papel. Como su nombre lo indica, los **amperímetros** se utilizan para medir niveles de corriente, y los **voltímetros** para medir la diferencia de potencial entre dos puntos. Si los niveles de corriente son, por lo general, del orden de los miliamperes, el instrumento será denominado típicamente como *miliamperímetro*, y si los niveles de corriente se encuentran en el rango de los microamperes, será un *microamperímetro*. Lo mismo puede decirse de los niveles de voltaje. En la industria, con frecuencia se miden más los niveles de voltaje que los de corriente, debido principalmente a que la medición de los voltajes no requiere que se modifiquen las conexiones de la red.

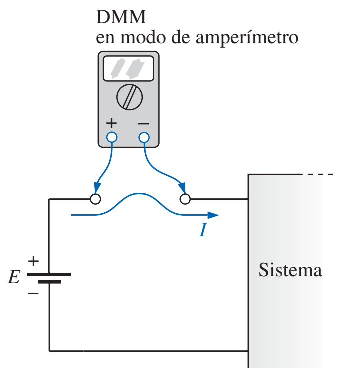


FIGURA 2.26
Conexión del amperímetro para una lectura positiva (+).

La diferencia de potencial entre dos puntos puede medirse con la simple conexión de las puntas del medidor *a través de los dos puntos*, como se indica en la figura 2.25. Una lectura positiva se obtiene al colocar la punta positiva del medidor en el punto con el mayor potencial de la red y la punta común o negativa en el punto con el potencial más bajo. La conexión inversa ocasionará una lectura negativa, o una indicación por debajo de cero.

Los amperímetros se conectan como se muestra en la figura 2.26. Dado que los amperímetros miden la velocidad del flujo de carga, el medidor debe colocarse en la red para que la carga fluya a través de él. La única forma de lograr

esto es abrir la trayectoria en la que será medida la corriente y colocar el medidor entre las dos terminales resultantes. Para la configuración de la figura 2.26, la terminal positiva (+) de la fuente de voltaje debe desconectarse del sistema e insertar el amperímetro como se muestra. Si la polaridad de las puntas de prueba del amperímetro es tal que la corriente del sistema entra por la punta de prueba positiva, se obtendrá una lectura positiva.

La introducción de cualquier medidor dentro del sistema eléctrico/electrónico plantea la cuestión de si el medidor afectará el comportamiento del sistema. Esta cuestión y otras más serán analizadas en los capítulos 5 y 6, una vez que se hayan presentado términos y conceptos adicionales. Por el momento, digamos que, como los voltímetros y los amperímetros no cuentan con fuentes internas, afectarán la red cuando se introduzcan con propósitos de medición. No obstante, el diseño de cada instrumento es tal que el impacto se minimiza.

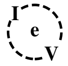
Existen instrumentos diseñados para medir sólo niveles de corriente o niveles de voltaje. Sin embargo, los medidores más comunes en el laboratorio incluyen el *volt-ohm-miliamperímetro* (VOM) y el *multímetro digital* (DMM Digital Multimeter) mostrados en las figuras 2.27 y 2.28, respectivamente. Ambos instrumentos medirán el voltaje, la corriente y una tercera cantidad, la resistencia, que será presentada en el siguiente capítulo. El VOM emplea una escala analógica, la cual requiere interpretar la posición de la aguja sobre una escala continua, mientras que el DMM proporciona una pantalla de números con precisión de decimales determinada por la escala seleccionada. A lo largo del texto se realizarán comentarios sobre las características y el empleo de distintos medidores; pero el principal estudio sobre estos instrumentos se deja para las sesiones de laboratorio.



FIGURA 2.27
Medidor analógico volt-ohm-miliamperímetro (VOM). (Cortesía de Simpson Electric Co.)



FIGURA 2.28
Multímetro digital (DMM). (Cortesía de John Fluke Mfg. Co. Inc.)



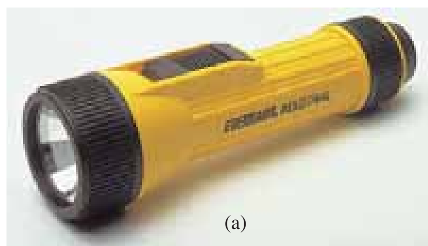
2.8 APLICACIONES

A lo largo del texto se han incluido secciones como esta de Aplicaciones para permitir una mayor investigación de los términos, cantidades o sistemas presentados en el capítulo. El principal propósito de estas Aplicaciones es establecer un vínculo entre los conceptos teóricos del texto y el mundo real y práctico. Aunque la mayor parte de los componentes que aparecen en un sistema no se hayan presentado (y, de hecho, algunos no se analizarán sino hasta estudios más avanzados), los temas se seleccionaron cuidadosamente y deberán parecer interesantes para un nuevo estudiante de la materia. Se incluyen los comentarios suficientes como para proporcionar un entendimiento general del papel de cada parte del sistema, en el entendido de que los detalles se verán posteriormente. Dado que no aparecen ejercicios del tema de las Aplicaciones al final del capítulo, el contenido no está diseñado para retar al estudiante sino para estimular su interés y resolver algunas preguntas básicas como la forma en que se muestran los sistemas por dentro, el papel que juegan elementos específicos en el sistema y, por supuesto, la forma en que trabaja el sistema. Por tanto, en esencia, cada sección de Aplicaciones ofrece una oportunidad para comenzar a establecer una formación práctica más allá de simplemente el contenido del capítulo. No se preocupe si no comprende todos los detalles de cada aplicación. El entendimiento vendrá con el tiempo y la experiencia. Por ahora, tome lo que pueda de los ejemplos y luego continúe con el material.

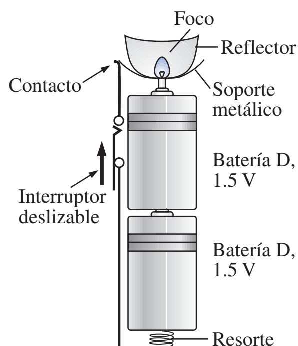
Linternas

Aunque la linterna utilice uno de los circuitos eléctricos más simples, algunos principios de su operación llevan a sistemas más sofisticados. En primer lugar, y lo más evidente, se trata de un sistema de cd con un tiempo de vida completamente dependiente del estado de las baterías y del foco. A menos que sea del tipo recargable, cada vez que se utiliza se reduce el tiempo de vida. Durante muchas horas la intensidad luminosa no disminuirá de forma perceptible, sin embargo, a medida que se acerque al final de su capacidad ampere-hora, la luz comenzará a atenuarse a un ritmo cada vez mayor (casi exponencialmente). Para la linterna estándar de dos baterías que aparece en la figura 2.29(a), con su esquema eléctrico en la parte (b) de dicha figura, cada batería de 1.5 V cuenta con un valor nominal ampere-hora de cerca de 16 como lo sustenta la figura 2.12. El foco miniatura de base saliente y un solo contacto posee los valores nominales de 2.5 V y 300 mA con buena luminosidad y vida de aproximadamente 30 horas. Treinta horas puede no parecer una vida larga, pero debe considerarse cuánto tiempo, generalmente, se utiliza una linterna en cada ocasión. Si asumimos un consumo de 300 mA de la batería al foco cuando se encuentra encendido, la vida de la batería, según la ecuación (2.9), será de 53 horas. Comparar la vida de 53 horas de la batería con la esperanza de vida de 30 horas del foco sugiere que normalmente tendremos que reemplazar los focos más a menudo que las baterías.

Sin embargo, a la mayoría nos sucede lo contrario: debemos cambiar las baterías dos o tres veces antes de necesitar cambiar el foco. Esto es simplemente un ejemplo del hecho de que no podemos guiarnos únicamente por las especificaciones de cada componente de un diseño eléctrico. Las condiciones de operación, las características de las terminales, y los detalles con respecto a la respuesta real del sistema para periodos cortos y largos también deben ser tomados en cuenta. Como se mencionó, la batería pierde algo de su energía cada vez que se utiliza. Aunque el voltaje en sus terminales pueda no cambiar mucho al principio, su capacidad para proporcionar el mismo nivel de corriente







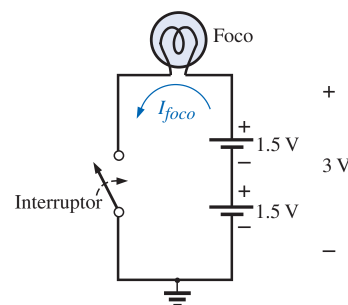
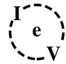


FIGURA 2.29
(a) Linterna Eveready® D; (b) esquema eléctrico de la linterna del inciso (a); (c) pila Duracell® Powercheck™ tipo D.

disminuirá con cada uso. Lo que es más, las baterías se descargan lentamente debido a “corrientes de fuga” incluso cuando el interruptor se encuentra apagado. El entorno de la batería no es “limpio” en el sentido de que la humedad y otros elementos ambientales pueden ofrecer una trayectoria de conducción a través del aire para las corrientes de fuga, a través de la propia superficie de la batería o por otras superficies cercanas, de forma que la batería eventualmente se descargará. ¿Cuántas veces hemos dejado una linterna con baterías nuevas dentro del auto por un largo periodo solo para darnos cuenta después que apenas enciende o que las baterías están descargadas cuando más necesitamos la linterna? Un problema adicional son las fugas de ácido que aparecen como manchas marrones o corrosión sobre el forro de la batería. Estas fugas también afectan la vida de la batería. Además, cuando se enciende una linterna se presenta un pico inicial en la corriente, el cual consume más corriente de la batería que un uso continuo durante cierto periodo. En otras palabras, encender y apagar continuamente una linterna tendrá un efecto perjudicial sobre la duración de la batería. También debemos observar que el valor de 30 horas para el foco es para el caso del uso continuo, es decir, 300 mA fluyendo a través del foco durante 30 horas continuas. Ciertamente, tanto el filamento del foco como el mismo foco se calentarán con el tiempo, y este calor tiene un efecto perjudicial sobre el alambre del filamento. Cuando la linterna se enciende y se apaga, el foco puede enfriarse y recuperar sus características normales, evitando así cualquier daño real. Por tanto, bajo un uso normal es posible esperar que el foco dure más de las 30 horas especificadas para el uso continuo.

Incluso aunque el foco especifique una operación de 2.5 V, podría parecer que las dos baterías ocasionarían un voltaje aplicado de 3 V lo cual sugiere condiciones de operación no adecuadas. Sin embargo, un foco con valor de 2.5 V puede fácilmente manejar de 2.5 V a 3 V. Además, como se señaló en este capítulo, el voltaje en las terminales caerá con la demanda de corriente y con el uso. Bajo condiciones normales de operación, se considera que una batería de 1.5 V está en buenas condiciones si el voltaje en sus terminales con carga es de 1.3 V a 1.5 V. Cuando el voltaje cae a 1 V o 1.1 V, es muy bajo, y cuando cae de 0.8 V a 0.9 V, ha perdido su efectividad. Los niveles pueden relacionarse directamente con la banda de prueba que aparece ahora en las baterías Duracell®, como la que



se muestra en la figura 2.29(c). En la banda de prueba sobre esta batería, el área de voltaje superior (la parte verde en la batería) se encuentra cercana a 1.5 V (etiquetada como 100%); el área más clara hacia la derecha, va de 1.3 V hasta 1 V; y el área de reemplazo (roja) situada al extremo derecho, cae por debajo de 1 V.

Tenga presente que el voltaje total suministrado de 3 V será obtenido sólo si las baterías se conectan como se muestra en la figura 2.29(b). Al colocar accidentalmente las dos terminales positivas juntas se obtendrá un voltaje total de 0 V, y el foco no encenderá. *Para la gran mayoría de los sistemas con más de una batería, la terminal positiva de una batería siempre estará conectada a la terminal negativa de otra. Para todas las baterías de bajo voltaje, el extremo con la saliente será la terminal positiva, y el extremo plano será la terminal negativa. Además, el extremo negativo o plano de una batería siempre se encontrará conectado a la carcasa de baterías con el resorte helicoidal para mantenerlas en su lugar. El extremo positivo de la batería estará conectado siempre a una conexión de resorte plano o al elemento que se operará.* Al observar cuidadosamente un foco, se verá que la saliente conectada al extremo positivo de la batería se encuentra aislada de la cubierta situada alrededor de la base del foco. La cubierta es la segunda terminal de la batería utilizada para completar el circuito mediante el interruptor de apagado/encendido.

Si una linterna no opera adecuadamente, lo primero a verificar es el estado de las baterías. Siempre es mejor reemplazar ambas baterías a la vez. Un sistema con una batería en buen estado y otra cercana al final de su vida ocasionará cierta carga sobre la batería buena para suministrar la demanda de corriente, y, de hecho, la batería mala operará como un elemento de consumo de la batería buena. Luego se verifica la condición del foco revisando el filamento para ver si se encuentra abierto en algún punto como consecuencia de un nivel de corriente continua de largo plazo o de algún golpe fuerte que haya recibido la linterna. Si la batería y el foco parecen encontrarse en buen estado, la siguiente área de atención serán los contactos entre la terminal positiva y el foco y el interruptor; limpiar ambos con papel de lija resuelve, por lo general, el problema.

Cargador de 12 V para batería de automóvil

Los cargadores de baterías son un equipo común doméstico utilizado para cargar desde pequeñas baterías para linternas hasta baterías de ácido-plomo, marinas, de alto rendimiento. Debido a que estos cargadores se conectan a un enchufe de 120 V de ca como los que se encuentran en el hogar, su construcción básica es muy parecida. En todo sistema de carga se debe incluir un *transformador* (Capítulo 21) para reducir el voltaje de ca a un nivel adecuado al nivel de cd que se generará. Además, debe incluirse un arreglo de *diodos* (llamado también *rectificador*) para convertir el voltaje de ca, que varía con el tiempo, a un nivel fijo de cd como el descrito en este capítulo. Los diodos y/o rectificadores se analizarán con todo detalle en su primer curso de electrónica. Algunos cargadores de cd también incluirán un *regulador* para proporcionar un mejor nivel de cd (uno que varíe menos con el tiempo o con la carga). Dado que el cargador de batería de automóvil es uno de los más comunes, se describirá en los siguientes párrafos.

En la figura 2.30 se presenta la apariencia externa y la construcción interna de un cargador de baterías manual Sears 6/2 AMP. Observe en la figura 2.30(b) que el transformador (como en la mayoría de los cargadores) ocupa la mayor parte del espacio interno. El espacio adicional y los agujeros en la carcasa son para asegurar que se disipe el calor generado a causa de los niveles de corriente resultantes.



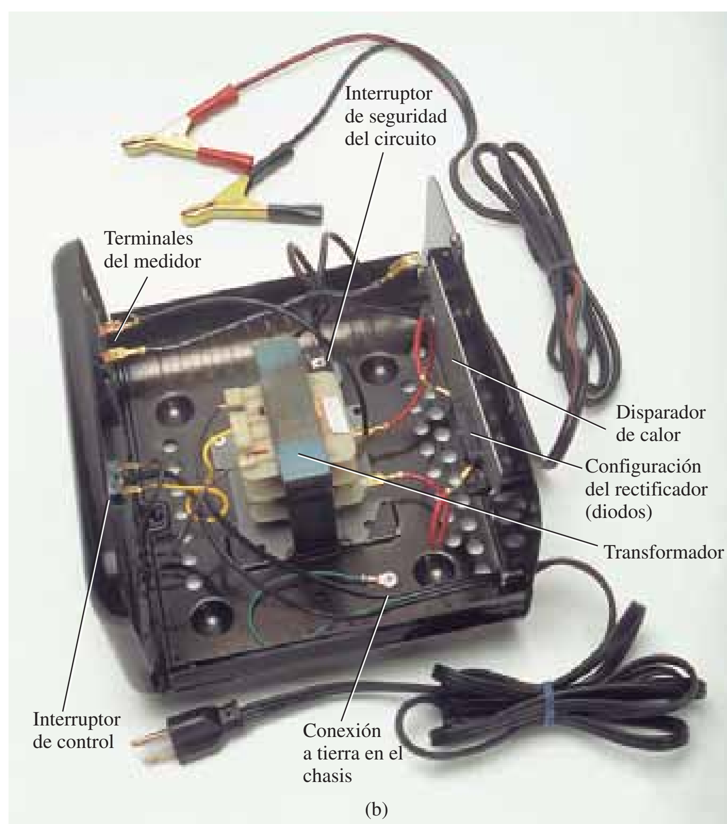


FIGURA 2.30
Cargador de baterías: (a) apariencia externa; (b) construcción interna.

El esquema de la figura 2.31 incluye todos los componentes básicos del cargador. Observe primero que los 120 V del enchufe se aplican directamente a través del primario del transformador. El ritmo de carga de 6 A o 2 A lo determina la posición del interruptor, el cual simplemente controla cuántos devanados del primario se conectarán al circuito para el ritmo de carga seleccionado. Si la batería se encuentra cargando al nivel de 2 A, todo el primario estará en el circuito, y la relación de vueltas del primario a las vueltas del secundario será

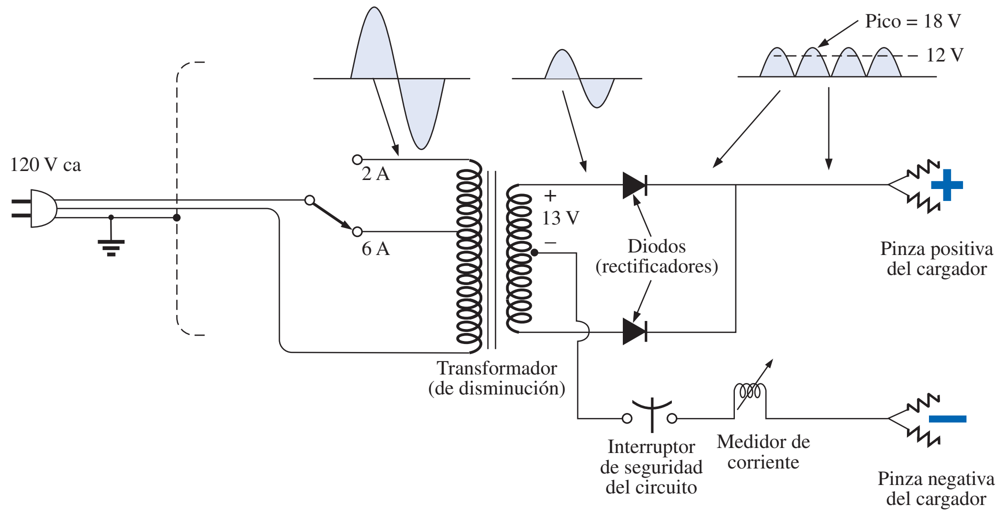


FIGURA 2.31
Esquema eléctrico para el cargador de batería de la figura 2.30.

máxima. Si éste se encuentra cargando al nivel de 6 A, menos vueltas del primario se encontrarán dentro del circuito y la relación disminuirá. Cuando estudie los transformadores, usted verá que el voltaje en el primario y en el secundario se relaciona directamente con la *relación de vueltas*. Si la relación del primario al secundario cae, entonces el voltaje también lo hará. El efecto inverso ocurre si las vueltas del secundario exceden las del primario.

En la figura 2.31 se muestra la apariencia general de las formas de onda para el nivel de carga de 6 A. Observe que, hasta ahora, el voltaje de ca tiene la misma forma de onda a través del primario y del secundario. La única diferencia está en el valor pico de las formas de onda. Luego entran los diodos y convierten la forma de onda de ca con valor promedio de cero (la forma de onda superior equivale a la forma de onda inferior) a una que tiene un valor promedio (toda por encima del eje) como se muestra en la misma figura. Por el momento simplemente reconozca que los diodos son dispositivos semiconductores electrónicos que sólo permiten que la corriente convencional fluya por ellos en la dirección indicada por la flecha en el símbolo. Incluso aunque la forma de onda resultante de la acción del diodo tiene una apariencia de pulso con un valor pico cercano a 18 V, cargará la batería de 12 V siempre que su voltaje sea mayor que el de la batería, como se muestra mediante el área sombreada. Por debajo del nivel de 12 V la batería no puede volver a descargarse hacia la red de carga debido a que los diodos sólo permiten que la corriente fluya en una sola dirección.

En particular, observe en la figura 2.30(b) la gran placa que lleva la corriente desde la configuración del rectificador (diodo) hasta la terminal positiva de la batería. Su propósito principal es proporcionar un *disipador de calor* (un lugar para que el calor fluya hacia el aire circundante) para la configuración del diodo. De otra forma, eventualmente los diodos se fundirían y destruirían debido a los niveles de corriente resultantes. Cada componente de la figura 2.31 ha sido cuidadosamente etiquetado en la figura 2.30(b) para servir de referencia.

Cuando la corriente se aplica por primera vez a una batería al ritmo de carga de 6 A, la demanda de corriente puede elevarse hasta 7 A o casi 8 A, según se indica en el medidor de la carátula del cargador. Sin embargo, el nivel de la corriente disminuirá a medida que la batería se cargue hasta caer a un nivel de

2 A o 3 A. Para unidades como esta que no cuentan con apagado automático, es importante desconectar el cargador cuando la corriente cae al nivel de completamente cargada; de otra forma, la batería podría sobrecargarse y dañarse. Una batería que se encuentra al nivel del 50% puede tomar hasta 10 horas en cargarse, por lo que no espere que esto sea una operación de 10 minutos. Además, si la batería se encuentra en malas condiciones con un voltaje menor que el normal, la corriente inicial de carga puede resultar demasiado alta para el diseño. Como protección contra tales situaciones, el interruptor de seguridad del circuito se abrirá y detendrá el proceso de carga. Debido a los altos niveles de corriente, es importante que se lean y apliquen cuidadosamente las indicaciones proporcionadas con el cargador.

Fuente de cd para teléfonos y máquinas contestadoras

Una amplia variedad de sistemas en el hogar y la oficina reciben su voltaje de operación de cd a partir de un sistema de conversión ca/cd enchufado directamente al tomacorriente de 120 V de ca. Computadoras portátiles, máquinas contestadoras, teléfonos, radios, relojes, teléfonos celulares, reproductores de CD, etc., todos reciben su energía de cd a partir de un sistema encapsulado como el que aparece en la figura 2.32. La conversión de ca a cd sucede dentro de la unidad, la cual está conectada directamente al enchufe. El voltaje de cd está disponible en el extremo del cable diseñado para conectarse a la unidad de operación. A pesar de su apariencia pequeña, esta unidad contiene básicamente los mismos componentes que aparecen en el cargador de batería de la figura 2.30.



FIGURA 2.32
Fuente de alimentación de cd de 9 V cd para teléfono o máquina contestadora.

En la figura 2.33 se puede ver el transformador utilizado para disminuir el voltaje a niveles adecuados (nuevamente el componente más grande del sistema). Observe que dos diodos establecen un nivel de cd, y se añadió un filtro capacitivo (Capítulo 10) para "aplanar" la cd como se muestra. El sistema puede ser relativamente pequeño debido a que los niveles de corriente de operación son muy pequeños, lo que permite el uso de alambres delgados para construir el transformador y limitar su tamaño. Las bajas corrientes reducen también las consideraciones sobre los efectos del calentamiento, permitiendo un encapsulado pequeño. La unidad de la figura 2.33, con valor de 9 V a 200 mA, se utiliza comúnmente para proporcionar energía a teléfonos o máquinas contestadoras. Una regulación posterior del voltaje de cd se llevará a cabo por un regulador construido dentro de la unidad receptora. El regulador es un circuito integrado que mantiene el voltaje de salida muy cercano a su valor nominal volviendo mínimos los efectos debidos a la variación del voltaje en el primario del transformador, a los valores de la carga conectada a las terminales de salida, a la captación de ruidos de los cables del cargador y a pérdidas en los mismos. Asimismo, ayuda en la disipación de calor.

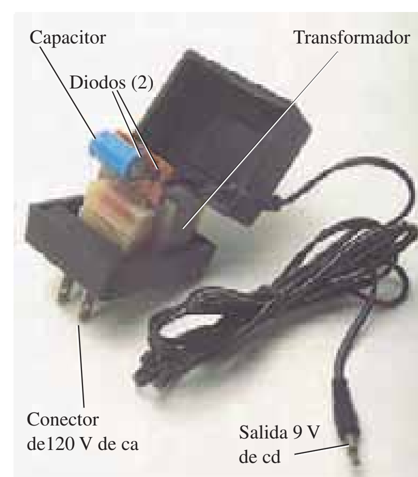
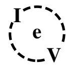


FIGURA 2.33
Construcción interna de la fuente de alimentación de cd de 9 V mostrada en la figura 2.32.



PROBLEMAS

SECCIÓN 2.1 Los átomos y su estructura

1. La cantidad de electrones en órbita que poseen el aluminio y la plata es 13 y 47, respectivamente. Dibuje las configuraciones electrónicas, incluyendo todas las capas y subcapas, y discuta brevemente por qué cada uno de estos elementos es un buen conductor.
2. Calcule la fuerza de atracción entre un protón y un electrón separados por una distancia igual al radio de la órbita más pequeña seguida por un electrón $(5 \times 10^{-11}$ m) en un átomo de hidrógeno.
3. Calcule la fuerza de atracción en newton entre las cargas Q_1 y Q_2 que se muestran en la figura 2.34 cuando
   a. $r = 1$ m **b.** $r = 3$ m
   c. $r = 10$ m
   (Observe la rapidez con que cae la fuerza ante un incremento en *r*.)

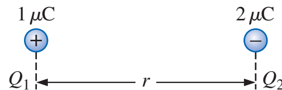


FIGURA 2.34
Problema 3.

*4. Calcule la fuerza de repulsión en newton entre las cargas Q_1 y Q_2 de la figura 2.35 cuando
   a. $r = 1$ mi **b.** $r = 0.01$ m
   c. $r = 1/16$ pulg

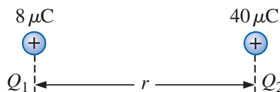


FIGURA 2.35
Problema 4.

*5. Grafique la fuerza de atracción (en newton) en función de la separación (en metros) de dos cargas de 2 m*C* y –4 μC. Establezca *r* en 0.5 m y 1 m, seguido por intervalos de 1 m hasta 10 m. Comente sobre la forma de la curva. ¿Es lineal o no lineal? ¿Qué le dice esto acerca de la fuerza de atracción entre cargas a medida que se separan? ¿Qué le dice acerca de cualquier función graficada en función de un término cuadrático en el denominador?

6. Determine la distancia entre dos cargas de 20 μC si la fuerza entre ellas es de 3.6×10^4 N.

*7. Dos cuerpos cargados, Q_1 and Q_2, cuando se encuentran separados por una distancia de 2 m, experimentan una fuerza de repulsión igual a 1.8 N.
   a. ¿Cuál será la fuerza de repulsión cuando estos cuerpos estén separados 10 m?
   b. Si la razón $Q_1/Q_2 = 1/2$, calcule Q_1 y Q_2 ($r = 10$ m).

SECCIÓN 2.2 Corriente

8. Calcule la corriente en ampere si 650 C de carga atraviesan un alambre en 50 s.
9. Si 465 C de carga atraviesan un alambre en 2.5 min, calcule la corriente en ampere.
10. Si una corriente de 40 A se presenta por 1 min, ¿cuántos coulombs de carga habrán atravesado el alambre?
11. ¿Cuántos coulombs de carga atraviesan una lámpara en 2 min si la corriente es constante en 750 mA?
12. Si la corriente en un conductor es constante en 2 mA, ¿cuánto tiempo se requiere para que 4600×10^{-6} C pasen a través del conductor?
13. Si $21.847 \times 10^{+18}$ electrones pasan por un alambre en 7 s, calcule la corriente.
14. ¿Cuántos electrones pasan a través de un conductor en 1 min si la corriente es de 1 A?
15. ¿Un fusible con valor de 1 A "estallará" si 86 C pasan a través de él durante 1.2 min?

*16. Si $0.784 \times 10^{+18}$ electrones pasan por un alambre en 643 ms, calcule la corriente.

*17. ¿Qué preferiría usted?
   a. Un centavo por cada electrón que pase a través de un alambre en 0.01 μs a una corriente de 2 mA, o
   b. Un dólar por cada electrón que pase por un alambre en 1.5 ns si la corriente es de 100 μA.

SECCIÓN 2.3 Voltaje

18. ¿Cuál es el voltaje entre dos puntos si se requieren 96 mJ de energía para mover 50×10^{18} electrones entre los dos puntos?
19. Si la diferencia de potencial entre dos puntos es de 42 V, ¿cuánto trabajo se requiere para llevar 6 C de un punto al otro?
20. Encuentre la carga *Q* que requiere que 96 J de energía se muevan a través de una diferencia de potencial de 16 V.
21. ¿Cuánta carga pasa a través de una batería de 22.5 V si la energía consumida es de 90 J?
22. Si un conductor con una corriente de 200 mA que pasa a través de él convierte 40 J de energía eléctrica en calor en 30 s, ¿cuál será la caída de potencial a través del conductor?
23. Una carga se encuentra fluyendo a través de un conductor a un ritmo de 420 C/min. Si 742 J de energía eléctrica se convierten en calor en 30 s, ¿cuál es la caída de potencial a través del conductor?

*24. La diferencia de potencial entre dos puntos en un circuito eléctrico es de 24 V. Si 0.4 J de energía se disiparan en un periodo de 5 ms, ¿cuál sería la corriente entre los dos puntos?

SECCIÓN 2.4 Fuentes de alimentación fijas (cd)

25. En teoría, ¿qué corriente proporcionará una batería con un nivel Ah de 200 durante 40 h?

26. ¿Cuál es el nivel Ah de una batería que puede proporcionar 0.8 A durante 76 h?

27. ¿Durante cuántas horas una batería con un nivel Ah de 32 proporcionará, teóricamente, una corriente de 1.28 A?

28. Con base en la figura 2.18(b), calcule el nivel de mAh para la batería Eveready® BH 500 a 100°F y 0°C para una corriente de descarga de 50 mA.

29. Utilizando la figura 2.18(a), calcule el nivel de mAh para la batería Eveready® BH 500 si el consumo de corriente es de 550 mA. ¿Durante cuánto tiempo proporcionará esta corriente?

30. ¿Por cuánto tiempo es posible extraer 50 mA de la batería que aparece en la figura 2.19 antes de que su voltaje terminal caiga por debajo de 1 V? Determine el número de horas a una corriente consumida de 150 mA, y compare la razón de corriente consumida a la razón resultante de horas de disponibilidad.

31. Una batería estándar de 12 V para automóvil cuenta con un nivel ampere-hora de 40 Ah, mientras que una batería de alto desempeño tiene un nivel de 60 Ah. ¿Cómo se comparan los niveles de energía de cada batería y la corriente disponible para propósitos de arranque?

***32.** Empleando las ecuaciones relevantes vistas en las pasadas secciones, determine la energía disponible (en joules) de la batería Eveready que aparece en la figura 2.15(b).

***33.** Una televisión portátil que utiliza una batería recargable de 12 V y 3 Ah puede operar por un periodo de cerca de 5.5 h. ¿Cuál es la corriente promedio consumida durante ese periodo? ¿Cuál es la energía consumida por la batería en joules?

34. Discuta brevemente las diferencias que hay entre los tres tipos de fuentes de alimentación de cd (baterías, rectificación y generadores).

35. Compare las características de una fuente de corriente de cd con las de una fuente de voltaje de cd. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?

SECCIÓN 2.5 Conductores y aislantes

36. Integre una discusión acerca de dos propiedades de la estructura atómica del cobre que lo hacen un buen conductor.

37. Nombre dos materiales que no aparezcan en la tabla 2.1 pero sean buenos conductores de electricidad.

38. Explique los términos *aislante* y *fuerza de ruptura.*

39. Enumere tres usos que no hayan sido mencionados acerca de los materiales aislantes en la sección 2.5.

SECCIÓN 2.6 Semiconductores

40. ¿Qué es un semiconductor? ¿Cómo se compara con un conductor y un aislante?

41. Consulte un texto de electrónica acerca de semiconductores y observe el amplio uso de los materiales semiconductores de germanio y silicio. Revise las características de cada material.

SECCIÓN 2.7 Amperímetros y voltímetros

42. ¿Cuáles son las diferencias más importantes en la forma como se conectan los amperímetros y los voltímetros?

43. Si un amperímetro ofrece una lectura de 2.5 A durante un periodo de 4 min, determine la carga que pasó a través del medidor.

44. Entre dos puntos en un circuito eléctrico, un voltímetro ofrece una lectura de 12.5 V durante un periodo de 20 s. Si la corriente medida por un amperímetro es de 10 mA, determine la energía consumida y la carga que fluyó entre los dos puntos.

GLOSARIO

Aislantes Materiales en los que un voltaje muy alto debe ser aplicado para producir algún flujo de corriente que se puede medir.

Ampere (A) La unidad de medición del SI aplicada al flujo de carga a través de un conductor.

Amperímetro Instrumento diseñado para medir la corriente a través de elementos conectados en serie con el medidor.

Celda Fuente fundamental de energía eléctrica desarrollada mediante la conversión de energía química o solar.

Celda primaria Fuentes de voltaje que no pueden recargarse.

Celda secundaria Fuentes de voltaje que pueden recargarse.

Celda solar Fuentes de voltaje disponibles mediante la conversión de energía luminosa (fotones) en energía eléctrica.

Cobre Material cuyas propiedades físicas hacen que sea particularmente útil como conductor de electricidad.

Conductores Materiales que permiten un flujo generoso de electrones con muy poco voltaje aplicado.

Corriente directa Corriente que tiene una sola dirección (unidireccional) y magnitud fija en el tiempo.

Coulomb (C) La unidad fundamental de medición del SI para la carga. Es igual a la carga transportada por 6.242×10^{18} electrones.

Diferencia de potencial Diferencia algebraica en el potencial (o voltaje) entre dos puntos en un sistema eléctrico.

Electrolitos Elemento de contacto y fuente de iones entre los electrodos de una batería.

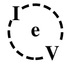
Electrón Partícula con polaridad negativa que orbita el núcleo del átomo.

Electrón libre Electrón no asociado con ningún átomo en particular, es relativamente libre de moverse a través de una estructura cristalina regular bajo la influencia de fuerzas externas.

Energía potencial Energía que una masa posee por virtud de su posición.

Fuente de corriente de cd Fuente que proporciona un nivel de corriente fija incluso cuando la carga a la que se aplica pueda causar que el voltaje en sus terminales cambie.

Generador de cd Fuente de voltaje de cd disponible mediante la rotación del eje del dispositivo por algún medio externo.



Gravedad específica Proporción del peso de un volumen dado de una sustancia respecto al peso de un volumen igual de agua a 4ºC.

Ion positivo Átomo que tiene carga neta positiva debido a la pérdida de uno de sus electrones cargados negativamente.

Ley de Coulomb Ecuación que define la fuerza de atracción o de repulsión entre dos cargas.

Neutrón Partícula sin carga eléctrica que se encuentra en el núcleo del átomo.

Núcleo Centro estructural de un átomo que contiene tanto protones como neutrones.

Protón Partícula de polaridad positiva que se encuentra en el núcleo de un átomo.

Rectificación Proceso por el cual una señal de ca se convierte a una que cuenta con un nivel de cd promedio.

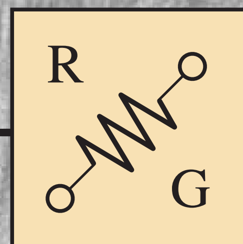
Semiconductor Material que tiene un valor de conductancia entre el de un aislante y el de un conductor. Es de gran importancia en la fabricación de dispositivos electrónicos semiconductores.

Valor nominal ampere-hora (Ah) Valor nominal de una fuente de energía que mostrará cuánto tiempo un nivel particular de corriente puede consumirse de una fuente.

Volt (V) Unidad de medición aplicada a la diferencia de potencial entre dos puntos. Si un joule de energía se requiere para mover un coulomb de carga entre dos puntos, la diferencia de potencial se dice que es de un volt.

Voltímetro Instrumento diseñado para medir el voltaje a través de un elemento o entre dos puntos dentro de una red.

3



Resistencia

3.1 INTRODUCCIÓN

El flujo de carga a través de cualquier material encuentra una fuerza opuesta que es similar en muchos aspectos a la fricción mecánica. A esta oposición, debida a las colisiones entre electrones y entre electrones y otros átomos en el material, *que convierte la energía eléctrica en otra forma de energía como el calor*, se le llama **resistencia** del material. La unidad de medición para la resistencia es el **ohm**, para el cual se emplea el símbolo Ω. El símbolo para la resistencia en circuitos se muestra en la figura 3.1 con la abreviatura gráfica para resistencia (R).

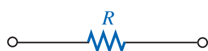


FIGURA 3.1
Símbolo y notación de la resistencia.

La resistencia de cualquier material con un área transversal uniforme se determina mediante los siguientes cuatro factores:

1. ***Material***
2. ***Longitud***
3. ***Área transversal***
4. ***Temperatura***

El material escogido, con su estructura molecular única, reaccionará diferencialmente a presiones para establecer una corriente a través de su núcleo. Los conductores que permiten un flujo de carga abundante con poca presión externa tendrán bajos niveles de resistencia, mientras que los aislantes tendrán altas características de resistencia.

Como podría esperarse, entre mayor es la trayectoria que la carga debe recorrer, mayor es el nivel de resistencia, mientras que a mayor área (y por tanto, espacio disponible), menor será la resistencia. La resistencia es entonces directamente proporcional a la longitud e inversamente proporcional al área.

Conforme la temperatura de la mayoría de los conductores aumenta, el movimiento incrementado de las partículas dentro de la estructura molecular vuelve más difícil que los portadores "libres" circulen, incrementándose así el nivel de la resistencia.

A una temperatura fija de 20°C (temperatura ambiente), la resistencia está relacionada con los otros tres factores por:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \text{(ohms, } \Omega\text{)} \qquad \textbf{(3.1)}$$

donde ρ (letra griega rho) es una característica del material llamada **resistividad**, l es la longitud de la muestra, y A es el área transversal de la muestra.

Las unidades de medición sustituidas en la ecuación (3.1) están relacionadas con la aplicación. Para alambres circulares, las unidades de medición son usualmente definidas como en la sección 3.2. Para la mayor parte de otras aplicaciones que implican importantes áreas como los circuitos integrados, las unidades son como se definen en la sección 3.4.

3.2 RESISTENCIA: ALAMBRES CIRCULARES

Para un alambre circular, las cantidades que aparecen en la ecuación (3.1) son definidas en la figura 3.2; para dos alambres del mismo tamaño físico a la misma temperatura, como se muestra en la figura 3.3(a),

a mayor resistividad, mayor resistencia.

Como se indica en la figura 3.3(b),

mayor longitud de un conductor, mayor resistencia.

La figura 3.3(c) revela que para las similares variables restantes,

a menor área transversal de un conductor, mayor resistencia.

Por último, la figura 3.3(d) establece que para alambres metálicos de construcción y material idéntico,

a mayor temperatura de un conductor, mayor resistencia.

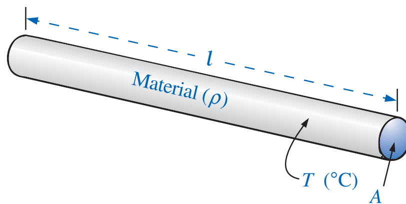
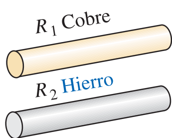


FIGURA 3.2
Factores que afectan la resistencia de un conductor.

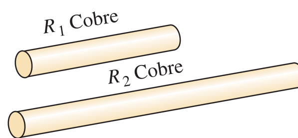
Para alambres circulares, las cantidades de la ecuación (3.1) tienen las siguientes unidades:

ρ:	CM-ohms/pies a T = 20°C
l:	pies
A:	mils circulares (CM)



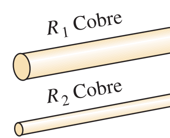
$\rho_2 > \rho_1$

(a)



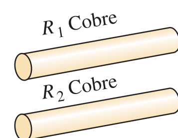
$l_2 > l_1$

(b)



$A_2 < A_1$

(c)



$T_2 > T_1$

(d)

FIGURA 3.3
Casos en que $R_2 > R_1$. Para cada caso, todos los parámetros restantes que controlan el nivel de resistencia son los mismos.

Observe que el área del conductor se mide en **mils circulares** (CM) y *no* en *metros cuadrados, pulgadas*, etc., según se ha determinado por la ecuación:

$$\text{Área (del círculo)} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \qquad \begin{matrix} r = \text{radio} \\ d = \text{diámetro} \end{matrix} \tag{3.2}$$

El *mil* es una unidad de medición para la longitud y está relacionado con la pulgada mediante:

$$\mathbf{1\ mil} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1000}}\ \mathbf{pulg}$$

o bien:

$$\mathbf{1000\ mils = 1\ pulg}$$

Por definición,

un alambre con un diámetro de 1 mil tiene un área de 1 mil circular (CM), como se muestra en la figura 3.4.

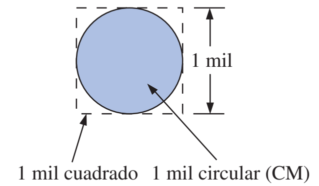


FIGURA 3.4
Definición del mil circular (CM).

Un mil cuadrado fue superpuesto al área de 1 CM en la figura 3.4 para mostrar claramente que tiene un área mayor que el mil circular.

Al aplicar la definición anterior a un alambre con diámetro de 1 mil, y aplicando la ecuación (3.2), tenemos:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(1\ \text{mil})^2 = \frac{\pi}{4}\ \text{mils cuadrados} \overset{\text{por definición}}{\equiv} 1\ \text{CM}$$

Por tanto,

$$\mathbf{1\ CM} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\ \mathbf{mils\ cuadrados} \tag{3.3a}$$

o bien,

$$\mathbf{1\ mil\ cuadrado} = \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{\pi}}\ \mathbf{CM} \tag{3.3b}$$

Al dividir la ecuación 3.3b obtendremos como resultado:

$$1\ \text{mil cuadrado} = \frac{4}{\pi}\ \text{CM} = 1.273\ \text{CM}$$

que ciertamente concuerda con la representación gráfica de la figura 3.4. Para un alambre con un diámetro de N mils (donde N puede ser cualquier número positivo),

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi N^2}{4}\ \text{mils cuadrados}$$

Al sustituir $4/\pi\ \text{CM} = 1$ mil cuadrado obtenemos:

$$A = \frac{\pi N^2}{4}(\text{mils cuadrados}) = \left(\frac{\cancel{\pi} N^2}{\cancel{4}}\right)\left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{\pi}}\ \text{CM}\right) = N^2\ \text{CM}$$

Como $d = N$, el área en mils circulares es simplemente igual al diámetro en mils cuadrados; esto es,

$$A_{\text{CM}} = (d_{\text{mils}})^2 \tag{3.4}$$

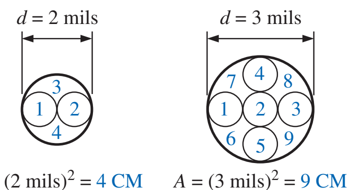
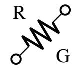


FIGURA 3.5
Verificación de la ecuación (3.4): $A_{CM} = (d_{mils})^2$.

La verificación de que un área puede ser simplemente el diámetro al cuadrado se proporciona en parte con la figura 3.5 para diámetros de 2 y 3 mils. Aunque algunas áreas no son circulares, tienen la misma área que 1 mil circular.



Por tanto, en el futuro, para encontrar el área en mils circulares, el diámetro debe ser convertido primero a mils. Como 1 mil = 0.001 pulg, si el diámetro está dado en pulgadas, simplemente mueva el punto decimal tres lugares hacia la derecha. Por ejemplo,

$$0.02 \text{ pulg} = 0.020 \text{ mils} = 20 \text{ mils}$$

Si el diámetro está dado en forma de fracción, primero conviértalo a forma decimal y luego proceda como antes. Por ejemplo,

$$\frac{1}{8} \text{ pulg} = 0.125 \text{ pulg} = 125 \text{ mils}$$

La constante ρ (resistividad) es diferente para cada material. Su valor es la resistencia de un alambre de 1 pie de longitud por 1 mil de diámetro, medida a 20°C (Figura 3.6). La unidad de medición para ρ puede determinarse con la ecuación (3.1) despejando primero ρ y sustituyendo luego las unidades de las otras cantidades. Esto es,

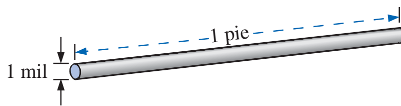


FIGURA 3.6
Definición de la constante ρ (resistividad).

$$\rho = \frac{AR}{l}$$

y $$\text{Unidades de } \rho = \frac{\textbf{CM}\cdot\boldsymbol{\Omega}}{\textbf{pies}}$$

La resistividad ρ se mide también en ohms por mil-pie, de acuerdo con la figura 3.6, o en *ohm-metros* en el Sistema Internacional de unidades (SI). En la tabla 3.1 se dan algunos valores típicos de ρ.

TABLA 3.1
Resistividad (ρ) de varios materiales.

Material	ρ @ 20°C
Plata	9.9
Cobre	**10.37**
Oro	14.7
Aluminio	17.0
Tungsteno	33.0
Níquel	47.0
Hierro	74.0
Constantán	295.0
Cromoníquel	600.0
Calorita	720.0
Carbono	21,000.0

EJEMPLO 3.1 ¿Cuál es la resistencia de un alambre de cobre de 100 pies de longitud y diámetro de 0.020 pulg a 20°C?

Solución:

$$\rho = 10.37 \frac{\text{CM}\cdot\Omega}{\text{pies}} \qquad 0.020 \text{ pulg} = 20 \text{ mils}$$

$$A_{\text{CM}} = (d_{\text{mils}})^2 = (20 \text{ mils})^2 = 400 \text{ CM}$$

$$R = \rho\frac{l}{A} = \frac{(10.37 \text{ CM}\cdot\Omega/\text{pies})(100 \text{ pies})}{400 \text{ CM}}$$

$$R = \mathbf{2.59\ \Omega}$$

EJEMPLO 3.2 Un número indeterminado de pies de alambre ha sido utilizado de la caja que aparece en la figura 3.7. Encuentre la longitud del alambre de cobre restante si su diámetro es de 1/16 pulg y la resistencia de 0.5 Ω.

Solución:

$$\rho = 10.37 \text{ CM}\cdot\Omega/\text{pies} \qquad \frac{1}{16} \text{ pulg} = 0.0625 \text{ pulg} = 62.5 \text{ mils}$$

$$A_{\text{CM}} = (d_{\text{mils}})^2 = (62.5 \text{ mils})^2 = 3906.25 \text{ CM}$$

$$R = \rho\frac{l}{A} \Rightarrow l = \frac{RA}{\rho} = \frac{(0.5\ \Omega)(3906.25 \text{ CM})}{10.37 \dfrac{\text{CM}\ \ \Omega}{\text{pies}}} = \frac{1953.125}{10.37}$$

$$l = \mathbf{188.34 \text{ pies}}$$

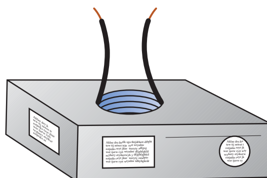


FIGURA 3.7
Ejemplo 3.2.

EJEMPLO 3.3 ¿Cuál es la resistencia de una placa de cobre, utilizada en el panel de distribución de potencia de un edificio de oficinas alto, que tiene las dimensiones indicadas en la figura 3.8?

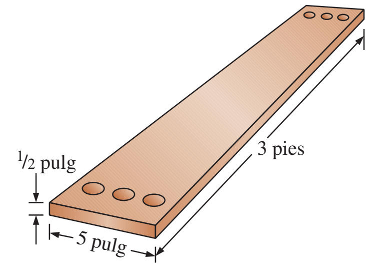


FIGURA 3.8
Ejemplo 3.3.

Solución:

$$A_{CM}\begin{cases} 5.0 \text{ pulg} = 5000 \text{ mils} \\ \frac{1}{2} \text{ pulg} = 500 \text{ mils} \\ A = (5000 \text{ mils})(500 \text{ mils}) = 2.5 \times 10^6 \text{ mils cuadrados} \\ \quad = 2.5 \times 10^6 \cancel{\text{mils cuadrados}}\left(\frac{4/\pi \text{ CM}}{1 \cancel{\text{ mil cuadrado}}}\right) \\ A = 3.185 \times 10^6 \text{ CM} \end{cases}$$

$$R = \rho\frac{l}{A} = \frac{(10.37 \text{ CM}\cdot\Omega/\text{pies})(3 \text{ pies})}{3.185 \times 10^6 \text{ CM}} = \frac{31.110}{3.185 \times 10^6}$$

$$R = \mathbf{9.768 \times 10^{-6}\ \Omega}$$

(bastante pequeño, 0.000009768 Ω)

Veremos en los capítulos siguientes que a menor resistencia de un conductor, menores son las pérdidas en la conducción de la fuente a la carga. Similarmente, como la resistividad es un factor importante al determinar la resistencia de un conductor, a menor resistividad, menor será la resistencia para un conductor del mismo tamaño. La tabla 3.1 sugiere que la plata, el cobre, el oro y el aluminio son los mejores conductores y los más comunes. Sin embargo, en general, hay otros factores como la **maleabilidad** (capacidad de un material de ser moldeado), la **ductilidad** (capacidad de un material de ser estirado en alambres largos y delgados), la sensibilidad a la temperatura, la resistencia al uso rudo, y, por supuesto, el costo, que deben ser considerados al escoger un conductor para una aplicación en particular.

En general, el cobre es el material más ampliamente utilizado por ser muy maleable, dúctil y accesible; tiene buenas características térmicas y es menos caro que el oro o la plata. Sin embargo, ciertamente no es barato. Por ejemplo, en edificios por ser demolidos, el alambrado es retirado antes para recuperar el cobre. En algún tiempo el aluminio fue introducido como alambrado general por ser más barato que el cobre, pero sus características térmicas generaron algunas dificultades. Se encontró que el calentamiento debido al flujo de la corriente y el enfriamiento que ocurría cuando se apagaba el circuito resultaban en expansiones y contracciones del alambre de aluminio hasta el punto en que las conexiones podían aflojarse y presentar efectos colaterales peligrosos. Sin embargo, el aluminio aún se utiliza en áreas como la manufactura de circuitos integrados y en situaciones donde las conexiones pueden efectuarse con seguridad. La plata y el oro son, por supuesto, mucho más caros que el cobre o el aluminio, pero hay casos en que el costo se justifica. La plata tiene excelentes características de plateado para preparaciones de superficies, y el oro se utiliza muy extensamente en circuitos integrados. El tungsteno tiene tres veces la resistividad del cobre, pero hay ocasiones en que sus características físicas (durabilidad, dureza) son las consideraciones primordiales.

3.3 TABLA DE CALIBRES DE ALAMBRE

La tabla de calibres de alambre fue diseñada principalmente para estandarizar el tamaño del alambre producido en Estados Unidos. Como resultado, los

TABLA 3.2

Dimensiones de los calibres de alambre estadounidense (AWG).

	AWG #	Área (CM)	Ω/1000 pies a 20°C	Corriente máxima permisible para RHW aislamiento (A)*
(4/0)	**0000**	211,600	0.0490	**230**
(3/0)	**000**	167,810	0.0618	**200**
(2/0)	**00**	133,080	0.0780	**175**
(1/0)	**0**	105,530	0.0983	**150**
	1	83,694	0.1240	**130**
	2	66,373	0.1563	**115**
	3	52,634	0.1970	**100**
	4	41,742	0.2485	**85**
	5	33,102	0.3133	—
	6	26,250	0.3951	**65**
	7	20,816	0.4982	—
	8	16,509	0.6282	**50**
	9	13,094	0.7921	—
	10	10,381	0.9989	**30**
	11	8,234.0	1.260	—
	12	6,529.0	1.588	**20**
	13	5,178.4	2.003	—
	14	4,106.8	2.525	**15**
	15	3,256.7	3.184	
	16	2,582.9	4.016	
	17	2,048.2	5.064	
	18	1,624.3	6.385	
	19	1,288.1	8.051	
	20	1,021.5	10.15	
	21	810.10	12.80	
	22	642.40	16.14	
	23	509.45	20.36	
	24	404.01	25.67	
	25	320.40	32.37	
	26	254.10	40.81	
	27	201.50	51.47	
	28	159.79	64.90	
	29	126.72	81.83	
	30	100.50	103.2	
	31	79.70	130.1	
	32	63.21	164.1	
	33	50.13	206.9	
	34	39.75	260.9	
	35	31.52	329.0	
	36	25.00	414.8	
	37	19.83	523.1	
	38	15.72	659.6	
	39	12.47	831.8	
	40	9.89	1049.0	

*No más de tres conductores en ducto, cable o enterramiento directo.

Fuente: Reimpreso con permiso de la NFPA núm. SPP-6C del National Electrical Code®, copyright© 1996, National Fire Protection Association, Quincy, MA 02269. Este material reimpreso no es la posición completa y oficial de la NFPA la cual sólo está representada por la norma en su totalidad. *National Electrical Code* es una marca comercial registrada de la National Fire Protection Association, Inc., Quincy, MA para una publicación eléctrica que aparece cada tres años. El término *National Electrical Code*, como se usa aquí, significa la publicación trianual que constituye el National Electrical Code y se usa con permiso de la National Fire Protection Association.

fabricantes tienen un mayor mercado y el consumidor sabe que siempre habrá tamaños estándar de alambre disponibles. La tabla está configurada para ayudar al usuario en todo lo posible; usualmente incluye datos como el área transversal en mils circulares, diámetros en mils, ohms por cada 1000 pies a 20°C, y peso por 1000 pies.

Los calibres de alambre estadounidense (AWG, por *American Wire Gage*) están dados en la tabla 3.2 para alambres de cobre redondos sólidos. Una columna que indica la corriente máxima permisible en ampere, determinada por la Asociación Nacional de Protección contra Incendios estadounidense, también ha sido incluida.

Los calibres seleccionados tienen una interesante relación: por cada caída en 3 números de calibre, el área se duplica; y por cada caída en 10 números de calibre, el área aumenta por un factor de 10.

Al examinar la ecuación (3.1), notamos también que *la duplicación del área reduce la resistencia a la mitad, e incrementando el área por un factor de 10 disminuye la resistencia a 1/10 de la original*, manteniéndose todo lo demás constante.

Los calibres reales de los alambres de la tabla 3.2 se muestran en la figura 3.9 con algunas de sus áreas de aplicación. Algunos ejemplos en los que se usa la tabla 3.2 son los siguientes:

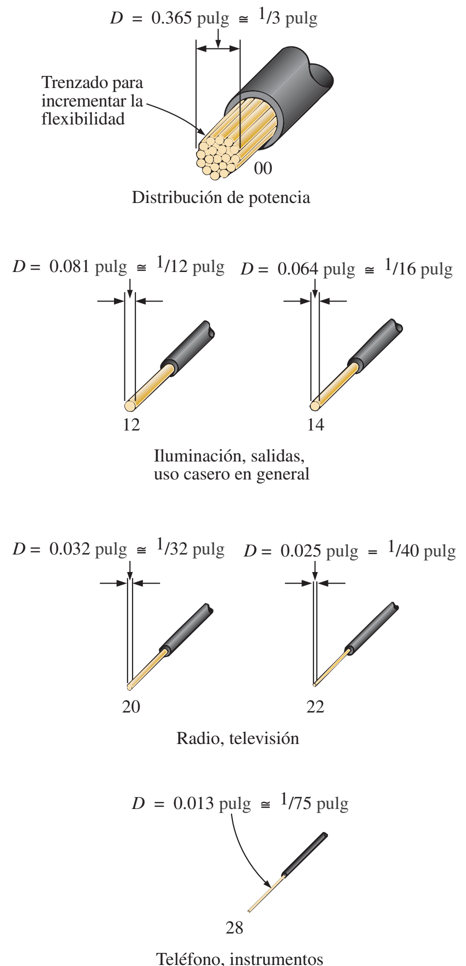


FIGURA 3.9
Medidas populares de alambre y algunas de sus áreas de aplicación.

EJEMPLO 3.4 Encuentre la resistencia de 650 pies de alambre de cobre del número 8 ($T = 20°C$).

Solución: Para alambre de cobre del número 8 (sólido), Ω/1000 pies a 20°C = 0.6282 Ω, y

$$650 \text{ pies}\left(\frac{0.6282\ \Omega}{1000 \text{ pies}}\right) = \mathbf{0.408\ \Omega}$$

EJEMPLO 3.5 ¿Cuál es el diámetro, en pulgadas, de un alambre de cobre del número 12?

Solución: Para alambre de cobre del número 12 (sólido), $A = 6529.9$ CM, y

$$d_{\text{mils}} = \sqrt{A_{\text{CM}}} = \sqrt{6529.9 \text{ CM}} \cong 80.81 \text{ mils}$$
$$d = \mathbf{0.0808\ pulg} \text{ (o cercano a 1/12 pulg)}$$

EJEMPLO 3.6 Para el sistema de la figura 3.10, la resistencia total de *cada* línea de potencia no puede exceder de 0.025 Ω, y la corriente máxima a extraer por la carga es de 95 A. ¿Qué calibre de alambre debe usarse?

Solución:

$$R = \rho\frac{l}{A} \Rightarrow A = \rho\frac{l}{R} = \frac{(10.37 \text{ CM}\cdot\Omega/\text{pies})(100 \text{ pies})}{0.025\ \Omega} = 41{,}480 \text{ CM}$$

Usando la tabla 3.2, escogemos el alambre con el área inmediatamente mayor, que es el número 4, para satisfacer el requisito de resistencia. Sin embargo, advertimos que por la línea deben fluir 95 A. Esta especificación requiere que sea usado alambre del número 3 ya que el del número 4 puede llevar sólo una corriente máxima de 85 A.

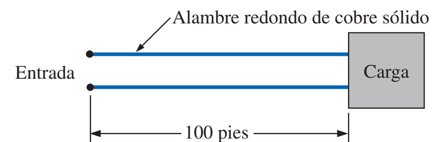
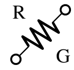


FIGURA 3.10
Ejemplo 3.6.

3.4 RESISTENCIA: UNIDADES MÉTRICAS

El diseño de elementos resistivos para varias áreas de aplicación, inclusive el de los resistores de película delgada y circuitos integrados, utiliza unidades métricas para las cantidades de la ecuación (3.1). En unidades SI, la resistividad se mediría en ohm-metros, el área en metros cuadrados y la longitud en metros.



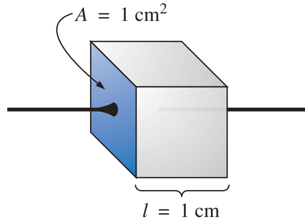


FIGURA 3.11
Definición de ρ en ohm-centímetros.

TABLA 3.3
Resistividad (ρ) en ohm-centímetros para varios materiales.

Plata	1.645×10^{-6}
Cobre	$\mathbf{1.723 \times 10^{-6}}$
Oro	2.443×10^{-6}
Aluminio	2.825×10^{-6}
Tungsteno	5.485×10^{-6}
Níquel	7.811×10^{-6}
Hierro	12.299×10^{-6}
Tantalio	15.54×10^{-6}
Cromoníquel	99.72×10^{-6}
Óxido de estaño	250×10^{-6}
Carbono	3500×10^{-6}

Sin embargo, el metro es generalmente una unidad de medición muy grande para la mayor parte de las aplicaciones, por lo que usualmente se emplea el centímetro. Las dimensiones resultantes para la ecuación (3.1) son, por tanto,

ρ:	ohm-centímetros
l:	centímetros
A:	centímetros cuadrados

Las unidades para ρ pueden derivarse de:

$$\rho = \frac{RA}{l} = \frac{\Omega \cdot \text{cm}^2}{\text{cm}} = \Omega \cdot \text{cm}$$

La resistividad de un material es realmente la resistencia de una muestra como la que aparece en la figura 3.11. La tabla 3.3 proporciona una lista de valores de ρ en ohm-centímetros. Observe que el área está expresada ahora en centímetros cuadrados, la cual puede ser determinada usando la ecuación básica $A = \pi d^2/4$, eliminando la necesidad de trabajar con mils circulares, la unidad especial de medición asociada con alambres circulares.

EJEMPLO 3.7 Determine la resistencia de 100 pies de alambre telefónico del número 28 con diámetro de 0.0126 pulgadas.

Solución: Conversión de unidades:

$$l = 100 \text{ pies}\left(\frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}}\right)\left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ pulg}}\right) = 3048 \text{ cm}$$

$$d = 0.0126 \text{ pulg}\left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ pulg}}\right) = 0.032 \text{ cm}$$

Por tanto,

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{(3.1416)(0.032 \text{ cm})^2}{4} = 8.04 \times 10^{-4} \text{ cm}^2$$

$$R = \rho\frac{l}{A} = \frac{(1.723 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{cm})(3048 \text{ cm})}{8.04 \times 10^{-4} \text{ cm}^2} \cong \mathbf{6.5\ \Omega}$$

Usando las unidades para alambres circulares y la tabla 3.2 para el área de un alambre del número 28 encontramos:

$$R = \rho\frac{l}{A} = \frac{(10.37 \text{ CM} \cdot \Omega/\text{pies})(100 \text{ pies})}{159.79 \text{ CM}} \cong \mathbf{6.5\ \Omega}$$

EJEMPLO 3.8 Determine la resistencia del resistor de película delgada de la figura 3.12 si la **resistencia laminar** R_s (definida por $R_s = \rho/d$) es de 100 Ω.

Solución: Para materiales depositados del mismo espesor, es común emplear el factor de resistencia laminar en el diseño de resistores de película delgada.

La ecuación (3.1) se puede escribir como:

$$R = \rho\frac{l}{A} = \rho\frac{l}{dw} = \left(\frac{\rho}{d}\right)\left(\frac{l}{w}\right) = R_s\frac{l}{w}$$

donde l es la longitud de la muestra y w el ancho. Sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos:

$$R = R_s\frac{l}{w} = \frac{(100\ \Omega)(0.6 \text{ cm})}{0.3 \text{ cm}} = \mathbf{200\ \Omega}$$

como podría esperarse ya que $l = 2w$.

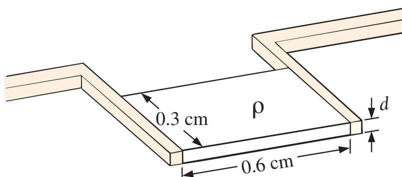


FIGURA 3.12
Resistor de película delgada (véase la figura 3.22).

El factor de conversión entre la resistividad en mil-ohms circulares por pie y ohm-centímetros es el siguiente:

$$\rho\ (\Omega \cdot \text{cm}) = (1.662 \times 10^{-7}) \times (\text{valor en CM} \cdot \Omega/\text{pies})$$

Por ejemplo, para cobre, $\rho = 10.37\ \text{CM} \cdot \Omega/\text{pies}$:

$$\begin{aligned}\rho\ (\Omega \cdot \text{cm}) &= 1.662 \times 10^{-7}(10.37\ \text{CM} \cdot \Omega/\text{pies}) \\ &= 1.723 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{cm}\end{aligned}$$

como se indica en la tabla 3.3

La resistividad en el diseño de circuitos integrados está dada normalmente en unidades de ohm-centímetro, aunque las tablas a menudo proporcionan ρ en ohm-metros o microohm-centímetros. Usando la técnica de conversión del capítulo 1, encontramos que el factor de conversión entre ohm-centímetros y ohm-metros es el siguiente:

$$1.723 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \cancel{\text{cm}}\left[\frac{1\ \text{m}}{100\ \cancel{\text{cm}}}\right] = \frac{1}{100}[1.723 \times 10^{-6}]\ \Omega \cdot \text{m}$$

o el valor en ohm-metros es 1/100 del valor en ohm-centímetros,

$$\rho\ (\Omega \cdot \text{m}) = \left(\frac{1}{100}\right) \times (\text{valor en } \Omega \cdot \text{cm})$$

De modo similar:

$$\rho\ (\mu\Omega \cdot \text{cm}) = (10^6) \times (\text{valor en } \Omega \cdot \text{cm})$$

Para fines de comparación, en la tabla 3.4 se proporcionan valores típicos de ρ en ohm-centímetros para conductores, semiconductores y aislantes.

TABLA 3.4
Comparación de niveles de ρ en $\Omega \cdot$cm.

Conductor	Semiconductor	Aislante
Cobre 1.723×10^{-6}	Ge 50 Si 200×10^3 GaAs 70×10^6	En general: 10^{15}

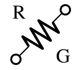
En particular, observe la diferencia en potencias de diez entre conductores y aislantes (10^{21}) —una diferencia de enormes proporciones. Existe una diferencia considerable en los niveles de ρ para la lista de semiconductores, pero la diferencia en potencias de diez entre los niveles de un conductor y un aislante es por lo menos de 10^6 para cada uno de los semiconductores en la lista.

3.5 EFECTOS DE TEMPERATURA

La temperatura tiene un efecto considerable sobre la resistencia de conductores, semiconductores y aislantes.

Conductores

Los conductores tienen un número abundante de electrones libres, y cualquier introducción de energía térmica tendrá poco impacto en el número total de por-



tadores libres. De hecho, la energía térmica sólo aumentará la intensidad del movimiento aleatorio de las partículas dentro del material y hará más difícil que se establezca un flujo general de electrones en cualquier dirección. El resultado es que:

para buenos conductores, un aumento en la temperatura resultará en un aumento en el nivel de resistencia. En consecuencia, los conductores tienen un coeficiente térmico de resistencia positivo.

La gráfica de la figura 3.13(a) tiene un coeficiente térmico positivo.

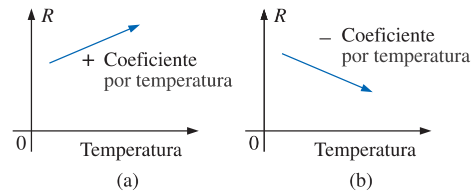


FIGURA 3.13
(a) Coeficiente térmico positivo —conductores; (b) coeficiente térmico negativo —semiconductores.

Semiconductores

En los semiconductores, un aumento de temperatura impartirá cierta energía térmica al sistema que resultará en un aumento en el número de portadores libres para conducción en el material. El resultado es que:

para materiales semiconductores, un aumento de temperatura resultará en una disminución en el nivel de resistencia. En consecuencia, los semiconductores tienen coeficientes térmicos de resistencia negativos.

El termistor y la celda fotoconductiva de las secciones 3.10 y 3.11 de este capítulo son excelentes ejemplos de dispositivos semiconductores con coeficientes térmicos negativos. La gráfica de la figura 3.13(b) tiene un coeficiente térmico negativo.

Aislantes

Igual que en los semiconductores, un aumento de temperatura resultará en una disminución en la resistencia de un aislante. El resultado es un coeficiente térmico de resistencia negativo.

Temperatura absoluta inferida

La figura 3.14 revela que para el cobre (y para la mayor parte de los conductores metálicos), la resistencia aumenta casi linealmente (según una relación de línea recta) con un incremento de la temperatura. Como la temperatura puede tener un efecto pronunciado sobre la resistencia de un conductor, es importante disponer de algún método para determinar la resistencia a cualquier temperatura dentro de límites operativos. Una ecuación adecuada para este fin se puede obtener aproximando la curva de la figura 3.14 mediante la línea recta segmentada que interseca la escala de temperatura a −234.5°C. Aunque la curva real se extiende hasta el **cero absoluto** (−273.15°C, o 0 K), la aproximación de línea recta es bastante precisa para el intervalo normal de temperaturas de operación. A dos temperaturas diferentes, T_1 y T_2, la resistencia del cobre es R_1 y R_2, como se indica sobre la curva. Por triángulos semejantes podemos desarrollar una relación matemática entre esos valores de resistencias

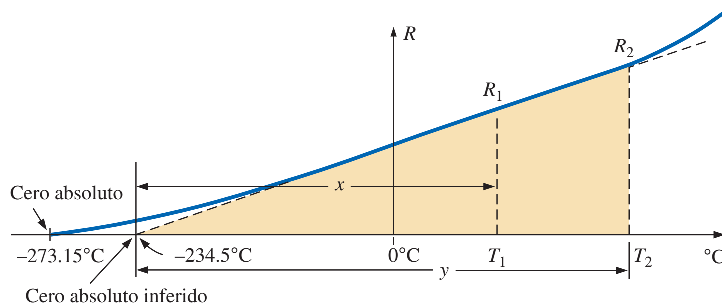


FIGURA 3.14
Efecto de la temperatura sobre la resistencia del cobre.

a diferentes temperaturas. Sea x la distancia desde $-234.5°C$ hasta T_1 e y la distancia desde $-234.5°C$ hasta T_2, como se muestra en la figura 3.14. Por triángulos semejantes,

$$\frac{x}{R_1} = \frac{y}{R_2}$$

o bien:

$$\boxed{\frac{234.5 + T_1}{R_1} = \frac{234.5 + T_2}{R_2}} \qquad \textbf{(3.5)}$$

A la temperatura de $-234.5°C$ se le denomina **temperatura absoluta inferida** del cobre. Para diferentes materiales conductores, la intersección de la aproximación de línea recta ocurrirá a diferentes temperaturas. En la tabla 3.5 se dan algunos valores típicos.

TABLA 3.5
Temperaturas absolutas inferidas (T_i).

Material	°C
Plata	−243
Cobre	**−234.5**
Oro	−274
Aluminio	−236
Tungsteno	−204
Níquel	−147
Hierro	−162
Cromoníquel	−2,250
Constantán	−125,000

El signo menos no aparece con la temperatura absoluta inferida en ningún lado de la ecuación (3.5) porque x y y son las *distancias* desde $-234.5°C$ hasta T_1 y T_2, respectivamente, y por tanto son sólo magnitudes. Para T_1 y T_2 menores que cero, x y y son menores que $-234.5°C$, y las distancias son las diferencias entre la temperatura absoluta inferida y la temperatura de interés.

La ecuación (3.5) puede ser adaptada fácilmente a cualquier material insertando la apropiada temperatura absoluta inferida; por tanto, puede escribirse como sigue:

$$\boxed{\frac{|T_1| + T_1}{R_1} = \frac{|T_1| + T_2}{R_2}} \qquad \textbf{(3.6)}$$

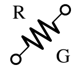
donde $|T_1|$ indica que la temperatura absoluta inferida del material implicado es insertada como un valor positivo en la ecuación. En general, por tanto, asocie el signo sólo con T_1 y T_2.

EJEMPLO 3.9 Si la resistencia de un alambre de cobre es de 50 Ω a 20°C, ¿cuál es su resistencia a 100°C (punto de ebullición del agua)?

Solución: Ecuación (3.5):

$$\frac{234.5°C + 20°C}{50\ \Omega} = \frac{234.5°C + 100°C}{R_2}$$

$$R_2 = \frac{(50\ \Omega)(334.5°C)}{254.5°C} = \mathbf{65.72\ \Omega}$$



EJEMPLO 3.10 Si la resistencia de un alambre de cobre en el punto de congelación (0°C) es de 30 Ω, ¿cuál es su resistencia a −40°C?

Solución: Ecuación (3.5):

$$\frac{234.5°\text{C} + 0}{30\ \Omega} = \frac{234.5°\text{C} - 40°\text{C}}{R_2}$$

$$R_2 = \frac{(30\ \Omega)(194.5°\text{C})}{234.5°\text{C}} = \mathbf{24.88\ \Omega}$$

EJEMPLO 3.11 Si la resistencia de un alambre de aluminio a temperatura ambiente (20°C) es de 100 mΩ (medida por un miliohmímetro), ¿a qué temperatura aumentará su resistencia a 120 mΩ?

Solución: Ecuación (3.5):

$$\frac{236°\text{C} + 20°\text{C}}{100\ \text{m}\Omega} = \frac{236°\text{C} + T_2}{120\ \text{m}\Omega}$$

y

$$T_2 = 120\ \text{m}\Omega\left(\frac{256°\text{C}}{100\ \text{m}\Omega}\right) - 236°\text{C}$$

$$T_2 = \mathbf{71.2°C}$$

Coeficiente térmico de resistencia

Existe una segunda ecuación para calcular la resistencia de un conductor a diferentes temperaturas. Si se define:

$$\alpha_{20} = \frac{1}{|T_1| + 20°\text{C}} \qquad (\Omega/°\text{C}/\Omega) \qquad \textbf{(3.7)}$$

como el **coeficiente térmico de resistencia** a 20°C, and R_{20} es la resistencia de la muestra a 20°C, la resistencia R_1 a una temperatura T_1 se determina mediante:

$$R_1 = R_{20}[1 + \alpha_{20}(T_1 - 20°\text{C})] \qquad \textbf{(3.8)}$$

Han sido evaluados los valores de α_{20} para diferentes materiales, y algunos se presentan en la tabla 3.6.

La ecuación (3.8) puede escribirse en la siguiente forma:

$$\alpha_{20} = \frac{\left(\dfrac{R_1 - R_{20}}{T_1 - 20°\text{C}}\right)}{R_{20}} = \frac{\Delta R}{\Delta T}$$

de la cual se definen las unidades de Ω/°C/Ω para α_{20}.

Como $\Delta R/\Delta T$ es la pendiente de la curva de la figura 3.14, podemos concluir que:

entre mayor es el coeficiente térmico de resistencia de un material, más sensible es el nivel de resistencia a cambios de temperatura.

En la tabla 3.5 vemos que el cobre es más sensible a variaciones de temperatura que la plata, el oro o el aluminio, aunque las diferencias son bastante pequeñas. La pendiente definida por a_{20} para el constantán es tan pequeña que la curva es casi horizontal.

TABLA 3.6
Coeficiente térmico de resistencia para varios conductores a 20°C.

Material	**Coeficiente térmico (α_{20})**
Plata	0.0038
Cobre	**0.00393**
Oro	0.0034
Aluminio	0.00391
Tungsteno	0.005
Níquel	0.006
Hierro	0.0055
Constantán	0.000008
Cromoníquel	0.00044

Como la R_{20} de la ecuación (3.8) es la resistencia del conductor a 20°C y T_1 – 20°C es el cambio de temperatura desde 20°C, la ecuación (3.8) puede escribirse de la siguiente manera:

$$R = \rho\frac{l}{A}[1 + \alpha_{20}\ \Delta T] \tag{3.9}$$

que es una ecuación para la resistencia en términos de todos los parámetros de control.

PPM/°C

En los resistores, así como en los conductores, la resistencia cambia en la temperatura. La especificación se proporciona normalmente en partes por millón por grado Celsius **(PPM/°C)**, lo que da una indicación inmediata del nivel de sensibilidad del resistor a la temperatura. Para resistores, un nivel de 5000 PPM es considerado alto, mientras que 20 PPM es bastante bajo. Una característica de 1000 PPM/°C revela que un cambio de 1° en temperatura ocasionará un cambio en resistencia igual a 1000 PPM, o 1000/1,000,000 = 1/1000 de su valor nominal —lo que no es un cambio importante para la mayoría de las aplicaciones—. Sin embargo, un cambio de 10° ocasionará un cambio igual a 1/100 (1%) del valor nominal, lo cual empieza a ser significativo. La importancia, por tanto, reside no sólo en el nivel PPM sino también en el rango esperado de variación de la temperatura.

En forma de ecuación, el cambio en resistencia está dado por:

$$\Delta R = \frac{R_{\text{nominal}}}{10^6}(\text{PPM})(\Delta T) \tag{3.10}$$

donde R_{nominal} es el valor nominal del resistor a temperatura ambiente y ΔT es el cambio en temperatura medido desde el nivel de referencia de 20°C.

EJEMPLO 3.12 Para un resistor de composición de carbono de 1 kΩ con una especificación PPM de 2500, determine la resistencia a 60°C.

Solución:

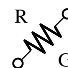
$$\Delta R = \frac{1000\ \Omega}{10^6}(2500)(60°\text{C} - 20°\text{C})$$
$$= 100\ \Omega$$

y

$$R = R_{\text{nominal}} + \Delta R = 1000\ \Omega + 100\ \Omega$$
$$= \mathbf{1100\ \Omega}$$

3.6 SUPERCONDUCTORES

No hay duda de que el campo de la electricidad y la electrónica es uno de los más apasionantes del siglo XX. Aunque aparecen nuevos adelantos casi semanalmente gracias a las extensas actividades de investigación y desarrollo, de vez en cuando se da un paso adelante muy especial que mantiene a todos los especialistas a la expectativa de lo que podrá desarrollarse en el futuro cercano. Tal nivel de entusiasmo e interés rodea en la actualidad a la investigación conducida para desarrollar un **superconductor** a temperatura ambiente —avance



comparable a la introducción de dispositivos semiconductores como el transistor (que reemplazó a los bulbos), la comunicación inalámbrica o la luz eléctrica—. Las implicaciones de un desarrollo así son de tan largo alcance que resulta difícil predecir el vasto impacto que tendrá en todo el campo asociado.

La intensidad del esfuerzo de investigación en todo el mundo hoy en día para desarrollar un superconductor a temperatura ambiente es descrito por algunos investigadores como "increíble, contagioso, emocionante y exigente", pero una aventura en la que ellos realmente valoran la oportunidad de estar implicados. El progreso en el campo desde 1986 sugiere que el uso de la superconductividad en aplicaciones comerciales crecerá muy rápidamente en las décadas futuras. Es, en efecto, una apasionante era llena de creciente expectación. ¿Por qué este interés en los superconductores? ¿Qué se espera de ellos? En pocas palabras,

los superconductores ***son conductores de carga eléctrica que, para todo propósito práctico, tienen resistencia cero.***

En un conductor convencional los electrones viajan a velocidades promedio de 1600 km/s (pueden cruzar Estados Unidos en aproximadamente 3 segundos), aun cuando la teoría de la relatividad de Einstein sugiere que la velocidad máxima de transmisión de la información es la velocidad de la luz, o 300,000 km/s. La velocidad relativamente baja de la conducción convencional se debe a colisiones con otros átomos existentes en el material conductor, a fuerzas repulsivas entre los electrones (cargas iguales se repelen), a la agitación térmica que resulta en trayectorias indirectas debido al movimiento incrementado de átomos vecinos, a impurezas en el conductor, etc. En el estado superconductivo, existe un apareamiento o enlace de electrones, denotado por el **efecto Cooper**, en el que los electrones viajan en pares y se ayudan entre sí para mantener una velocidad considerablemente elevada a través del medio conductor. En algún sentido esto es semejante a una "asociación" establecida por corredores o ciclistas de competencias. Existe una oscilación de la energía entre los socios e incluso entre "nuevos" socios (según surja la necesidad) para asegurar el paso a través del conductor a la más alta velocidad posible con el menor gasto total de energía.

Si bien el concepto de superconductividad apareció primero en 1911, no fue sino hasta 1986 que la posibilidad de conseguirla a temperatura ambiente se volvió una meta a conquistar por parte de la comunidad de investigadores. Durante 74 años la superconductividad pudo ser establecida sólo a temperaturas más frías que 23 K. (La temperatura Kelvin es universalmente aceptada como la unidad de medición de la temperatura para efectos superconductivos. Recuerde que $K = 273.15° + °C$, por lo que una temperatura de 23 K es de $-250°C$, o de $-418°F$.) Sin embargo, en 1986 los físicos Alex Muller y George Bednorz del IBM Zurich Research Center encontraron un material cerámico, el óxido de lantano, bario y cobre, que mostró superconductividad a 30 K. Aunque ello no parecía ser un paso significativo hacia adelante, introdujo un cambio de rumbo en el esfuerzo de investigación e incitó a otros a mejorar el nuevo estándar. En octubre de 1987 Muller y Bednorz recibieron el Premio Nobel por su contribución a tan importante área de desarrollo.

En sólo unos cuantos meses, los profesores Paul Chu de la Universidad de Houston y Man Kven Wu de la Universidad de Alabama elevaron la temperatura a 95 K usando un superconductor de óxido de itrio, bario y cobre. El resultado fue un nivel de entusiasmo en la comunidad científica que llevó la investigación en el área a una nueva etapa de esfuerzo e inversión. La mayor repercusión de tal descubrimiento fue que el nitrógeno líquido (punto de ebullición a 77 K) podía utilizarse para llevar el material a la temperatura requerida, en vez de helio líquido que hierve a 4 K. Ello propicia un ahorro enorme en el

costo de enfriamiento ya que el helio líquido es, por lo menos, diez veces más caro que el nitrógeno líquido. En el mismo sentido, se han logrado algunos éxitos al alcanzar 125 y 162 K usando un compuesto de talio (desafortunadamente, sin embargo, el talio es una sustancia muy venenosa).

La figura 3.15 revela claramente que hubo poco avance en el factor temperatura para superconductores hasta el descubrimiento de 1986. La curva toma entonces un crecimiento sostenido, sugiriendo que los superconductores a temperatura ambiente pueden llegar a ser accesibles en unos cuantos años. Sin embargo, a menos que se tenga un avance significativo en el futuro cercano, esta meta no parece ya factible; pero el esfuerzo continúa y está recibiendo un nivel de financiamiento y atención mundial en aumento constante. En la actualidad, un número creciente de empresas están tratando de capitalizar los éxitos ya alcanzados, como veremos más adelante en esta sección.

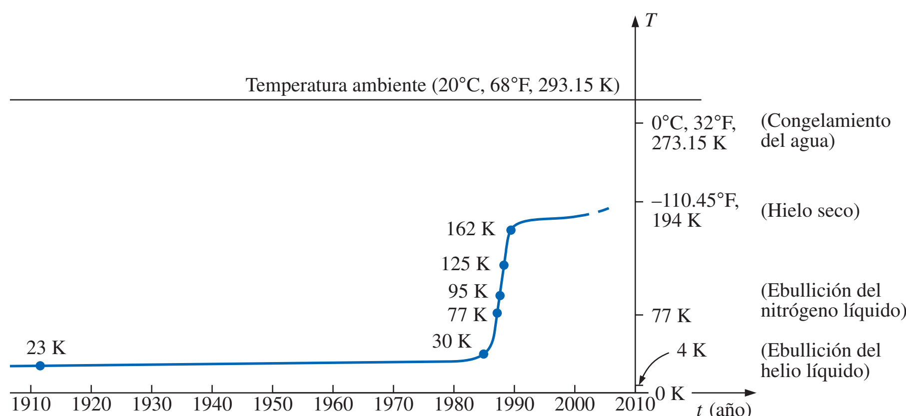
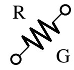


FIGURA 3.15
Temperaturas crecientes de los superconductores.

El hecho de que las cerámicas hayan proporcionado el avance reciente en la superconductividad es, probablemente, una sorpresa si se considera que son también una importante clase de aislantes. Sin embargo, las cerámicas que presentan las características de superconductividad son compuestos que incluyen cobre, oxígeno y tierras raras como el itrio, el lantano y el talio. Hay también indicadores de que los compuestos actuales pueden estar limitados a una temperatura máxima de 200 K (aproximadamente 100 K por debajo de la temperatura ambiente), dejando la puerta abierta a innovaciones en la selección de compuestos. La temperatura a la que un superconductor regresa a las características de un conductor convencional se llama *temperatura crítica*, denotada por T_c. Observe en la figura 3.16 que el nivel de resistividad cambia abruptamente en T_c. La agudeza de la zona de transición es una función de la pureza de la muestra. Largas listas de temperaturas críticas para una variedad de compuestos probados pueden encontrarse en manuales de referencia que proporcionan tablas de una amplia variedad de materiales como ayuda para la investigación en física, química, geología y campos afines. Dos de tales publicaciones incluyen el *Manual de Tablas para Ciencias de la Ingeniería Aplicada* CRC (The Chemical Rubber Co.) y el *Manual de Química y Física* CRC.



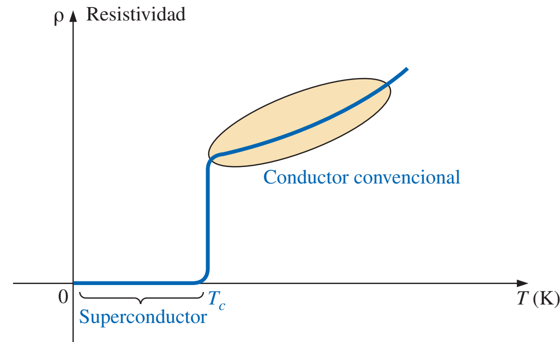


FIGURA 3.16
Definición de la temperatura crítica T_c.

Aunque se han establecido temperaturas de transición elevadas en compuestos cerámicos, existe cierta preocupación sobre sus limitaciones por fragilidad y densidad de corriente. En la fabricación de circuitos integrados, los niveles de densidad de corriente deben ser iguales o exceder 1 MA/cm^2, un millón de ampere a través de un área transversal de aproximadamente la mitad del tamaño de una moneda de diez centavos de dólar. Recientemente, la IBM alcanzó un nivel de 4 MA/cm^2 a 77 K, lo que permite el uso de superconductores en el diseño de algunas computadoras de alta velocidad de nueva generación.

Aunque se han establecido temperaturas de transición. Si bien no se ha tenido éxito con los superconductores a temperatura ambiente, existen numerosas aplicaciones para algunos de los superconductores desarrollados hasta ahora. Se trata simplemente de balancear el costo adicional contra los resultados o decidir si se puede obtener algún resultado sin el uso del estado de cero resistencia. Algunas investigaciones requieren aceleradores de alta energía o poderosos imanes que sólo pueden construirse con materiales superconductores. La superconductividad se aplica actualmente en el diseño de trenes Meglev de 450 km/h (trenes que viajan sobre un colchón de aire formado mediante polos magnéticos opuestos), en poderosos motores y generadores, en sistemas nucleares de resonancia magnética para obtener imágenes de secciones transversales del cerebro (y otras partes del cuerpo), en el diseño de computadoras con velocidades de operación cuatro veces las de sistemas convencionales, y en sistemas de distribución de potencia mejorados.

La gama de usos futuros para los superconductores es una función del éxito que tengan los físicos en elevar la temperatura de operación, y qué tan bien puedan capitalizar los éxitos obtenidos hasta ahora. Sin embargo, parecería que es sólo cuestión de tiempo (el eterno optimismo) antes que los trenes levitados magnéticamente aumenten en número; que se encuentre disponible equipo mejorado de diagnóstico médico y se tengan computadoras operando a muy altas velocidades; que se encuentren disponibles sistemas de potencia altamente eficientes y con gran capacidad de almacenamiento, así como que los sistemas de transmisión operen a niveles de muy alta eficiencia gracias a esta área de creciente interés. Sólo el tiempo revelará el impacto que esta nueva dirección tendrá en la calidad de la vida.

3.7 TIPOS DE RESISTORES

Resistores fijos

Los resistores se fabrican en muchas presentaciones, pero se clasifican sólo en dos grupos: fijos y variables. Los resistores del tipo fijo de baja potencia más

comunes son los resistores moldeados de composición de carbono. Su construcción básica se muestra en la figura 3.17.

Los tamaños relativos de todos los resistores fijos y variables cambian con la clasificación por potencia, creciendo en tamaño por clasificaciones crecientes de la potencia, para resistir las corrientes elevadas y pérdidas por disipación. Los tamaños relativos de los resistores de composición moldeada para diferentes clasificaciones por potencia se muestran en la figura 3.18. Los resistores de este tipo se consiguen en valores de 2.7 Ω a 22 MΩ.

Las curvas temperatura en función de la resistencia para un resistor tipo composición de 10,000 Ω y 0.5 MΩ se muestran en la figura 3.19. Observe el pequeño porcentaje de cambio de resistencia en el rango normal operativo de temperatura. Algunos otros tipos de resistores fijos que usan alambre de alta resistencia o películas metálicas se muestran en la figura 3.20.

La miniaturización de las partes —usada muy extensamente en las computadoras— requiere que las resistencias de valores diferentes sean colocadas en paquetes muy pequeños. Ejemplos de esto se pueden apreciar en la figura 3.21.

Para uso con tableros de circuitos impresos, se encuentran disponibles en paquetes miniatura redes de resistores fijos en diversas configuraciones, como los mostrados en la figura 3.22. Esta figura incluye la fotografía de tres cubiertas diferentes y la configuración interna de los resistores para la sencilla estructura en línea de la derecha.

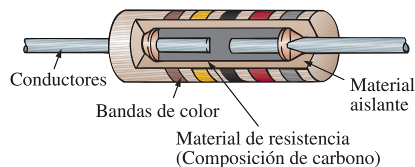


FIGURA 3.17
Resistor de composición fijo.

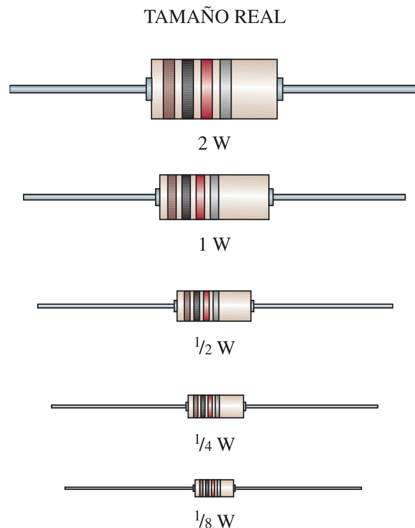


FIGURA 3.18
Resistores de composición fijos con clasificaciones de potencia diferentes.

Resistores variables

Los resistores variables, como implica su nombre, tienen una resistencia terminal que puede ser variada girando un cuadrante, una perilla, un tornillo o lo que sea apropiado para la aplicación. Estos resistores pueden tener dos o tres terminales, la mayoría tienen tres. Si el dispositivo de dos o tres terminales se usa como resistor variable, se le llama **reóstato**. Si el dispositivo con tres terminales se usa para el control de niveles de potencial, se le llama comúnmente **potenciómetro**. Aunque un dispositivo de tres terminales puede usarse como reóstato o potenciómetro (dependiendo de cómo sea conectado), normalmente es llamado *potenciómetro* cuando se anuncia en revistas técnicas o se requiere para una aplicación en particular.

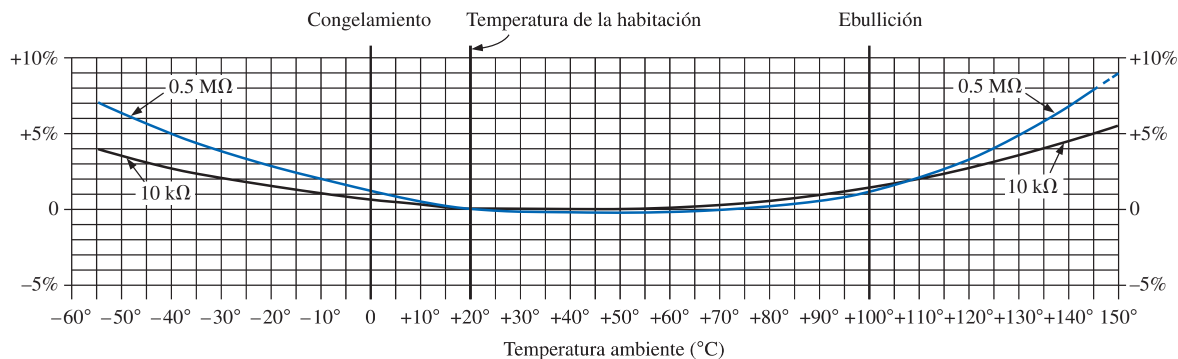
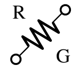
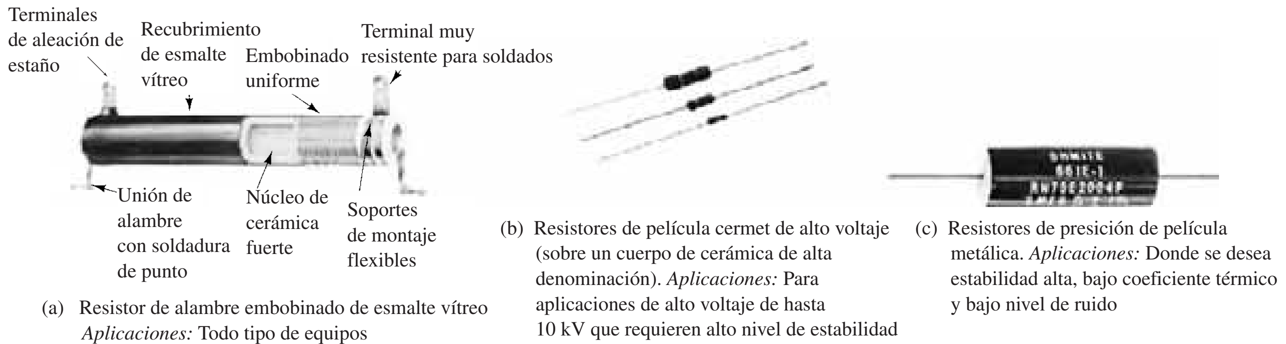


FIGURA 3.19
Curvas que muestran los cambios porcentuales de resistencia temporal desde valores de +20°C. (Cortesía de Allen-Bradley Co.)



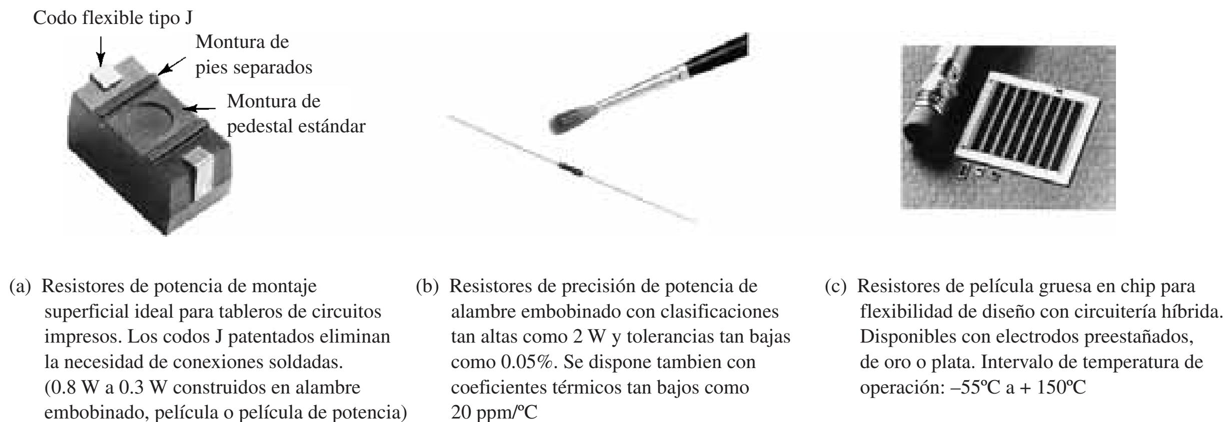


(a) Resistor de alambre embobinado de esmalte vítreo *Aplicaciones:* Todo tipo de equipos

(b) Resistores de película cermet de alto voltaje (sobre un cuerpo de cerámica de alta denominación). *Aplicaciones:* Para aplicaciones de alto voltaje de hasta 10 kV que requieren alto nivel de estabilidad

(c) Resistores de presición de película metálica. *Aplicaciones:* Donde se desea estabilidad alta, bajo coeficiente térmico y bajo nivel de ruido

FIGURA 3.20
Resistores fijos. [Partes (a) y (c), cortesía de Ohmite Manufacturing Co. Parte (b), cortesía de Philips Components Inc.]



(a) Resistores de potencia de montaje superficial ideal para tableros de circuitos impresos. Los codos J patentados eliminan la necesidad de conexiones soldadas. (0.8 W a 0.3 W construidos en alambre embobinado, película o película de potencia)

(b) Resistores de precisión de potencia de alambre embobinado con clasificaciones tan altas como 2 W y tolerancias tan bajas como 0.05%. Se dispone tambien con coeficientes térmicos tan bajos como 20 ppm/ºC

(c) Resistores de película gruesa en chip para flexibilidad de diseño con circuitería híbrida. Disponibles con electrodos preestañados, de oro o plata. Intervalo de temperatura de operación: –55ºC a + 150ºC

FIGURA 3.21
Resistores fijos miniatura. [Parte (a), cortesía de Ohmite Manufacturing Co. Partes (b) y (c), cortesía de Dale Electronics, Inc.]

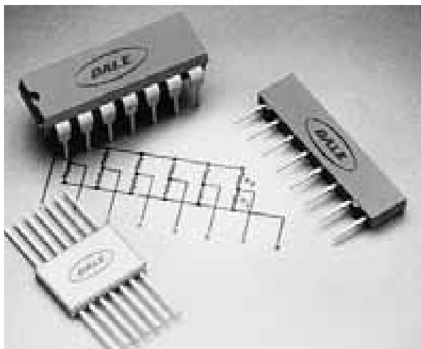


FIGURA 3.22
Redes de resistores de película gruesa. (Cortesía de Dale Electronics, Inc.)

El símbolo para identificar a un potenciómetro de tres terminales se muestra en la figura 3.23(a); cuando se usa como resistor variable (o reóstato), puede ser conectado en una de dos maneras, como se aprecia en la figura 3.23(b) y (c). En la figura 3.23(b), los puntos *a* y *b* se conectan al circuito y la terminal restante se deja abierta. La resistencia introducida está determinada por la porción del elemento resistivo entre los puntos *a* y *b*. En la figura 3.23(c), la resistencia está de nuevo entre los puntos *a* y *b*, pero entonces la resistencia restante es puesta en "corto circuito" (efecto cancelado) por la conexión de *b* a *c*. El símbolo universalmente aceptado para un reóstato se muestra en la figura 3.23(d).

La mayoría de los potenciómetros tienen tres terminales en las posiciones relativas mostradas en la figura 3.24. La perilla, el cuadrante o el tornillo situados en el centro de la cubierta controlan el movimiento de un contacto que se puede desplazar a lo largo del elemento resistivo conectado entre las dos terminales externas. El contacto está conectado a la terminal central, estableciendo una resistencia desde el contacto móvil hacia cada terminal exterior.

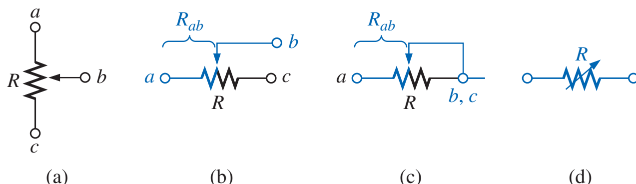
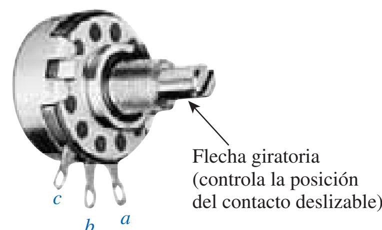
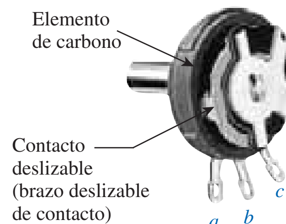


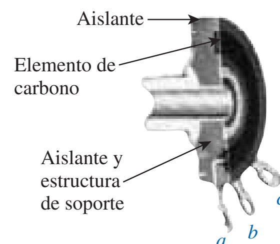
FIGURA 3.23
Potenciómetro: (a) símbolo; (b) y (c) conexiones de reóstato; (d) símbolo de reóstato.



(a) Vista externa



(b) Vista interna



(c) Elemento de carbono

FIGURA 3.24
Potenciómetro tipo composición moldeado. (Cortesía de Allen-Bradley Co.)

La resistencia entre las terminales exteriores a y c de la figura 3.25(a) (y Figura 3.24) siempre está sujeta al máximo valor de clasificación del potenciómetro, independientemente de la posición del brazo de contacto b.

En otras palabras, la resistencia entre las terminales *a* y *c* de la figura 3.25(a) para un potenciómetro de 1 MΩ será siempre de 1 MΩ, sin importar cómo giremos el elemento de control y movamos el contacto. En la figura 3.25(a), el contacto central no es parte de la configuración de la red.

La resistencia entre el brazo de contacto y cualquier terminal exterior puede variarse desde un mínimo de 0 Ω hasta un valor máximo igual al valor de clasificación del potenciómetro.

En la figura 3.25(b) el brazo de contacto se ha situado a 1/4 parte de la distancia entre los puntos *a* y *c*. La resistencia resultante entre los puntos *a* y *b* será, por tanto, 1/4 del total, o 250 kΩ (para un potenciómetro de 1 MΩ), y la resistencia entre *b* y *c* será 3/4 del total, o 750 kΩ.

La suma de las resistencias entre el brazo de contacto y cada terminal exterior es igual a la resistencia de clasificación del potenciómetro.

Esto se demuestra en la figura 3.25(b), donde 250 kΩ + 750 kΩ = 1 MΩ. Específicamente:

$$R_{ac} = R_{ab} + R_{bc} \tag{3.11}$$

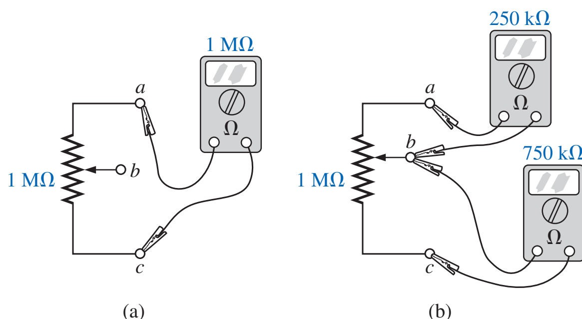
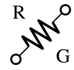


FIGURA 3.25
Resistencia terminal de un potenciómetro: (a) entre terminales exteriores; (b) entre las tres terminales.

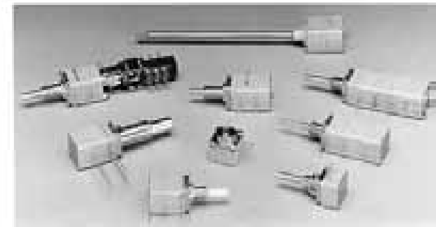


Por tanto, cuando la resistencia desde el brazo de contacto hasta un contacto exterior aumenta, la resistencia entre el brazo de contacto y la otra terminal exterior debe disminuir correspondientemente. Por ejemplo, si la R_{ab} de un potenciómetro de 1 kΩ es de 200 Ω, entonces la resistencia R_{bc} debe ser de 800 Ω. Si la R_{ab} es disminuida a 50 Ω, entonces R_{bc} debe aumentar a 950 Ω, y así sucesivamente.

El potenciómetro moldeado de composición de carbono se aplica normalmente en redes con demandas de potencia pequeñas, y varía en tamaño desde 20 Ω hasta 22 MΩ (valores máximos). Otros potenciómetros disponibles comercialmente se muestran en la figura 3.26.



(a)



(b)

FIGURA 3.26
Potenciómetros: (a) Trimer de 4 mm (≈5/32″) (cortesía de Bourns, Inc.); (b) elemento conductor de plástico y cermet (cortesía de Clarostat Mfg. Co.).

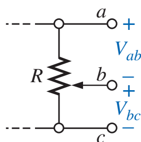


FIGURA 3.27
Control con potenciómetro de los niveles de voltaje.

Cuando el dispositivo se usa como potenciómetro, las conexiones son similares a las que muestra la figura 3.27. Puede usarse asimismo para controlar el nivel de V_{ab}, V_{bc}, o ambos, dependiendo de la aplicación. Un estudio adicional del potenciómetro en una situación de carga puede encontrarse en los capítulos subsiguientes.

3.8 CÓDIGO DE COLOR Y VALORES ESTÁNDAR DE RESISTORES

Una amplia variedad de resistores, fijos o variables, es lo suficientemente grande como para llevar impresa en su cubierta o funda su resistencia en ohms. Sin embargo, algunos son tan pequeños que el espacio no admite la impresión de sus números de resistencia, por lo que se usa un sistema de **código de color**. En el resistor fijo moldeado de composición que se muestra en la figura 3.28, cuatro o cinco bandas de color están impresas en un extremo de la cubierta exterior; cada color representa el valor numérico indicado en la tabla 3.7. Las bandas de color son leídas siempre desde el extremo que tiene la banda más cercana a él, como se aprecia en la figura 3.28. Las bandas primera y segunda representan los dígitos primero y segundo, respectivamente. La tercera banda determina el multiplicador potencia de diez para los primeros dos dígitos (en realidad, el número de ceros que siguen al segundo dígito) o un factor de multiplicación si se trata de oro o plata. La cuarta banda es la tolerancia del fabricante, e indica la precisión con que fue fabricado el resistor; si esta banda es

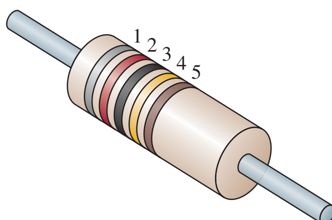


FIGURA 3.28
Código de color de un resistor fijo moldeado de composición.

TABLA 3.7
Código de color para resistores.

Bandas 1-3*	Banda 3	Banda 4	Banda 5
0 Negro	0.1 Oro } factores multiplicativos	5% Oro	1% Café
1 Café	0.01 Plata } factores multiplicativos	10% Plata	0.1% Rojo
2 Rojo		20% Sin banda	0.01% Anaranjado
3 Anaranjado			0.001% Amarillo
4 Amarillo			
5 Verde			
6 Azul			
7 Víoleta			
8 Gris			
9 Blanco			

*Con la excepción de que el color negro no es válido para la primera banda.

omitida, la tolerancia se supone igual a ±20%. La quinta banda es un factor de confiabilidad, el cual proporciona el porcentaje de falla por 1000 horas de uso. Por ejemplo, una falla de 1% revelaría que uno de cada 100 (o 10 de cada 1000) resistores fallará al caer dentro del intervalo de tolerancia después de 1000 horas de uso.

EJEMPLO 3.13 Encuentre el intervalo en que debe situarse un resistor con las siguientes bandas de color para satisfacer la tolerancia del fabricante:

a.

1a banda	2a banda	3a banda	4a banda	5a banda
Gris	Rojo	Negro	Dorado	Café
8	2	0	±5%	1%

b.

1a banda	2a banda	3a banda	4a banda	5a banda
Anaranjado	Blanco	Dorado	Plateado	Sin color
3	9	0.1	±10%	

Soluciones:

a. **82 Ω ± 5% (1% de confiabilidad)**

Como 5% de 82 = 4.10, el resistor deberá estar dentro del intervalo de 82 Ω ± 4.10 Ω, o *entre 77.90 y 86.10 Ω.*

b. **3.9 Ω ± 10% = 3.9 ± 0.39 Ω**

El resistor deberá posicionarse en alguna parte *entre 3.51 y 4.29 Ω.*

Podría esperarse que los resistores estuviesen disponibles en un intervalo completo de valores como 10 Ω, 20 Ω, 30 Ω, 40 Ω, 50 Ω, etc. Sin embargo, este no es el caso con algunos valores comerciales típicos, por ejemplo, 27 Ω, 56 Ω y 68 Ω; lo cual puede parecer algo extraño y fuera de lugar. Hay una razón para los valores seleccionados, la cual se evidencia examinando la lista de valores estándar de los resistores comercialmente disponibles que aparecen en la tabla 3.8. Los valores en negritas están disponibles con tolerancias de 5, 10 y 20%, siendo así los más comunes de la variedad comercial están disponibles normalmente con tolerancias de 5 y 10%, y aquellos en escritura normal se encuentran sólo en la variedad del 5%. Al agrupar los valores disponibles por niveles de tolerancia se obtiene la tabla 3.9, donde se observa claramente que existen pocos resistores disponibles de hasta 100 W con tolerancias de 20%.

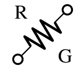


TABLA 3.8
Valores estándar de resistores disponibles comercialmente.

Ohms (Ω)					Kilohms (kΩ)		Megohms (MΩ)	
0.10	**1.0**	**10**	**100**	**1000**	**10**	**100**	**1.0**	**10.0**
0.11	1.1	11	110	1100	11	110	1.1	11.0
0.12	**1.2**	**12**	**120**	**1200**	**12**	**120**	**1.2**	**12.0**
0.13	1.3	13	130	1300	13	130	1.3	13.0
0.15	**1.5**	**15**	**150**	**1500**	**15**	**150**	**1.5**	**15.0**
0.16	1.6	16	160	1600	16	160	1.6	16.0
0.18	**1.8**	**18**	**180**	**1800**	**18**	**180**	**1.8**	**18.0**
0.20	2.0	20	200	2000	20	200	2.0	20.0
0.22	**2.2**	**22**	**220**	**2200**	**22**	**220**	**2.2**	**22.0**
0.24	2.4	24	240	2400	24	240	2.4	
0.27	**2.7**	**27**	**270**	**2700**	**27**	**270**	**2.7**	
0.30	3.0	30	300	3000	30	300	3.0	
0.33	**3.3**	**33**	**330**	**3300**	**33**	**330**	**3.3**	
0.36	3.6	36	360	3600	36	360	3.6	
0.39	**3.9**	**39**	**390**	**3900**	**39**	**390**	**3.9**	
0.43	4.3	43	430	4300	43	430	4.3	
0.47	**4.7**	**47**	**470**	**4700**	**47**	**470**	**4.7**	
0.51	5.1	51	510	5100	51	510	5.1	
0.56	**5.6**	**56**	**560**	**5600**	**56**	**560**	**5.6**	
0.62	6.2	62	620	6200	62	620	6.2	
0.68	**6.8**	**68**	**680**	**6800**	**68**	**680**	**6.8**	
0.75	7.5	75	750	7500	75	750	7.5	
0.82	**8.2**	**82**	**820**	**8200**	**82**	**820**	**8.2**	
0.91	9.1	91	910	9100	91	910	9.1	

TABLA 3.9
Valores estándar y sus tolerancias.

±5%	±10%	±20%
10	**10**	**10**
11		
12	**12**	
13		
15	**15**	**15**
16		
18	**18**	
20		
22	**22**	**22**
24		
27	**27**	
30		
33	**33**	**33**
36		
39	**39**	
43		
47	**47**	**47**
51		
56	**56**	
62		
68	**68**	**68**
75		
82	**82**	
91		

Un examen del impacto del nivel de tolerancia ayudará a explicar la selección de números para los valores comerciales. Considere la secuencia 47 Ω 68 Ω 100 Ω, que están todos disponibles con tolerancias de 20%. En la figura 3.29(a), la banda de tolerancia para cada uno ha sido determinada y trazada sobre un solo eje. Observe que, con esta tolerancia (que es toda la que el fabricante garantizará), el intervalo completo de valores de resistores está disponible des-

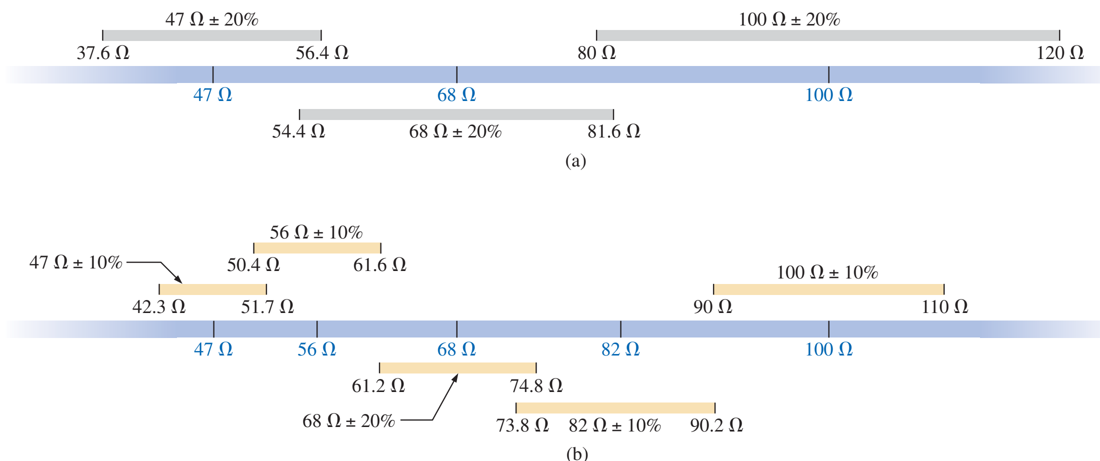


FIGURA 3.29
Garantía de cobertura del intervalo completo de valores de resistores para la tolerancia dada: (a) 20%; (b) 10%.

de 37.6 Ω hasta 120 Ω. En otras palabras, el fabricante está garantizando el intervalo completo, usando las tolerancias para llenar los huecos. Bajando al nivel de 10% se introducen los resistores de 56 Ω y 82 Ω para llenar los huecos, como se muestra en la figura 3.29(b). Bajando al nivel de 5% se requerirían valores adicionales de resistores para llenar los huecos. Por tanto, los valores de los resistores fueron seleccionados para garantizar que el intervalo completo quedase cubierto, determinado por las tolerancias empleadas. Por supuesto, si se desea un valor específico pero no es uno de los valores estándar, las combinaciones de valores estándar darán a menudo una resistencia total muy cercana al nivel deseado. Si aún así este enfoque no es satisfactorio, puede fijarse un potenciómetro al valor exacto y luego ser insertado en la red.

A lo largo del texto se encontrará que muchos de los valores de los resistores no son estándar. Esto se hizo para reducir la complejidad matemática, que podría oscurecer la técnica de análisis o el procedimiento a ser introducidos. Sin embargo, en las secciones de problemas, a menudo se emplean valores estándar para que el lector empiece a familiarizarse con los valores comerciales disponibles.

3.9 CONDUCTANCIA

Al encontrar el recíproco de la resistencia de un material se tendrá una medida de qué tan bien conducirá éste la electricidad. La cantidad se llama **conductancia**, tiene el símbolo G, y se mide en *siemens* (S) (observe la figura 3.30). En forma de ecuación, la conductancia es:

$$G = \frac{1}{R} \qquad \text{(siemens, S)} \qquad \textbf{(3.12)}$$

Una resistencia de 1 MΩ es equivalente a una conductancia de 10^{-6} S, y una resistencia de 10 Ω es equivalente a una conductancia de 10^{-1} S. Por tanto, entre mayor es la conductancia, menor es la resistencia y mayor la conductividad.

En forma de ecuación, la conductancia está determinada por:

$$G = \frac{A}{\rho l} \qquad \text{(S)} \qquad \textbf{(3.13)}$$

indicando que al aumentar el área o disminuir la longitud o la resistividad aumentará la conductancia.

EJEMPLO 3.14 ¿Cuál es la disminución o el incremento relativos en la conductividad de un conductor si el área se reduce 30% y la longitud se incrementa 40%? La resistividad es fija.

Solución: Ecuación (3.11):

$$G_i = \frac{A_i}{\rho_i l_i}$$

con el subíndice i para el valor inicial. Usando el subíndice n para el nuevo valor:

$$G_n = \frac{A_n}{\rho_n l_n} = \frac{0.70A_i}{\rho_i(1.4l_i)} = \frac{0.70}{1.4}\frac{A_i}{\rho_i l_i} = \frac{0.70}{1.4G_i}$$

y $$G_n = \mathbf{0.5}\boldsymbol{G_i}$$

Alemán
(Lenthe, Berlín)
(1816-1892)
Ingeniero eléctrico
Fabricante de telégrafos,
Siemens & Halske AG



Archivos Bettman
Fotografía núm 33,619

Desarrolló un *proceso de galvanoplastia* durante un breve periodo que pasó en prisión por actuar como ayudante en un duelo entre compañeros oficiales del ejército prusiano. Inspirado por el telégrafo electrónico inventado por Sir Charles Wheatstone en 1817, mejoró el diseño y procedió a tender cable, con ayuda de su hermano Carl, a través del Mediterráneo y de Europa hasta la India. Sus invenciones incluyen el primer *generador autoexcitado*, el cual depende del magnetismo *residual* de su electroimán en vez de depender de un imán permanentemente ineficiente. En 1888 fue elevado a la nobleza con la adición de *von* a su nombre. La empresa Siemens AG tiene fábricas en 35 países con oficinas de ventas en 125.

FIGURA 3.30
Werner von Siemens.

3.10 OHMÍMETROS

El **ohmímetro** es un instrumento que se utiliza para efectuar las siguientes tareas y cumplir otras útiles funciones:

1. Mide la resistencia de elementos individuales o combinados.
2. Detecta situaciones de circuito abierto (alta resistencia) y corto circuito (baja resistencia).
3. Revisa la continuidad de las conexiones en redes e identifica los alambres de un cable multiconductor.
4. Prueba algunos dispositivos semiconductores (electrónicos).

En la mayoría de las aplicaciones, los ohmímetros más frecuentemente usados son la sección de ohmímetro de un VOM o un DMM. Los detalles de los circuitos internos y el método de uso del medidor se dejarán para un ejercicio de laboratorio. Sin embargo, en general, la resistencia de un resistor puede medirse conectando simplemente los dos conductores del medidor a través del resistor, como se muestra en la figura 3.31. No hay necesidad de preocuparse acerca de cuál conductor debe llegar a qué extremo; el resultado será el mismo en cualquier caso ya que los resistores ofrecen igual resistencia al flujo de carga (corriente) en cualquier dirección. Si se emplea el VOM, debe fijarse un interruptor al intervalo apropiado de resistencia, y una escala no lineal (usualmente la escala superior del medidor) debe leerse apropiadamente para obtener el valor de la resistencia. El DMM también requiere que se escoja la mejor escala para la resistencia a ser medida, pero el resultado aparece como un despliegue numérico, con la posición apropiada del punto decimal determinada por la escala escogida. Al medir la resistencia de un solo resistor, usualmente es mejor retirar el resistor de la red antes de efectuar la medición. Si esto es difícil o imposible, por lo menos un extremo del resistor no debe estar conectado a la red, o el resultado puede incluir los efectos de los otros elementos del sistema.

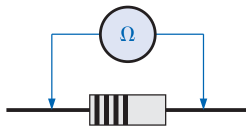


FIGURA 3.31
Medición de la resistencia de un solo elemento.

Si los dos conductores del medidor se están tocando en el modo de ohmímetro, la resistencia resultante es cero. Una conexión se puede revisar como se muestra en la figura 3.32 enganchando simplemente el medidor a cualquier lado de la conexión. Si la resistencia es cero, la conexión es segura; si es diferente de cero, la conexión será débil, y si es infinita, no habrá conexión en absoluto.

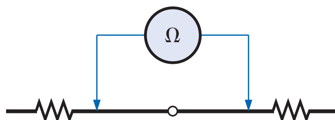


FIGURA 3.32
Verificación de la continuidad de una conexión.

Si se conoce un alambre de un arnés, puede encontrarse un segundo alambre como se muestra en la figura 3.33. Simplemente conecte el extremo del conductor conocido al extremo de cualquier otro conductor. Cuando el ohmímetro indique cero ohms (o muy poca resistencia), el segundo conductor habrá sido identificado. El procedimiento anterior se puede usar también para determinar el primer conductor conocido conectando simplemente el medidor a cualquier alambre en un extremo y tocando luego todos los conductores en el otro extremo hasta obtener una indicación de cero ohms.

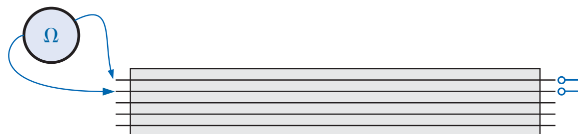


FIGURA 3.33
Identificación de los conductores de un cable multiconductor.

Las mediciones preliminares de la condición de algunos dispositivos electrónicos como el diodo y el transitor pueden hacerse usando el ohmímetro. El medidor también se puede usar para identificar las terminales de tales dispositivos.

Una observación importante acerca del uso de cualquier ohmímetro es:

¡Nunca conecte un ohmímetro a un circuito vivo!

La lectura no tendrá sentido y puede dañarse el instrumento. La sección del ohmímetro de cualquier medidor está diseñado para pasar una pequeña corriente sensora a través de la resistencia a medir. Una corriente grande externa podría dañar el movimiento y ciertamente descalibraría el instrumento. Además,

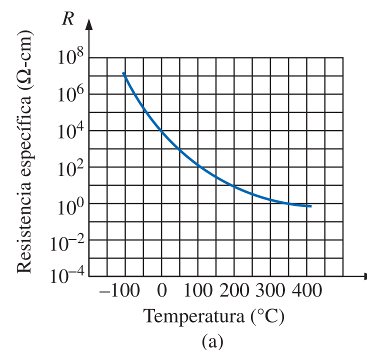
nunca almacene un VOM o un DMM en el modo de resistencia.

Los dos conductores del medidor podrían tocarse y la pequeña corriente sensora podría descargar la batería interna. Los VOM se deben almacenar con el interruptor selector en el intervalo de voltaje más alto, y el interruptor selector de los DMM debe estar en la posición de apagado (off).

3.11 TERMISTORES

El **termistor** es un dispositivo semiconductor de dos terminales cuya resistencia, como su nombre sugiere, es sensible a la temperatura. Una característica representativa de ello se muestra en la figura 3.34 con el símbolo gráfico utilizado para identificar este dispositivo. Observe la no linealidad de la curva y la caída en la resistencia desde aproximadamente 5000 Ω hasta 100 Ω para un incremento en la temperatura de 20°C hasta 100°C. La disminución en la resistencia con un aumento de la temperatura indica un coeficiente térmico negativo.

La temperatura del dispositivo puede cambiarse interna o externamente. Un aumento de la corriente en el dispositivo elevará su temperatura, ocasionando una caída en su resistencia terminal. Cualquier fuente de calor aplicada externamente resultará en un incremento de su temperatura y una caída de su resistencia. Este tipo de acción (interna o externa) se presta bien para los mecanismos de control. En la figura 3.35 se muestran muchos tipos diferentes



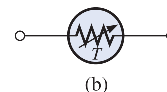


FIGURA 3.34
Termistor: (a) características; (b) símbolo.

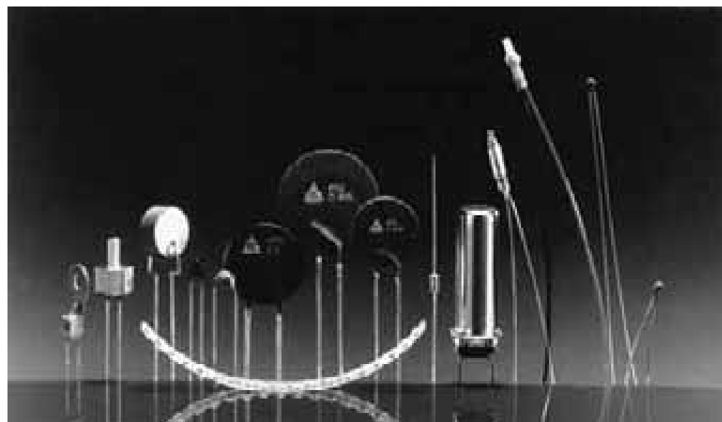
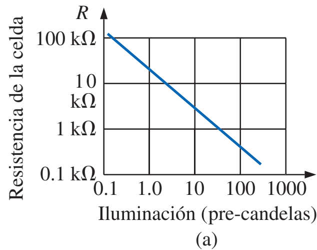


FIGURA 3.35
Termistores con coeficiente térmico negativo (NTC) y con coeficiente térmico positivo (PTC). (Cortesía de Siemens Components, Inc.)



(a)

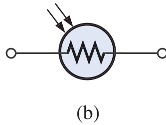

(b)

FIGURA 3.36
Celda fotoconductora: (a) características; (b) símbolo.

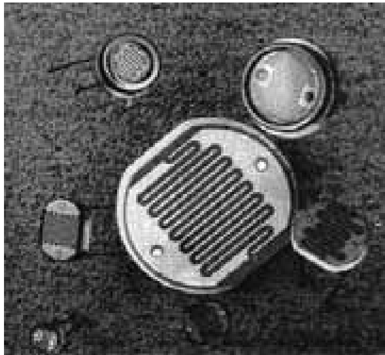


FIGURA 3.37
Celdas fotoconductoras. (Cortesía de EG&G VACTEC, Inc.)

de termistores. Los materiales empleados en la fabricación de termistores incluyen óxidos de cobalto, níquel, estroncio y manganeso.

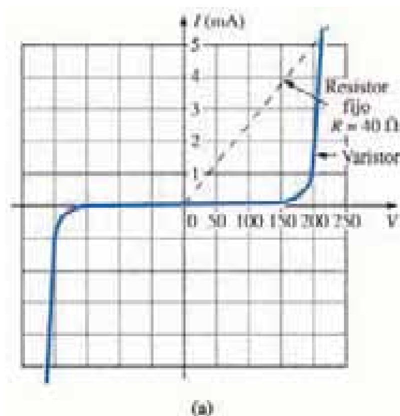
Observe el uso de una escala logarítmica (que se analizará en el capítulo 23) en la figura 3.34 para el eje vertical. La escala logarítmica permite desplegar un intervalo más amplio de niveles específicos de resistencia que una escala lineal como la del eje horizontal. Advierta que la escala se extiende desde 0.0001 $\Omega \cdot$cm hasta 100,000,000 $\Omega \cdot$cm sobre un intervalo muy corto. La escala logarítmica se usa para los ejes vertical y horizontal de la figura 3.36.

3.12 CELDA FOTOCONDUCTORA

La **celda fotoconductora** es un dispositivo semiconductor de dos terminales cuya resistencia terminal está determinada por la intensidad de la luz incidente sobre su superficie expuesta. Conforme la iluminación aplicada aumenta en intensidad, el estado de energía de los electrones y átomos superficiales también aumenta, con lo cual el número de "portadores libres" se eleva y se produce la correspondiente caída en la resistencia. Un conjunto típico de características y el símbolo gráfico de la celda fotoconductora se muestran en la figura 3.36. Observe el coeficiente negativo de iluminación. En la figura 3.37 pueden apreciarse varias celdas fotoconductoras de sulfuro de cadmio.

3.13 VARISTORES

Los **varistores** son resistores no lineales, dependientes del voltaje, usados para suprimir transitorios de alto voltaje; esto es, sus características son tales que les permiten limitar el voltaje que puede aparecer en las terminales de un dispositivo o sistema sensible. Un conjunto típico de las características de un varistor se muestra en la figura 3.38(a), junto con una característica de resistencia lineal para fines de comparación. Observe que a un particular "voltaje de encendido", la corriente se eleva rápidamente pero el voltaje queda limitado a un nivel justo por arriba de este potencial de encendido. En otras palabras, la magnitud del voltaje que puede aparecer en este dispositivo no puede exceder al nivel definido mediante sus características. Por medio de técnicas apropiadas de diseño, este dispositivo puede entonces limitar el voltaje que aparece en las regiones sensibles de una red. La corriente está simplemente limitada por la red a la que está conectada. En la figura 3.38(b) se muestra una fotografía de varias unidades comerciales.



(a)


(b)

FIGURA 3.38
Varistores disponibles con clasificaciones máximas de voltaje entre 18 V y 615 V. (Cortesía de Philips Components, Inc.)

3.14 APLICACIONES

Los siguientes son ejemplos de cómo puede usarse la resistencia para efectuar diversas tareas, desde el calentamiento hasta la medición del esfuerzo o la deformación en un elemento de una estructura. En general, la resistencia es una componente de toda aplicación eléctrica o electrónica.

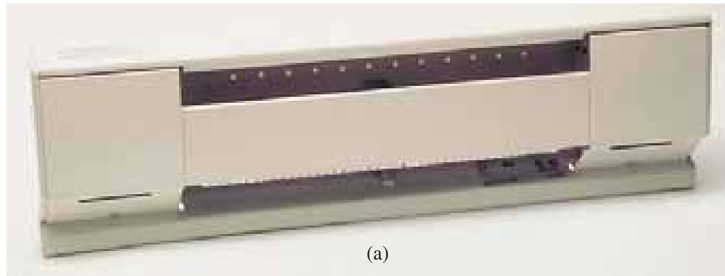
Calefactor eléctrico

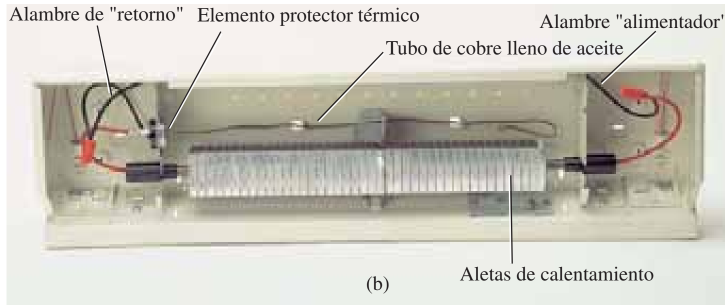
Una de las aplicaciones más comunes de la resistencia es en dispositivos domésticos como tostadores y calefactores eléctricos, donde el calor generado por la corriente que pasa por un elemento resistivo se emplea para efectuar una función útil.

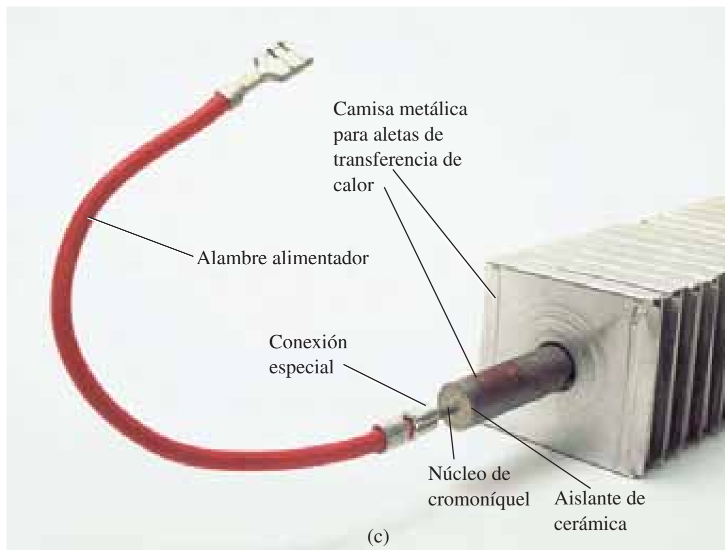
Recientemente, al remodelar nuestra casa, un electricista nos informó que estábamos limitados a 16 pies de calefactor eléctrico sobre un solo circuito. Eso naturalmente me preocupó acerca de la potencia por pie, el nivel de corriente resultante, y si la limitación de 16 pies era un estándar nacional. Leyendo la etiqueta sobre la sección de 2 pies que aparece en la figura 3.39(a), encontré VOLTS CA 240/208, WATTS 750/575 [la clasificación por potencia se describirá en el capítulo 4] AMPERE 3.2/2.8. Dado que mi panel calefactor está clasificado en 208 V (como en la mayoría de las casas residenciales), la clasificación de la potencia por pie es de 575 W/2 o 287.5 W a una corriente de 2.8 A. La potencia total para los 16 pies es, por tanto, 16×287.5 W o 4600 W. En el capítulo 4 se encontrará que la potencia en una carga resistiva está relacionada a la corriente y al voltaje aplicado por la ecuación $P = VI$. La corriente resultante total puede entonces determinarse usando esta ecuación de la siguiente manera: $I = P/V = 4600 \text{ W}/208 \text{ V} = 22.12 \text{ A}$. El resultado fue que necesitábamos un cortacircuito mayor que 22.12 A; de otra manera, el cortacircuito se desconectaría cada vez que encendiéramos el calentador. En mi caso, el electricista usó un cortacircuito de 30 A para satisfacer el requisito del Código Nacional sobre Incendios que no permite exceder 80% de la corriente clasificada para un conductor o cortacircuito. En la mayoría de los paneles, un cortacircuito de 30 A toma dos ranuras de su panel, mientras que el cortacircuito más común de 20 A toma sólo una ranura. Si tiene tiempo, fíjese en su propio panel y observe la clasificación de los cortacircuitos usados para los varios circuitos de su casa.

Volviendo a la tabla 3.2, encontramos que el alambre del número 12, usado comúnmente para la mayoría de los circuitos caseros, tiene una clasificación máxima de 20 A y no sería adecuado para el calefactor eléctrico. Como el calibre 11 por lo general no está disponible comercialmente, se usó un alambre del número 10 con una clasificación máxima de 30 A. Usted podría preguntarse por qué la corriente extraída del suministro es de 22.12 A mientras que la requerida para una unidad fue sólo de 2.8 A. Esta diferencia se debe a la combinación en paralelo de secciones de los elementos calefactores, una configuración que será descrita en el capítulo 6. Ahora está claro por qué se especifica una limitación de 16 pies sobre un solo circuito. Elementos adicionales elevarían la corriente a un nivel que excedería el del Código para el alambre calibre 10 y se acercaría a la clasificación máxima del cortacircuito.

La figura 3.39(b) muestra una fotografía de la construcción interior del elemento calefactor. El alambre rojo de alimentación situado a la derecha está conectado al núcleo del elemento calefactor, y el alambre negro en el otro extremo pasa por un elemento calefactor protector y regresa a la caja terminal de la unidad (el lugar donde los alambres exteriores se juntan y conectan). Si se observa cuidadosamente el extremo de la unidad de calefacción que se muestra en la figura 3.39(c), se encontrará que el alambre calefactor que corre







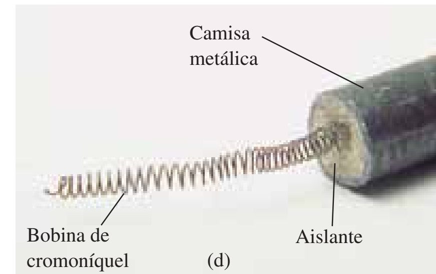


FIGURA 3.39
Calefactor eléctrico: (a) sección de 2 pies; (b) interior; (c) elemento calefactor; (d) bobina de cromoníquel.

a través del núcleo del calentador no está conectado directamente a la camisa redonda que sostiene las aletas en su lugar. Un material cerámico (aislante) separa el alambre calefactor desde las aletas para eliminar cualquier posibilidad de conducción entre la corriente que pasa por el elemento desnudo de calentamiento y la estructura exterior de la aleta. Los materiales de cerámica se usan porque son excelentes conductores del calor y porque tienen una alta capacidad de retención del calor, por lo que el área a su alrededor permanecerá caliente por determinado tiempo aun después de que la corriente haya sido suspendida. Como se muestra en la figura 3.39(d), el alambre de calentamiento que corre a

través de la camisa metálica es normalmente un compuesto de cromoníquel (porque el cromoníquel puro es muy frágil) enrrollado en forma de bobina para compensar la expansión y contracción por el calor, y para permitir un elemento más largo de calentamiento en un calefactor de longitud estándar. Por curiosidad, se abrió el núcleo del calefactor y se encontró que el alambre de cromoníquel de 2 pies tenía realmente 7 pies de longitud, o una razón de 3.5: 1 radio. Lo delgado del alambre fue particularmente notable, midió aproximadamente 8 mils de diámetro, no mucho más grueso que un cabello. Recuerde de este capítulo que entre más largo sea el conductor y más delgado el alambre, mayor será la resistencia. Se tomó una sección del alambre de cromoníquel para tratar de calentarlo con un nivel razonable de corriente y, al aplicarlo a un secador de pelo, el cambio en resistencia apenas se notó. En otras palabras, todos los esfuerzos por aumentar la resistencia con los elementos básicos disponibles en el laboratorio resultaron infructuosos. Esto fue una excelente demostración del significado del coeficiente térmico de resistencia dado en la tabla 3.6. Como el coeficiente es tan pequeño para el cromoníquel, la resistencia no cambia en forma medible a menos que el cambio en temperatura sea verdaderamente considerable. La curva de la figura 3.14 es, por tanto, cercana a la horizontal para el cromoníquel. Para calefactores esto es una característica excelente porque el calor desarrollado, y la potencia disipada, no variará con el tiempo conforme el conductor se caliente. El flujo de calor desde la unidad permanecerá bastante constante.

La alimentación y el retorno no pueden ser soldados al alambre calefactor de cromoníquel por dos razones. Primero, no se pueden soldar alambres de cromoníquel entre si o a otros tipos de alambre. Segundo, si se pudiera, se tendría un problema ya que el calor de la unidad se elevaría sobre los 880°F en el punto donde los alambres estuvieran conectados, la soldadura se derretiría y la conexión se rompería. Con el cromoníquel se debe utilizar soldadura de punto o soldadura en frío (crimp) con los alambres de cobre de la unidad. Usando la ecuación (3.1) y el diámetro medido de 8 mils, y suponiendo de momento cromoníquel puro, la resistencia de la longitud de 7 pies es de:

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

$$= \frac{(600)(7')}{(8\ \text{mils})^2} = \frac{4200}{64}$$

$$R = \mathbf{65.6\ \Omega}$$

En el próximo capítulo presentaremos en detalle una ecuación de potencia que relaciona potencia, corriente y resistencia de la siguiente manera: $P = I^2R$. Usando los datos anteriores y despejando la resistencia obtenemos:

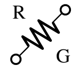
$$R = \frac{P}{I^2}$$

$$= \frac{575\ \text{W}}{(2.8\ \text{A})^2}$$

$$R = \mathbf{73.34\ \Omega}$$

que es muy cercano al valor calculado líneas arriba a partir de la forma geométrica ya que no podemos estar absolutamente seguros acerca del valor de la resistividad del compuesto.

Durante una operación normal el alambre se calienta y pasa el calor a las aletas, que a su vez calientan la habitación por medio del aire que fluye por ellas. El flujo de aire a través de la unidad es aumentado por el hecho de que el aire caliente se eleva, y cuando el aire caliente deja la parte superior de la unidad, se extrae aire frío del fondo contribuyendo así al efecto de convección. Si se cierra la parte superior o inferior de la unidad se elimina efectivamente el efecto de convección, y la habitación no se calienta. Puede ocurrir una condición



en la cual el interior del calentador se vuelva muy caliente, ocasionando que la cubierta metálica también se caliente demasiado. Ésta es la razón principal por la que se introduce el elemento térmico protector que se muestra en la figura 3.39(b). El largo y delgado tubo de cobre que aparece en la figura 3.39 se llena con un fluido tipo aceite que se dilata al calentarse. Si está demasiado caliente, se dilatará, accionará un interruptor en el bastidor, y apagará el calentador cortando la corriente al alambre calefactor.

Control de la luz en un automóvil

Un reóstato de dos puntos es el elemento principal en el control de la intensidad de la luz en el tablero y los accesorios de un automóvil. La red básica se aprecia en la figura 3.40 con niveles típicos de voltaje y corriente. Cuando el interruptor de la luz está cerrado (usualmente jalando la perilla de control de la luz en el tablero), se establece una corriente a través del reóstato de 50 Ω y luego en las distintas luces del tablero. Cuando se gira la perilla del interruptor de control, se controla la cantidad de resistencia entre los puntos *a* y *b* del reóstato. Entre más resistencia se tenga entre los puntos *a* y *b*, menor será la corriente y menor el brillo de las luces. Observe el interruptor adicional en la luz de la guantera que es activado al abrir la puerta de este compartimiento. Aparte de la luz de la guantera, todas las luces detalladas en la figura 3.40 se encenderán al mismo tiempo cuando el interruptor de luz sea activado. La primera rama después del reóstato contiene dos focos de 6 V en vez de los focos de 12 V que se tienen en las otras ramas. Los focos más pequeños de esta rama producirán una luz más tenue y más uniforme para áreas específicas del tablero. Observe que la suma de los focos (en serie) es de 12 V para concordar con la de las otras ramas. La división del voltaje en cualquier red se verá con todo detalle en los capítulos 5 y 6.

Los niveles normales de corriente para las distintas ramas han sido proporcionados también en la figura 3.40. Veremos en el capítulo 6 que la extracción de corriente de la batería y a través del fusible y el reóstato es aproximadamente igual a la suma de las corrientes en las ramas de la red. El resultado es que el fusible debe ser capaz de manejar corrientes en ampere, por lo que fue empleado un fusible de 15 ampere (aun cuando los focos que aparecen en la figura 3.40 son de 12 V para equiparar la batería).

Siempre que el voltaje de operación y los niveles de corriente de un componente se conocen, la resistencia interna efectiva de la unidad puede ser determinada usando la ley de Ohm, que será presentada con todo detalle en el

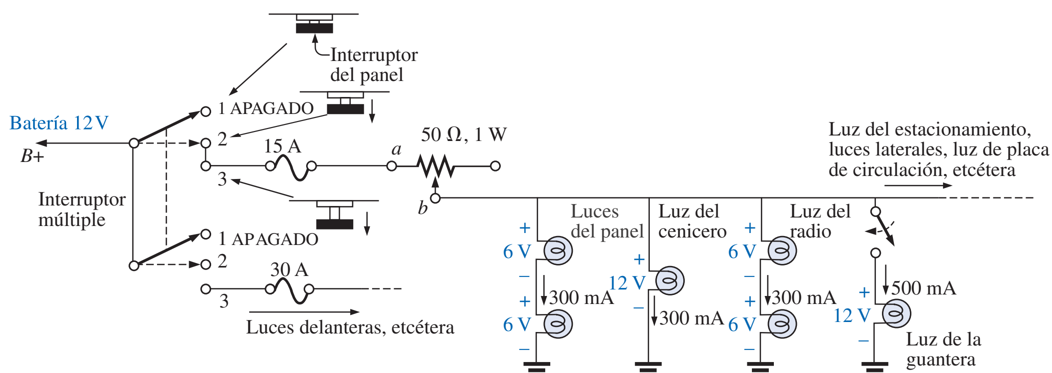


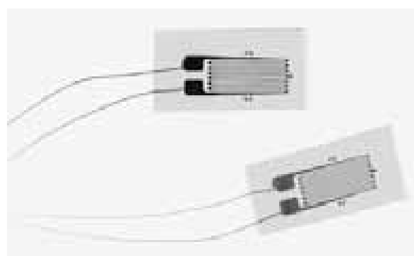
FIGURA 3.40
Control de la iluminación en el tablero de un automóvil.

siguiente capítulo. Básicamente, esta ley relaciona el voltaje, la corriente y la resistencia por medio de $I = V/R$. Para el foco de 12 V a una corriente clasificada de 300 mA, la resistencia es $R = V/I = 12$ V/300 mA $= 40\ \Omega$. Para los focos de 6 V es de 6 V/300 mA $= 80\ \Omega$. Comentarios adicionales relativos a los niveles de potencia y resistencia se reservan para los capítulos subsiguientes.

La descripción precedente supuso un nivel ideal de 12 V para la batería. En realidad, se usan focos de 6.3 V y 14 V para equiparar el nivel de carga en la mayoría de los automóviles.

Extensómetros

Cualquier cambio en la forma de una estructura se puede detectar usando extensómetros cuya resistencia cambiará con las flexiones o esfuerzos aplicados. Un ejemplo de extensómetro se muestra en la figura 3.41. Los extensómetros son dispositivos semiconductores cuya resistencia terminal cambiará de manera no lineal a través de un amplio intervalo de valores al ser sometidos a esfuerzos de compresión o extensión. Como el extensómetro emite una señal, un procesador de señales también debe ser parte del sistema para trasladar el cambio en resistencia a una salida significativa. Un ejemplo sencillo del uso de extensómetros resistivos es el monitoreo de la actividad sísmica. Cuando el extensómetro se coloca a través de un área sospechosa de actividad sísmica, la más ligera separación en la Tierra cambiará la resistencia terminal, y el procesador mostrará un resultado sensible a la cantidad de la separación. Otro ejemplo es un sistema de alarma donde el más ligero cambio en la forma de una viga de soporte, cuando alguien camina por encima, resultará en un cambio de la resistencia terminal, y sonará una alarma. Otros ejemplos incluyen colocar extensómetros sobre puentes para mantener control de su rigidez y sobre generadores muy grandes para verificar si varios componentes móviles comienzan a separarse debido al desgaste de las chumaceras o los espaciadores. El pequeño ratón de control dentro del teclado de una computadora portátil puede estar constituido por una serie de extensómetros de esfuerzo que revelan la dirección del esfuerzo aplicado al elemento de control situado en el teclado. El



Modelo SGN − 4/12
Resistencia terminal de 12 Ω
Longitud total: 5.5mm ≅ 0.22 pulg

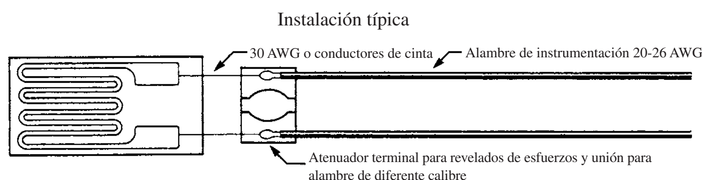


FIGURA 3.41
Extensómetro resistivo. (© Copyright Omega Engineering, Inc. Todos los derechos reservados. Reproducido con permiso de Omega Engineering, Inc., Stamford, CT 06907.)

movimiento en una dirección puede alargar o comprimir un extensómetro de resistencia que a su vez permite monitorear y controlar el movimiento del ratón sobre la pantalla.

3.15 MATHCAD

A lo largo del texto, se usará el paquete de software matemático llamado Mathcad para introducir toda la variedad de operaciones que es posible efectuar con esta avanzada herramienta de cómputo. No hay necesidad de obtener una copia del paquete de software para continuar con el material cubierto en este texto. La cobertura está a un nivel muy introductorio para presentar simplemente el alcance y poder del paquete. Todos los ejercicios que aparecen al final de cada capítulo pueden ser resueltos sin Mathcad.

Una vez instalado el paquete, todas las operaciones comienzan con la pantalla básica que muestra la figura 3.42. Las operaciones deben ser efectuadas en la secuencia que aparece en la figura 3.43, esto es, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Por ejemplo, si una ecuación ubicada en la segunda línea va a operar sobre una variable específica, la variable debe estar definida a la izquierda o arriba de la ecuación.

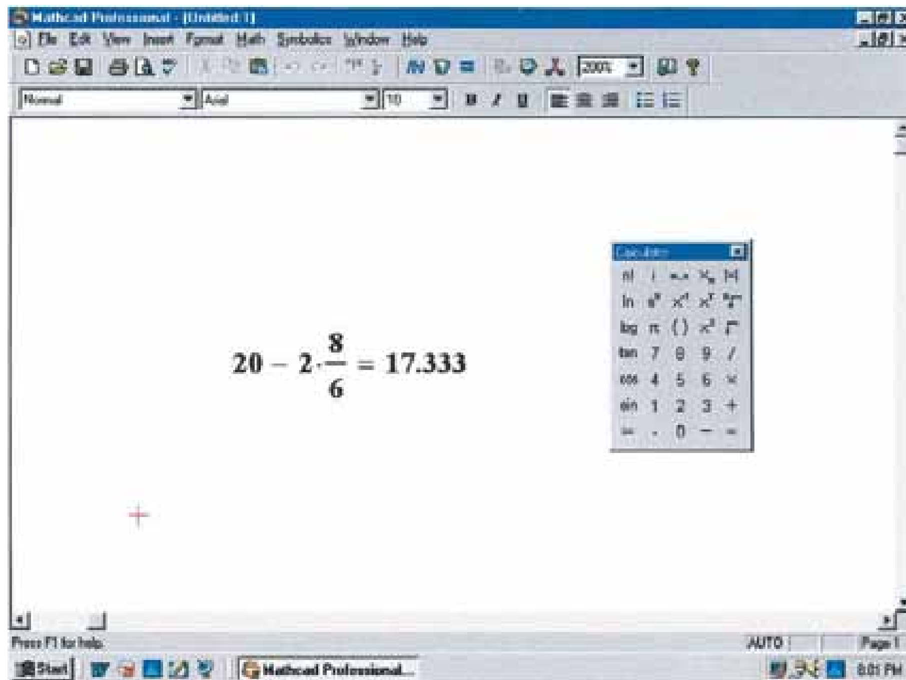


FIGURA 3.42
Uso de Mathcad para efectuar una operación matemática básica.

Para efectuar cualquier cálculo matemático, simplemente haga clic sobre la pantalla en cualquier punto conveniente para colocar un cursor sobre la pantalla (la localidad de la primera entrada). Luego, mecanografíe la operación matemática tal como **20 − 2 · 8/6** como se muestra en la figura 3.42; al instante en que se selecciona el signo de igual, el resultado, **17.333,** aparecerá como se muestra en la figura 3.42. La multiplicación se obtiene usando el asterisco (*), que en la mayoría de los teclados aparece arriba de la tecla del número 8

(debajo de la tecla SHIFT CONTROL). La división se establece con la tecla / que en la mayoría de los teclados se ubica al fondo y a la derecha. El signo de igual se puede seleccionar en la esquina superior derecha del teclado. Otra posibilidad es aplicar la secuencia **View-Toolbars-Calculator** para obtener el dispositivo **Calculator** de la figura 3.42. Use entonces esta calculadora para introducir la expresión entera y obtener el resultado oprimiendo el botón izquierdo del ratón.

Como un ejemplo en el cual deben definirse variables, será determinada la resistencia de un tramo de alambre de cobre de 200 pies de largo y diámetro de 0.01 pulg. Primero, como se muestra en la figura 3.44, deben ser definidas las variables de resistividad, longitud y diámetro. Esto se logra llamando primero la paleta **Greek** por medio de **View-Toolbars-Greek** y seleccionando la letra griega rho (ρ) seguida por una operación combinada **Mayúsculas-dos puntos (Shift:)**. Aparecerán dos puntos y un signo de igual, después de lo cual se introduce **10.37**. Para todos los cálculos que siguen, el valor de ρ ha quedado definido. Oprimiendo el botón izquierdo del ratón sobre la pantalla retirará entonces el cerco rectangular y colocará la variable y su valor en la memoria. Proceda de la misma manera para definir la longitud l y el diámetro d. A continuación, se define el diámetro en milímetros multiplicando el diámetro en pulgadas por 1000, y el área se establece por el diámetro en milímetros cuadrados. Observe que m tuvo que ser definida a la izquierda de la expresión para el área, y la variable d fue definida en la línea superior. La potencia de 2 fue obtenida seleccionando primero el símbolo de superíndice (^)e introduciendo luego el número 2 en el corchete Mathcad. O simplemente se mecanografía la letra m y se selecciona x^2 en la paleta **Calculator**. De hecho, todas las operaciones de multiplicación, división, etc., requeridas para determinar la resistencia R pueden ser levantadas de la paleta **Calculator**.

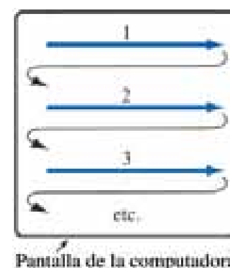


FIGURA 3.43
Definición del orden de operaciones matemáticas en Mathcad.

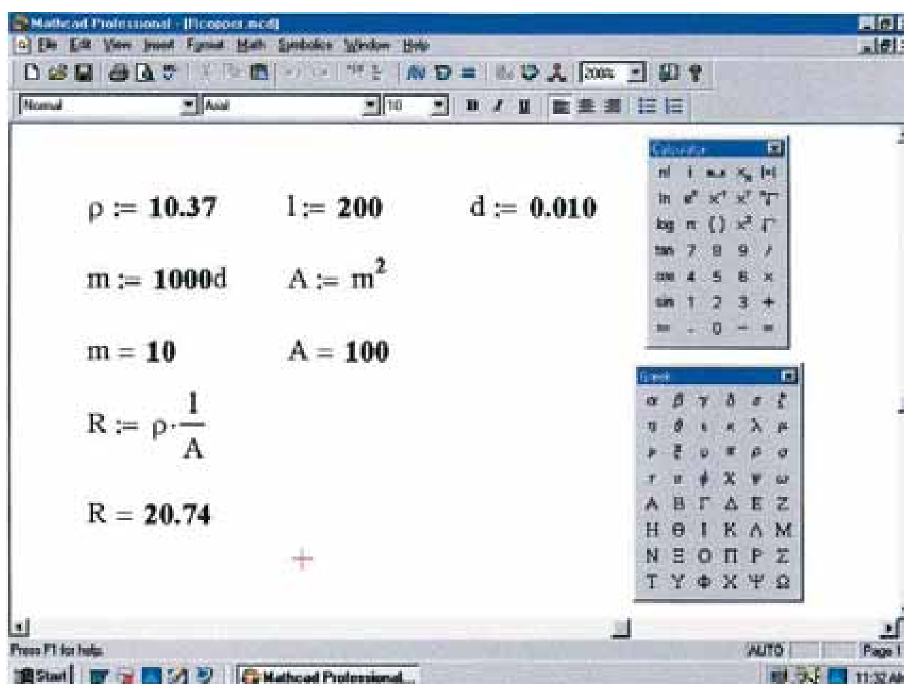


FIGURA 3.44
Uso de Mathcad para calcular la resistencia de un conductor de cobre.

En la figura 3.44, los valores de m y A fueron calculados mecanografiando m y en seguida el signo de igual del teclado. Finalmente, la ecuación para la resistencia R se define en términos de las variables y se obtiene el resultado. El verdadero valor de desarrollar la secuencia descrita reside en que puede colocarse el programa en la memoria y, cuando surja la necesidad, llamarlo, cambiar una variable o dos, y el resultado aparecerá inmediatamente. No es necesario reintroducir todas las definiciones, sino sólo cambiar el valor numérico.

En los capítulos subsiguientes, Mathcad aparecerá en cada oportunidad con el propósito de demostrar su capacidad para efectuar cálculos de manera rápida y efectiva. Probablemente el lector querrá aprender más acerca de esta posibilidad que ahorra tiempo y verifica la precisión.

PROBLEMAS

SECCIÓN 3.2 Resistencia: alambres circulares

1. Convierta lo siguiente a mils:
- **a.** 0.5 pulg **b.** 0.01 pulg
- **c.** 0.004 pulg **d.** 1 pulg
- **e.** 0.02 pies **f.** 0.01 cm

2. Calcule el área, en mils circulares (CM), de alambres con los siguientes diámetros:
- **a.** 0.050 pulg **b.** 0.016 pulg
- **c.** 0.30 pulg **d.** 0.1 cm
- **e.** 0.003 pies **f.** 0.0042 m

3. El área en mils circulares es:
- **a.** 1600 CM **b.** 900 CM
- **c.** 40,000 CM **d.** 625 CM
- **e.** 7.75 CM **f.** 81 CM

¿Cuál es el diámetro de cada alambre en pulgadas?

4. ¿Cuál es la resistencia de un alambre de cobre de 200 pies de longitud y 0.01 pulg de diámetro ($T = 20°C$)?

5. Encuentre la resistencia de un alambre de plata de 50 yardas de longitud y 0.0045 pulg de diámetro ($T = 20°C$).

6. **a.** ¿Cuál es el área en mils circulares de un conductor de aluminio de 80 pies de longitud y resistencia de 2.5 Ω?
b. ¿Cuál es su diámetro en pulgadas?

7. Un resistor de 2.2 Ω va a ser fabricado con alambre de cromoníquel. Si el alambre disponible mide $^1/_{32}$ pulg de diámetro, ¿cuánto se requiere para el resistor?

8. **a.** ¿Cuál es el área en mils circulares de un alambre de cobre que tiene una resistencia de 2.5 Ω y 300 pies de longitud ($T = 20°C$)?
b. Sin calcular la solución numérica, determine si el área de un alambre de aluminio será menor o mayor que la de un alambre de cobre. Explique su respuesta.
c. Resuelva (b) para un alambre de plata.

9. En la figura 3.45 se muestran tres conductores de distintos materiales.
a. Sin calcular la solución numérica, determine qué sección tiene la mayor resistencia. Explique su respuesta.
b. Encuentre la resistencia de cada sección y compárela con el resultado de (a) ($T = 20°C$).

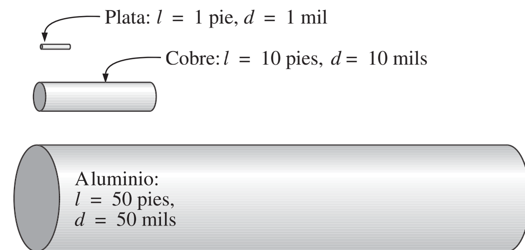


FIGURA 3.45
Problema 9.

10. Un alambre de 1000 pies de longitud tiene una resistencia de 0.5 kΩ y área de 94 CM. ¿De qué material está hecho este alambre ($T = 20°C$)?

***11.** **a.** ¿Cuál es la resistencia de una placa de cobre con las dimensiones mostradas ($T = 20°C$) en la figura 3.46?
b. Resuelva (a) para aluminio y compare los resultados.
c. Sin calcular la solución numérica, determine si la resistencia de la placa (aluminio o cobre) aumentará o disminuirá con un incremento de longitud. Explique su respuesta.
d. Resuelva (c) para un incremento del área transversal.

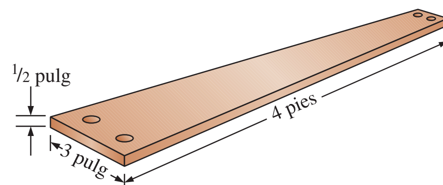


FIGURA 3.46
Problema 11.

12. Determine el incremento en resistencia de un conductor de cobre si el área se reduce por un factor de 4 y la longitud se duplica. La resistencia original era de 0.2 Ω. La temperatura permanece constante.

***13.** ¿Cuál es el nuevo nivel de resistencia de un alambre de cobre si la longitud cambia de 200 pies a 100 yardas, el área cambia de 40,000 CM a 0.04 $pulg^2$, y la resistencia original era de 800 mΩ?

SECCIÓN 3.3 Tabla de calibres de alambre

14. a. Utilice la tabla 3.2 y encuentre la resistencia de 450 pies de alambre AWG calibres 11 y 14.
b. Compare las resistencias de los dos tipos de alambre.
c. Compare las áreas de ambos alambres.

15. a. Utilice la tabla 3.2 para encontrar la resistencia de 1800 pies de alambre AWG calibres 8 y 18.
b. Compare las resistencias de los dos tipos de alambre.
c. Compare las áreas de los dos tipos de alambre.

16. a. Para el sistema de la figura 3.47, la resistencia de cada línea no puede exceder de 0.006 Ω, y la corriente máxima extraída por la carga es de 110 A. ¿Qué calibre de alambre debe usarse?
b. Resuelva (a) para una resistencia máxima de 0.003 Ω, d = 30 pies, y una corriente máxima de 110 A.

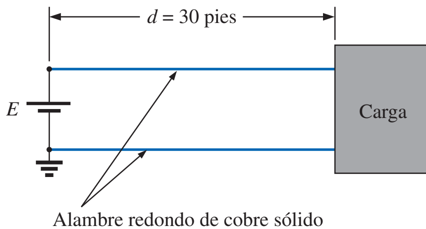


FIGURA 3.47
Problema 16.

***17. a.** A partir de la tabla 3.2, determine la densidad de corriente máxima permisible (A/CM) para un alambre AWG calibre 0000.
b. Convierta el resultado de (a) a A/$pulg^2$.
c. Utilice el resultado de (b) y determine el área transversal requerida para llevar una corriente de 5000 A.

SECCIÓN 3.4 Resistencia: unidades métricas

18. Utilice unidades métricas para determinar la longitud de un alambre de cobre que tiene una resistencia de 0.2 Ω y diámetro de 1/10 pulg.

19. Resuelva el problema 11 usando unidades métricas; esto es, convierta las dimensiones dadas a unidades métricas antes de determinar la resistencia.

20. Si la resistencia laminar de una muestra de óxido de estaño es de 100 Ω, ¿cuál es el espesor de la capa de óxido?

21. Determine el ancho de un resistor de carbono que tiene resistencia laminar de 150 Ω, longitud de 1/2 pulg y resistencia de 500 Ω.

***22.** Obtenga el factor de conversión entre ρ (CM·Ω/pie) y ρ (Ω · cm) mediante:
a. La resolución de ρ para el alambre de la figura 3.48 en CM·Ω/pie.
b. La resolución de ρ para el mismo alambre de la figura 3.48 en Ω · cm, haciendo las conversiones necesarias.
c. Use la ecuación $\rho_2 = k\rho_1$ para determinar el factor de conversión k si ρ_1 es la solución a la parte (a) y ρ_2 es la solución a la parte (b).

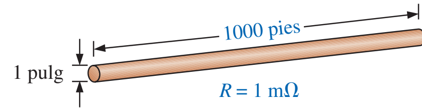


FIGURA 3.48
Problema 22.

SECCIÓN 3.5 Efectos de temperatura

23. La resistencia de un alambre de cobre es de 2 Ω a 10°C. ¿Cuál es su resistencia a 60°C?

24. La resistencia de una placa de aluminio es de 0.02 Ω a 0°C. ¿Cuál es su resistencia a 100°C?

25. La resistencia de un alambre de cobre es de 4 Ω a 70°F. ¿Cuál es su resistencia a 32°F?

26. La resistencia de un alambre de cobre es de 0.76 Ω a 30°C. ¿Cuál es su resistencia a −40°C?

27. Si la resistencia de un alambre de plata es de 0.04 Ω a −30°C, ¿cuál será su resistencia a 0°C?

***28. a.** La resistencia de un alambre de cobre es de 0.002 Ω a temperatura ambiente (68°F). ¿Cuál es su resistencia a 32°F (congelamiento) y a 212°F (ebullición)?
b. Para (a), determine el cambio en resistencia por cada cambio de 10° en temperatura entre la temperatura ambiente y 212°F.

29. a. La resistencia de un alambre de cobre es de 0.92 Ω a 4°C; ¿a qué temperatura (°C) será de 1.06 Ω?
b. ¿A qué temperatura estará en 0.15 Ω?

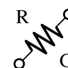
***30. a.** Si la resistencia de un alambre de cobre de 1000 pies de longitud es de 10 Ω a temperatura ambiente (20°C), ¿cuál será su resistencia a 50 K (grados Kelvin) usando la ecuación (3.6)?
b. Resuelva la parte (a) para una temperatura de 38.65 K. Comente los resultados obtenidos mediante el análisis de la curva presentada en la figura 3.14.
c. ¿Cuál es la temperatura del cero absoluto en unidades Fahrenheit?

31. a. Verifique el valor de α_{20} para el cobre en la tabla 3.6 sustituyendo la temperatura absoluta inferida en la ecuación (3.7).
b. Utilice la ecuación (3.8) y encuentre la temperatura a la que la resistencia de un conductor de cobre aumentará a 1 Ω desde un nivel de 0.8 Ω a 20°C.

32. Utilice la ecuación (3.8) para encontrar la resistencia de un alambre de cobre a 16°C si su resistencia a 20°C es de 0.4 Ω.

***33.** Determine la resistencia de una bobina de 1000 pies de alambre de cobre calibre 12 situada en el desierto a una temperatura de 115°F.

34. Un resistor de 22 Ω de alambre embobinado está clasificado a +200 PPM para un intervalo de temperatura de —10°C a +75°C. Determine su resistencia a 65°C.



35. Determine la clasificación en PPM del resistor de 10 kΩ de compuesto de carbono que se muestra en la figura 3.19 usando el nivel de resistencia determinado a 90°C.

SECCIÓN 3.6 Superconductores

36. Visite su biblioteca local y encuentre una tabla que dé las temperaturas críticas de varios materiales. Busque por lo menos cinco materiales, con sus temperaturas críticas, que no estén mencionadas en este texto. Escoja algunos materiales que tengan temperaturas críticas relativamente altas.

37. Encuentre por lo menos un artículo sobre la aplicación de la superconductividad en el sector comercial, y escriba un pequeño resumen, incluyendo todos los hechos y cifras interesantes.

***38.** Utilice el nivel de densidad requerido de 1 MA/cm^2 para la fabricación de circuitos integrados, determine qué corriente resultante se tendrá a través de un alambre casero del número 12. Compare el resultado obtenido con el límite permisible de la tabla 3.2.

***39.** Investigue el detector de campo magnético SQUID y repase su modo básico de operación y una o dos aplicaciones.

SECCIÓN 3.7 Tipos de resistores

40. a. ¿Cuál es el aumento aproximado en tamaño de un resistor de carbono de 1 W a otro de 2 W?

b. ¿Cuál es el aumento aproximado en tamaño de un resistor de carbono de 1/2 W a otro de 2 W?

c. En general, ¿podemos concluir que para el mismo tipo de resistor, un incremento en la clasificación por potencia requiere un aumento en el tamaño (volumen)? ¿Se trata de una relación casi lineal? Esto es, ¿una potencia doble requiere un aumento en tamaño de 2 : 1?

41. Si el resistor de 10 kΩ que muestra la figura 3.19 es exactamente de 10 kΩ a temperatura ambiente, ¿cuál será su resistencia aproximada a −30°C y a 100°C (ebullición)?

42. Resuelva el problema 41 para una temperatura de 120°F.

43. Si la resistencia entre las terminales exteriores de un potenciómetro lineal es de 10 kΩ, ¿cuál es su resistencia entre el brazo deslizable de contacto y una terminal exterior si la resistencia entre el brazo deslizable de contacto y la otra terminal exterior es de 3.5 kΩ?

44. Si el brazo deslizable de contacto de un potenciómetro lineal es un cuarto de la longitud alrededor de la superficie de contacto, ¿cuál es la resistencia entre el brazo y cada terminal si la resistencia total es de 25 kΩ?

***45.** Muestre las conexiones requeridas para establecer 4 kΩ entre el brazo deslizable de contacto y una terminal exterior de un potenciómetro de 10 kΩ si se tiene cero ohms entre la otra terminal exterior y el brazo deslizable.

SECCIÓN 3.8 Código de color y valores estándar de resistores

46. Encuentre el intervalo en que un resistor con las siguientes bandas de color debe situarse para satisfacer la tolerancia del fabricante:

	1a banda	2a banda	3a banda	4a banda
a.	verde	azul	anaranjado	oro
b.	rojo	rojo	café	plata
c.	café	negro	negro	—

47. Encuentre el código de color para los siguientes resistores de 10%.

a. 220 Ω **b.** 4700 Ω
c. 68 kΩ **d.** 9.1 MΩ

48. ¿Existe traslape en cobertura entre resistores de 20%? Esto es, determine el intervalo de tolerancia para un resistor de 10 Ω de 20% y un resistor de 15 Ω de 20%, y observe si sus intervalos de tolerancia se traslapan.

49. Resuelva el problema 48 para resistores de 10% del mismo valor.

SECCIÓN 3.9 Conductancia

50. Encuentre la conductancia de cada una de las siguientes resistencias:

a. 0.086 Ω **b.** 4 kΩ
c. 2.2 MΩ

Compare los tres resultados.

51. Encuentre la conductancia de 1000 pies de alambre AWG calibre 18 fabricado en:

a. cobre
b. aluminio
c. hierro

***52.** La conductancia de un alambre es 100 S. Si el área del alambre se incrementa en 2/3 y la longitud se reduce en la misma cantidad, encuentre la nueva conductancia del alambre si la temperatura permanece constante.

SECCIÓN 3.10 Ohmímetros

53. ¿Cómo se revisaría la condición de un fusible utilizando un ohmímetro?

54. ¿Cómo se determinarían los estados encendido y apagado de un interruptor usando un ohmímetro?

55. ¿Cómo se usaría un ohmímetro para revisar la condición de un foco eléctrico?

SECCIÓN 3.11 Termistores

***56. a.** Encuentre la resistencia del termistor que tenga las características de la figura 3.34 a −50°C, 50°C y 200°C. Advierta que es una escala logarítmica. De ser necesario, consulte una referencia con una escala logarítmica ampliada.

b. ¿Tiene el termistor un coeficiente térmico positivo o negativo?

c. ¿Es el coeficiente un valor fijo para el intervalo de −100°C a 400°C? ¿Por qué?

d. ¿Cuál es la razón de cambio aproximada de ρ con la temperatura a 100°C?

SECCIÓN 3.12 Celda fotoconductora

***57. a.** Usando las características de la figura 3.36, determine la resistencia de la celda fotoconductora a 10 y 100 pie-

candelas de iluminación. Como en el problema 56, observe que se trata de una escala logarítmica.

b. ¿Tiene la celda un coeficiente de iluminación positivo o negativo?

c. ¿Es el coeficiente un valor fijo para el intevalo de 0.1 a 1000 pie-candelas? ¿Por qué?

d. ¿Cuál es la razón de cambio aproximada de *R* con la iluminación a 10 pie-candelas?

SECCIÓN 3.13 Varistores

58. a. Con referencia a la figura 3.38(a), encuentre el voltaje terminal del dispositivo a 0.5 mA, 1 mA, 3 mA y 5 mA.

b. ¿Cuál es el cambio total en voltaje para el intervalo indicado de niveles de corriente?

c. Compare la razón de niveles máximo a mínimo de corriente arriba de la razón correspondiente de niveles de voltaje.

SECCIÓN 3.15 Mathcad

59. Verifique los resultados del ejemplo 3.3 usando Mathcad.

60. Verifique los resultados del ejemplo 3.11 usando Mathcad.

GLOSARIO

Celda fotoconductora Dispositivo semiconductor de dos terminales cuya resistencia terminal está determinada por la intensidad de la luz incidente sobre su superficie expuesta.

Cero absoluto Temperatura a la que todo movimiento molecular cesa; $-273.15°C$.

Código de color Técnica que emplea bandas de color para indicar los valores de resistencia y tolerancia de resistores.

Coeficiente térmico de resistencia negativo Valor indicativo de que la resistencia de un material disminuirá con un incremento en la temperatura.

Coeficiente térmico de resistencia positivo Valor indicativo de que la resistencia de un material aumentará con un incremento en la temperatura.

Conductancia (G) Indicación de la facilidad relativa con que una corriente puede establecerse en un material. Se mide en siemen (S).

Ductilidad Propiedad de un material que le permite ser estirado en forma de alambres largos y delgados.

Efecto Cooper "Enlace" de electrones cuando viajan a través de un medio.

Maleabilidad Propiedad de un material que le permite ser moldeado en muchas formas diferentes.

Mil circular (CM) Área transversal de un alambre con diámetro de un mil.

Ohm (Ω) Unidad de medición aplicada a la resistencia.

Ohmímetro Instrumento para medir valores de resistencia.

Potenciómetro Dispositivo de tres terminales a través del cual se pueden variar los niveles de potencial de manera lineal o no lineal.

PPM/°C Sensibilidad por temperatura de un resistor en partes por millón por grado Celsius.

Reóstato Elemento cuya resistencia terminal puede ser variada de manera lineal o no lineal.

Resistencia Medida de la oposición al flujo de carga a través de un material.

Resistencia laminar Está definida como ρ/d para el diseño de películas delgadas y circuitos integrados.

Resistividad (ρ) Constante de proporcionalidad entre la resistencia de un material y sus dimensiones físicas.

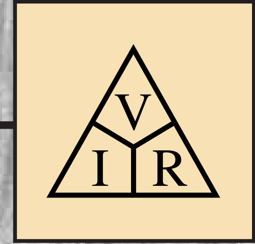
Superconductor Conductores de carga eléctrica que para todo propósito práctico tienen cero ohms.

Temperatura absoluta inferida Temperatura a través de la cual una aproximación lineal para la curva de resistencia real en función de la temperatura intersecará el eje de temperaturas.

Termistor Dispositivo semiconductor de dos terminales cuya resistencia es sensible a la temperatura.

Varistor Resistor no lineal, dependiente del voltaje, usado para suprimir transitorios de alto voltaje.

4



Ley de Ohm, potencia y energía

4.1 LEY DE OHM

Considere la siguiente relación:

$$\text{Efecto} = \frac{\text{causa}}{\text{oposición}} \tag{4.1}$$

Toda conversión de energía de una forma a otra puede ser relacionada a esta ecuación. Para circuitos eléctricos, el *efecto* que se trata de establecer es el flujo de carga, o *corriente*. La *diferencia de potencial*, o voltaje, entre dos puntos es la *causa* ("presión"), y la oposición es la *resistencia* encontrada.

Una excelente analogía para el más sencillo de los circuitos eléctricos es el agua que hay en una manguera conectada a una válvula de presión. Considere que los electrones en un alambre de cobre representan el agua en la manguera, la válvula de presión sería el voltaje aplicado, y el tamaño de la manguera constituiría el factor que determina la resistencia. Si la válvula de presión está cerrada, el agua simplemente permanece en la manguera sin moverse, tal como los electrones en un conductor sin un voltaje aplicado. Si abrimos la válvula de presión, el agua fluirá a través de la manguera tal como lo harán los electrones en un alambre de cobre cuando se le aplique un voltaje. En otras palabras, la ausencia de la "presión" en un caso y del voltaje en el otro resultará simplemente en un sistema sin movimiento o reacción. La velocidad a la que el agua fluirá en la manguera es una función del tamaño de la manguera. Una manguera con un diámetro muy pequeño limitará la velocidad a la que el agua puede fluir por ella, de la misma forma que un alambre de cobre con diámetro pequeño presentará una resistencia alta y limitará la corriente.

En resumen, la ausencia de una "presión" aplicada, así como de voltaje en un circuito eléctrico, resultará en una reacción nula en el sistema y ninguna corriente en el circuito eléctrico. La corriente es una reacción al voltaje aplicado y no el factor que pone al sistema en movimiento. Para continuar con la analogía de la manguera, entre más presión exista en el grifo mayor será la



Alemán
(Erlangen, Colonia)
(1789-1854)
Físico y matemático
Profesor de física,
Universidad de Colonia



Cortesía de Smithsonian Institution Fotografía núm. 51,145

En 1827 desarrolló una de las leyes más importantes de los circuitos eléctricos: la *ley de Ohm.* Cuando la ley de Ohm fue presentada por primera vez, se consideró absurda y que faltaba la documentación de soporte, por lo que Georg Simon Ohm perdió su posición de profesor y tuvo que dedicarse a efectuar trabajos de poca monta y a dar clases privadas como tutor. Pasaron 22 años antes de que su trabajo fuera reconocido como una contribución importante al campo de la electricidad. Se le otorgó una cátedra en la Universidad de Munich y recibió la Medalla Copley de la Real Sociedad en 1841. Sus investigaciones abarcaron también las áreas de física molecular, acústica y comunicación telegráfica.

FIGURA 4.1
Georg Simon Ohm.

velocidad del agua que fluirá por la manguera, justo como aplicar un voltaje alto al mismo circuito resultará en una corriente elevada.

Al sustituir los términos introducidos en la ecuación (4.1) resulta:

$$\text{Corriente} = \frac{\text{diferencia de potencial}}{\text{resistencia}}$$

y

$$\boxed{I = \frac{E}{R}} \qquad \text{(ampere, A)} \qquad \textbf{(4.2)}$$

La ecuación (4.2) es conocida como **ley de Ohm** en honor de Georg Simon Ohm (Figura 4.1). Esta ley revela claramente que para una resistencia fija, a mayor voltaje (o presión) en un resistor, mayor es la corriente, y a mayor resistencia para el mismo voltaje, menor es la corriente. En otras palabras, la corriente es proporcional al voltaje aplicado e inversamente proporcional a la resistencia.

Por medio de simples manejos matemáticos, el voltaje y la resistencia pueden encontrarse en términos de las otras dos cantidades:

$$\boxed{E = IR} \qquad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(4.3)}$$

y

$$\boxed{R = \frac{E}{I}} \qquad \text{(ohms, }\Omega\text{)} \qquad \textbf{(4.4)}$$

Las tres cantidades de las ecuaciones (4.2) a la (4.4) son definidas por el sencillo circuito de la figura 4.2. La corriente I de la ecuación (4.2) resulta de aplicar E volts de corriente directa (cd) a una red con resistencia R. La ecuación (4.3) determina el voltaje E requerido para establecer una corriente I a través de una red con una resistencia total R, y la ecuación (4.4) proporciona la resistencia de una red que resulta en una corriente I debida a un voltaje aplicado E.

Observe en la figura 4.2 que la fuente de voltaje "presiona" la corriente en una dirección que pasa de la terminal negativa de la batería a la terminal positiva. Esto será siempre el caso para circuitos de una sola fuente. El efecto de más de una fuente en la red será examinado en el siguiente capítulo. El símbolo para el voltaje de la batería (una fuente de energía eléctrica) es la letra E mayúscula, mientras que la caída de voltaje en el resistor es dada por el símbolo V. La polaridad de la caída de voltaje en el resistor es como se define por la fuente aplicada porque las dos terminales de la batería se conectan directamente al elemento resistivo.

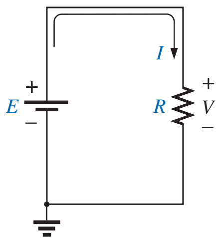


FIGURA 4.2
Circuito básico.

EJEMPLO 4.1 Determine la corriente resultante de la aplicación de una batería de 9 V a una red con resistencia de 2.2 Ω.

Solución: Ecuación (4.2):

$$I = \frac{E}{R} = \frac{9\text{ V}}{2.2\ \Omega} = \mathbf{4.09\ A}$$

EJEMPLO 4.2 Calcule la resistencia de un foco de 60 W si una corriente de 500 mA resulta de un voltaje aplicado de 120 V.



Solución: Ecuación (4.4):

$$R = \frac{E}{I} = \frac{120\text{ V}}{500 \times 10^{-3}\text{ A}} = \mathbf{240\ \Omega}$$

Para un elemento resistivo aislado, la polaridad de la caída de voltaje es como se muestra en la figura 4.3(a) para la dirección indicada de la corriente. Una inversión de la corriente invertirá la polaridad, como se muestra en la figura 4.3(b). En general, el flujo de la carga va desde un potencial alto (+) hasta uno bajo (−). Las polaridades establecidas por la dirección de la corriente se volverán cada vez más importantes en el análisis que se presenta en seguida.

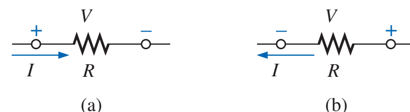


FIGURA 4.3
Definición de las polaridades.

EJEMPLO 4.3 Calcule la corriente a través del resistor de 2 kΩ de la figura 4.4 si la caída de voltaje en él es de 16 V.

Solución:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{16\text{ V}}{2 \times 10^{3}\ \Omega} = \mathbf{8\text{ mA}}$$

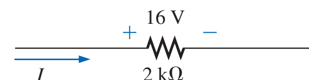


FIGURA 4.4
Ejemplo 4.3.

EJEMPLO 4.4 Calcule el voltaje que debe aplicarse al cautín de la figura 4.5 para establecer una corriente de 1.5 A a través de él si su resistencia interna es de 80 Ω.

Solución:

$$E = IR = (1.5\text{ A})(80\ \Omega) = \mathbf{120\text{ V}}$$

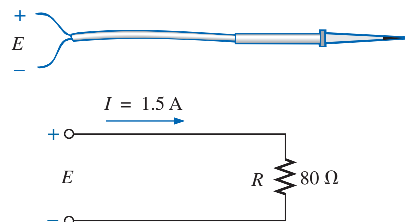


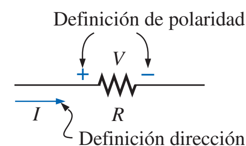
FIGURA 4.5
Ejemplo 4.4.

En varios de los ejemplos de este capítulo, como en el ejemplo 4.4, el voltaje aplicado es realmente obtenido de una salida de ca en el hogar, la oficina o el laboratorio. Este enfoque se usó para dar al estudiante una oportunidad de relacionarse cuanto antes con situaciones del mundo real y para demostrar que varias de las ecuaciones obtenidas en este capítulo son aplicables también a redes de ca. El capítulo 13 proporcionará una relación directa entre voltajes de ca y cd que permite las sustituciones matemáticas empleadas en este capítulo. En otras palabras, no se preocupe por el hecho de que algunos de los voltajes y corrientes que aparecen en los ejemplos de este capítulo sean en realidad voltajes de ca, porque la ecuaciones para redes de cd tienen exactamente el mismo formato, y todas las soluciones serán correctas.

4.2 TRAZADO DE LA LEY DE OHM

Las gráficas, características, diagramas y elementos similares, juegan un papel importante en cada campo técnico como un modo por el cual una imagen amplia del comportamiento o respuesta de un sistema pueden ser mostrados de manera conveniente. Por tanto, resulta crítico desarrollar las habilidades necesarias para leer y graficar datos de manera que puedan ser interpretados fácilmente.

Para la mayor parte de los conjuntos de características de los dispositivos electrónicos, la corriente está representada por el eje vertical (ordenadas), y el voltaje por el eje horizontal (abscisas), como se muestra en la figura 4.6. Observe primero que el eje vertical está en ampere y el horizontal en volts. En



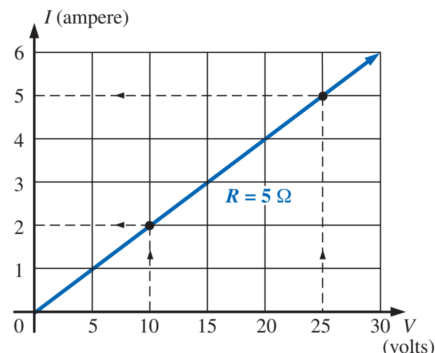


FIGURA 4.6
Gráfica de la ley de Ohm.



algunas gráficas, I puede estar en miliampere (mA), microampere (μA), o en cualquier unidad apropiada para el intervalo de interés. Lo mismo es cierto para los niveles de voltaje sobre el eje horizontal. Observe también que los parámetros seleccionados requieren que la separación entre valores numéricos del eje vertical sea diferente a la del eje horizontal. La gráfica lineal (línea recta) revela que la resistencia no está cambiando con el nivel de la corriente o del voltaje; sino que se trata de una cantidad fija en todas partes. La dirección de la corriente y la polaridad del voltaje que aparecen en la parte superior de la figura 4.6 son las definidas para la gráfica proporcionada. Si la dirección de la corriente es opuesta a la dirección definida, la región por debajo del eje horizontal será la región de interés para la corriente I. Si la polaridad del voltaje es opuesta a la definida, la región situada a la izquierda del eje de corriente será la región de interés. Para el resistor fijo estándar, el primer cuadrante, o región, de la figura 4.6 es la única región de interés. Sin embargo, el estudiante encontrará muchos dispositivos en sus cursos de electrónica que utilizarán los otros cuadrantes de una gráfica.

Una vez que una gráfica como la de la figura 4.6 es desarrollada, la corriente o el voltaje a cualquier nivel puede encontrarse a partir de la otra cantidad empleando simplemente la gráfica resultante. Por ejemplo, en $V = 25$ V, si se traza una línea vertical sobre la figura 4.6 hacia la curva como se muestra, la corriente resultante puede encontrarse trazando una línea horizontal sobre el eje de corriente, donde se obtiene una resultante de 5 A. Similarmente, en $V = 10$ V, una línea vertical a la gráfica y una línea horizontal al eje de corriente resultarán en una corriente de 2 A, de acuerdo con la ley de Ohm.

Si se desconoce la resistencia de una gráfica, puede ser determinada en cualquier punto de la gráfica ya que una línea recta indica una resistencia fija. En cualquier punto sobre la gráfica, encuentre la corriente y el voltaje resultantes, y simplemente sustitúyalos en la siguiente ecuación:

$$R_{cd} = \frac{V}{I} \tag{4.5}$$

Para probar la ecuación (4.5), considere un punto sobre la gráfica donde $V = 20$ V e $I = 4$ A. La resistencia resultante es $R_{cd} = V/I = 20\text{ V}/4\text{ A} = 5\ \Omega$. Para fines de comparación, un resistor de 1 Ω y otro de 10 Ω fueron trazados sobre la gráfica de la figura 4.7. Observe que a menor resistencia, la pendiente es más pronunciada (más cercana al eje vertical) de la curva.

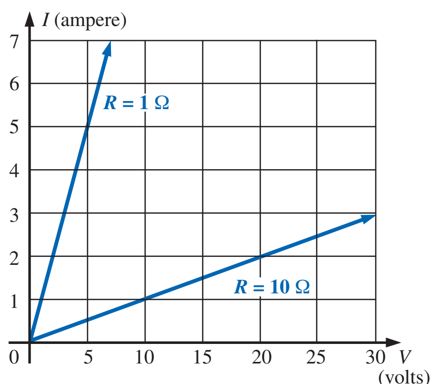


FIGURA 4.7
Demostración sobre una gráfica I-V de que a menor resistencia, más pronunciada es la pendiente.

Al escribir la ley de Ohm de la siguiente manera y relacionarla con la ecuación básica de una línea recta

$$\begin{array}{cccc} I = & \frac{1}{R} & \cdot\, E & +\, 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y = & m & \cdot\, x & +\, b \end{array}$$

se encontrará que la pendiente es igual a 1 dividido entre el valor de la resistencia, como se indica mediante la siguiente expresión:

$$m = \text{pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{1}{R} \tag{4.6}$$

donde Δ significa un cambio pequeño, finito, de la variable.

La ecuación (4.6) revela claramente que a mayor resistencia, menor es la pendiente. Si se escribe en la forma siguiente, la ecuación (4.6) puede emplearse para determinar la resistencia a partir de la curva lineal:

$$R = \frac{\Delta V}{\Delta I} \quad \text{(ohms)} \tag{4.7}$$

La ecuación establece que escogiendo un ΔV particular (o ΔI), puede obtenerse el correspondiente ΔI (o ΔV, respectivamente) de la gráfica, como se muestra en la figura 4.8, y entonces determinar la resistencia. Si la gráfica es una línea recta, la ecuación (4.7) dará el mismo resultado sin importar dónde se aplique la ecuación. Pero si la gráfica es curva, la resistencia cambiará.

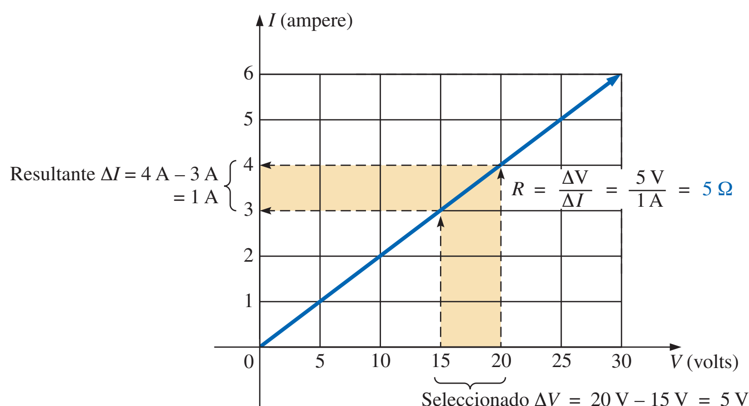


FIGURA 4.8
Aplicación de la ecuación (4.6).

EJEMPLO 4.5 Determine la resistencia asociada con la curva de la figura 4.9 empleando las ecuaciones (4.5) y (4.7), y compare los resultados.

Solución: En $V = 6$ V, $I = 3$ mA, y

$$R_{cd} = \frac{V}{I} = \frac{6\text{ V}}{3\text{ mA}} = \mathbf{2\ k\Omega}$$

Para el intervalo entre 6 V y 8 V,

$$R = \frac{\Delta V}{\Delta I} = \frac{2\text{ V}}{1\text{ mA}} = \mathbf{2\ k\Omega}$$

Los resultados son equivalentes.

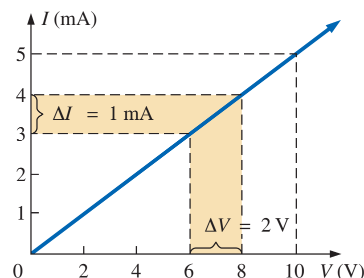


FIGURA 4.9
Ejemplo 4.5.

Antes de dejar el tema, investiguemos primero las características de un dispositivo semiconductor muy importante llamado **diodo**, el cual será examinado con todo detalle en cursos de electrónica básica. Este dispositivo actuará idealmente como una trayectoria de baja resistencia a la corriente en una dirección y como una trayectoria de alta resistencia a la corriente en la dirección opuesta, algo muy parecido a la manera en que un interruptor pasa corriente en una sola dirección. Un conjunto típico de las características de un diodo se muestra en la figura 4.10. Sin cálculos matemáticos, la cercanía de la curva al eje de voltaje para valores negativos del voltaje aplicado indica que ésa es la región de baja conductancia (alta resistencia, interruptor abierto). Observe que esta región se extiende hasta aproximadamente 0.7 V positivos. Sin embargo, para valores del voltaje aplicado mayores que 0.7 V, la elevación vertical en las características indica una región de conductividad elevada (baja resistencia, interruptor cerrado). La aplicación de la ley de Ohm verificará las conclusiones anteriores.



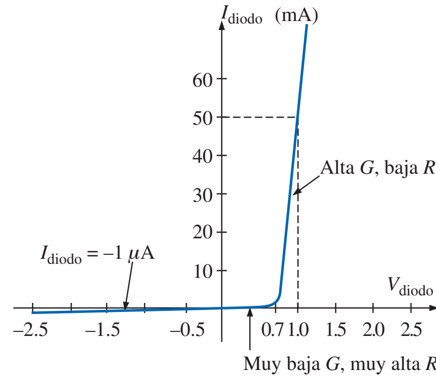


FIGURA 4.10
Características de un diodo semiconductor.

En $V = +1$ V,

$$R_{diodo} = \frac{V}{I} = \frac{1\text{ V}}{50\text{ mA}} = \frac{1\text{ V}}{50 \times 10^{-3}\text{ A}}$$

$$= 20\ \Omega$$

(un valor relativamente bajo para la mayoría de las aplicaciones)

En $V = -1$ V,

$$R_{diodo} = \frac{V}{I} = \frac{1\text{ V}}{1\ \mu\text{A}}$$

$$= 1\text{ M}\Omega$$

(lo cual a menudo se representa por un circuito abierto equivalente)

4.3 POTENCIA

La **potencia** es una indicación de cuánto trabajo (conversión de energía de una forma a otra) puede efectuarse en una cantidad específica de tiempo, esto es, una *tasa* de trabajo realizado. Por ejemplo, un motor grande tiene más potencia que un motor pequeño porque puede convertir más energía eléctrica en energía mecánica en el mismo periodo. Como la energía convertida se mide en *joules* (J) y el tiempo en segundos (s), la potencia se mide en joules/segundo (J/s). La unidad eléctrica de medición para la potencia es el watt (W), definido por:

$$1\text{ watt (W)} = 1\text{ joule/segundo (J/s)} \tag{4.8}$$

En forma de ecuación, la potencia es determinada por:

$$P = \frac{W}{t} \qquad \text{(watts, W, o joules/segundo, J/s)} \tag{4.9}$$

con la energía W medida en joules y el tiempo t en segundos.

A lo largo del texto, la abreviatura para energía (W) puede ser distinguida de la usada para watt (W) por que una está en cursivas mientras la otra no. De hecho, todas las variables en la sección de cd se escriben en cursivas mientras que las unidades aparecen en tipo romano.

La unidad de medición, el watt, se deriva del nombre de James Watt (Figura 4.11), quien participó en el establecimiento de los estándares de mediciones de potencia. James Watt introdujo el término **caballo de potencia** (hp) como medida de la potencia promedio desarrollada por un caballo fuerte durante un día de trabajo. Esto es aproximadamente 50% más de lo que puede esperarse de un caballo promedio. El caballo de potencia y el watt están relacionados de la siguiente manera:

$$1 \text{ caballo de potencia} \cong 746 \text{ watts}$$

La potencia entregada a, o absorbida por, un dispositivo eléctrico o sistema puede encontrarse en términos de la corriente y el voltaje sustituyendo primero la ecuación (2.7) en la ecuación (4.9):

$$P = \frac{W}{t} = \frac{QV}{t} = V\frac{Q}{t}$$

Pero:

$$I = \frac{Q}{t}$$

de modo que:

$$P = VI \quad \text{(watts)} \tag{4.10}$$

Por sustitución directa de la ley de Ohm, la ecuación para la potencia puede obtenerse en otras dos formas:

$$P = VI = V\left(\frac{V}{R}\right)$$

y

$$P = \frac{V^2}{R} \quad \text{(watts)} \tag{4.11}$$

o bien:

$$P = VI = (IR)I$$

y

$$P = I^2R \quad \text{(watts)} \tag{4.12}$$

El resultado es que la potencia absorbida por el resistor de la figura 4.12 puede encontrarse directamente dependiendo de la información disponible. En otras palabras, si la corriente y la resistencia son conocidas, conviene emplear la ecuación (4.12) directamente, y si V e I son conocidas, el uso de la ecuación (4.10) es lo apropiado. Conviene tener que aplicar la ley de Ohm antes de determinar la potencia.

La potencia puede ser entregada o absorbida según sea la polaridad del voltaje y la dirección de la corriente. Para todas las fuentes de voltaje de cd, la potencia está siendo *entregada* por la fuente si la corriente tiene la dirección que aparece en la figura 4.13(a). Observe que la corriente tiene la misma dirección establecida por la fuente en una red de una sola fuente. Si la dirección de la corriente y la polaridad son como se muestran en la figura 4.13(b) debido a una red multifuente, la batería estará absorbiendo tanta potencia como cuando esté siendo cargada.

Para elementos resistivos, toda la potencia entregada se disipa en forma de calor porque la polaridad del voltaje es definida por la dirección de la corriente (y viceversa), y la corriente siempre entrará a la terminal de mayor potencial correspondiendo con el estado de absorción de la figura 4.13(b). Una inversión de la dirección de la corriente en la figura 4.12 también invertirá la polaridad del voltaje en el resistor y equiparará las condiciones de la figura 4.13(b).

Escocés
(Greenock, Birmingham)
(1736-1819)
Fabricante de instrumentos e inventor
Elegido Miembro de la Real Sociedad de Londres en 1785



Cortesía de Smithsonian Institution Fotografía núm. 30,391

En 1757, a la edad de 21 años, usó su talento innovador para diseñar instrumentos matemáticos como el *cuadrante, la brújula,* y varias *escalas.* En 1765 introdujo el uso de un *condensador* separado para incrementar la eficiencia de las máquinas de vapor. En los años siguientes recibió varias patentes importantes sobre el diseño mejorado de máquinas, incluyendo un movimiento rotatorio para la máquina de vapor (contra la acción alternativa) y una máquina de doble acción, en la que el pistón jalaba y empujaba en su movimiento cíclico. Introdujo el término **caballo de potencia** como la potencia promedio desarrollada por un caballo fuerte en un día de trabajo.

FIGURA 4.11
James Watt.

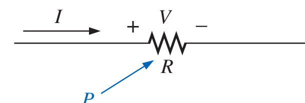


FIGURA 4.12
Definición de la potencia hacia un elemento resistivo.

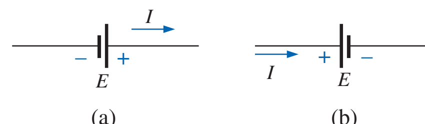


FIGURA 4.13
Potencia de una batería: (a) suministrada; (b) absorbida.



La magnitud de la potencia entregada o absorbida por una batería está dada por:

$$P = EI \qquad \text{(watts)} \tag{4.13}$$

donde E es el voltaje en las terminales de la batería e I es la corriente a través de la fuente.

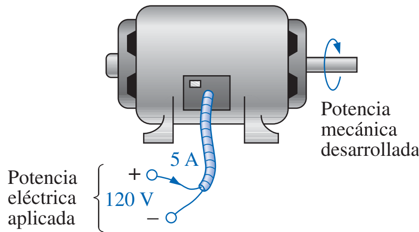


FIGURA 4.14
Ejemplo 4.6.

EJEMPLO 4.6 Encuentre la potencia entregada al motor de cd de la figura 4.14.

Solución:

$$P = VI = (120 \text{ V})(5 \text{ A}) = 600 \text{ W} = \mathbf{0.6\ kW}$$

EJEMPLO 4.7 ¿Cuál es la potencia disipada por un resistor de 5 Ω si la corriente es de 4 A?

Solución:

$$P = I^2R = (4 \text{ A})^2(5\ \Omega) = \mathbf{80\ W}$$

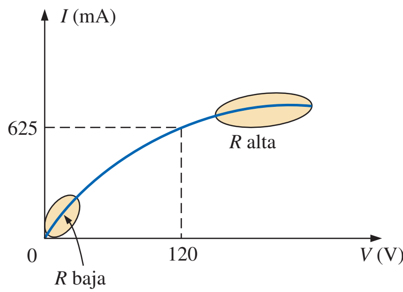


FIGURA 4.15
Características I-V no lineales de un foco de 75 W.

EJEMPLO 4.8 Las características *I-V* de un foco están dadas en la figura 4.15. Observe la no linealidad de la curva, lo que indica un rango amplio en resistencia del foco con voltaje aplicado como se definió mediante la explicación de la sección 4.2. Si el voltaje es de 120 V, encuentre la potencia del foco. También calcule la resistencia del foco bajo las condiciones dadas.

Solución: En 120 V,

$$I = 0.625 \text{ A}$$

y
$$P = VI = (120 \text{ V})(0.625 \text{ A}) = \mathbf{75\ W}$$

En 120 V,

$$R = \frac{V}{I} = \frac{120 \text{ V}}{0.625 \text{ A}} = \mathbf{192\ \Omega}$$

Algunas veces la potencia es dada y la corriente o el voltaje deben ser determinados. Por medio de operaciones algebraicas, una ecuación para cada variable se obtiene como sigue:

$$P = I^2R \Rightarrow I^2 = \frac{P}{R}$$

y
$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} \qquad \text{(ampere)} \tag{4.14}$$

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V^2 = PR$$

y
$$V = \sqrt{PR} \qquad \text{(volts)} \tag{4.15}$$

EJEMPLO 4.9 Determine la corriente que pasa a través de un resistor de 5 kΩ cuando la potencia disipada por el elemento es de 20 mW.



Solución: Ecuación (4.14):

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{20 \times 10^{-3}\,\text{W}}{5 \times 10^{3}\,\Omega}} = \sqrt{4 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^{-3}\,\text{A}$$
$$= \mathbf{2\ mA}$$

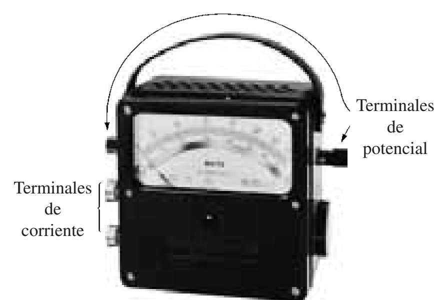


FIGURA 4.16
Watímetro. (Cortesía de Electrical Instrument Service, Inc.)

4.4 WATÍMETROS

Como podría esperarse, existen instrumentos que pueden medir la potencia entregada por una fuente a un elemento de disipación o disipativo. Un instrumento de este tipo, el **watímetro**, se muestra en la figura 4.16. Como la potencia es una función de los niveles de corriente y voltaje, para medir la potencia al resistor R deben ser conectadas cuatro terminales como se muestra en la figura 4.17.

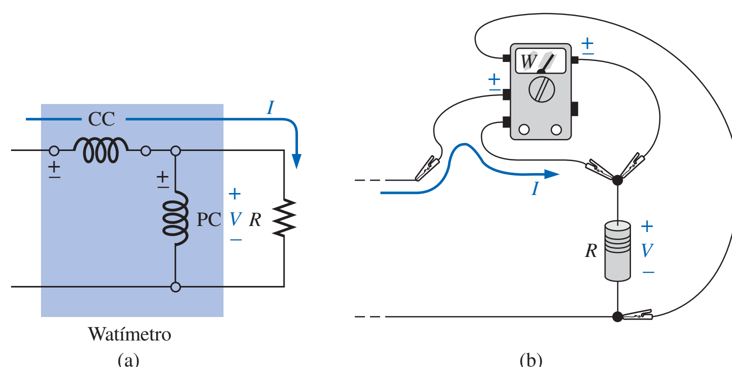


FIGURA 4.17
Conexiones de watímetro.

Si las bobinas de corriente (CC) y las bobinas de potencial (PC) del watímetro están conectadas como en la figura 4.17, se tendrá una lectura hacia arriba de la escala del watímetro. Una inversión de cualquiera de las bobinas resultará en una indicación por abajo de cero. Tres terminales de voltaje pueden estar disponibles sobre el lado del voltaje para permitir una selección de los niveles de éste. En la mayoría de los watímetros, las terminales de corriente son físicamente mayores que las de voltaje para proporcionar seguridad y garantizar una conexión sólida.

4.5 EFICIENCIA

Un diagrama de flujo para los niveles de energía asociados con cualquier sistema que convierte energía de una a otra forma se muestra en la figura 4.18. Observe en particular que el nivel de energía de salida debe ser siempre menor que la energía aplicada debido a pérdidas y almacenamiento dentro del sistema. Lo mejor que puede esperarse es que W_{en} y W_{sal} sean relativamente cercanas en magnitud.

La conservación de la energía requiere que:

Entrada de energía = salida de energía + energía perdida o almacenada en el sistema.

Al dividir ambos lados de la relación entre t da:

$$\frac{W_{\text{en}}}{t} = \frac{W_{\text{sal}}}{t} + \frac{W_{\text{perdida o almacenada por el sistema}}}{t}$$

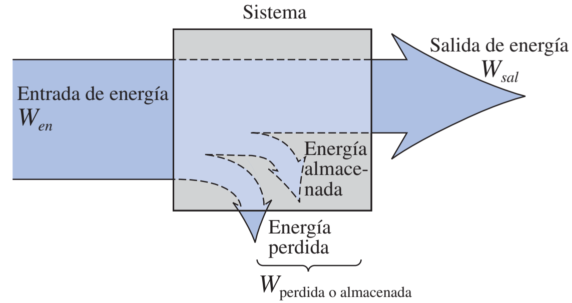


FIGURA 4.18
Flujo de energía a través de un sistema.

Como $P = W/t$, tenemos lo siguiente:

$$P_i = P_o + P_{\text{perdida o almacenada}} \qquad \text{(W)} \tag{4.16}$$

La **eficiencia** (simbolizada por, η, eta griega minúscula) del sistema se determina entonces por la siguiente ecuación:

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{salida de potencia}}{\text{entrada de potencia}}$$

y

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} \qquad \text{(número decimal)} \tag{4.17}$$

donde η es un número decimal. Expresada como un porcentaje,

$$\eta\% = \frac{P_o}{P_i} \times 100\% \qquad \text{(por ciento)} \tag{4.18}$$

En términos de la energía de entrada y de salida, la eficiencia en porcentaje está dada por:

$$\eta\% = \frac{W_o}{W_i} \times 100\% \qquad \text{(por ciento)} \tag{4.19}$$

La máxima eficiencia posible es 100%, y ocurre cuando $P_o = P_i$, o cuando la potencia perdida o almacenada en el sistema es cero. Es obvio que entre mayores sean las pérdidas internas del sistema al generar la potencia necesaria de salida o energía, menor será la eficiencia neta.

EJEMPLO 4.10 Un motor de 2 hp opera con una eficiencia de 75%. ¿Cuál es la entrada de potencia en watts? Si el voltaje aplicado es de 220 V, ¿cuál es la entrada de corriente?

Solución:

$$\eta\% = \frac{P_o}{P_i} \times 100\%$$

$$0.75 = \frac{(2\text{ hp})(746\text{ W/hp})}{P_i}$$

o bien:
$$P_i = \frac{1492\text{ W}}{0.75} = \mathbf{1989.33\text{ W}}$$

$$P_i = EI \quad \text{o} \quad I = \frac{P_i}{E} = \frac{1989.33\text{ W}}{220\text{ V}} = \mathbf{9.04\text{ A}}$$

EJEMPLO 4.11 ¿Cuál es la salida en caballos de potencia de un motor con eficiencia de 80% y entrada de corriente de 8 A a 120 V?

Solución:

$$\eta\% = \frac{P_o}{P_i} \times 100\%$$

$$0.80 = \frac{P_o}{(120\text{ V})(8\text{ A})}$$

y
$$P_o = (0.80)(120\text{ V})(8\text{ A}) = 768\text{ W}$$

con:
$$768\text{ W}\left(\frac{1\text{ hp}}{746\text{ W}}\right) = \mathbf{1.029\text{ hp}}$$

EJEMPLO 4.12 Si $\eta = 0.85$, determine el nivel de salida de energía si la energía aplicada es de 50 J.

Solución:

$$\eta = \frac{W_o}{W_i} \Rightarrow W_o = \eta W_i$$
$$= (0.85)(50\text{ J})$$
$$= \mathbf{42.5\text{ J}}$$

Las componentes básicas de un sistema generador (voltaje) se muestran en la figura 4.19. La fuente de potencia mecánica es una estructura similar a una rueda de paletas que es girada por el agua que se precipita por una presa. El tren de engranes garantiza entonces que el elemento rotatorio del generador gire a una velocidad específica. El voltaje de salida debe entonces ser alimentado a través de un sistema de transmisión hacia la carga. Para cada componente

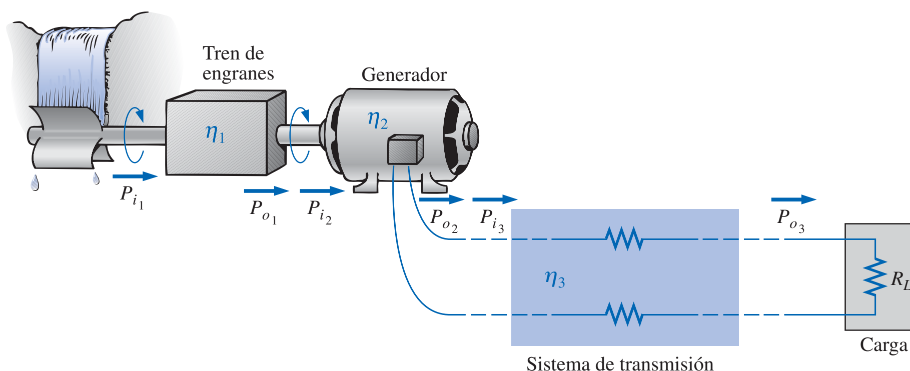


FIGURA 4.19
Componentes básicas de un sistema generador.



del sistema, una potencia de entrada y otra de salida han sido indicadas. La eficiencia de cada sistema está dada por:

$$\eta_1 = \frac{P_{o_1}}{P_{i_1}} \qquad \eta_2 = \frac{P_{o_2}}{P_{i_2}} \qquad \eta_3 = \frac{P_{o_3}}{P_{i_3}}$$

Si se forma el producto de esas tres eficiencias,

$$\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 = \frac{P_{o_1}}{P_{i_1}} \cdot \frac{P_{o_2}}{P_{i_2}} \cdot \frac{P_{o_3}}{P_{i_3}}$$

y se sustituye el hecho de que $P_{i_2} = P_{o_1}$ y $P_{i_3} = P_{o_2}$, la cual es una medida de la eficiencia total del sistema. En general, para el sistema representativo en cascada de la figura 4.20,

$$\eta_{\text{total}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdots \eta_n \tag{4.20}$$

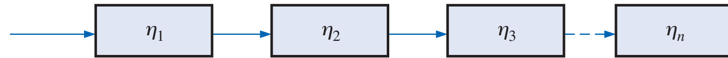


FIGURA 4.20
Sistema en cascada.

EJEMPLO 4.13 Encuentre la eficiencia total del sistema de la figura 4.19 si $\eta_1 = 90\%$, $\eta_2 = 85\%$ y $\eta_3 = 95\%$.

Solución:

$$\eta_T = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 = (0.90)(0.85)(0.95) = 0.727, \text{ o } \mathbf{72.7\%}$$

EJEMPLO 4.14 Si la eficiencia η_1 cae a 40%, encuentre la nueva eficiencia total y compare el resultado con el obtenido en el ejemplo 4.13.

Solución:

$$\eta_T = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 = (0.40)(0.85)(0.95) = 0.323, \text{ o } \mathbf{32.3\%}$$

Ciertamente, 32.3% es considerablemente menor que 72.7%. La eficiencia total de un sistema en cascada es determinada, por tanto, principalmente por la eficiencia más baja (eslabón más débil) y es menor que (o igual a si las eficiencias restantes son de 100%) el eslabón menos eficiente del sistema.

4.6 ENERGÍA

Para que la potencia, que es la tasa con que se efectúa un trabajo, produzca una conversión de energía de cualquier forma, debe ser *utilizada durante un periodo determinado*. Por ejemplo, un motor puede tener los caballos de potencia necesarios para mover una carga pesada, pero a menos que se *use* durante un periodo establecido, no habrá conversión de energía. Además, entre mayor sea el tiempo que el motor se use para mover la carga, mayor será la energía gastada.

La **energía** (W) perdida o ganada por cualquier sistema se determina, por tanto, mediante:

$$W = Pt \qquad \text{(wattsegundo, Ws, o joules)} \tag{4.21}$$

Como la potencia se mide en watts (o joules por segundo) y el tiempo en segundos, la unidad de energía es el *watt-segundo* o *joule* (observe la figura 4.21) como se indicó líneas arriba. Sin embargo, el watt-segundo es una cantidad demasiado pequeña para la mayoría de los propósitos prácticos, por lo que el *watt-hora* (Wh) y el *kilowatt-hora* (kWh) fueron definidos como sigue:

$$\text{Energía (Wh)} = \text{potencia (W)} \times \text{tiempo (h)} \tag{4.22}$$

$$\text{Energía (kWh)} = \frac{\text{potencia (W)} \times \text{tiempo (h)}}{1000} \tag{4.23}$$

Observe que la energía en kilowatts-hora es simplemente la energía en watt-hora dividida entre 1000. Para tener una idea del nivel kilowatt-hora, considere que 1 kWh es la energía disipada por un foco de 100 W en 10 horas.

El **medidor de kilowatts-hora** es un instrumento para medir la energía suministrada al usuario residencial o comercial de electricidad. El medidor está conectado, por lo general, directamente a las líneas distribuidoras en un punto justo antes de entrar al tablero de distribución de potencia del sitio de uso. Un conjunto típico de medidores se muestra en la figura 4.22(a) con la fotografía de un medidor analógico de kilowatts-hora. Como se indica, cada potencia de 10 debajo del medidor está en kilowatts-hora. Entre más rápidamente gira el disco de aluminio, mayor es la demanda de energía. Los medidores están conectados mediante un conjunto de engranes a la rotación de este disco. Un medidor digital de estado sólido con un rango ampliado de capacidades aparece en la figura 4.22(b).

Inglés
(Salford, Manchester)
(1818-1889)
Físico
Doctorados honorarios de las Universidades de Dublin y Oxford



Archivo Bettmann
Fotografía núm. 076800P

Contribuyó a la importante y fundamental *ley de la conservación de la energía* al establecer que las distintas formas de la energía —eléctrica, mecánica o calorífica—, se encuentran en la misma familia y pueden ser intercambiadas de una forma a otra. En 1841 introdujo la *ley de Joule,* la cual establece que el calor desarrollado por una corriente eléctrica en un alambre es proporcional al producto del cuadrado de la corriente y la resistencia del alambre (I^2R). James Prescott Joule determinó también que el calor emitido era equivalente a la potencia absorbida y que, por tanto, el calor es una forma de energía.

FIGURA 4.21
James Prescott Joule.

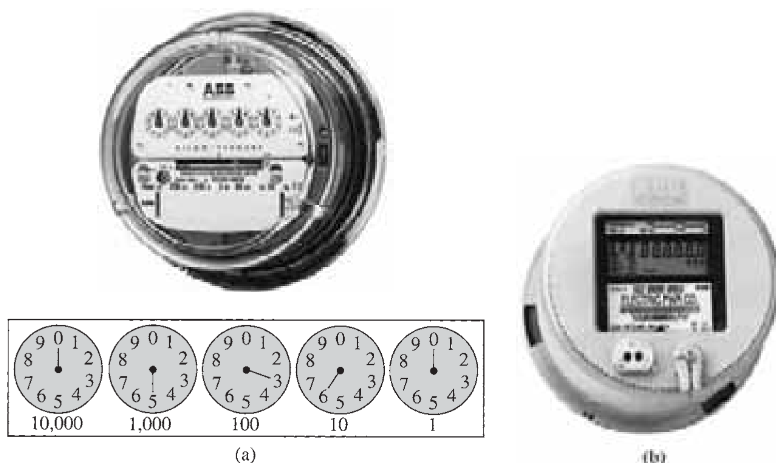


FIGURA 4.22
Medidores de kilowatts-hora: (a) análogo; (b) digital. (Cortesía de ABB Electric Metering Systems.)

EJEMPLO 4.15 Para las posiciones de los medidores mostrados en la figura 4.22(a), calcule la cuenta de electricidad si la lectura previa fue de 4650 kWh y el costo promedio es de 9¢ por kilowatt-hora.

Solución:

$$5360 \text{ kWh} - 4650 \text{ kWh} = 710 \text{ kWh utilizados}$$

$$710 \,\cancel{\text{kWh}}\left(\frac{9¢}{\cancel{\text{kWh}}}\right) = \mathbf{\$63.90}$$



EJEMPLO 4.16 ¿Cuánta energía (en kilowatts-hora) se requiere para mantener encendido un foco de 60 W continuamente durante 1 año (365 días)?

Solución:

$$W = \frac{Pt}{1000} = \frac{(60\text{ W})(24\text{ h/día})(365\text{ días})}{1000} = \frac{525{,}600\text{ Wh}}{1000}$$
$$= \mathbf{525.60\ kWh}$$

EJEMPLO 4.17 ¿Cuánto tiempo puede una televisión de 205 W permanecer encendida antes de utilizar más de 4 kWh de energía?

Solución:

$$W = \frac{Pt}{1000} \Rightarrow t\text{ (horas)} = \frac{(W)(1000)}{P}$$
$$= \frac{(4\text{ kWh})(1000)}{205\text{ W}} = \mathbf{19.51\ h}$$

EJEMPLO 4.18 ¿Cuál es el costo por utilizar un motor de 5 hp durante 2 horas si el precio por kilowatt-hora es de 9¢?

Solución:

$$W\text{ (kilowatt-hora)} = \frac{Pt}{1000} = \frac{(5\text{ hp} \times 746\text{ W/hp})(2\text{ h})}{1000} = 7.46\text{ kWh}$$
$$\text{Costo} = (7.46\text{ kWh})(9¢\text{/kWh}) = \mathbf{67.14¢}$$

EJEMPLO 4.19 ¿Cuál es el costo total por utilizar lo siguiente a 9¢ por kilowatt-hora?

Un tostador de 1200 W durante 30 minutos
Seis focos de 50 W durante 4 horas
Una lavadora de 400 W durante 45 minutos
Una secadora de ropa de 4800 W durante 20 minutos

Solución:

$$W = \frac{(1200\text{ W})(\tfrac{1}{2}\text{ h}) + (6)(50\text{ W})(4\text{ h}) + (400\text{ W})(\tfrac{3}{4}\text{ h}) + (4800\text{ W})(\tfrac{1}{3}\text{ h})}{1000}$$
$$= \frac{600\text{ Wh} + 1200\text{ Wh} + 300\text{ Wh} + 1600\text{ Wh}}{1000} = \frac{3700\text{ Wh}}{1000}$$
$$W = 3.7\text{ kWh}$$
$$\text{Costo} = (3.7\text{ kWh})(9¢\text{/kWh}) = \mathbf{33.3¢}$$

La gráfica presentada en la figura 4.23 muestra el costo promedio por kilowatt-hora comparado con los kilowatt-hora utilizados por cliente. Observe que actualmente el costo es superior al de 1926 y que el cliente promedio utiliza 20 veces más energía eléctrica en un año. Tenga en mente que la gráfica de la figura 4.23 proporciona el costo promedio en Estados Unidos. Algunos estados tienen cuotas promedio de 5¢ por kilowatt-hora, mientras que otros se acercan a 12¢.

La tabla 4.1 muestra una lista de algunos aparatos domésticos comunes con sus clasificaciones típicas por potencia. Sería interesante para el lector calcular el costo de operar algunos de esos aparatos durante cierto periodo usando la gráfica de la figura 4.23 para encontrar el costo por kilowatt-hora.

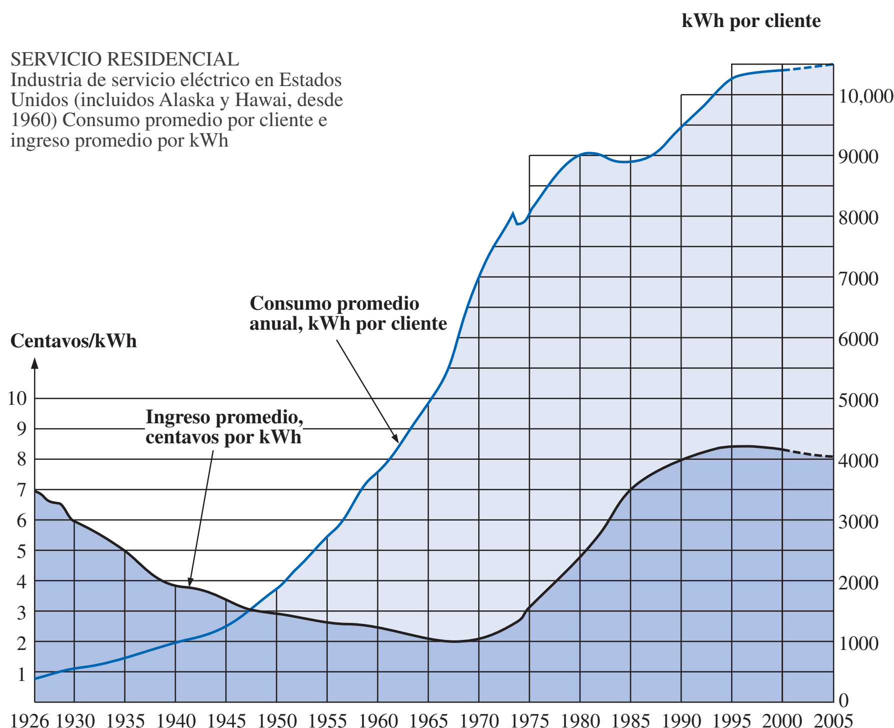


FIGURA 4.23

Costo por kWh y kWh promedio por cliente en función del tiempo. (Cortesía de Edison Electric Institute.)

TABLA 4.1

Clasificaciones típicas por potencia de algunos aparatos caseros.

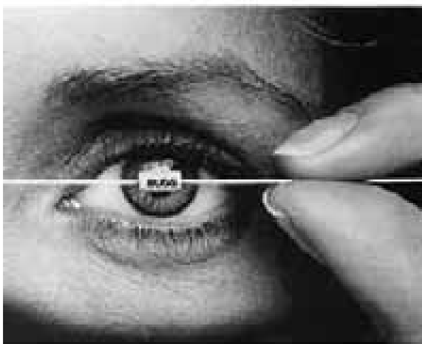
Aparato	Clasificación por potencia	Aparato	Clasificación por potencia
Acondicionador de aire	860	Computadora portátil	
Secadora de pelo	1,300	En reposo	< 1 W (Normalmente 0.3 W a 0.5 W)
Grabadora reproductora de casetes	5	Uso normal	10–20 W
Teléfono celular:		Uso intenso	25–35 W
En espera	≅ 35 mW	Horno de microondas	1,200
Hablando	≅ 4.3 W	Localizador	1–2 mW
Reloj	2	Fonógrafo	75
Secadora de ropa	4,800	Proyector	1,200
Cafetera	900	Radio	70
Lavavajillas	1,200	Hornillo (de autolimpieza)	12,200
Ventilador:		Refrigerador (descongelador automático)	1,800
Fijo	90	Rasuradora	15
Ventilador	200	Equipo estereofónico	110
Calentador	1,322	Lámpara de sol	280
Equipo calefactor:		Tostador	1,200
Ventilador de horno	320	Compactador de basura	400
Motor quemador de aceite	230	Televisor a color	200
Plancha, seca o de vapor	1,100	Videocasetera	110
		Lavadora doméstica	500
		Calentador de agua	4,500

Cortesía de General Electric Co.





(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.24
Fusibles: (a) CC–TRON® (0-10 A); (b) matriz sólida subminiatura; (c) Semitron (0-600 A). (Cortesía de Bussman Manufacturing Co.)

4.7 CORTACIRCUITOS, DISPOSITIVOS GFCI Y FUSIBLES

La potencia de llegada a cualquier planta industrial, equipo pesado, circuito doméstico sencillo o medidores utilizados en el laboratorio, debe estar limitada a garantizar que la corriente a través de las líneas de distribución no esté por encima del valor establecido. De otra manera, los operadores o el equipo eléctrico o electrónico pueden resultar dañados, o pueden surgir efectos colaterales peligrosos como fuego o humo. Para limitar el nivel de corriente se instalan **fusibles** o **cortacircuitos** donde la potencia entra a la instalación, como en el tablero ubicado en los sótanos de las casas en el punto donde las líneas externas de alimentación entran a la construcción. Los fusibles de la figura 4.24 tienen un conductor interno metálico a través del cual pasa la corriente; un fusible comenzará a derretirse si la corriente que atraviesa el sistema excede el valor de clasificación impreso sobre la cubierta. Por supuesto, si el fusible se funde, la trayectoria de la corriente se rompe y la carga en su trayectoria queda protegida.

En casas de reciente construcción, los fusibles han sido reemplazados por cortacircuitos como los mostrados en la figura 4.25. Cuando la corriente exceda las condiciones de clasificación, un electroimán instalado en el dispositivo tendrá suficiente fuerza como para extraer el eslabón metálico de conexión —ubicado en el cortacircuito— fuera del circuito y abrir así la trayectoria de la corriente. Cuando las condiciones hayan sido corregidas, el cortacircuito podrá ser reposicionado y utilizado de nuevo.



FIGURA 4.25
Cortacircuitos. (Cortesía de Potter y Brumfield Division, AMF, Inc.)

El más reciente National Electrical Code requiere que las tomas en los cuartos de baño y otras áreas sensibles sean de la variedad de interruptor de corriente por falla de tierra (GFCI, *ground fault current interrupt*); los GFCI están diseñados para desconectarse más rápidamente que los cortacircuito estándar. La unidad comercial mostrada en la figura 4.26 se desconecta en 5 ns. Se ha determinado que 6 mA es el nivel máximo al que la mayoría de las personas puede estar expuesta por un periodo corto sin riesgo de sufrir graves daños. Una



FIGURA 4.26
Interruptor de corriente por falla de tierra (GFCI), toma de 125 V de ca, 60 Hz y 15 A. (Cortesía de Leviton, Inc.)

corriente mayor de 11 mA es capaz de causar contracciones musculares involuntarias que podrían impedirle a una persona soltar el conductor y provocarle entrar en estado de choque. Corrientes mayores que duren más de un segundo pueden causar fibrilación del corazón y posiblemente la muerte en unos pocos minutos. El GFCI es capaz de reaccionar tan rápido como lo hace por sensibilidad a la diferencia entre las corrientes de entrada y de salida en la toma; las corrientes deben ser las mismas si todo está trabajando apropiadamente. Una trayectoria errante, como la que pasa a través de una persona, establece una diferencia en los dos niveles de corriente y provoca que el interruptor se desconecte de la fuente de potencia.

4.8 APLICACIONES

Horno de microondas

Podría asegurarse que todos los propietarios de las casas residenciales más modernas tienen un horno de microondas como el mostrado en la figura 4.27(a) —incluso lo tienen quienes pasaron por la fase de preocuparse acerca de si era segura y apropiada esta manera de preparar la comida. Ahora se usa el horno de microondas tan a menudo durante el día que muchas personas llegan a preguntarse cómo podía vivirse antes sin este aparato. Para la mayoría de los usuarios, su eficiencia operativa no es la preocupación mayor, probablemente porque su impacto en la cuenta mensual no es fácil de definir con tantos aparatos en casa. Sin embargo, podría ser interesante examinar la unidad con más detalle y aplicar alguna de las teorías presentadas en este capítulo.

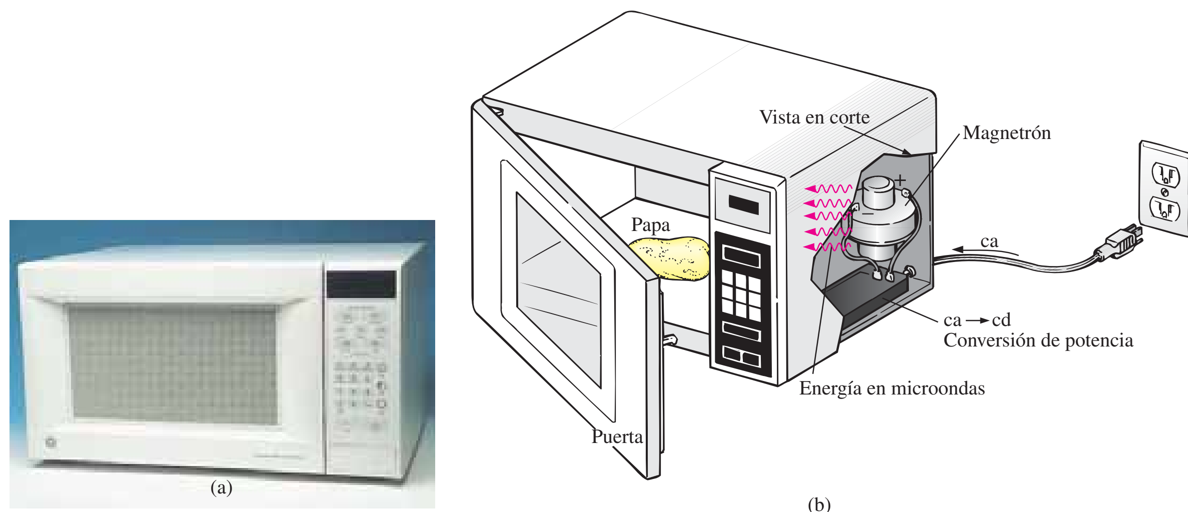


FIGURA 4.27
Horno de microondas: (a) fotografía; (b) construcción básica.

En primer lugar, algunos comentarios generales. La mayor parte de los hornos de microondas están clasificados de 500 W a 1200 W en una frecuencia de 2.45 GHz (casi 2500 millones de ciclos por segundo en comparación con los 60 ciclos por segundo para el voltaje de ca en una toma casera normal —veremos los detalles en el capítulo 13). El calentamiento ocurre porque las moléculas de agua existentes en la comida son sometidas a vibración en una frecuencia tan alta que la fricción con moléculas vecinas causa el efecto de calentamiento. Como es esta alta frecuencia de vibración lo que calienta la



comida, no hay necesidad de que el material sea un conductor de electricidad. Sin embargo, cualquier metal colocado en el horno de microondas puede actuar como una antena (especialmente si tiene puntos o bordes agudos) que atraerá la energía de las microondas y alcanzará temperaturas muy altas. Se fabrica actualmente una sartén bronceadora para horno de microondas que tiene algo de metal empotrado en el fondo y los lados para atraer la energía de las microondas y elevar la temperatura en la superficie entre la comida y la sartén para dar a la comida un color café y una textura encrespada. Aun si el metal no actuase como antena, es un buen conductor de calor y puede calentarse bastante al extraer calor de la comida. Cualquier recipiente con bajo contenido de humedad puede ser usado para calentar comida en un horno de microondas. Debido a este requisito, los fabricantes han desarrollado una extensa línea de vajillas para microondas que es muy baja en contenido de humedad. Teóricamente, el vidrio y el plástico tienen muy poco contenido de humedad, pero aun así se calientan cuando son utilizados en el horno por un minuto aproximadamente. Podría ser la humedad en el aire lo que se adhiere a la superficie de estos materiales o tal vez el plomo usado en los buenos cristales. En todo caso, los hornos de microondas deberían ser usados sólo para cocinar comida, ya que no fueron diseñados como secadores o evaporadores. Las instrucciones que acompañan a todo horno de microondas especifican que éste no debería encenderse al estar vacío. Aun cuando el horno esté vacío, será generada energía de las microondas y el horno realizará todo el esfuerzo necesario para encontrar un canal que la absorba. Si el horno está vacío, la energía podría ser atraída hacia el propio horno y podría ocasionar algunos daños. Para demostrar que un vaso vacío seco o un recipiente de plástico no atraerán una cantidad importante de energía, coloque dos vasos en un horno de microondas, uno con agua y el otro vacío, y accione el horno. Después de un minuto encontrará el vaso con agua bastante caliente debido al efecto calorífico del agua caliente mientras que el otro vaso estará cercano a su temperatura original. En otras palabras, el agua creó un sumidero de calor para la mayoría de la energía de las microondas, dejando al vaso vacío como una trayectoria menos atractiva para la conducción del calor. Las toallas de papel seco y las envolturas de plástico pueden ser usadas en el horno para cubrir platos ya que inicialmente tienen un bajo contenido de moléculas de agua, y el papel y el plástico no son buenos conductores del calor. Sin embargo, no sería seguro colocar una toalla de papel sola en un horno porque, como se anotó líneas arriba, la energía de las microondas buscará un medio absorbente y podría incendiar el papel.

La cocción de comida con un horno convencional es de afuera hacia adentro. Lo mismo es cierto para hornos de microondas, pero éstos tienen la ventaja adicional de ser capaces de penetrar los pocos centímetros exteriores de la comida, reduciendo el tiempo de cocción considerablemente. El tiempo de cocción con un horno de microondas está relacionado con la cantidad de comida expuesta en el horno. Dos copas de agua tardarán más tiempo en calentarse que una copa, aunque no según una relación lineal y no tomará el doble de tiempo —tal vez sólo 75% a 90% más de tiempo. Eventualmente, si se coloca suficiente comida en el horno de microondas para comparar el tiempo de cocción más alto con el de un horno convencional, se alcanzará un punto de cruce donde sería más conveniente usar un horno convencional y obtener la textura preferida en la comida.

La construcción básica del horno de microondas se muestra en la figura 4.27(b). Este aparato emplea un suministro de 120 V de ca que es entonces convertida por medio de un transformador de alto voltaje a otra con valores pico cercanos a 5000 V —en niveles de corriente considerables—, lo que debería ser suficiente advertencia para dejar el mantenimiento a personal capacitado. A través del proceso rectificador descrito brevemente en el capítulo 2, un alto voltaje de cd de unos pocos miles de volts serán generados de modo que aparecerán a través de un magnetrón. El magnetrón, debido a su muy especial diseño (actualmente es el mismo diseño que se utilizó durante la Segunda Guerra Mundial y

fue inventado por los británicos para sus unidades de radar de alta potencia), generará la señal requerida de 2.45 GHz para el horno. Debe señalarse también que el magnetrón tiene un nivel específico de potencia de operación que no puede ser controlado —una vez instalado, queda fijo a cierto nivel de potencia. Cabría preguntarse cómo pueden ser controladas la temperatura y el tiempo de cocción. Esto se logra por medio de una red de control que determina la cantidad de tiempo de apagado y encendido durante el ciclo de entrada del suministro de 120 V. Temperaturas mayores se logran fijando una razón superior de tiempo de encendido a tiempo de apagado, mientras que temperaturas menores son establecidas por la acción inversa.

Una desafortunada característica del magnetrón es que, en el proceso de conversión, genera una gran cantidad de calor que no va hacia el calentamiento de la comida y debe ser absorbido por sumideros de calor o dispersado por un ventilador de enfriamiento. Las eficiencias de conversión normales están entre 55 y 75%. Considerando otras pérdidas inherentes en el funcionamiento de cualquier sistema, es razonable suponer que la mayoría de los hornos de microondas tienen entre 50 y 60% de eficiencia. Sin embargo, el horno convencional tiene también pérdidas significativas a causa de su ventilador de extracción que opera continuamente, el calentamiento de la unidad, los utensilios de cocina, el aire colindante, etc., aun si es menos sensible a la cantidad de comida por ser cocida. Considerando todo esto, el factor de conveniencia es probablemente el otro elemento de más peso en este análisis; lo cual deja también de lado el asunto de cómo se toma en cuenta el tiempo de los usuarios en la ecuación de la eficiencia.

Para manejar números específicos, considérese la energía asociada con la cocción de una papa de 5 onzas en un horno de microondas de 1200 W durante 5 minutos si la eficiencia de conversión es un valor promedio de 55%. Primero, es importante darse cuenta de que cuando una unidad está clasificada como de 1200 W, esa es la potencia extraída de la línea durante el proceso de cocción. Si el horno de microondas está enchufado a una salida de 120 V, la corriente extraída es:

$$I = P/V = 1200\text{ W}/120\text{ V} = 10.0\text{ A}$$

lo cual representa un nivel importante de corriente. A continuación, podemos determinar la cantidad de potencia dedicada solamente al proceso de cocción usando el nivel de eficiencia. Esto es,

$$P_o = \eta P_i = (0.55)(1200\text{ W}) = 660\text{ W}$$

La energía transferida a la papa en un periodo de 5 minutos puede entonces ser determinada con:

$$W = Pt = (660\text{ W})(5\text{ min})(60\text{ s}/1\text{ min}) = 198\text{ kJ}$$

que es aproximadamente la mitad de la energía (valor nutricional) derivada de comer una papa de 5 onzas. El número de kilowatts-hora extraído por la unidad es determinado a partir de:

$$W = Pt/1000 = (1200\text{ W})(5/60\text{ h})/1000 = 0.1\text{ kWh}$$

A razón de 10¢/kWh encontramos que podemos cocer la papa por 1 centavo —lo que es muy barato, relativamente hablando. Un horno tostador común de 1550 W tomaría una hora para calentar la misma papa, resultando en 1.55 kWh y un costo de 15.5 centavos —esto es un aumento considerable en costo.

Cableado doméstico

Algunas facetas del cableado doméstico pueden ser analizadas sin examinar la manera en que están físicamente conectadas. En los capítulos subsiguientes se proporcionará una cobertura adicional para que se desarrolle un entendimiento



fundamental sólido del sistema de cableado doméstico total. Por lo menos, podrá establecerse una base que permitirá responder preguntas que el lector debe ser capaz de contestar como estudiante de este campo.

La especificación que define al sistema entero es la corriente máxima que puede extraerse de las líneas de energía puesto que el voltaje está fijo a 120 V o 208 V (dependiendo de cómo se utilicen las líneas de energía). Para casas muy antiguas con un sistema calefactor diferente al eléctrico, un servicio de 100 A es la norma. Actualmente, cuando los sistemas electrónicos se han vuelto tan comunes en las casas, muchas personas está optando por el servicio de 200 A aunque no tengan calefacción eléctrica. Un servicio de 100 A especifica que la corriente máxima que puede extraerse de las líneas de energía hacia una casa es de 100 A. Usando el voltaje fijado de línea a línea y la corriente de servicio pleno (y suponiendo que todas las cargas son de tipo resistivo), es posible determinar la potencia máxima que puede ser entregada usando la ecuación básica de la potencia:

$$P = EI = (208\text{ V})(100\text{ A}) = 20{,}800\text{ W} = 20.8\text{ kW}$$

Este valor nominal revela que el total de todas las unidades encendidas en una casa no puede ser superior a los 20.8 kW en ningún momento. De otra manera podríamos esperar que el interruptor principal instalado en la parte superior del tablero de potencia se abriese. Inicialmente, 20.8 kW puede parecer un valor nominal muy grande, pero cuando se considera que un horno eléctrico de autolimpieza puede extraer 12.2 kW, una secadora 4.8 kW, un calentador de agua 4.5 kW, y una lavavajillas 1.2 kW, ya estamos en 22.7 kW (si todas las unidades están operando en demanda pico), y no se han encendido aún las luces o la televisión. Obviamente, sólo el uso de un horno eléctrico puede sugerir fuertemente la consideración de obtener un servicio de 200 A. Sin embargo, hay que tener en cuenta que rara vez se usan todos los quemadores de una estufa al mismo tiempo, y que el horno contiene un termostato para controlar la temperatura de manera que no esté encendido siempre. Lo mismo es cierto para el calentador de agua y la lavavajillas, por lo que la probabilidad de que todas las unidades en una casa demanden servicio pleno al mismo tiempo es muy pequeña. Desde luego, una casa típica con calefacción eléctrica que pueda extraer 16 kW sólo para calefacción en clima frío, debe considerar un servicio de 200 A. También debe quedar claro que hay algo de margen en los valores nominales máximos por razones de seguridad. En otras palabras, un sistema diseñado para una carga máxima de 100 A puede aceptar una corriente ligeramente superior durante periodos cortos sin mostrar daños significativos. Sin embargo, para el largo plazo la corriente no debe excederse.

Cambiar el servicio a 200 A no es simplemente un asunto de cambiar el tablero instalado en el sótano —una línea más pesada debe llevarse de la calle a la casa. En algunas áreas, los cables alimentadores son de aluminio debido a su menor costo y peso; en otras, el aluminio no está permitido debido a su sensibilidad a la temperatura (expansión y contracción), y debe usarse cobre. En todo caso, cuando se usa aluminio, el contratista debe estar absolutamente seguro de que las conexiones en ambos extremos son muy seguras. El National Electric Code especifica que un servicio de 100 A debe usar un conductor de cobre AWG del número 4 o uno de aluminio del número 2. Para un servicio de 200 A, debe usarse un conductor de cobre 2/0 o uno de aluminio 4/0 como se muestra en la figura 4.28(a). Un servicio de 100 A o de 200 A debe tener dos conductores de líneas más uno del neutro como se muestra en la figura 4.28(b). Observe en la figura 4.28(b) que las líneas están revestidas y aisladas una de otra, y que el neutro está distribuido alrededor de la capa interna del cable. En el punto terminal, todos los conductores del neutro se juntan y unen con seguridad al tablero. Es claramente obvio que los cables de la figura 4.28(a) son trenzados para lograr una mayor flexibilidad.



FIGURA 4.28
Conductores de servicio a 200 A: (a) aluminio 4/0 y cobre 2/0; (b) servicio de tres alambres 4/0 de aluminio.

La potencia entrante es separada dentro del sistema en un número de circuitos con valores menores de corriente utilizando interruptores protectores de 15 A, 20 A, 30 A y 40 A. Como la carga en cada interruptor no debe exceder 80% de su valor nominal, en un interruptor de 15 A la corriente máxima debería estar limitada a 80% de 15 A o 12 A, a 16 A para un interruptor de 20 A, a 24 A para un interruptor de 30 A, y a 32 A para un interruptor de 40 A. El resultado es que una casa con servicio de 200 A puede teóricamente tener un máximo de 12 circuitos (200 A/16 A = 12.5) utilizando los valores máximos de corriente de 16 A asociados con los interruptores de 20 A. Sin embargo, el electricista puede instalar tantos circuitos como considere conveniente si está consciente de las cargas en cada circuito. El código especifica además que un cable calibre 14 no conducirá una corriente que exceda los 15 A, uno del número 12 ninguna en exceso de 20 A, y uno calibre 10 ninguna mayor a 30 A. Así, un cable del número 12 es actualmente el de uso más común en los cableados caseros para garantizar que puede manipular cualquier incursión más allá de 15 A en el interruptor de 20 A (el tamaño de interruptor más común). El cable calibre 14 es a menudo usado junto con el del número 12 en áreas donde se sabe que los niveles de corriente son limitados. El cable calibre 10 se utiliza normalmente para aparatos de gran demanda como secadoras y hornos. Los propios circuitos son separados usualmente entre aquellos que proporcionan iluminación, salidas, etc. Algunos circuitos (como hornos y secadoras) requieren un voltaje superior a 208 V, obtenidos usando dos líneas de energía y la neutra. El voltaje superior reduce el requisito de corriente para el mismo valor de potencia con el resultado neto de que el aparato puede usualmente ser más pequeño. Por ejemplo, el tamaño de un acondicionador de aire con la misma capacidad de enfriamiento es menor cuando se diseña para una línea de 208 V que cuando es para una de 120 V. Sin embargo, la mayoría de las líneas de 208 V demandan un nivel de corriente que requiere interruptores de 30 A o 40 A y tomas especiales para garantizar que los aparatos clasificados en 120 V no sean conectados a la misma toma. Si el tiempo lo permite, revise el tablero instalado en su casa y tome nota del número de circuitos, en particular el valor de cada interruptor y el número de líneas de 208 V indicadas por interruptores que requieren dos ranuras del tablero. Sume el total de los valores de corriente de todos los interruptores en su tablero, y explique, usando la información proporcionada líneas arriba, por qué el total excede su nivel de alimentación.



Por seguridad, la conexión a tierra es una parte muy importante del sistema eléctrico doméstico. El National Electric Code demanda que el alambre neutro del sistema doméstico sea conectado a tierra por medio de una barra empotrada, un sistema de tubos de agua metálicos de 10 pies o más, o una placa metálica enterrada. Esa tierra es pasada entonces a través de los circuitos eléctricos de la casa como protección adicional. En un capítulo posterior serán presentados los detalles de las conexiones y los métodos para conectar a tierra.

4.9 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

Una vez presentado y examinado un circuito completo en detalle, es posible empezar con la aplicación de métodos por computadora. Como se mencionó en el capítulo 1, se presentarán tres paquetes de software para mostrar las opciones disponibles con cada uno y las diferencias que existen entre ellos. Todos tienen un soporte amplio en las comunidades educativas e industriales. La versión de PSpice para el estudiante (OrCAD Release 9.2 de Cadence Design Systems) recibirá la mayor atención, seguido por Electronics Workbench, de Multisim, y luego unos pocos programas de muestra que usan un lenguaje de programación llamado C++. Cada enfoque tiene sus propias características con procedimientos que deben ser seguidos exactamente; de otra manera aparecerán mensajes de error. No suponga que puede "forzar" el sistema a que responda de la manera que usted preferiría —cada paso está bien definido, y un error en el lado de entrada puede conducir a resultados de naturaleza sin sentido. En ocasiones podrá creerse que el sistema está en un error porque se tiene la seguridad absoluta de haber seguido cada paso correctamente. En tales casos, debe aceptarse el hecho de que algo fue introducido incorrectamente, y repasar todo el trabajo de manera muy cuidadosa. Todo procedimiento o ecuación que tome una coma en vez de un punto decimal va a generar resultados incorrectos.

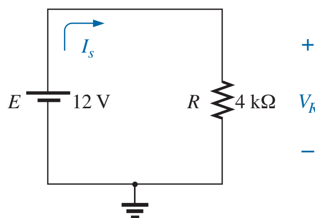


FIGURA 4.29
Circuito a ser analizado utilizando PSpice y Electronics Workbench.

Sea paciente con el proceso de aprendizaje; lleve notas de maniobras específicas que aprenda y no tenga temor de pedir ayuda cuando la necesite. En cada enfoque se tiene siempre la preocupación inicial acerca de cómo empezar y proceder a través de las primeras fases del análisis. Sin embargo, es seguro que con tiempo y orientación el estudiante llegará a desenvolverse a través de las maniobras requeridas con una rapidez que nunca habría esperado. Con el tiempo se estará absolutamente satisfecho de los resultados obtenidos usando los métodos de análisis por computadora.

En esta sección será investigada la ley de Ohm utilizando los paquetes de software PSpice y Electronics Workbench (EWB) para analizar el circuito mostrado en la figura 4.29. Ambos paquetes requieren que el circuito sea primero "dibujado" en la pantalla de la computadora y luego analizado (simulado) para obtener los resultados deseados. Como se mencionó, el programa de análisis es fijo y no puede ser cambiado por el usuario. El usuario diestro es alguien que puede extraer lo máximo de un paquete de software para computadora. En un capítulo posterior, el lenguaje C++ de programación será presentado con cierto detalle para demostrar cómo un usuario puede controlar el procedimiento de análisis y cómo se despliegan los resultados.

Aunque el autor considera que hay suficiente material en el texto como para llevar a un nuevo estudiante a través de los programas proporcionados, debe recordarse que éste no es un texto de computación. En vez de eso, es un libro cuyo propósito principal reside simplemente en introducir los diferentes enfoques y mostrar cómo pueden ser aplicados de manera eficaz. En la actualidad existen algunos textos y materiales excelentes que cubren el material con mucho mayor detalle y tal vez a un paso más lento. De hecho, la calidad de la literatura técnica disponible ha mejorado bastante en años recientes.

PSpice

Los lectores que estaban familiarizados con viejas versiones de PSpice, como la versión 8, encontrarán que los mayores cambios en esta última versión 9.2 radican principalmente en el ambiente de acceso y en el proceso de simulación. Después de ejecutar unos cuantos programas, se encontrará que la mayor parte de los procedimientos aprendidos en versiones anteriores serán aplicables también aquí —por lo menos el proceso secuencial tiene cierto número de fuertes similitudes.

Una vez que 9.2 OrCAD Lite ha sido instalado, el primer procedimiento requerido es abrir un **Fólder** (carpeta) en la unidad **C**: para el almacenamiento de los archivos de circuito que resultarán del análisis. Sin embargo, sea consciente de que:

una vez que el fólder ha sido definido, no tiene que ser definido para cada nuevo proyecto a menos que se prefiera hacerlo así. Si se está satisfecho con una localidad (fólder) para todos los proyectos, ésta es una operación que no tiene que ser repetida con cada red.

Para establecer el **Fólder**, simplemente haga clic con el botón derecho del ratón sobre **Start** para obtener un listado que incluye **Explore**. Seleccione **Explore** y luego use la secuencia **File-New Fólder** para obtener una nueva carpeta sobre la pantalla esperando un nombre. Escriba **PSpice** (la selección del autor) seguido por un clic con el botón izquierdo del ratón para instalarlo. Luego salga (usando la **X** en la parte superior derecha de la pantalla) del **Exploring-Start Menú**, y el primer paso quedará completo —está usted en ruta. El fólder **PSpice** ha sido establecido para todos los proyectos en los que se planea trabajar en este texto.

El primer proyecto puede ser iniciado ahora haciendo clic dos veces sobre el icono **Orcad Lite Edition** en la pantalla, o puede usarse la secuencia **Start-Programs-Orcad Family Release 9.2 Lite Edition**. La pantalla resultante tiene sólo unas pocas teclas activas sobre la barra de herramientas superior. La primera tecla en la parte superior izquierda es la **Create new document** (puede

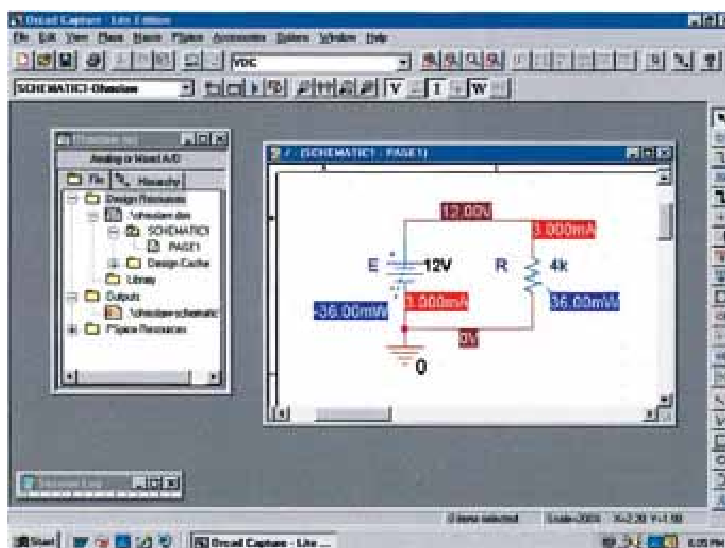


FIGURA 4.30
Uso de PSpice para determinar los niveles de voltaje, corriente y potencia en el circuito de la figura 4.29.



usarse la secuencia **File-New Project**). Al seleccionar la tecla aparecerá un cuadro de diálogo **New Project** en el que debe introducirse el **Name** del proyecto. Para los fines de este análisis se escoge **Ohmslaw** como se muestra en el encabezado de la figura 4.30 y se selecciona **Analog or Mixed A/D** (para ser usado en todos los análisis de este texto). Observe en el fondo del cuadro de diálogo que la **Location** aparece como **C:\PSpice** como se estableció antes. Haga clic en **OK** y otro cuadro de diálogo aparecerá con el nombre **Create PSpice Project**. Seleccione **Create a blank project** (de nuevo, para todos los análisis por ser efectuados en este texto). Haga clic en **OK** y una tercera barra de herramientas aparecerá en la parte superior de la pantalla con algunas de las teclas activas. Una ventana **Project Manager** aparecerá con **Ohmslaw** como su encabezado. El nuevo listado del proyecto aparecerá con un icono y un signo + asociado en un pequeño cuadro. Haciendo clic sobre el signo + llevará el listado un paso adelante a **SCHEMATIC1**. Haga clic en + otra vez y aparecerá **PAGE 1**; haciendo clic sobre un signo —se invertirá el proceso. Al hacer dos veces clic sobre **PAGE1** se creará una ventana de trabajo llamada **SCHEMATIC1: PAGE1**, lo cual revela que un proyecto puede tener más de un archivo esquemático y más de una página asociada. El ancho y la altura de la ventana pueden ser ajustados seleccionando un borde para obtener una flecha de doble punta y desplazar el límite a la dimensión deseada. Cualquier ventana sobre la pantalla puede ser movida haciendo clic sobre el encabezado superior para volverla azul oscuro y luego desplazarla hacia cualquier ubicación.

Ahora puede procederse a la construcción del sencillo circuito mostrado en la figura 4.29. Seleccione la tecla **Place a part** (la segunda tecla a partir de la parte superior de la barra de herramientas hacia la derecha) para obtener el cuadro de diálogo **Place Part**. Como éste es el primer circuito por ser construido, debe asegurarse de que las partes aparezcan en la lista de bibliotecas activas. Seleccione **Add Library-Browse File**, y seleccione **analog.olb**, **eval.olb**, y **source.olb**. Cuando cada una aparezca bajo el encabezado **File name**, seleccione **Open**. Los tres archivos serán requeridos para que construyan las redes que aparecen en este texto. Sin embargo, es importante darse cuenta de que:

una vez que los archivos de biblioteca han sido seleccionados, aparecerán en el listado activo para cada nuevo proyecto sin tener que agregarlos cada vez —paso a paso—, como en el paso* Fólder *desarrollado líneas arriba que no tiene que ser repetido con cada proyecto similar.

Haga clic en **OK** para poder colocar componentes sobre la pantalla. Para la fuente de voltaje de cd, seleccione primero la tecla **Place a part** y luego seleccione **SOURCE** en el listado de biblioteca. Bajo **Part List**, aparecerá una lista de fuentes disponibles; seleccione **VDC** para este proyecto. Una vez que **VDC** ha sido seleccionado su símbolo, etiqueta y valor aparecerán sobre la ventana en el fondo derecho del cuadro de diálogo. Haga clic en **OK**, y la fuente **VDC** seguirá al cursor a través de la pantalla. Muévala a una ubicación conveniente, haga clic izquierdo en el ratón y se situará en posición como se muestra en la figura 4.30. Como sólo se requiere una fuente, un clic en el botón derecho del ratón resultará en una lista de opciones, en la que **End Mode** aparecerá en la parte superior. Al seleccionar esta opción terminará el procedimiento, dejando la fuente en un recuadro rojo punteado. Lo rojo indica que es un modo activo sobre el cual puede operarse. Un clic más en el botón izquierdo del ratón y la fuente estará en posición y el estado rojo activo será removido.

Uno de los pasos más importantes en el procedimiento es asegurar que un potencial a tierra de 0 V esté definido para la red de manera que los voltajes en cualquier punto de ésta tengan un punto de referencia. *El resultado es el requisito de que toda red tenga definida una tierra*. Para los fines de este texto, la opción **0/SOURCE** será la alternativa cuando la tecla **GND** sea seleccionada. Ello asegurará que un lado de la fuente esté definido como 0 V. Por último, tene-

mos que agregar un resistor a la red seleccionando de nuevo la tecla **Place a part** y luego la biblioteca **ANALOG**. Al desplegar las opciones, observe que aparecerá **R** y deberá ser seleccionada. Haga clic sobre **OK** y el resistor aparecerá próximo al cursor sobre la pantalla. Muévalo a la posición deseada y haga clic en el lugar. Luego haga clic con el botón derecho del ratón y en **End Mode**, y el resistor habrá sido introducido en la memoria esquemática. Desafortunadamente, el resistor terminó en la posición horizontal, y el circuito de la figura 4.29 tiene el resistor en la posición vertical. No hay problema: simplemente seleccione de nuevo el resistor para volverlo rojo y haga clic con el botón derecho del ratón. Aparecerá un listado en el que **Rotate** es una opción para girar el resistor 90º en el sentido contrario a las manecillas del reloj. El resistor también puede ser girado 90º seleccionando simultáneamente **Ctrl-R**.

Todos los elementos requeridos están en la pantalla, pero necesitan ser conectados. Esto se logra seleccionando la tecla **Place a wire** que se ve como un escalón en la barra de herramientas derecha. El resultado es un cursor en forma de cruz con el centro por colocarse en el punto a ser conectado. Coloque la cruz en la parte superior de la fuente de voltaje, y haga clic con el botón izquierdo una vez para conectarla a ese punto. Luego trace una línea al extremo del próximo elemento y haga clic de nuevo en el ratón cuando la cruz esté en el punto correcto. Resultará una línea roja con un cuadrado en cada extremo para confirmar que se ha hecho la conexión. Entonces mueva la cruz hacia los otros elementos y construya el circuito. Una vez que todo está conectado, un clic con el botón derecho proporciona la opción **End Mode**. No olvide conectar la fuente a tierra como se muestra en la figura 4.30.

Ahora tenemos todos los elementos en posición, pero sus etiquetas y valores están equivocados. Para cambiar cualquier parámetro, simplemente haga clic dos veces sobre él (sobre la etiqueta o el valor) para obtener el cuadro de diálogo **Display Properties**. Escriba la etiqueta o el valor correcto, haga clic en **OK**, y la cantidad quedará cambiada sobre la pantalla. Las etiquetas y los valores pueden ser movidos haciendo simplemente clic sobre el centro del parámetro hasta que esté rodeado estrechamente por los cuatro pequeños cuadrados y desplazándolo entonces a la nueva ubicación, donde quedará depositado luego de efectuar otro clic con el botón izquierdo.

Por último, podemos iniciar el proceso de análisis, llamado **Simulation**, seleccionando la tecla **Create a new simulation profile** cerca de la parte superior izquierda de la exhibición —la que parece una página de datos con una estrella en la esquina superior izquierda. Resultará un cuadro de diálogo **A New Simulation** que primero pregunta por el **Name** de la simulación. **Bias Point** es seleccionada para una solución de cd, y **none** se deja en la solicitud **Inherit From**. Luego seleccione **Create**, y aparecerá un cuadro de diálogo **Simulation Setting** en el que **Analysis-Analysis Type-Bias Point** es seleccionada secuencialmente. Haga clic sobre **OK**, y seleccione la tecla **Run** (que parece una punta de flecha aislada azul) o escoja **PSpice-Run** de la barra de menú. Resultará una **Output Window** que parece estar algo inactiva; no será usada en el presente análisis, por lo que cierre (**X**) la ventana, y el circuito de la figura 4.30 aparecerá con el voltaje, la corriente y los niveles de potencia de la red. El voltaje, la corriente o los niveles de potencia pueden ser retirados (o reemplazados) seleccionando simplemente **V**, **I** o **W** en la tercera barra de herramientas desde la parte superior. Valores individuales pueden ser removidos seleccionando simplemente el valor y oprimiendo la tecla **Delete** o la tecla de tijeras ubicada en la barra de menú superior. Los valores resultantes pueden ser movidos haciendo clic con el botón izquierdo en el valor y desplazándolo a la ubicación deseada.

Observe en la figura 4.30 que la corriente es de 3 mA (como se esperaba) en cada punto de la red, y la potencia entregada por la fuente y disipada por el resistor es la misma, o 36 mW. También hay 12 V a través del resistor como es requerido por la configuración.



No hay duda de que la descripción anterior fue muy larga para un circuito tan trivial. Sin embargo, recuerde que hubo que introducir muchas facetas nuevas del uso de PSpice que no tendrán que ser tocadas otra vez en el futuro. Cuando termine de analizar su tercera o cuarta red, el procedimiento anterior le parecerá rutinario y se moverá bastante rápidamente. Para entonces estará buscando nuevos retos.

Electronics Workbench (EWB)

Con fines de comparación, usaremos Electronics Workbench para analizar el circuito mostrado en la figura 4.29. Aunque existen diferencias entre PSpice y EWB, como en el proceso de inicio, en construir las redes, efectuar las mediciones y establecer el procedimiento de simulación, hay suficientes similitudes entre los dos enfoques como para facilitar el aprendizaje de uno si ya se está familiarizado con el otro. Las similitudes resultarán obvias sólo si se intenta aprender ambos paquetes. Una de las mayores diferencias entre los dos es la opción de usar instrumentos prácticos en EWB para efectuar las mediciones —un aspecto positivo en la preparación para la experiencia de laboratorio—. Sin embargo, en EWB no encontrará usted la amplia lista de opciones disponible con PSpice. No obstante, en general, ambos paquetes de software están bien preparados para llevarnos a través de los tipos de análisis encontrados en este texto.

Cuando el icono **Multisim 2001** es seleccionado de la ventana de inicio, aparece una pantalla con el encabezado **Multisim-Circuit 1**. Una barra de menú cruza la parte superior de la pantalla, con una barra de herramientas por debajo de la barra de menú y otra a cada lado de la pantalla. Las barras de herramientas que se muestran pueden ser controladas mediante la secuencia **View-Toolbars** seguida por una selección de las barras de herramientas que se desee aparezcan. Para el análisis de este texto, fueron seleccionadas todas las barras de herramientas. Para la colocación de componentes, **View-Show Grid** fue seleccionada de manera que apareciese una retícula sobre la pantalla. Al ser colocado un elemento, automáticamente será ubicado en una relación específica con la estructura de la retícula.

A continuación se construirá el circuito de la figura 4.29. Primero se toma el cursor y se coloca sobre el símbolo de batería que aparece en la parte superior del componente de la barra de herramientas situado a la izquierda de la pantalla. Se efectúa un clic con el botón izquierdo del ratón y una lista de fuentes será desplegada. Coloque el cursor sobre cualquiera de las fuentes y aparecerá un texto sobre la pantalla definiendo el tipo de fuente. Colocando el cursor sobre la tercera tecla hacia abajo resultará en **DC VOLTAGE SOURCE**. Haga de nuevo clic con el botón izquierdo, y aparecerá el símbolo de batería sobre la pantalla próximo a la ubicación del cursor. Mueva éste al sitio deseado y con un solo clic del botón izquierdo, el símbolo de batería puede situarse en su lugar. La operación se ha completado. Si se desea borrar la fuente, simplemente se hace clic con el botón izquierdo, sobre el símbolo de nuevo para crear cuatro pequeños cuadrados alrededor de la fuente. Estos cuadrados indican que la fuente está en el modo activo y puede operarse sobre ella. Si desea borrarla, haga clic sobre la tecla **Delete** o seleccione la tecla de tijeras que está en la barra de herramientas superior. Si prefiere modificar la fuente, oprima el botón derecho del ratón *fuera* de los cuatro cuadrados pequeños para obtener una lista. Efectúe un clic derecho *dentro* de los cuatro cuadrados y tendrá un conjunto diferente de opciones. En cualquier momento, si se desea remover el estado activo, se da un clic izquierdo en cualquier parte de la pantalla. Para mover la fuente, haga clic sobre el símbolo de fuente para crear los cuatro cuadrados, pero no suelte el botón del ratón; manténgalo oprimido y lleve la fuente a la ubicación preferida. Cuando la fuente esté en posición, suelte el botón y un clic más removerá el estado activo. Para

remover la barra de herramientas **SOURCES**, haga clic sobre la **X** que aparece en la esquina superior derecha de la barra de herramientas.

La siguiente tecla hacia abajo desde la tecla fuente que parece un resistor controla el despliegue de las componentes pasivas **Basic** de una red. Haga clic una vez sobre el símbolo de resistor y aparecerán dos columnas de componentes. *De ahora en adelante*, *siempre que sea posible*, *la palabra* clic *implicará un clic izquierdo del ratón*. La necesidad de un clic derecho será explicada más adelante.

Para el circuito de la figura 4.29 se necesita un resistor. Cuando se coloca el cursor sobre el resistor izquierdo, aparece el texto **RESISTOR**; al colocarlo sobre el resistor derecho, aparecerá el texto **RESISTOR_VIRTUAL**. Para todos los análisis en este texto donde se utilice EWB, se empleará el resistor virtual. El término **RESISTOR** es usado para todos los resistores de un valor estándar comercial —los valores dados comercialmente. El término **VIRTUAL** se aplica a cualquier componente en la que el usuario puede definir el valor que desee. Haga clic una vez sobre el resistor virtual y éste aparecerá sobre la pantalla al lado del cursor en la posición horizontal. En la figura 4.29, está en la posición vertical por lo que debe efectuarse una rotación. Esto puede lograrse haciendo clic sobre el resistor para obtener el estado activo y luego efectuar un clic con el botón derecho del ratón dentro de los cuatro cuadrados. Aparecen varias opciones, incluyendo borrar **(Cut)** la componente, copiar, cambiar la posición y aplicar color. Como queremos girar 90º en el sentido de las manecillas del reloj, seleccionamos esa opción, y el resistor será girado automáticamente 90º. Ahora, como con la batería, para colocar el resistor en posición se da clic sobre el símbolo de resistor para crear los cuatro pequeños cuadrados, y luego, manteniendo oprimido el botón izquierdo del ratón, se lleva el resistor a la posición deseada. Cuando queda en su lugar, se suelta el botón y se hace clic de nuevo para remover los cuatro cuadrados —el resistor está ahora en posición.

Por último, se necesita una tierra para todas las redes. Regresando al depósito de partes **SOURCES**, se encontrará que una tierra es la primera opción en la parte superior de la barra de herramientas. Seleccione la opción **GROUND** de la izquierda, y colóquela sobre la pantalla debajo de la fuente de voltaje como se muestra en la figura 4.31. Ahora, antes de conectar entre sí los componentes, deben moverse las etiquetas y el valor de cada componente a las posiciones relativas

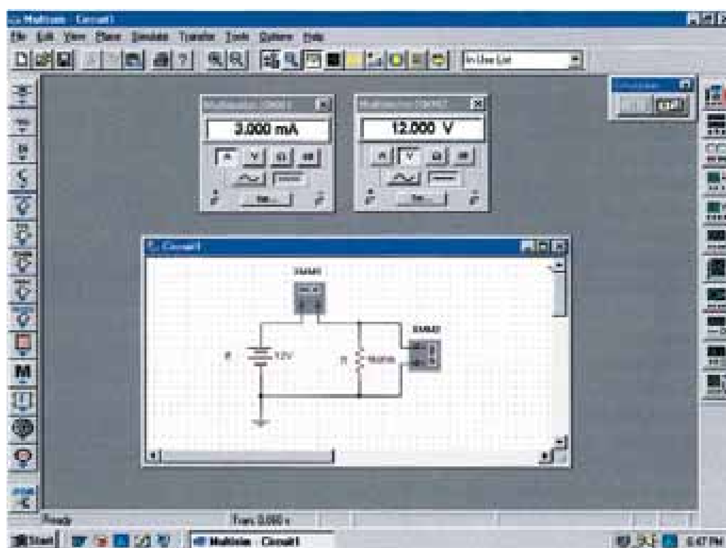


FIGURA 4.31
Uso de Electronics Workbench para determinar el nivel de voltaje y la corriente en el circuito de la figura 4.29.



mostradas en la figura 4.31. Esto se logra haciendo clic sobre la etiqueta o el valor para crear un pequeño conjunto de cuadrados alrededor del elemento y desplazarlo entonces a la ubicación deseada. Se suelta el botón del ratón, y luego se hace clic de nuevo para situar el elemento en su lugar. Para cambiar la etiqueta o el valor, se da clic dos veces sobre la etiqueta (tal como **V1**), y aparece un cuadro de diálogo **Battery**. Se selecciona **Label** e introduce **E** como **Reference ID**. Entonces, antes de dejar el cuadro de diálogo, se va a **Value** para cambiar el valor si es necesario. Es muy importante darse cuenta de que no es posible escribir las unidades donde aparece ahora **V**. El prefijo es controlado por las teclas de recorrido situadas a la izquierda de la unidad de medición. Como práctica, ensaye con las teclas de recorrido, y encontrará que puede ir de **pV** a **TV**. Por ahora simplemente se deja como **V**. Haga clic en **OK**, y ambas habrán sido cambiadas sobre la pantalla. El mismo proceso puede ser aplicado al elemento resistivo para obtener la etiqueta y el valor que aparecen en la figura 4.31.

A continuación, se deberá indicar al sistema qué resultados deben ser generados y cómo tienen que desplegarse. Para este ejemplo se usará un multímetro para medir tanto la corriente como el voltaje del circuito. El **Multimeter** es la primera opción en la lista de instrumentos que aparecen en la barra de herramientas situada a la derecha de la pantalla. Al seleccionarlo, aparecerá en la pantalla y será colocado en cualquier parte usando el mismo procedimiento definido para las componentes anteriores. El voltímetro fue girado en el sentido de las manecillas del reloj usando el procedimiento descrito para los elementos. Se efectúa doble clic sobre cualquier símbolo de medidor, y aparecerá un cuadro de diálogo **Multimeter** donde la función del medidor debe ser definida. Como el medidor **XMM1** será usado como un amperímetro, la letra **A** será seleccionada y la línea horizontal lo será para indicar el nivel de cd. No hay necesidad de seleccionar **Set** para los valores por omisión ya que han sido elegidos para la amplia gama de aplicaciones. Las ventanas de diálogo de los medidores pueden ser movidas a cualquier ubicación haciendo clic sobre su barra de encabezado para volverlos azul oscuro y desplazar entonces el medidor a la posición preferida. Para el voltímetro, **V** y la barra horizontal fueron seleccionados como se muestra en la figura 4.31.

Por último, los elementos deben ser conectados. Esto se logra llevando el cursor a un extremo de un elemento, digamos, a la parte superior de la fuente de voltaje, con el resultado de que un pequeño punto y una cruz aparecerán en el extremo superior del elemento. Se da clic una vez, se sigue la trayectoria preferida, y se coloca la cruz sobre la terminal positiva del amperímetro. Luego se da clic de nuevo y el alambre aparecerá en posición.

En este punto el estudiante debe darse cuenta de que el paquete de software tiene sus preferencias acerca de cómo quiere conectar los elementos. Esto es, el estudiante puede tratar de dibujarlo de una manera, pero lo generado por la computadora tal vez resulte en una trayectoria diferente. Con el tiempo se toma conciencia de esas preferencias y se logra fijar la red al gusto personal. Por ahora se debe continuar haciendo las conexiones que aparecen en la figura 4.31, moviendo elementos para que las líneas se ajusten según sea necesario. Es importante asegurarse de que aparezca el pequeño punto en cualquier lugar donde se desee una conexión. Su ausencia sugiere que la conexión no ha sido hecha y que el programa de software no ha aceptado la entrada.

Ahora ya es posible correr el programa y ver la solución. El análisis puede ser iniciado de varias maneras. Una opción es seleccionar **Simulate** desde la barra de herramientas superior, seguido por **RUN/STOP**. Otra es seleccionar la tecla **Simulate** en el agrupamiento de la barra de diseño en la barra de herramientas superior; aparece como un diagrama con trazo verde, fino, sobre un fondo negro. La última opción, y la que más se usará en este análisis, requiere un interruptor



OFF/ON, **0/1** sobre la pantalla. Este interruptor se obtiene por medio de **VIEW-Show Simulate Switch** y aparecerá como se muestra en la esquina superior derecha de la figura 4.31. Usando esta última opción, el análisis (llamado **Simulation**) se inicia colocando el cursor sobre el 1 del interruptor y haciendo clic con el botón izquierdo del ratón. El análisis será ejecutado, y la corriente y el voltaje aparecerán sobre el medidor como se muestra en la figura 4.31. Observe que ambos están dando los resultados esperados.

A continuación se proporciona uno de los conceptos más importantes por aprender acerca de la aplicación de EWB:

Siempre detenga o termine la simulación (haciendo clic sobre 0 o seleccionando OFF) antes de efectuar cualquier cambio en la red. Cuando la simulación se haya iniciado, permanecerá en ese modo hasta que se apague.

Es obvio que una gran cantidad de material quedó por aprender en este primer ejercicio usando Electronics Workbench. Sin embargo, el estudiante puede estar seguro de que conforme continuemos con más ejemplos, encontrará el procedimiento bastante directo y entretenido en su aplicación.

PROBLEMAS

SECCIÓN 4.1 Ley de Ohm

1. ¿Cuál es la caída de potencia en un resistor de 6 Ω si la corriente que transporta es de 2.5 A?
2. ¿Cuál es la corriente a través de un resistor de 72 Ω si la caída de voltaje en él es de 12 V?
3. ¿Cuánta resistencia se requiere para limitar la corriente a 1.5 mA si la caída de potencial en el resistor es de 6 V?
4. En el arranque, ¿cuál es la extracción de corriente en una batería de automóvil de 12 V si la resistencia de arranque del motor es de 0.056 Ω ?
5. Si la corriente a través de un resistor de 0.02 MΩ es de 3.6 μA, ¿cuál es la caída de voltaje en el resistor?
6. Si un voltímetro tiene una resistencia interna de 15 kΩ, encuentre la corriente a través del medidor cuando registra 62 V.
7. Si un refrigerador extrae 2.2 A a 120 V, ¿cuál es su resistencia?
8. Si un reloj tiene una resistencia interna de 7.5 kΩ, encuentre la corriente que pasa por él cuando se enchufa a una toma de 120 V.
9. Una lavadora es clasificada en 4.2 A a 120 V. ¿Cuál es su resistencia interna?
10. Si un cautín extrae 0.76 A a 120 V, ¿cuál es su resistencia?
11. La corriente de entrada a un transistor es de 20 μA. Si el voltaje aplicado (de entrada) es de 24 mV, determine la resistencia de entrada del transistor.
12. La resistencia interna de un generador de cd es de 0.5 Ω. Determine la pérdida de voltaje en él debida a esta resistencia interna si la corriente es de 15 A.

*13. **a.** Si un calentador eléctrico extrae 9.5 A al estar conectado a una fuente de 120 V, ¿cuál es su resistencia interna?
b. Emplee las relaciones básicas del capítulo 2 para responder a la pregunta: ¿cuánta energía se convierte en 1 h?

SECCIÓN 4.2 Trazado de la ley de Ohm

14. Trace las gráficas lineales de un resistor de 100 Ω y de otro de 0.5 Ω sobre la gráfica de la figura 4.6. Si es necesario, reproduzca la gráfica.
15. Esboce las características de un dispositivo que tiene resistencia interna de 20 Ω desde 0 hasta 10 V y resistencia interna de 2 Ω para voltajes mayores. Use los ejes de la figura 4.6. Si es necesario, reproduzca la gráfica.
16. Trace las gráficas lineales de un resistor de 2 kΩ y de otro de 50 kΩ sobre la gráfica de la figura 4.6. Use una escala horizontal que se extienda desde 0 hasta 20 V y un eje vertical con escala en miliamperes. Si es necesario, reproduzca la gráfica.
17. ¿Cuál es el cambio en voltaje en un resistor de 2 kΩ establecido mediante un cambio en corriente de 400 mA a través del resistor?

*18. **a.** Use los ejes de la figura 4.10 y esboce las características de un dispositivo que tiene una resistencia interna de 500 Ω desde 0 hasta 1 V y 50 Ω entre 1 V y 2 V. Su resistencia cambia entonces a −20 Ω para voltajes mayores. El resultado es un conjunto de características muy similares a las de un dispositivo electrónico llamado *diodo túnel*.
b. Use las características mencionadas en el ejercicio anterior y determine la corriente resultante a voltajes de 0.7 V, 1.5 V y 2.5 V.

SECCIÓN 4.3 Potencia

19. Si 420 J de energía son absorbidos por un resistor en 7 minutos, ¿cuál es la potencia en el resistor?
20. La potencia en un dispositivo es de 40 joules por segundo (J/s). ¿Qué tiempo le tomará entregar 640 J?
21. **a.** ¿Cuántos joules de energía disipa una luz nocturna de 2 W en 8 horas?
b. ¿Cuántos kilowatts-hora disipa?
22. Por un resistor de 10 Ω fluye una carga a razón de 300 coulombs por minuto (C/min). ¿Cuánta potencia es disipada?



23. ¿Cuánto tiempo debe existir una corriente permanente de 2 A en un resistor que tiene 3 V en él para disipar 12 J de energía?

24. ¿Cuál es la potencia entregada por una batería de 6 V si la carga fluye a razón de 48 C/min?

25. La corriente a través de un resistor de 4 Ω es de 7 mA. ¿Cuál es la potencia entregada al resistor?

26. La caída de voltaje en un resistor de 3 Ω es de 9 mV. ¿Cuál es la entrada de potencia al resistor?

27. Si la entrada de potencia a un resistor de 4 Ω es de 64 W, ¿cuál es la corriente a través del resistor?

28. Un resistor de 1/2 W tiene una resistencia de 1000 Ω. ¿Cuál es la corriente máxima que puede llevar con seguridad?

29. Un resistor de 2.2 kΩ en un sistema estéreo disipa 42 mW de potencia. ¿Cuál es el voltaje en el resistor?

30. Una batería de cd puede entregar 45 mA a 9 V. ¿Cuál es su valor nominal de potencia?

31. ¿Cuáles son el nivel de resistencia "caliente" y la corriente nominal de un foco de 100 W a 120 V?

32. ¿Cuáles son la resistencia interna y el valor nominal de voltaje de una lavadora automática de 450 W que extrae 3.75 A?

33. Una calculadora con batería interna de 3 V extrae 0.4 mW funcionando plenamente.
- **a.** ¿Cuál es la demanda de corriente del suministro?
- **b.** Si la calculadora está clasificada para operar 500 h con la misma batería, ¿cuál es el valor nominal en ampere-hora de la batería?

34. Un resistor de 20 kΩ tiene un valor nominal de 100 W. ¿Cuáles son la corriente máxima y el voltaje máximo que pueden aplicarse al resistor?

***35.**
- **a.** Grafique la potencia en función de la corriente para un resistor de 100 Ω. Use una escala de potencia de 0 a 1 W y una escala de corriente de 0 a 100 mA con divisiones de 0.1 W y 10 mA, respectivamente.
- **b.** ¿Es la gráfica lineal o no lineal?
- **c.** Usando la gráfica resultante, determine la corriente a un nivel de potencia de 500 mW.

***36.** Un televisor en blanco y negro pequeña, portátil, extrae 0.455 A a 9 V.
- **a.** ¿Cuál es el valor nominal de potencia de la televisión?
- **b.** ¿Cuál es la resistencia interna de la televisión?
- **c.** ¿Cuál es la energía convertida en 6 h de vida normal de la batería?

***37.**
- **a.** Si a una casa se le suministra un servicio de 120 V y 100 A, encuentre la capacidad máxima de potencia.
- **b.** ¿Puede el propietario operar con seguridad las siguientes cargas al mismo tiempo?
  motor de 5 hp
  secadora de ropa de 3000 W
  estufa eléctrica de 2400 W
  plancha de vapor de 1000 W

SECCIÓN 4.5 Eficiencia

38. ¿Cuál es la eficiencia de un motor que tiene una salida de 0.5 hp con una entrada de 450 W?

39. El motor de una sierra de potencia está clasificado con 68.5% de eficiencia. Si se requieren 1.8 hp para cortar una pieza particular de madera, ¿cuál es la corriente extraída de un suministro de 120 V?

40. ¿Cuál es la eficiencia del motor de una secadora que entrega 1 hp cuando la corriente de entrada y el voltaje son 4 A y 220 V, respectivamente?

41. Un sistema estéreo extrae 2.4 A a 120 V. La potencia de salida del audio es de 50 W.
- **a.** ¿Cuánta potencia se pierde en forma de calor en el sistema?
- **b.** ¿Cuál es la eficiencia del sistema?

42. Si un motor eléctrico con eficiencia de 87% que opera en una línea de 220 V entrega 3.6 hp, ¿qué corriente de entrada extrae?

43. Un motor está clasificado para entregar 2 hp.
- **a.** Si el motor funciona con 110 V y tiene 90% de eficiencia, ¿cuántos watts extrae de la línea de potencia?
- **b.** ¿Cuál es la corriente de entrada?
- **c.** ¿Cuál es la corriente de entrada si el motor tiene sólo 70% de eficiencia?

44. Un motor eléctrico usado en un elevador tiene una eficiencia de 90%. Si el voltaje de entrada es de 220 V, ¿cuál es la corriente de entrada cuando el motor entrega 15 hp?

45. Un motor de 2 hp impulsa una banda abrasiva. Si la eficiencia del motor es de 87% y la de la banda es de 75% debido a deslizamientos, ¿cuál es la eficiencia total del sistema?

46. Si dos sistemas en cascada tienen cada uno una eficiencia de 80% y la energía de entrada es de 60 J, ¿cuál es la energía de salida?

47. La eficiencia total de dos sistemas en cascada es de 72%. Si la eficiencia de uno es de 0.9, ¿cuál es la eficiencia en porcentaje del otro?

***48.** Si la entrada y la salida totales de potencia de dos sistemas en cascada son de 400 W y 128 W, respectivamente, ¿cuál es la eficiencia de cada sistema si uno tiene el doble de eficiencia que el otro?

49.
- **a.** ¿Cuál es la eficiencia total de tres sistemas en cascada con eficiencias individuales de 98, 87 y 21%?
- **b.** Si el sistema con la menor eficiencia (21%) fuese retirado y reemplazado por otro con una eficiencia de 90%, ¿cuál sería el incremento porcentual total en eficiencia?

50.
- **a.** Efectúe las siguientes conversiones:
  1 Wh a joules
  1 kWh a joules
- **b.** Con base en los resultados de la parte (a), analice y exponga cuándo es más apropiado usar una unidad o la otra.

SECCIÓN 4.6 Energía

51. Un resistor de 10 Ω está conectado a una batería de 15 V.
- **a.** ¿Cuántos joules de energía se disiparán en 1 minuto?
- **b.** Si el resistor se deja conectado 2 min en vez de 1 min, ¿aumentará la energía usada? ¿Aumentará el nivel de disipación de potencia?

52. ¿Cuánta energía en kilowatts hora se requiere para mantener funcionando un motor de 230 W durante 12 h por semana a lo largo de 5 meses? (Usa $4\frac{1}{3}$ semanas = 1 mes.)

53. ¿Cuánto tiempo un calentador de 1500 W puede estar encendido antes de usar más de 10 kWh de energía?

54. ¿Cuánto cuesta usar un radio de 30 W durante 3 horas a 9¢ por kilowatt-hora?

55. **a.** En 10 h un sistema eléctrico convierte 500 kWh de energía eléctrica en calor. ¿Cuál es el nivel de potencia del sistema?
b. Si el voltaje aplicado es de 208 V, ¿cuál es la corriente extraída del suministro?
c. Si la eficiencia del sistema es de 82%, ¿cuánta energía se pierde o almacena en 10 horas?

56. **a.** A 9¢ por kilowatt-hora, ¿cuánto tiempo puede mantenerse encendido un televisor a colores de 250 W por $1?
b. Por $1, ¿cuánto tiempo puede usarse una secadora de 4.8 kW?
c. Compare los resultados de las partes (a) y (b), y comente acerca del efecto del nivel de potencia sobre el costo relativo de usar un aparato.

57. ¿Cuál es el costo total de usar lo siguiente a 9 ¢ por kilowatt-hora?
Acondicionador de aire de 860 W durante 24 horas
Secadora de ropa de 4800 W durante 30 minutos
Lavadora de 400 W durante 1 hora
Lavavajillas de 1200 W durante 45 minutos

***58.** ¿Cuál es el costo total de usar lo siguiente a 9¢ por kilowatt-hora?
Estéreo de 110 W durante 4 horas
Proyector de 1200 W durante 20 minutos
Grabadora de cintas de 60 W durante 1.5 horas
Televisor a color de 150 W durante 3 horas 45 minutos

SECCIÓN 4.9 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

59. Repita el análisis del circuito mostrado en la figura 4.29 con $E = 400$ mV y $R = 0.04$ MΩ.

60. Repita el análisis del circuito mostrado en la figura 4.29 pero invierta la polaridad de la batería y use $E = 0.02$ V y $R = 240\ \Omega$.

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

61. Escriba un programa para calcular el costo de usar cinco aparatos diferentes durante periodos variables si el costo unitario es de 9¢ por kilowatt-hora.

62. Solicite I, R y t y determine V, P y W. Imprima los resultados con las unidades apropiadas.

GLOSARIO

Caballo de potencia (hp) Medida equivalente a 746 watts en el sistema eléctrico.

Cortacircuito Dispositivo de dos terminales diseñado para asegurar que la corriente no exceda los niveles de seguridad. Si el cortacircuito se “desconecta”, puede restablecerse con un interruptor o un botón.

Diodo Dispositivo semiconductor cuyo comportamiento es muy parecido al de un interruptor sencillo; esto es, de manera ideal, un diodo pasará corriente en una sola dirección al operar dentro de límites específicos.

Eficiencia (η) Razón de potencia de salida a potencia de entrada que proporciona información inmediata sobre las características de conversión de energía de un sistema.

Energía (W) Cantidad cuyo cambio de estado se determina mediante el producto de la tasa de conversión (P) y el periodo implicado (t). Se mide en joules (J) o watts-segundo (Ws).

Fusible Dispositivo con dos terminales cuya única finalidad es asegurar que los niveles de corriente en un circuito no exceden los niveles de seguridad.

Ley de ohm Ecuación que establece una relación entre la corriente, el voltaje y la resistencia de un sistema eléctrico.

Medidor de kilowatts-hora Instrumento para medir los kilowatts-hora de energía suministrada a un usuario de electricidad residencial o comercial.

Potencia Indicación de cuánto trabajo puede ser realizado en una cantidad específica de tiempo. Se *mide* en joules/segundo (J/s) o watts (W).

Watímetro Instrumento capaz de medir la potencia entregada a un elemento detectando tanto el voltaje como la corriente a través del elemento.

5

-S-

Circuitos en serie

5.1 INTRODUCCIÓN

Existen dos tipos de corriente disponibles para el consumidor de hoy. Uno es la *corriente directa* (cd), en la que idealmente el flujo de carga (corriente) no cambia en magnitud (o dirección) con el tiempo. La otra es la *corriente alterna senoidal* (ca), en la que el flujo de carga se encuentra cambiando continuamente en magnitud (y dirección) con el tiempo. Algunos de los capítulos siguientes presentan una introducción al análisis de circuitos únicamente desde el enfoque de cd. Se analizarán con todo detalle los métodos y conceptos para la corriente directa; en la medida de lo posible, un breve análisis será suficiente para cubrir cualquier variación que pudiera encontrarse cuando se considere el tipo de ca en capítulos posteriores.

La batería de la figura 5.1, por virtud de la diferencia de potencial entre sus terminales, tiene la habilidad de causar (o "presionar" para) que la carga fluya a través del circuito simple. La terminal positiva atrae los electrones a través del cable al mismo ritmo con que éstos son proporcionados por la terminal negativa. Siempre que la batería se encuentre conectada dentro del circuito y mantenga sus características terminales, la corriente (cd) a través del circuito no cambiará en magnitud ni en dirección.

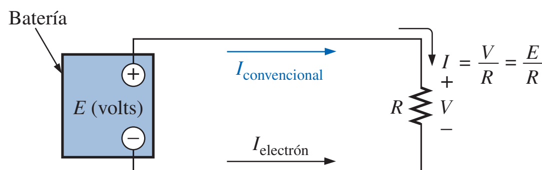
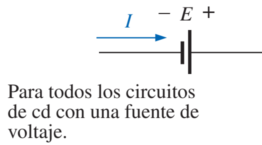


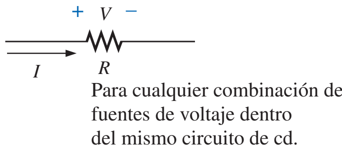
FIGURA 5.1
Presentación de los componentes básicos de un circuito eléctrico.

Si consideramos que el cable es un conductor ideal (es decir, que no presenta resistencia al flujo), la diferencia de potencial V en el resistor será igual al voltaje aplicado de la batería: V (volts) $= E$ (volts).



Para todos los circuitos de cd con una fuente de voltaje.

FIGURA 5.2
Definición de la dirección del flujo convencional para circuitos de cd con una sola fuente.



Para cualquier combinación de fuentes de voltaje dentro del mismo circuito de cd.

FIGURA 5.3
Definición de la polaridad resultante de una corriente convencional I a través de un elemento resistivo.

La corriente está limitada únicamente por el resistor R. Mientras mayor sea la resistencia, menor será la corriente, y de forma recíproca, según lo determina la ley de Ohm.

Por convención (como se analizó en el capítulo 2), la dirección del **flujo de corriente convencional** $I_{convencional}$ que se muestra en la figura 5.1, es opuesta a la del **flujo de electrones** ($I_{electrón}$). Además, el flujo uniforme de carga estipula que la corriente directa I será la misma en todo el circuito. Al seguir la dirección del flujo convencional, se observa que existe una elevación del potencial a través de la batería (− a +), y una caída de potencial a través del resistor (+ a −). Para circuitos de cd con una sola fuente de voltaje, el flujo convencional pasa siempre de un potencial bajo a un potencial alto cuando atraviesa una fuente de voltaje, como se muestra en la figura 5.2. Sin embargo, el flujo convencional siempre atraviesa de un potencial alto a uno bajo cuando pasa a través del resistor para cualquier número de fuentes de voltaje dentro del mismo circuito, como se muestra en la figura 5.3.

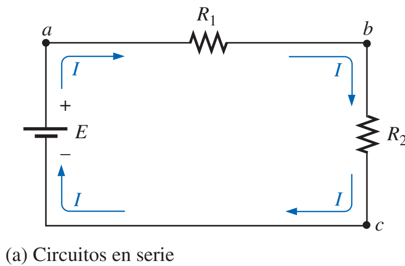
El circuito de la figura 5.1 presenta la configuración más simple posible. Este capítulo y los capítulos siguientes añadirán elementos a este sistema de una forma muy específica para presentar una gama de conceptos que darán forma a la mayor parte de los fundamentos requeridos para analizar sistemas más complejos. El lector debe estar consciente de que las leyes, reglas, etc., presentadas en los capítulos 5 y 6 se utilizarán a lo largo de sus estudios en sistemas eléctricos, electrónicos y computacionales. Tales conceptos no serán desechados a cambio de un conjunto más avanzado a medida que se progrese hacia un material más sofisticado; por tanto, resulta crítico que se comprendan completamente y que los distintos procedimientos y métodos se apliquen con confianza.

5.2 CIRCUITOS EN SERIE

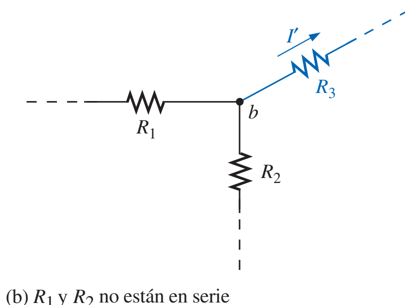
Un **circuito** consta de cualquier número de elementos conectados en puntos terminales, ofreciendo al menos una ruta cerrada por la cual pueda fluir la carga. El circuito de la figura 5.4(a) cuenta con tres elementos conectados en tres puntos terminales (*a, b* y *c*) para obtener una ruta cerrada para la corriente *I.*

Dos elementos se encuentran en serie si:

1. ***Solo cuentan con una terminal en común (es decir, una terminal de un elemento se encuentra conectada solamente a una terminal del otro elemento).***
2. ***El punto común entre los dos elementos no se encuentra conectado con otro elemento que transporta corriente.***



(a) Circuitos en serie



(b) R_1 y R_2 no están en serie

FIGURA 5.4
(a) Circuito en serie; (b) situación en la que R1 y R2 no se encuentran en serie.

En la figura 5.4(a), los resistores R_1 y R_2 se encuentran en serie debido a que *solo* cuentan con el punto *b* en común. Los otros extremos de los resistores están conectados con cualquier otra parte del circuito. Por la misma razón, la batería E y el resistor R_1 se encuentran en serie (con la terminal *a* en común), y el resistor R_2 y la batería E también están en serie (terminal *c* en común). Dado que todos los elementos se encuentran en serie, la red se denomina **circuito en serie**. Dos ejemplos comunes de conexiones en serie incluyen el atado de dos piezas pequeñas de cuerda juntas para formar una cuerda más grande y la conexión de tuberías para llevar agua de un punto a otro.

Si el circuito de la figura 5.4(a) se modificara de forma que se insertara un resistor R_3 que transporte corriente como se muestra en la figura 5.4(b), los resistores R_1 y R_2 ya no estarán en serie debido a la violación del inciso 2 de la definición anterior de los elementos en serie.

La corriente es la misma a lo largo de los elementos en serie.

Por tanto, para el circuito de la figura 5.4(a), la corriente I a través de cada resistor será la misma que sobre la batería. El hecho de que la corriente sea la

misma a través de los elementos en serie es regularmente utilizado como un camino para determinar si dos elementos se encuentran en serie o para confirmar una conclusión.

Una **rama** de un circuito es cualquier segmento del circuito que cuente con uno o más elementos en serie. En la figura 5.4(a), el resistor R_1 forma una rama del circuito, el resistor R_2 otra, y la batería E una tercera.

La resistencia total de un circuito en serie es la suma de los niveles de resistencia.

En la figura 5.4(a), por ejemplo, la resistencia total (R_T) será igual a $R_1 + R_2$. Advierta que la resistencia total es realmente la resistencia "observada" por la batería, cuando ésta se "asoma" hacia la combinación en serie de los elementos como se muestra en la figura 5.5.

En general, para calcular la resistencia total de N resistores en serie, se aplica la siguiente ecuación:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N \quad \text{(ohms, }\Omega) \qquad \textbf{(5.1)}$$

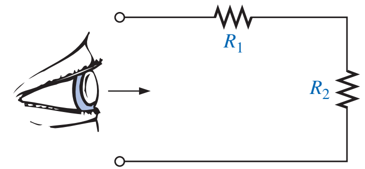


FIGURA 5.5
Resistencia "observada" por la fuente.

Una vez que se conoce la resistencia total, el circuito de la figura 5.4(a) puede volverse a trazar como se muestra en la figura 5.6, mostrando claramente que la única resistencia que la fuente "observa" será la resistencia total. La fuente es completamente inconsciente de la forma en que los elementos se conectaron para establecer R_T. Una vez que R_T se conoce, la corriente extraída de la fuente puede determinarse utilizando la ley de Ohm de la siguiente forma:

$$I_s = \frac{E}{R_T} \quad \text{(ampere, A)} \qquad \textbf{(5.2)}$$

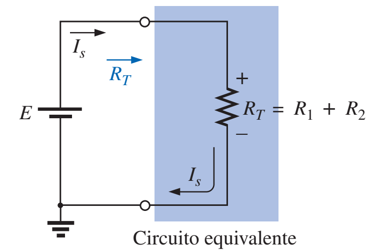


FIGURA 5.6
Reemplazo de los resistores en serie R_1 y R_2 de la figura 5.5 con la resistencia total.

Dado que E es fija, la magnitud de la corriente de la fuente será totalmente dependiente de la magnitud de R_T. Una R_T más grande dará por resultado un valor relativamente pequeño de I_s, mientras que un menor valor de R_T ocasionará niveles más altos de corriente.

El hecho de que la corriente sea la misma por cada elemento de la figura 5.4(a) permite un cálculo directo del voltaje en cada resistor utilizando la ley de Ohm; es decir,

$$V_1 = IR_1,\ V_2 = IR_2,\ V_3 = IR_3,\ \ldots,\ V_N = IR_N \quad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(5.3)}$$

La potencia entregada a cada resistor puede entonces determinarse utilizando cualquiera de las tres ecuaciones que a continuación se presentan para R_1:

$$P_1 = V_1 I_1 = I_1^2 R_1 = \frac{V_1^2}{R_1} \quad \text{(watts, W)} \qquad \textbf{(5.4)}$$

La potencia entregada por la fuente es:

$$P_{\text{del}} = EI \quad \text{(watts, W)} \qquad \textbf{(5.5)}$$

La potencia total entregada a un circuito resistivo será igual a la potencia total disipada por los elementos resistivos.

Es decir,

$$P_{\text{del}} = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_N \qquad \textbf{(5.6)}$$

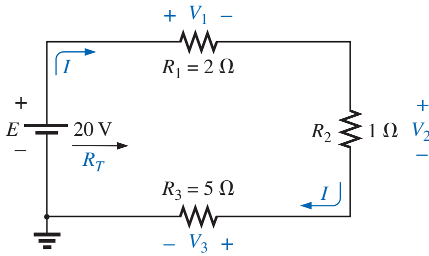


FIGURA 5.7
Ejemplo 5.1.

EJEMPLO 5.1

a. Calcule la resistencia total del circuito en serie de la figura 5.7.
b. Calcule la corriente de la fuente I_s.
c. Determine los voltajes V_1, V_2 y V_3.
d. Calcule la potencia disipada por R_1, R_2 y R_3.
e. Determine la potencia entregada por la fuente, y compárela con la suma de los niveles de potencia del inciso (d).

Soluciones:

a. $R_T = R_1 + R_2 + R_3 = 2\ \Omega + 1\ \Omega + 5\ \Omega = \mathbf{8\ \Omega}$

b. $I_s = \dfrac{E}{R_T} = \dfrac{20\ \text{V}}{8\ \Omega} = \mathbf{2.5\ A}$

c. $V_1 = IR_1 = (2.5\ \text{A})(2\ \Omega) = \mathbf{5\ V}$
$V_2 = IR_2 = (2.5\ \text{A})(1\ \Omega) = \mathbf{2.5\ V}$
$V_3 = IR_3 = (2.5\ \text{A})(5\ \Omega) = \mathbf{12.5\ V}$

d. $P_1 = V_1I_1 = (5\ \text{V})(2.5\ \text{A}) = \mathbf{12.5\ W}$
$P_2 = I_2^2R_2 = (2.5\ \text{A})^2(1\ \Omega) = \mathbf{6.25\ W}$
$P_3 = V_3^2/R_3 = (12.5\ \text{V})^2/5\ \Omega = \mathbf{31.25\ W}$

e. $P_{\text{del}} = EI = (20\ \text{V})(2.5\ \text{A}) = \mathbf{50\ W}$
$P_{\text{del}} = P_1 + P_2 + P_3$
$50\ \text{W} = 12.5\ \text{W} + 6.25\ \text{W} + 31.25\ \text{W}$
$\underline{50\ \text{W} = 50\ \text{W}}$ (se comprueba)

Para calcular la resistencia total de N resistores del mismo valor en serie, simplemente multiplique el valor de *uno* de los resistores por el número en serie; es decir,

$$R_T = NR \tag{5.7}$$

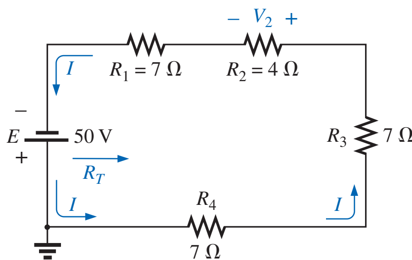


FIGURA 5.8
Ejemplo 5.2.

EJEMPLO 5.2

Determine R_T, I y V_2 para el circuito de la figura 5.8.

Solución: Observe la dirección de la corriente según la establece la batería y la polaridad de la caída de voltaje en R_2 como la determina la dirección de la corriente. Dado que $R_1 = R_3 = R_4$,

$$R_T = NR_1 + R_2 = (3)(7\ \Omega) + 4\ \Omega = 21\ \Omega + 4\ \Omega = \mathbf{25\ \Omega}$$

$$I = \frac{E}{R_T} = \frac{50\ \text{V}}{25\ \Omega} = \mathbf{2\ A}$$

$$V_2 = IR_2 = (2\ \text{A})(4\ \Omega) = \mathbf{8\ V}$$

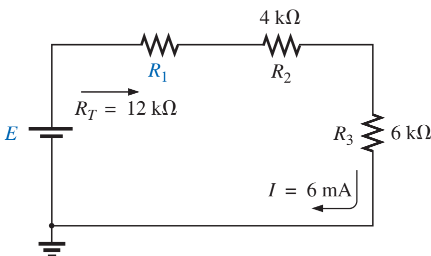


FIGURA 5.9
Ejemplo 5.3.

Los ejemplos 5.1 y 5.2 son problemas del tipo de sustitución directa y relativamente fáciles de resolver mediante la práctica. Sin embargo, el ejemplo 5.3 es evidencia de otro tipo de problemas que requieren un firme entendimiento de las ecuaciones fundamentales y la habilidad para identificar la ecuación que debe utilizarse primero. La mejor preparación para este tipo de ejercicios es simplemente trabajar con la mayor cantidad posible de ellos.

EJEMPLO 5.3

Dados R_T e I, calcule R_1 e E para el circuito de la figura 5.9.

Solución:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3$$
$$12\ \text{k}\Omega = R_1 + 4\ \text{k}\Omega + 6\ \text{k}\Omega$$
$$R_1 = 12\ \text{k}\Omega - 10\ \text{k}\Omega = \mathbf{2\ k\Omega}$$
$$E = IR_T = (6 \times 10^{-3}\ \text{A})(12 \times 10^3\ \Omega) = \mathbf{72\ V}$$

5.3 FUENTES DE VOLTAJE EN SERIE

Las fuentes de voltaje pueden conectarse en serie, como se muestra en la figura 5.10, para incrementar o disminuir el voltaje total aplicado a un sistema. El voltaje neto se determina simplemente al sumar las fuentes con la misma polaridad y restando el total de las fuentes con polaridad opuesta. La polaridad neta será la polaridad de la suma más grande.

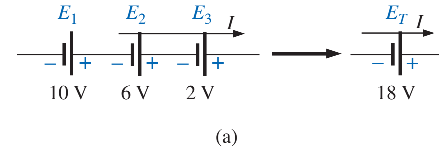
Por ejemplo, en la figura 5.10(a), todas las fuentes "presionan" la corriente a la derecha, por lo que el voltaje neto es:

$$E_T = E_1 + E_2 + E_3 = 10\ \text{V} + 6\ \text{V} + 2\ \text{V} = 18\ \text{V}$$

como se observa en la figura. Sin embargo, en la figura 5.10(b), la mayor "presión" es hacia la izquierda, con un voltaje neto de:

$$E_T = E_2 + E_3 - E_1 = 9\ \text{V} + 3\ \text{V} - 4\ \text{V} = 8\ \text{V}$$

y la polaridad mostrada en la figura.



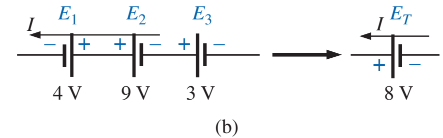


FIGURA 5.10
Reducción de fuentes de voltaje de cd en serie a una sola fuente.

5.4 LEY DE VOLTAJE DE KIRCHHOFF

Observe la figura 5.11.

La ley de voltaje de Kirchhoff ***(LVK) establece que la suma algebraica de las elevaciones y caídas de potencial alrededor de un lazo (o trayectoria) cerrado es cero.***

Un **lazo cerrado** es cualquier trayectoria continua que sale de un punto en una dirección y regresa al mismo punto desde otra dirección sin abandonar el circuito. En la figura 5.12, al seguir la corriente, es posible trazar una ruta continua que parte del punto *a* cruzando R_1 y regresa a través de E sin abandonar el circuito. Por tanto, *abcda* es un lazo cerrado. Para que podamos aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff, la suma de las elevaciones y caídas de potencial debe realizarse en una sola dirección alrededor del lazo cerrado.

Por cuestiones de uniformidad, se empleará la dirección en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de este libro para todas las aplicaciones de la ley de voltaje de Kirchhoff. Sin embargo, tenga presente que el mismo resultado se obtendrá si se elige la dirección contraria a las manecillas del reloj y se aplica la ley de forma correcta.

Se aplica un signo positivo para una elevación de potencial (− a +), y un signo negativo para una caída de potencial (+ a −). Al seguir la corriente en la figura 5.12 desde el punto *a*, primero se encuentra una caída de potencial V_1 (+ a −) a través de R_1, y luego otra caída de potencial V_2 a través de R_2. Al continuar a través de la fuente de voltaje, se tiene una elevación de potencial E (− a +) antes de regresar al punto *a*. En forma simbólica, donde Σ representa una sumatoria, ↻ el lazo cerrado, y V las caídas y elevaciones de potencial, se tiene:

$$\Sigma_{\circlearrowright} V = 0 \quad \text{(Ley de voltaje de Kirchhoff en forma simbólica)} \qquad \textbf{(5.8)}$$

Alemán
(Königsberg, Berlín)
(1824-1887)
Físico
Profesor de física,
Universidad de Heidelberg



Cortesía de Smithsonian Institution
Fotografía núm. 58,283

A pesar de que contribuyó en varias áreas bajo el dominio de la física, es mejor conocido por su trabajo en el área eléctrica, donde presentó su definición de la relaciones entre las corrientes y los voltajes de una red en 1847. Realizó amplios trabajos con el químico alemán Robert Bunsen (quien desarrolló el *mechero Bunsen*), dando por resultado el descubrimiento de los importantes elementos *cesio* y *rubidio*.

FIGURA 5.11
Gustav Robert Kirchhoff.

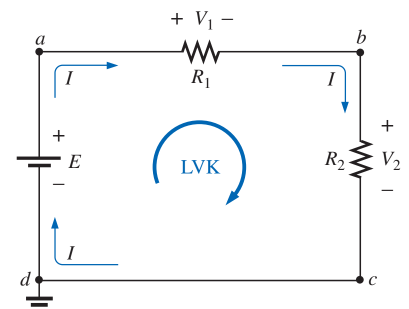


FIGURA 5.12
Aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff a un circuito de cd en serie.

la cual produce para el circuito de la figura 5.12 (en dirección de las manecillas del reloj, siguiendo la corriente I e iniciando en el punto d):

$$+E - V_1 - V_2 = 0$$

o bien, $$E = V_1 + V_2$$

mostrando que,

el voltaje aplicado de un circuito en serie equivale a la suma de las caídas de voltaje en los elementos en serie.

La ley de voltaje de Kirchhoff también puede enunciarse de la siguiente forma:

$$\Sigma_{\circlearrowright} V_{\text{elevaciones}} = \Sigma_{\circlearrowright} V_{\text{caídas}} \quad \textbf{(5.9)}$$

la cual establece, en palabras, que la suma de las elevaciones alrededor de un lazo cerrado debe ser igual a la suma de las caídas de potencial. Sin embargo, en el presente libro se pondrá énfasis en la utilización de la ecuación (5.8).

Si el lazo se tomara en el sentido contrario de las manecillas del reloj comenzando por el punto a, se obtendría lo siguiente:

$$\Sigma_{\circlearrowright} V = 0$$
$$-E + V_2 + V_1 = 0$$

o, de la forma anterior, $$E = V_1 + V_2$$

La aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff no necesita seguir una ruta que incluya elementos portadores de corriente.

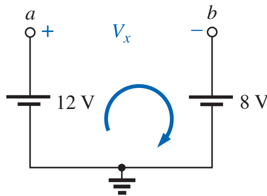


FIGURA 5.13
Demostración de que puede existir un voltaje entre dos puntos no conectados mediante un conductor portador de corriente.

Por ejemplo, en la figura 5.13 existe una diferencia en el potencial entre los puntos a y b, incluso cuando los dos puntos no se encuentran conectados por un elemento portador de corriente. La aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo cerrado dará por resultado una diferencia de potencial de 4 V entre los dos puntos. Es decir, utilizando la dirección de las manecillas del reloj:

$$+12\text{ V} - V_x - 8\text{ V} = 0$$

y $$V_x = \mathbf{4\ V}$$

EJEMPLO 5.4 Determine los voltajes desconocidos para las redes de la figura 5.14.

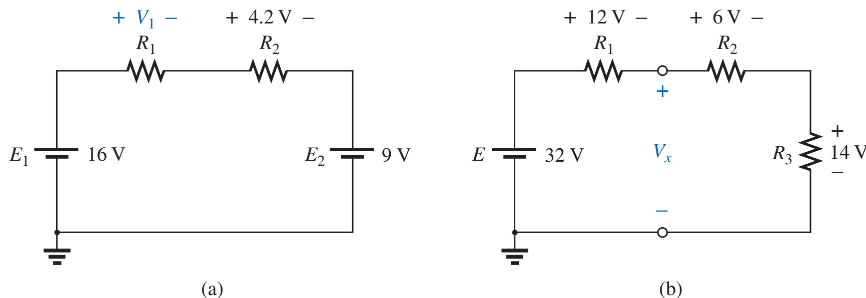


FIGURA 5.14
Ejemplo 5.4.

Solución: Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff, asegúrese de concentrarse en las polaridades de la caída o elevación de voltaje en lugar de hacerlo

sobre el tipo de elemento. En otras palabras, no trate una caída de voltaje en un elemento resistivo de forma distinta a una caída de voltaje en una fuente. Si la polaridad indica que existe una caída, esto será lo importante al aplicar la ley. En la figura 5.14(a), por ejemplo, si elegimos la dirección de las manecillas del reloj, veremos que existe una caída en los resistores R_1 y R_2 y una caída en la fuente E_2. Por tanto, todo tendrá un signo negativo cuando se aplique la ley de voltaje de Kirchhoff.

La aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff al circuito de la figura 5.14(a) en la dirección de las manecillas del reloj dará por resultado:

$$+E_1 - V_1 - V_2 - E_2 = 0$$

y $$V_1 = E_1 - V_2 - E_2 = 16\text{ V} - 4.2\text{ V} - 9\text{ V} = \mathbf{2.8\text{ V}}$$

El resultado indica claramente que no era necesario conocer los valores de los resistores o de la corriente para determinar el voltaje desconocido. Los otros niveles de voltaje cuentan con suficiente información para determinar la incógnita.

En la figura 5.14(b) el voltaje desconocido no se encuentra en un elemento portador de corriente. Sin embargo, como se indicó en los párrafos anteriores, la ley de voltaje de Kirchhoff no se encuentra limitada a los elementos portadores de corriente. En este caso existen dos posibles trayectorias para encontrar la incógnita. Utilizando la trayectoria de las manecillas del reloj, que incluye la fuente de voltaje E, se obtendrá:

$$+E - V_1 - V_x = 0$$

y $$V_x = E - V_1 = 32\text{ V} - 12\text{ V} = \mathbf{20\text{ V}}$$

Al utilizar la dirección de las manecillas del reloj para el otro lazo que contiene a R_2 y a R_3 se obtendría el siguiente resultado:

$$+V_x - V_2 - V_3 = 0$$

y $$V_x = V_2 + V_3 = 6\text{ V} + 14\text{ V} = \mathbf{20\text{ V}}$$

lo que coincide con el resultado anterior.

EJEMPLO 5.5 Calcule V_1 y V_2 para la red de la figura 5.15.

Solución: Para la trayectoria 1, iniciando en el punto a en dirección de las manecillas del reloj:

$$+25\text{ V} - V_1 + 15\text{ V} = 0$$

y $$V_1 = \mathbf{40\text{ V}}$$

Para la trayectoria 2, iniciando en el punto a en dirección de las manecillas del reloj:

$$-V_2 - 20\text{ V} = 0$$

y $$V_2 = \mathbf{-20\text{ V}}$$

El signo negativo indica solamente que las polaridades reales de la diferencia de potencial son opuestas a la polaridad supuesta indicada en la figura 5.15.

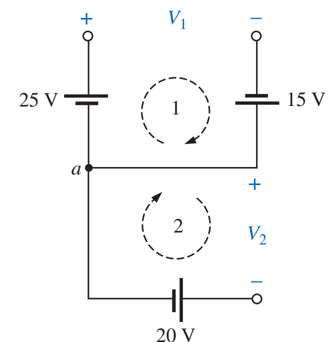


FIGURA 5.15
Ejemplo 5.5.

El siguiente ejemplo enfatizará el hecho de que cuando aplicamos la ley de voltaje de Kirchhoff, son las polaridades de las elevaciones o caídas de voltaje los parámetros importantes y no el tipo de elemento involucrado.

EJEMPLO 5.6 Utilizando la ley de voltaje de Kirchhoff, determine los voltajes desconocidos para la red de la figura 5.16.

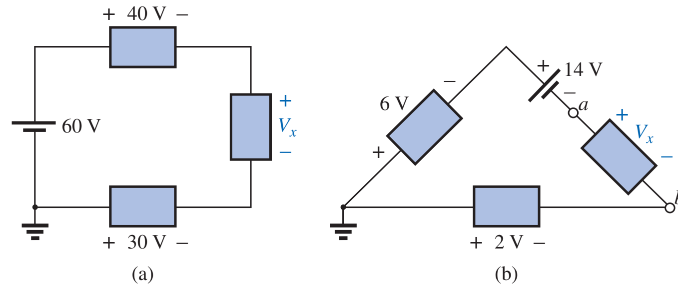


FIGURA 5.16
Ejemplo 5.6.

Solución: Observe en cada circuito que existen diversas polaridades en los elementos desconocidos, dado que éstos pueden contener cualquier mezcla de componentes. Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff a la red de la figura 5.16(a) en la dirección de las manecillas del reloj se obtendrá:

$$60\text{ V} - 40\text{ V} - V_x + 30\text{ V} = 0$$

y
$$V_x = 60\text{ V} + 30\text{ V} - 40\text{ V} = 90\text{ V} - 40\text{ V}$$
$$= \mathbf{50\text{ V}}$$

En la figura 5.16(b) la polaridad del voltaje desconocido no se proporciona. En tales casos, realice un supuesto acerca de la polaridad, y aplique la ley de voltaje de Kirchhoff como antes. Si el resultado tiene signo positivo, la polaridad supuesta fue correcta; si tiene signo negativo, la magnitud es correcta, pero la polaridad supuesta debe invertirse. En este caso, si suponemos que *a* es positiva y *b* negativa, la aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff en dirección de las manecillas del reloj dará por resultado:

$$-6\text{ V} - 14\text{ V} - V_x + 2\text{ V} = 0$$

y
$$V_x = -20\text{ V} + 2\text{ V}$$
$$= \mathbf{-18\text{ V}}$$

Dado que el resultado es negativo, sabemos que *a* deberá ser negativa y *b* positiva, sin embargo, la magnitud de 18 V es correcta.

EJEMPLO 5.7 Para el circuito de la figura 5.17:

a. Calcule R_T.
b. Calcule I.
c. Calcule V_1 y V_2.
d. Encuentre la potencia en los resistores de 4 Ω y 6 Ω.
e. Encuentre la potencia suministrada por la batería, y compárela con la potencia disipada por los resistores de 4 Ω y 6 Ω combinados.
f. Verifique la ley de voltaje de Kirchhoff (en dirección de las manecillas del reloj).

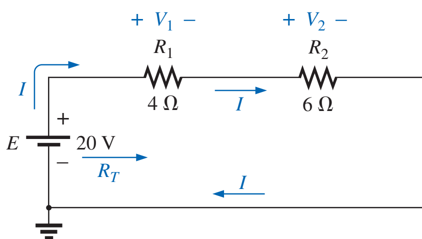


FIGURA 5.17
Ejemplo 5.7.

Soluciones:

a. $R_T = R_1 + R_2 = 4\ \Omega + 6\ \Omega = \mathbf{10\ \Omega}$

b. $I = \dfrac{E}{R_T} = \dfrac{20\text{ V}}{10\ \Omega} = \mathbf{2\text{ A}}$

c. $V_1 = IR_1 = (2\text{ A})(4\ \Omega) = \mathbf{8\ V}$
$V_2 = IR_2 = (2\text{ A})(6\ \Omega) = \mathbf{12\ V}$

d. $P_{4\Omega} = \dfrac{V_1^2}{R_1} = \dfrac{(8\text{ V})^2}{4} = \dfrac{64}{4} = \mathbf{16\ W}$

$P_{6\Omega} = I^2R_2 = (2\text{ A})^2(6\ \Omega) = (4)(6) = \mathbf{24\ W}$

e. $P_E = EI = (20\text{ V})(2\text{ A}) = \mathbf{40\ W}$
$P_E = P_{4\Omega} + P_{6\Omega}$
$40\text{ W} = 16\text{ W} + 24\text{ W}$
$40\text{ W} = 40\text{ W}$ (se comprueba)

f. $\Sigma_{\circlearrowright} V = +E - V_1 - V_2 = 0$
$E = V_1 + V_2$
$20\text{ V} = 8\text{ V} + 12\text{ V}$
$20\text{ V} = 20\text{ V}$ (se comprueba)

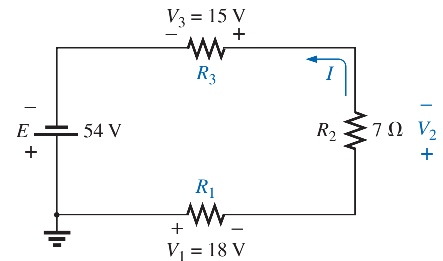


FIGURA 5.18
Ejemplo 5.8.

EJEMPLO 5.8 Para el circuito de la figura 5.18:
a. Determine V_2 utilizando la ley de voltaje de Kirchhoff.
b. Determine I.
c. Calcule R_1 y R_3.

Soluciones:
a. La ley de voltaje de Kirchhoff (en dirección de las manecillas del reloj):

$$-E + V_3 + V_2 + V_1 = 0$$

o bien,
$$E = V_1 + V_2 + V_3$$

y $V_2 = E - V_1 - V_3 = 54\text{ V} - 18\text{ V} - 15\text{ V} = \mathbf{21\ V}$

b. $I = \dfrac{V_2}{R_2} = \dfrac{21\text{ V}}{7\ \Omega} = \mathbf{3\ A}$

c. $R_1 = \dfrac{V_1}{I} = \dfrac{18\text{ V}}{3\text{ A}} = \mathbf{6\ \Omega}$

$R_3 = \dfrac{V_3}{I} = \dfrac{15\text{ V}}{3\text{ A}} = \mathbf{5\ \Omega}$

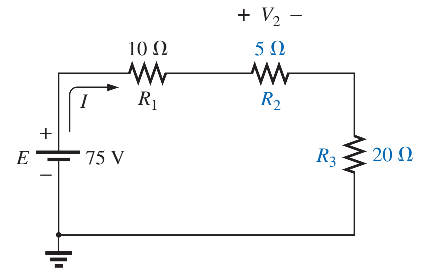


FIGURA 5.19
Circuito de cd en serie con elementos a ser intercambiados.

5.5 INTERCAMBIO DE ELEMENTOS EN SERIE

Los elementos en serie de un circuito pueden intercambiarse sin afectar la resistencia total, la corriente o la potencia de cada elemento. Por ejemplo, la red de la figura 5.19 puede volverse a trazar como se muestra en la figura 5.20 sin afectar I o V_2. La resistencia total R_T es 35 Ω en ambos casos, e $I = 70\text{ V}/35\ \Omega = 2\text{ A}$. El voltaje $V_2 = IR_2 = (2\text{ A})(5\ \Omega) = 10\text{ V}$ para ambas configuraciones.

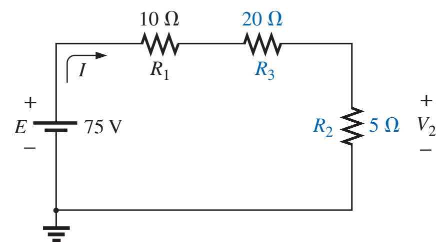


FIGURA 5.20
Circuito de la figura 5.19 con R_2 y R_3 intercambiados.

EJEMPLO 5.9 Determine I y el voltaje en el resistor de 7 Ω para la red de la figura 5.21.

Solución: La red se vuelve a trazar en la figura 5.22.

$$R_T = (2)(4\ \Omega) + 7\ \Omega = 15\ \Omega$$

$$I = \frac{E}{R_T} = \frac{37.5\text{ V}}{15\ \Omega} = \mathbf{2.5\ A}$$

$$V_{7\Omega} = IR = (2.5\text{ A})(7\ \Omega) = \mathbf{17.5\ V}$$

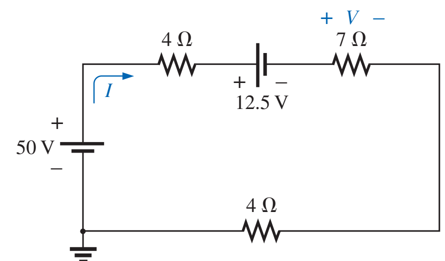


FIGURA 5.21
Ejemplo 5.9.

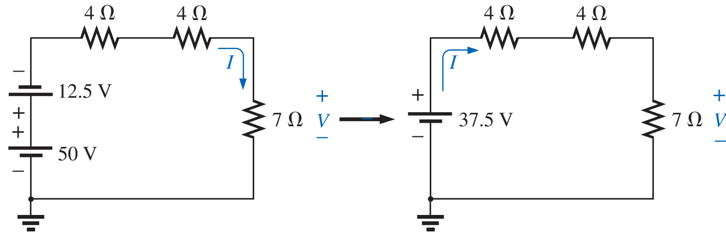


FIGURA 5.22
Nuevo trazado del circuito de la figura 5.21.

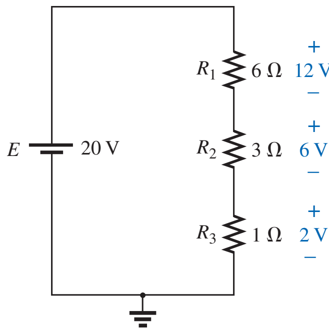


FIGURA 5.23
Muestra de la forma en que el voltaje se dividirá en los elementos resistivos en serie.

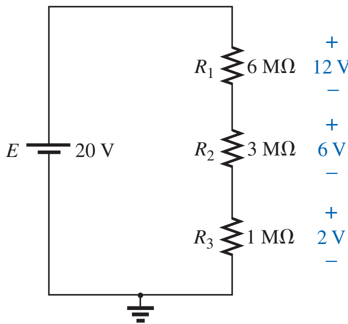


FIGURA 5.24
La proporción de los valores de resistencia determina la división de voltaje de un circuito de cd en serie.

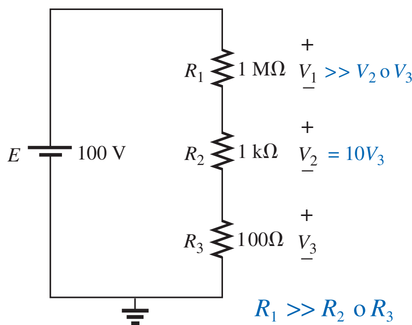


FIGURA 5.25
Los elementos resistivos en serie más grandes acapararán la mayor parte del voltaje aplicado.

5.6 REGLA DEL DIVISOR DE VOLTAJE

En un circuito en serie,

el voltaje en los elementos resistivos se dividirá en función de la magnitud de los niveles de resistencia.

Por ejemplo, se proporcionan los voltajes en los elementos resistivos de la figura 5.23. El resistor más grande de 6 Ω acapara la mayor parte del voltaje aplicado, mientras que el resistor más pequeño R_3 tiene la menor parte. Además observe que, como el nivel de resistencia de R_1 es 6 veces el de R_3, el voltaje en R_1 será 6 veces el de R_3. El hecho de que el nivel de resistencia de R_2 sea 3 veces el de R_1 da por resultado tres veces el voltaje en R_2. Por último, dado que R_1 es el doble de R_2, el voltaje en R_1 será el doble de R_2. Por tanto, y en general, el voltaje en resistores en serie tendrá la misma proporción que los niveles de resistencia.

Resulta particularmente importante observar que si los niveles de resistencia de todos los resistores de la figura 5.23 se incrementan en la misma proporción, como se muestra en la figura 5.24, los niveles de voltaje permanecerán igual. En otras palabras, incluso cuando los niveles de resistencia se incrementen por un factor de 1 millón, las proporciones de voltaje permanecerán iguales. Por tanto, resulta evidente que es la proporción de los valores de los resistores lo que cuenta para la división de voltaje y no la magnitud relativa de todos los resistores. El nivel de corriente de la red será fuertemente afectado por el cambio en el nivel de resistencia de la figura 5.23 a la figura 5.24, pero los niveles de voltaje serán los mismos.

Con base en lo anterior, un primer vistazo a la red en serie de la figura 5.25 sugiere que la mayor parte del voltaje aplicado se presentará en el resistor de 1 MΩ y muy poco en el resistor de 100 Ω. De hecho 1 MΩ = (1000)1 kΩ = (10,000)100 Ω, mostrando que $V_1 = 1000V_2 = 10{,}000V_3$.

Al resolver para la corriente y luego para los tres niveles de voltaje se obtendrá:

$$I = \frac{E}{R_T} = \frac{100\text{ V}}{1{,}001{,}100\ \Omega} \cong 99.89\ \mu\text{A}$$

y

$$V_1 = IR_1 = (99.89\ \mu\text{A})(1\ \text{M}\Omega) = \mathbf{99.89\ V}$$
$$V_2 = IR_2 = (99.89\ \mu\text{A})(1\ \text{k}\Omega) = \mathbf{99.89\ mV} = 0.09989\text{ V}$$
$$V_3 = IR_3 = (99.89\ \mu\text{A})(100\ \Omega) = \mathbf{9.989\ mV} = 0.009989\text{ V}$$

corroborando claramente las conclusiones anteriores. En lo futuro, por tanto, utilice este método para estimar la parte del voltaje de entrada en los elementos en serie como una forma de verificación de los cálculos reales o simplemente para obtener un estimado con el mínimo de esfuerzo.

En el análisis anterior la corriente se determinó antes que el voltaje de la red. Sin embargo, existe un método denominado **regla del divisor de voltaje** (RDV) que permite la determinación de los niveles de voltaje sin tener que encontrar antes la corriente. La regla puede derivarse mediante el análisis de la red de la figura 5.26.

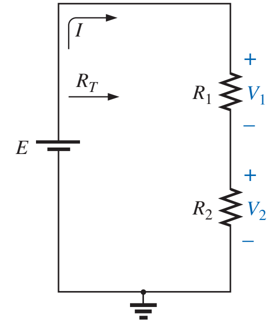


FIGURA 5.26
Desarrollo de la regla del divisor de voltaje.

$$R_T = R_1 + R_2$$

y

$$I = \frac{E}{R_T}$$

Al aplicar la ley de Ohm:

$$V_1 = IR_1 = \left(\frac{E}{R_T}\right)R_1 = \frac{R_1E}{R_T}$$

con:

$$V_2 = IR_2 = \left(\frac{E}{R_T}\right)R_2 = \frac{R_2E}{R_T}$$

Observe que el formato para V_1 y V_2 es:

$$V_x = \frac{R_xE}{R_T} \quad \text{(regla del divisor de voltaje)} \qquad \textbf{(5.10)}$$

donde V_x es el voltaje en R_x, E es el voltaje en los elementos en serie, y R_T es la resistencia total del circuito en serie.

En palabras, la **regla del divisor de voltaje** establece que

el voltaje en un resistor en un circuito en serie es igual al valor de ese resistor multiplicado por el voltaje total en los elementos en serie, dividido entre la resistencia total de los elementos en serie.

EJEMPLO 5.10 Determine el voltaje V_1 para la red de la figura 5.27.

Solución: Con la ecuación (5.10):

$$V_1 = \frac{R_1E}{R_T} = \frac{R_1E}{R_1 + R_2} = \frac{(20\ \Omega)(64\ \text{V})}{20\ \Omega + 60\ \Omega} = \frac{1280\ \text{V}}{80} = \mathbf{16\ V}$$

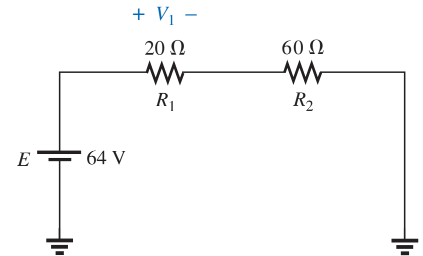


FIGURA 5.27
Ejemplo 5.10.

EJEMPLO 5.11 Utilice la regla del divisor de voltaje y determine los voltajes V_1 y V_3 para el circuito en serie de la figura 5.28.

Solución:

$$V_1 = \frac{R_1E}{R_T} = \frac{(2\ \text{k}\Omega)(45\ \text{V})}{2\ \text{k}\Omega + 5\ \text{k}\Omega + 8\ \text{k}\Omega} = \frac{(2\ \text{k}\Omega)(45\ \text{V})}{15\ \text{k}\Omega}$$

$$= \frac{(2 \times 10^3\ \Omega)(45\ \text{V})}{15 \times 10^3\ \Omega} = \frac{90\ \text{V}}{15} = \mathbf{6\ V}$$

$$V_3 = \frac{R_3E}{R_T} = \frac{(8\ \text{k}\Omega)(45\ \text{V})}{15\ \text{k}\Omega} = \frac{(8 \times 10^3\ \Omega)(45\ \text{V})}{15 \times 10^3\ \Omega}$$

$$= \frac{360\ \text{V}}{15} = \mathbf{24\ V}$$

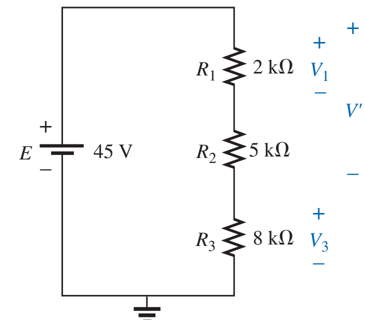


FIGURA 5.28
Ejemplo 5.11.

La regla puede ampliarse al voltaje presente en dos o más elementos en serie si la resistencia en el numerador de la ecuación (5.10) se desarrolla para incluir

la resistencia total de los elementos en serie (R') en los que se calculará el voltaje; es decir,

$$V' = \frac{R'E}{R_T} \quad \text{(volts)} \tag{5.11}$$

EJEMPLO 5.12 Determine el voltaje V' en la figura. 5.28 en los resistores R_1 y R_2.

Solución:

$$V' = \frac{R'E}{} = \frac{(2\text{ k}\Omega + 5\text{ k}\Omega)(45\text{ V})}{15\text{ k}\Omega} = \frac{(7\text{ k}\Omega)(45\text{ V})}{15\text{ k}\Omega} = \mathbf{21\text{ V}}$$

Tampoco existe la necesidad de que el voltaje E en la ecuación sea el voltaje fuente de la red. Por ejemplo, si V es el voltaje total en varios elementos en serie como los que se muestran en la figura 5.29, entonces:

$$V_{2\Omega} = \frac{(2\ \Omega)(27\text{ V})}{4\ \Omega + 2\ \Omega + 3\ \Omega} = \frac{54\text{ V}}{9} = \mathbf{6\text{ V}}$$

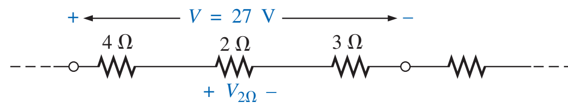


FIGURA 5.29
El voltaje total en elementos en serie no necesita ser una fuente de voltaje independiente.

EJEMPLO 5.13 Diseñe el divisor de voltaje de la figura 5.30 de forma $V_{R_1} = 4V_{R_2}$.

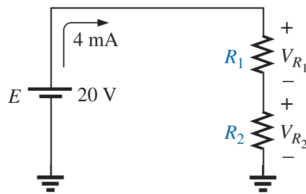


FIGURA 5.30
Ejemplo 5.13.

Solución: La resistencia total se define mediante:

$$R_T = \frac{E}{I} = \frac{20\text{ V}}{4\text{ mA}} = 5\text{ k}\Omega$$

Dado que $V_{R_1} = 4V_{R_2}$,

$$R_1 = 4R_2$$

De manera que $\quad R_T = R_1 + R_2 = 4R_2 + R_2 = 5R_2$

y $\quad 5R_2 = 5\text{ k}\Omega$

$$R_2 = \mathbf{1\text{ k}\Omega}$$

y $\quad R_1 = 4R_2 = \mathbf{4\text{ k}\Omega}$

5.7 NOTACIÓN

La notación jugará un papel cada vez más importante en los análisis subsiguientes. Por tanto, resulta importante comenzar a analizar la notación utilizada en toda la industria.

Fuentes de voltaje y tierra

Excepto en algunos casos especiales, los sistemas eléctricos y electrónicos se aterrizan con propósitos de referencia y de seguridad. El símbolo para la conexión a tierra se muestra en la figura 5.31 junto con su nivel de potencial definido: cero volts. Ninguno de los circuitos analizados hasta aquí ha contenido la conexión a tierra. Si la figura 5.4(a) se volviese a trazar con una fuente de alimentación aterrizada, aparecería como se muestra en la figura 5.32(a), (b) o (c). En cualquier caso, se entiende que la terminal negativa de la batería y la parte inferior del resistor R_2 se encuentran con un potencial de tierra. Aunque la figura 5.32(c) no muestra una conexión entre las dos tierras, se acepta que tal conexión existe para el flujo continuo de carga. Si $E = 12$ V, entonces el punto a será 12 V positivos con respecto a tierra, y existirán 12 V en la combinación en serie de los resistores R_1 y R_2. Si se coloca un voltímetro desde el punto b hasta tierra se leerán 4 V, por lo que el voltaje en R_2 será de 4 V, con el potencial más alto en el punto b.



FIGURA 5.31
Potencial de tierra.

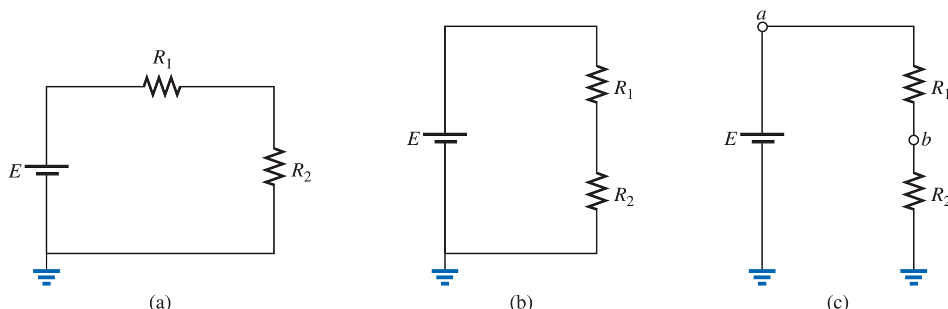


FIGURA 5.32
Tres formas de trazar el mismo circuito de cd en serie.

En diagramas muy grandes, donde el espacio es muy escaso y la claridad resulta importante, las fuentes de voltaje pueden indicarse como se muestra en las figuras 5.33(a) y 5.34(a) en lugar de como se ilustra en las figuras 5.33(b) y 5.34(b). Además, los niveles de potencial pueden indicarse como en la figura 5.35, para permitir una verificación rápida de los niveles de potencial en distintos puntos de la red con respecto a tierra y asegurar que el sistema se encuentra operando adecuadamente.

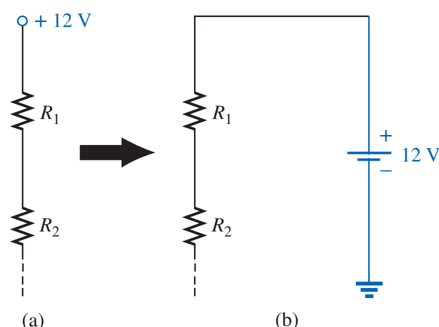


FIGURA 5.33
Reemplazo de la notación especial de una fuente de voltaje de cd por el símbolo estándar.

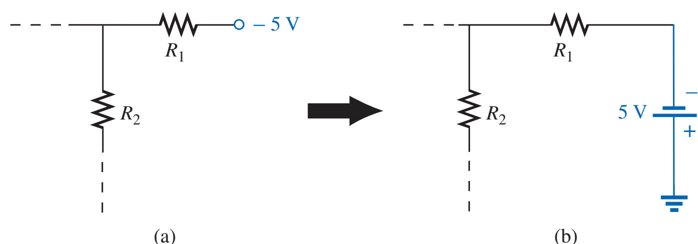


FIGURA 5.34
Reemplazo de la notación para una fuente de cd negativa por la notación estándar.

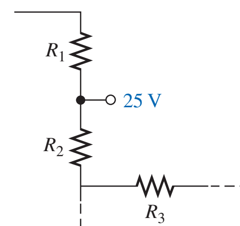


FIGURA 5.35
El nivel de voltaje esperado en un punto particular en una red del sistema se encuentra funcionando adecuadamente.

Notación de doble subíndice

El hecho de que el voltaje sea una variable *que* se presenta entre dos puntos ha dado por resultado una notación de doble subíndice que define al primer

subíndice como el potencial más alto. En la figura 5.36(a), los dos puntos que definen el voltaje en el resistor R están indicados por a y b. Dado que a es el primer subíndice de V_{ab}, debe tener un mayor potencial que el punto b si V_{ab} cuenta con un valor positivo. Si, de hecho, el punto b se encuentra a un mayor potencial que el punto a, V_{ab} tendrá un valor negativo, como se indica en la figura 5.36(b).

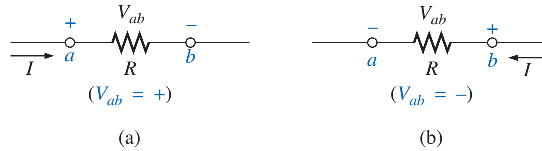


FIGURA 5.36
Definición del signo para la notación de doble subíndice.

En resumen:

La notación de doble subíndice V_{ab} especifica el punto a como el potencial mayor. Si este no es el caso, deberá asociarse un signo negativo con la magnitud de V_{ab}.

En otras palabras,

el voltaje V_{ab} será el voltaje en el punto a con respecto al punto b.

Notación de subíndice sencillo

Si el punto b de la notación V_{ab} se especifica como potencial de tierra (cero volts), entonces es posible utilizar la notación de subíndice sencillo que proporcione el voltaje en un punto con respecto a tierra.

En la figura 5.37, V_a es el voltaje del punto a con respecto a tierra. En este caso obviamente es 10 V dado que se encuentra justo en la fuente de voltaje E. El voltaje V_b es el voltaje del punto b a tierra. Dado que éste se encuentra directamente en el resistor de 4 Ω, $V_b = 4$ V.

En resumen:

La notación de subíndice sencillo V_a especifica el voltaje en el punto a con respecto a tierra (cero volts). Si el voltaje es menor a cero volts, deberá asociarse un signo negativo con la magnitud de V_a.

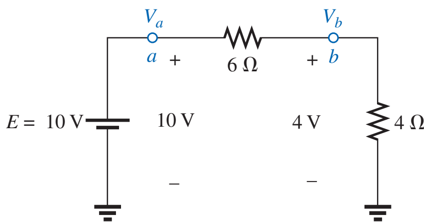


FIGURA 5.37
Definición del uso de la notación de subíndice sencillo para niveles de voltaje.

Comentarios generales

En este punto ya es posible establecer una relación particularmente útil que tendrá una amplia aplicación en el análisis de circuitos electrónicos. Para los estándares de notación anterior, existe la siguiente relación:

$$V_{ab} = V_a - V_b \tag{5.12}$$

En otras palabras, si se conoce el voltaje en los puntos a y b con respecto a tierra, entonces es posible determinar el voltaje V_{ab} utilizando la ecuación (5.12). En la figura 5.37, por ejemplo,

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_a - V_b = 10 \text{ V} - 4 \text{ V} \\ &= 6 \text{ V} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.14 Encuentre el voltaje V_{ab} para las condiciones de la figura 5.38.

Solución: Al aplicar la ecuación (5.12):

$$V_{ab} = V_a - V_b = 16\text{ V} - 20\text{ V}$$
$$= \mathbf{-4\ V}$$

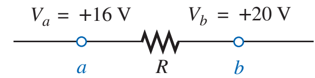


FIGURA 5.38
Ejemplo 5.14.

Observe el uso del signo negativo para reflejar que el punto b se encuentra a un mayor potencial que el punto a.

EJEMPLO 5.15 Encuentre el voltaje V_a para la configuración de la figura 5.39.

Solución: Al aplicar la ecuación (5.12):

$$V_{ab} = V_a - V_b$$

y
$$V_a = V_{ab} + V_b = 5\text{ V} + 4\text{ V}$$
$$= \mathbf{9\ V}$$

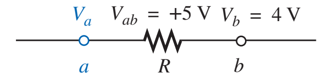


FIGURA 5.39
Ejemplo 5.15.

EJEMPLO 5.16 Encuentre el voltaje V_{ab} para la configuración de la figura 5.40.

Solución: Al aplicar la ecuación (5.12):

$$V_{ab} = V_a - V_b = 20\text{ V} - (-15\text{ V}) = 20\text{ V} + 15\text{ V}$$
$$= \mathbf{35\ V}$$

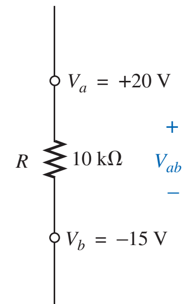


FIGURA 5.40
Ejemplo 5.16.

Observe en el ejemplo 5.16 el cuidado que debe tenerse con los signos al aplicar la ecuación. El voltaje se encuentra cayendo desde un nivel alto de + 20 V hasta un voltaje negativo de −15 V. Como se aprecia en la figura 5.41, esto representa una caída en el voltaje de 35 V. De alguna forma es como si pasáramos de un saldo positivo en una cuenta de $20 a tener una deuda de $15; el gasto total sería de $35.

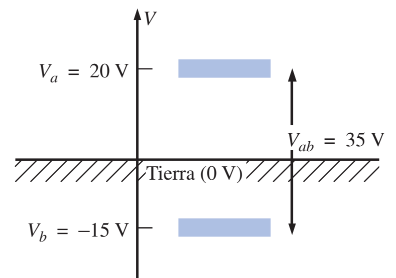


FIGURA 5.41
Impacto de voltajes positivos y negativos sobre la caída total de voltaje.

EJEMPLO 5.17 Encuentre los voltajes V_b, V_c y V_{ac} para la red de la figura 5.42.

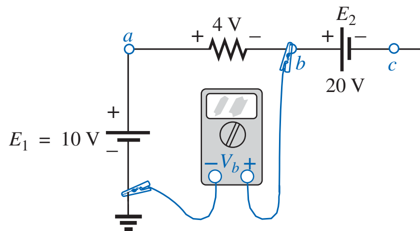


FIGURA 5.42
Ejemplo 5.17.

Solución: Comenzando desde un potencial de tierra (cero volts), se procede a una elevación de 10 V para llegar al punto a y luego se pasa por una caída de potencial de 4 V al punto b. El resultado es que el instrumento medidor presentará la lectura de:

$$V_b = +10\text{ V} - 4\text{ V} = \mathbf{6\ V}$$

como lo demuestra claramente la figura 5.43.

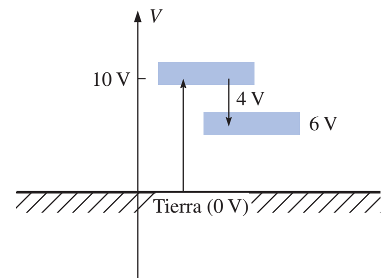


FIGURA 5.43
Determinación de V_b empleando los niveles de voltaje definidos.

Si se procede ahora con el punto c, existirá una caída adicional de 20 V, dando por resultado:

$$V_c = V_b - 20\text{ V} = 6\text{ V} - 20\text{ V} = \mathbf{-14\ V}$$

como se muestra en la figura 5.44.

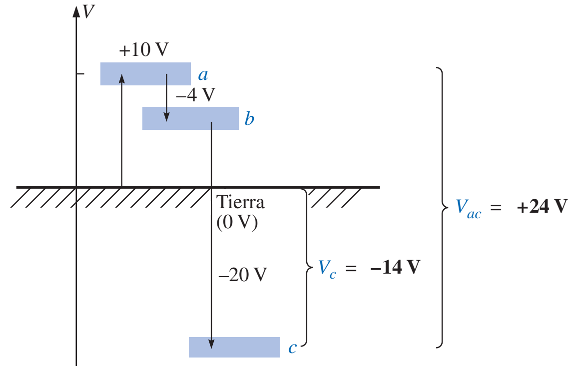


FIGURA 5.44
Revisión de los niveles de potencial para el circuito de la figura 5.42.

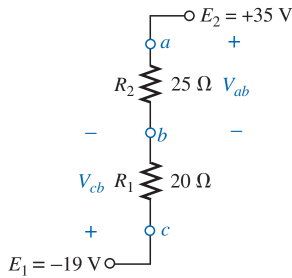


FIGURA 5.45
Ejemplo 5.18.

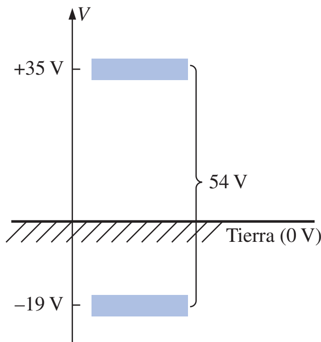


FIGURA 5.46
Determinación de la caída total de voltaje en los elementos resistivos de la figura 5.45.

El voltaje V_{ac} puede obtenerse utilizando la ecuación (5.12) o por simple referencia a la figura 5.44:

$$V_{ac} = V_a - V_c = 10\text{ V} - (-14\text{ V})$$
$$= \mathbf{24\ V}$$

EJEMPLO 5.18 Determine V_{ab}, V_{cb} y V_c para la red de la figura 5.45.

Solución: Existen dos métodos para resolver este problema. El primero es trazar el diagrama de la figura 5.46 y observar que existe una caída de 54 V en los resistores en serie R_1 y R_2. Luego, la corriente puede determinarse utilizando la ley de Ohm y los voltajes de la siguiente forma:

$$I = \frac{54\text{ V}}{45\ \Omega} = 1.2\text{ A}$$

$$V_{ab} = IR_2 = (1.2\text{ A})(25\ \Omega) = \mathbf{30\ V}$$

$$V_{cb} = -IR_1 = -(1.2\text{ A})(20\ \Omega) = \mathbf{-24\ V}$$

$$V_c = E_1 = \mathbf{-19\ V}$$

El otro enfoque es volver a trazar la red como se muestra en la figura 5.47 para establecer con claridad el efecto auxiliar de E_1 y E_2 y luego resolver el circuito en serie resultante.

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_T} = \frac{19\text{ V} + 35\text{ V}}{45\ \Omega} = \frac{54\text{ V}}{45\ \Omega} = 1.2\text{ A}$$

y $\quad V_{ab} = \mathbf{30\ V} \qquad V_{cb} = \mathbf{-24\ V} \qquad V_c = \mathbf{-19\ V}$

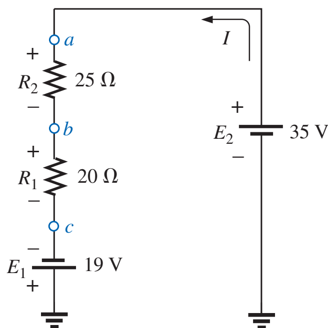


FIGURA 5.47
Nuevo trazado del circuito de la figura 5.45 empleando símbolos estándar de fuente de voltaje de cd.

EJEMPLO 5.19 Utilizando la regla del divisor de voltaje, determine los voltajes V_1 y V_2 de la figura 5.48.

Solución: Al volver a trazar la red con el símbolo estándar de la batería se obtiene la red de la figura 5.49. Al aplicar la regla del divisor de voltaje,

$$V_1 = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2} = \frac{(4\ \Omega)(24\ \text{V})}{4\ \Omega + 2\ \Omega} = \mathbf{16\ V}$$

$$V_2 = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = \frac{(2\ \Omega)(24\ \text{V})}{4\ \Omega + 2\ \Omega} = \mathbf{8\ V}$$

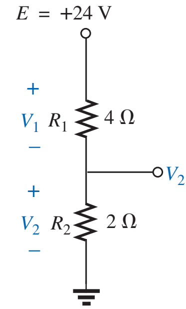


FIGURA 5.48
Ejemplo 5.19.

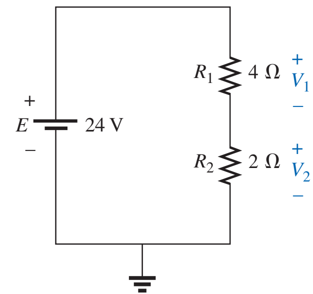


FIGURA 5.49
Circuito de la figura 5.48 trazado de nuevo.

EJEMPLO 5.20 Para la red de la figura 5.50:

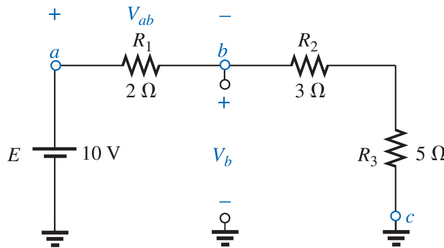


FIGURA 5.50
Ejemplo 5.20.

a. Calcule V_{ab}.
b. Determine V_b.
c. Calcule V_c.

Soluciones:
a. Con la regla del divisor de voltaje:

$$V_{ab} = \frac{R_1 E}{R_T} = \frac{(2\ \Omega)(10\ \text{V})}{2\ \Omega + 3\ \Omega + 5\ \Omega} = \mathbf{+2\ V}$$

b. Con la regla del divisor de voltaje:

$$V_b = V_{R_2} + V_{R_3} = \frac{(R_2 + R_3)E}{R_T} = \frac{(3\ \Omega + 5\ \Omega)(10\ \text{V})}{10\ \Omega} = \mathbf{8\ V}$$

o bien $V_b = V_a - V_{ab} = E - V_{ab} = 10\ \text{V} - 2\ \text{V} = \mathbf{8\ V}$

c. $V_c =$ potencial de tierra $= \mathbf{0\ V}$

5.8 RESISTENCIA INTERNA DE FUENTES DE VOLTAJE

Cada fuente de voltaje, ya sea un generador, una batería o una fuente de laboratorio como las que se muestran en la figura 5.51(a), tiene cierta **resistencia interna**. Por tanto, el circuito equivalente de cualquier fuente de voltaje aparecerá como el mostrado en la figura 5.51(b). En esta sección se analizará el efecto de la resistencia interna sobre el voltaje de salida, de forma que sea posible explicar cualquier cambio inesperado en las características terminales.

En todos los análisis de circuitos realizados hasta ahora, se utilizó la fuente de voltaje ideal (sin resistencia interna) [vea la figura 5.52(a)]. La fuente de voltaje ideal no cuenta con resistencia interna y presenta un voltaje de salida de *E* volts sin carga o con carga completa. En el caso práctico [Figura 5.52(b)],

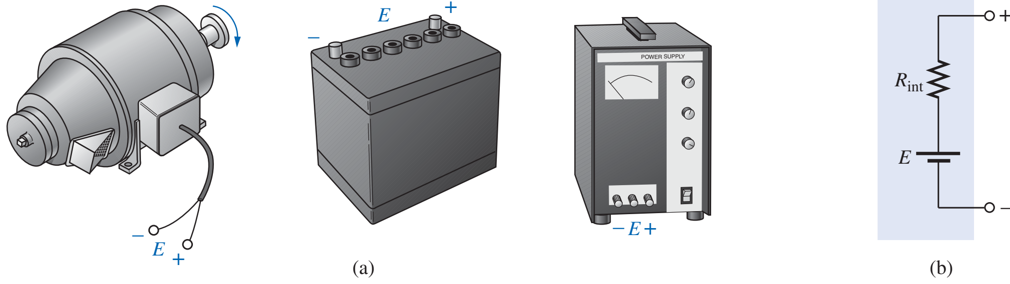


FIGURA 5.51
(a) Fuentes de voltaje de cd; (b) circuito equivalente.

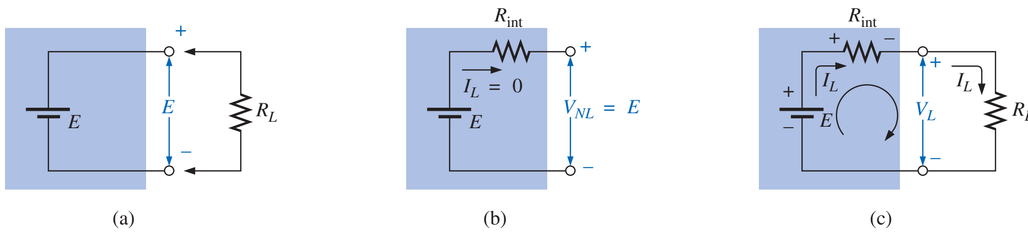


FIGURA 5.52
Fuente de voltaje: (a) ideal, $R_{int} = 0\ \Omega$; (b) determinación de V_{NL}; determinación de R_{int}.

donde consideramos los efectos de la resistencia interna, el voltaje de salida será de E volts únicamente cuando se presenten las condiciones sin carga ($I_L = 0$) Cuando se conecta una carga [Figura 5.52(c)], el voltaje de salida de la fuente de voltaje disminuirá debido a la caída de voltaje en la resistencia interna.

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo indicado por la figura 5.52(c) obtenemos:

$$E - I_L R_{int} - V_L = 0$$

o, dado que

$$E = V_{NL}$$

tenemos

$$V_{NL} - I_L R_{int} - V_L = 0$$

y

$$V_L = V_{NL} - I_L R_{int} \quad \textbf{(5.13)}$$

Si el valor de R_{int} no se encuentra disponible, puede obtenerse al resolver primero R_{int} en la ecuación recién deducida de V_L; es decir,

$$R_{int} = \frac{V_{NL} - V_L}{I_L} = \frac{V_{NL}}{I_L} - \frac{I_L R_L}{I_L}$$

y

$$R_{int} = \frac{V_{NL}}{I_L} - R_L \quad \textbf{(5.14)}$$

En la figura 5.53 se presenta una gráfica del voltaje de salida en función de la corriente para el generador de cd que tiene el circuito equivalente de la figura 5.51(b). Observe que todo incremento en la demanda de carga, comenzando en cualquier nivel, ocasiona una caída adicional en el voltaje terminal gracias a la creciente pérdida de potencial a través de la resistencia interna. Al nivel de

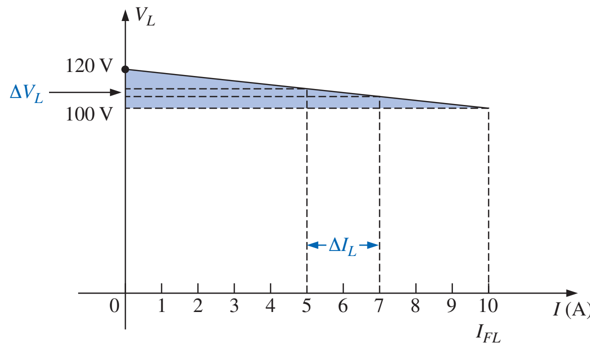


FIGURA 5.53
V_L en comparación con I_L para un generador cd con $R_{int} = 2\ \Omega$.

corriente máxima, señalado por I_{FL}, el voltaje en la resistencia interna será $V_{\text{int}} = I_{FL}R_{\text{int}} = (10\text{ A})(2\ \Omega) = 20\text{ V}$, y el voltaje terminal habrá caído a 100 V —lo cual es una diferencia importante cuando idealmente se esperaría que un generador de 120 V proporcione los 120 V si nos mantenemos por debajo de la corriente señalada de carga completa. Eventualmente, si se permitiera que la corriente de carga se incrementara sin límite, el voltaje en la resistencia interna igualaría el voltaje de alimentación, y el voltaje terminal sería cero. Mientras mayor sea la resistencia interna, más pronunciada será la pendiente de las características de la figura 5.53. De hecho, para cualquier intervalo seleccionado de voltaje o corriente, la magnitud de la resistencia interna estará dada por:

$$R_{\text{int}} = \frac{\Delta V_L}{\Delta I_L} \tag{5.15}$$

Para el intervalo seleccionado de 5–7 A ($\Delta I_L = 2$ A) sobre la figura 5.53, ΔV_L será 4 V, y $R_{\text{int}} = \Delta V_L/\Delta I_L = 4\text{ V}/2\text{ A} = 2\ \Omega$.

Una consecuencia directa de la pérdida de voltaje de salida es una pérdida en la potencia entregada a la carga. Al multiplicar ambos lados de la ecuación (5.13) por la corriente I_L dentro del circuito se obtiene:

$$\underset{\substack{\text{Potencia}\\ \text{a la carga}}}{I_LV_L} = \underset{\substack{\text{Salida de potencia}\\ \text{por la batería}}}{I_LV_{NL}} - \underset{\substack{\text{Pérdida de potencia}\\ \text{en forma de calor}}}{I_L^2R_{\text{int}}} \tag{5.16}$$

EJEMPLO 5.21 Antes de aplicar una carga, el voltaje terminal de la fuente de alimentación de la figura 5.54(a) se establece en 40 V. Cuando se conecta una carga de 500 Ω como se muestra en la figura 5.54(b), el voltaje terminal cae a 38.5 V. ¿Qué sucedió con el resto del voltaje sin carga, y cuál es la resistencia interna de la fuente?

Solución: La diferencia de 40 V − 38.5 V = 1.5 V se presentará ahora en la resistencia interna de la fuente. La corriente de carga será 38.5 V/0.5 kΩ = 77 mA. Al aplicar la ecuación (5.14),

$$R_{\text{int}} = \frac{V_{NL}}{I_L} - R_L = \frac{40\text{ V}}{77\text{ mA}} - 0.5\text{ k}\Omega$$
$$= 519.48\ \Omega - 500\ \Omega = \mathbf{19.48\ \Omega}$$

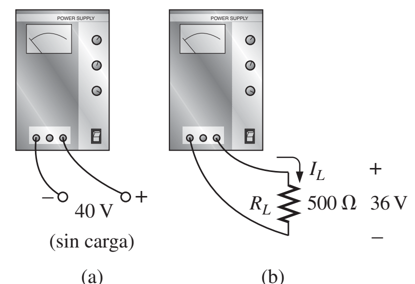


FIGURA 5.54
Ejemplo 5.21.

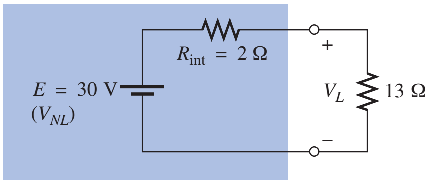


FIGURA 5.55
Ejemplo 5.22.

EJEMPLO 5.22 La batería de la figura 5.55 cuenta con una resistencia interna de 2 Ω. Encuentre el voltaje V_L y la potencia perdida por la terminal interna si la carga aplicada es un resistor de 13 Ω.

Solución:

$$I_L = \frac{30\text{ V}}{2\ \Omega + 13\ \Omega} = \frac{30\text{ V}}{15\ \Omega} = 2\text{ A}$$

$$V_L = V_{NL} - I_L R_{int} = 30\text{ V} - (2\text{ A})(2\ \Omega) = \mathbf{26\ V}$$

$$P_{perdida} = I_L^2 R_{int} = (2\text{ A})^2(2\ \Omega) = (4)(2) = \mathbf{8\ W}$$

En la sección 5.10 se describirán los procedimientos para medir R_{int}.

5.9 REGULACIÓN DE VOLTAJE

Para cualquier fuente, las condiciones ideales estipulan que para el rango de demanda de carga (I_L), el voltaje terminal permanece fijo en magnitud. En otras palabras, si una fuente se fija en 12 V, es deseable que mantenga este voltaje terminal, aunque la demanda de corriente a la fuente pueda variar. Una medida de qué tan cercana se encuentra una fuente a las condiciones ideales la ofrece la característica de regulación de voltaje. Por definición, la **regulación de voltaje** (*RV*) de una fuente entre los límites de las condiciones con carga completa (FL, del inglés *Full Load*) y sin carga (NL, del inglés *No Load*) (Figura 5.56) estará dada por lo siguiente:

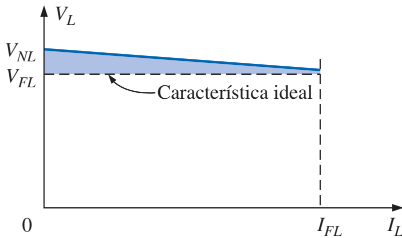


FIGURA 5.56
Definición de la regulación de voltaje.

$$\%\text{ de regulación de voltaje } (RV) = \frac{V_{NL} - V_{FL}}{V_{FL}} \times 100\% \qquad \textbf{(5.17)}$$

Para condiciones ideales, $V_{FL} = V_{NL}$ y $RV\% = 0$. Por tanto, *mientras más pequeña sea la regulación de voltaje, menor será la variación en el voltaje terminal ante cambios en la carga.*

Es posible mostrar con una pequeña deducción que la regulación de voltaje también está dada por:

$$RV\,\% = \frac{R_{int}}{R_L} \times 100\% \qquad \textbf{(5.18)}$$

En otras palabras, mientras menor sea la resistencia interna para una misma carga, menor será la regulación de voltaje y más ideal será la salida.

EJEMPLO 5.23 Calcule la regulación de voltaje de una fuente que posee las características de la figura 5.53.

Solución:

$$RV\,\% = \frac{V_{NL} - V_{FL}}{V_{FL}} \times 100\% = \frac{120\text{ V} - 100\text{ V}}{100\text{ V}} \times 100\%$$

$$= \frac{20}{100} \times 100\% = \mathbf{20\%}$$

EJEMPLO 5.24 Determine la regulación de voltaje de la fuente mostrada en la figura 5.54.

Solución:

$$VR\% = \frac{R_{\text{int}}}{R_L} \times 100\% = \frac{19.48\ \Omega}{500\ \Omega} \times 100\% \cong \mathbf{3.9\%}$$

5.10 TÉCNICAS DE MEDICIÓN

En el capítulo 2 se observó que los amperímetros se insertan dentro de la rama en que se medirá la corriente. Ahora se advierte que tal condición especifica que:

los amperímetros se colocan en serie con la rama en la que se medirá la corriente.

como se muestra en la figura 5.57.

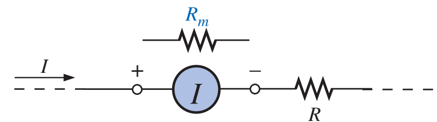


FIGURA 5.57
Conexión en serie de un amperímetro.

Si se busca que el amperímetro tenga un mínimo impacto sobre el comportamiento de la red, su resistencia deberá ser muy pequeña (idealmente de cero ohms) en comparación con los otros elementos en serie de la rama, tal como el resistor R de la figura 5.57. Si la resistencia del medidor se aproxima o excede al 10% de R, naturalmente que tendrá un impacto significativo sobre el nivel de corriente que está midiendo. También es importante observar que las resistencias de las distintas escalas de corriente de un mismo medidor no siempre son iguales. De hecho, la resistencia del amperímetro normalmente aumenta con la disminución de los niveles de corriente. Sin embargo, para la mayor parte de las situaciones, puede suponerse simplemente que la resistencia interna del amperímetro es tan pequeña, en comparación con los otros elementos del circuito, que se puede ignorar.

Para una lectura de escala ascendente (medidor analógico) o positiva (medidor digital), el amperímetro debe conectarse con la corriente ingresando por la terminal positiva del medidor y saliendo por la terminal negativa, como se muestra en la figura 5.58. Debido a que la mayoría de los medidores utilizan una punta roja para la terminal positiva y una punta negra para la terminal negativa, usted solamente debe asegurarse de que la corriente ingresa por la punta roja y sale por la punta negra.

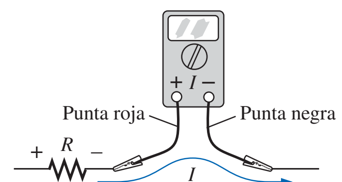


FIGURA 5.58
Conexión de un amperímetro para obtener una lectura de escala ascendente (positiva).

Los voltímetros siempre se conectan a través del elemento para el cual se determinará el voltaje.

Se obtiene una lectura positiva o de escala ascendente en un voltímetro al asegurarse que la terminal positiva (punta roja) se encuentra conectada al punto con el potencial más alto y la terminal negativa (punta negra) conectada al potencial más bajo, como se muestra en la figura 5.59.

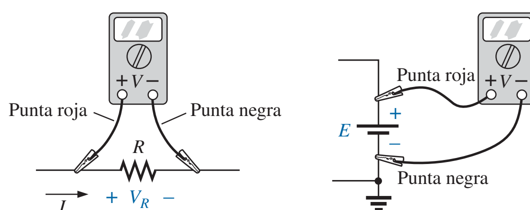


FIGURA 5.59
Conexión de un voltímetro para obtener una lectura de escala ascendente (positiva).

Para una notación de doble subíndice, siempre conecte la punta roja al primer subíndice y la negra al segundo; es decir, para medir el voltaje V_{ab} en la figura 5.60, conecte la punta roja al punto a y la punta negra al punto b. Para

la notación de subíndice sencillo, conecte la punta roja al punto de interés y la punta negra a tierra, como se muestra en la figura 5.60 para V_a y V_b.

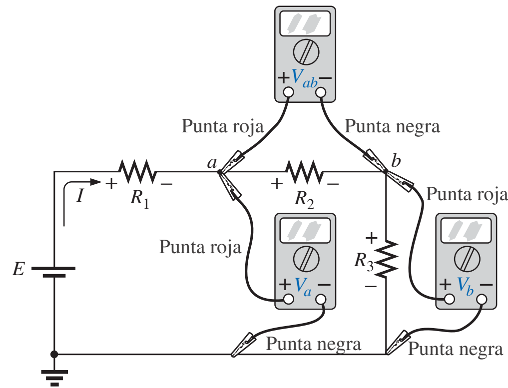


FIGURA 5.60
Medición de voltajes con notación de subíndices doble y sencillo.

La resistencia interna de una fuente no puede medirse con un ohmímetro debido al voltaje presente. Sin embargo, el voltaje sin carga puede medirse mediante la simple conexión del voltímetro como se muestra en la figura 5.61(a). No se preocupe por la trayectoria aparente de corriente que el medidor parece proporcionar al cerrar el circuito. La resistencia interna del medidor, por lo general, es lo suficientemente grande como para asegurar que la corriente resultante sea tan pequeña que pueda ignorarse. (Los efectos de la carga del voltímetro se discutirán con todo detalle en la sección 6.9.) Un amperímetro podría entonces colocarse directamente a través de la fuente, como se muestra en la figura 5.61(b), para medir la corriente de circuito cerrado (corto circuito) I_{SC} y R_{int} según lo determina la ley de Ohm: $R_{int} = E_{NL}/I_{SC}$. Sin embargo, dado que la resistencia interna de la fuente puede ser muy baja, realizar la medición podría dar por resultado niveles de corriente muy altos que dañarían el aparato, la fuente y, posiblemente, causarían peligrosos efectos secundarios. Por tanto, *no* se sugiere la configuración de la figura 5.61(b). Una mejor forma sería aplicar una carga resistiva que ocasione una corriente de fuente de cerca de la mitad del valor nominal máximo y medir el voltaje terminal. Aplicando entonces la ecuación (5.14).

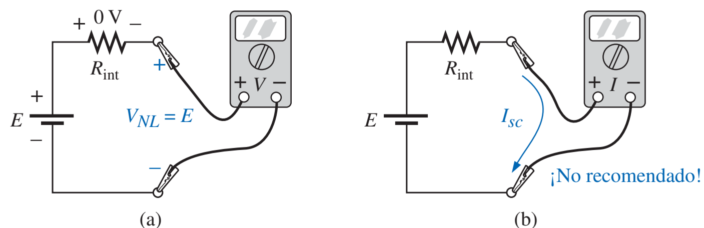


FIGURA 5.61
(a) Medición del voltaje E sin carga; (b) medición de la corriente de corto circuito.

5.11 APLICACIONES

Luces navideñas

En años recientes las pequeñas luces navideñas intermitentes con hasta 50 o 100 focos en una serie se han vuelto muy populares [vea la figura 5.62(a)]. Aunque estas luces navideñas pueden conectarse en serie o en paralelo (como se describirá en el siguiente capítulo), las luces intermitentes más pequeñas se conectan, por lo general, en serie. Es relativamente fácil determinar si las luces están conectadas en serie. Si entra y sale un solo cable de la base de cada foco, las luces se encuentran en serie; si dos cables entran y salen, probablemente se encuentren en paralelo. Por lo general, cuando los focos se conectan en serie, si uno de éstos se funde (el filamento se rompe y el circuito se abre), todos los demás se apagarán dado que la trayectoria de corriente ha sido interrumpida. Sin embargo, los focos de la figura 5.62(a) son diseñados especialmente, como se muestra en la figura 5.62(b), para permitir que la corriente continúe fluyendo a los otros focos cuando los filamentos se funden. En la base de cada foco existe un fusible de cinta enrollado alrededor de los dos postes que sostienen el filamento. El fusible de cinta de un material conductor suave parece estar tocando los dos postes verticales, pero, de hecho, un recubrimiento sobre los postes o sobre el fusible evita la conducción de uno a otro bajo condiciones normales de operación. Si un filamento se rompe y crea un circuito abierto entre los postes, la corriente a través de éste y los demás focos se vería interrumpida si no existiera el fusible de cinta. En el momento en que el foco se funde, la corriente que cruza el circuito es cero, y los 120 V de salida se presentarán en el foco descompuesto. Este voltaje alto de un poste a otro en un solo foco posee una diferencia de potencial suficiente para establecer una corriente a través del recubrimiento aislante y soldar el fusible de unión a los dos postes. Con esto el circuito estará nuevamente completo, y todos los focos se encenderán excepto el que activó el fusible de cinta. Sin embargo, tenga presente que cada vez que se funde un foco, existirá un mayor voltaje en los otros focos del circuito, haciendo que brillen más fuerte. Eventualmente, si demasiados focos se funden, el voltaje alcanzará un punto en que los otros focos se fundirán en rápida sucesión. El resultado es que se deben reemplazar los focos fundidos a la primera oportunidad.

Los focos mostrados en la figura 5.62(a) están valorados en 2.5 V a 0.2A o 200 mA. Dado que existen 50 focos en serie, el voltaje total que cruza por ellos es de 50 × 2.5 V o 125 V, el cual concuerda con el voltaje normal

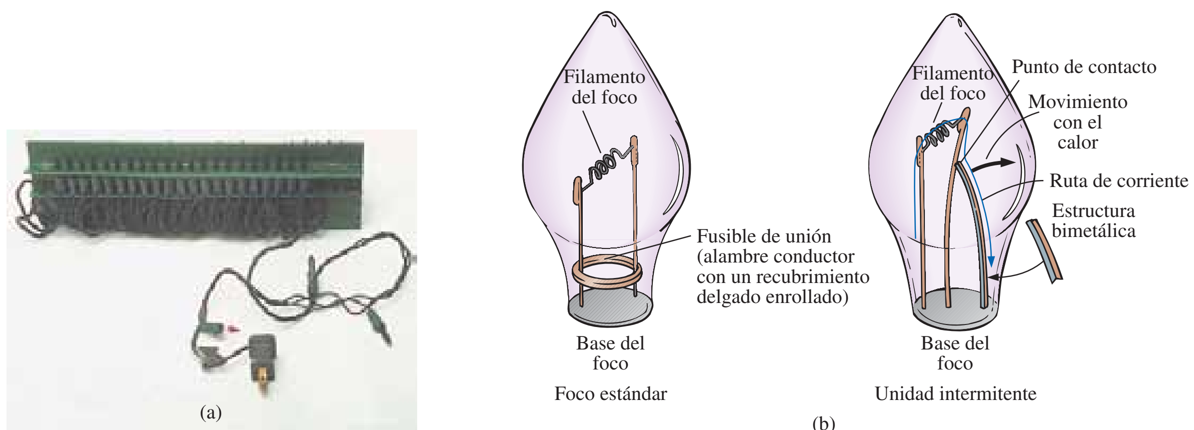
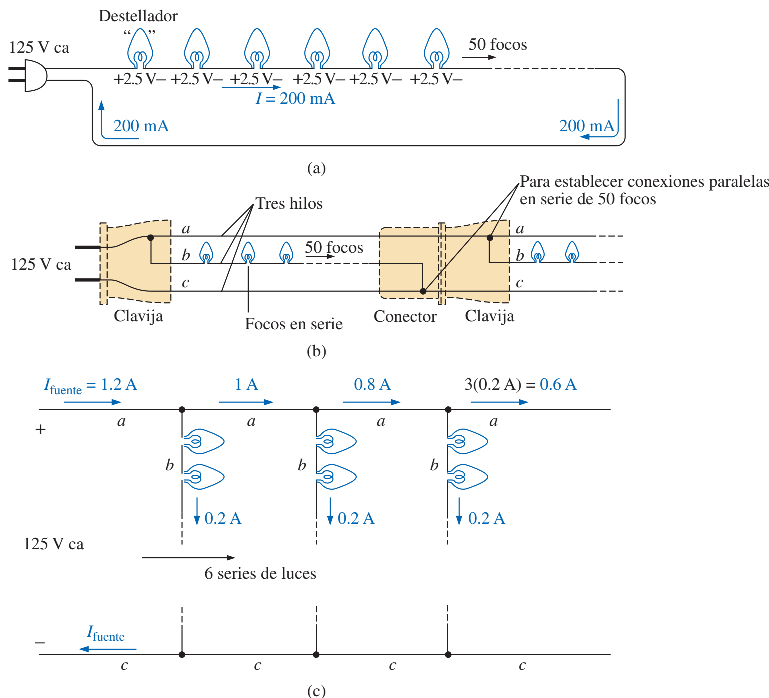


FIGURA 5.62
Luces navideñas: (a) serie de 50 unidades; (b) estructura de un foco.

disponible en el hogar. Dado que los focos se encuentran en serie, la corriente a través de cada foco será de 200 mA. El nivel de potencia de cada foco será, por tanto, $P = VI = (2.5 \text{ V})(0.2 \text{ A}) = 0.5 \text{ W}$, con la demanda de potencia total de $50 \times 0.5 \text{ W} = 25 \text{ W}$.

En la figura 5.63(a) se proporciona una representación esquemática de la serie de luces mostrada en la figura 5.62(a). Observe que sólo se requiere una unidad intermitente. Dado que los focos se encuentran en serie, cuando la unidad intermitente interrumpa el flujo de corriente, apagará todos los focos. Como se muestra en la figura 5.62(b), la unidad intermitente incorpora un interruptor térmico bimetálico que se abrirá cuando se caliente a un nivel predeterminado por la corriente. Tan pronto como se abra, comenzará a enfriarse y se cerrará nuevamente de forma que la corriente pueda regresar a los focos. Luego, se calentará de nuevo, se abrirá y se repetirá todo el proceso. El resultado es una acción de encendido y apagado que crea el patrón destellante con el que estamos tan familiarizados. Naturalmente, en un clima muy frío (por ejemplo, en exteriores nevados y con hielo), la serie tomará más tiempo para calentarse, así que el patrón destellante se verá reducido al principio; pero a medida que los focos se calienten, la frecuencia se incrementará.

El fabricante especifica que no deben conectarse juntas más de 6 series de luces. La primera pregunta que surge es, ¿cómo pueden conectarse los juegos, de extremo a extremo, sin reducir el voltaje en cada foco y sin que las luces se vuelvan más débiles? Al observar detenidamente el cableado se verá que, como los focos están conectados en serie, existe un cable para cada foco con cables adicionales de conector a conector. ¿Por qué se necesitan dos cables adicionales si los focos se conectan en serie? La respuesta radica en el hecho de que cuando cada serie de luces sea conectada junto con otra, realmente se encontrarán en paralelo (lo cual se analizará en el siguiente capítulo) mediante el arreglo único de conexión que se muestra en la figura 5.63(b) y trazado de



(d)

FIGURA 5.63

(a) Diagrama de conexión para una serie de luces sencilla; (b) arreglo de conexión especial; (c) nuevo trazado del diagrama esquemático; (d) clavija especial y unidad intermitente.

nuevo en la figura 5.63(c) para poder advertir claramente el arreglo en paralelo. Observe que la línea superior es la línea principal de todas las series de luces conectadas, y la línea inferior es la línea de retorno, neutral, o tierra para todas las series. Dentro de la clavija de la figura 5.63(d) la línea principal y la de retorno se encuentran conectadas a cada juego, teniendo las conexiones de las terminales metálicas de la clavija como se muestran en la figura 5.63(b). En el siguiente capítulo veremos que la corriente extraída del enchufe de la pared para cargas paralelas es la suma de la corriente a cada rama. El resultado, como se muestra en la figura 5.63(c), es que la corriente extraída de la fuente será de 6×200 mA $= 1.2$ A, y la potencia total para las seis series de luces será el producto del voltaje aplicado y la corriente de fuente o (120 V)(1.2 A) $=$ 144 W con 144 W/6 $=$ 24 W por serie de luces.

Horno de microondas

Los circuitos en serie pueden ser muy efectivos en el diseño de equipo de seguridad. A pesar de que se reconoce la utilidad del horno de microondas, éste puede resultar muy peligroso si la puerta no se encuentra cerrada o sellada adecuadamente. No basta con verificar que esté cerrado en un solo punto del contorno de la puerta ya que ésta se puede doblar o distorsionar por el uso continuo, y podría existir alguna fuga en algún lugar alejado del punto de verificación. En la figura 5.64 se muestra un arreglo común de seguridad. Observe que los interruptores magnéticos se encuentran localizados alrededor de toda la puerta, teniendo el imán en la propia puerta y el interruptor magnético de ésta en el marco principal. Los interruptores magnéticos son simplemente interruptores donde el imán atrae una barra conductora magnética situada entre dos contactos para completar el circuito —lo que se muestra de alguna forma por medio del símbolo del dispositivo presentado en el diagrama de circuito de la figura 5.64. Dado que los interruptores magnéticos se encuentran en serie, deben cerrarse todos para completar el circuito y encender la unidad de energía. Si la puerta se encuentra tan fuera de forma como para evitar que un solo imán se acerque lo suficiente al mecanismo de interrupción, el circuito no

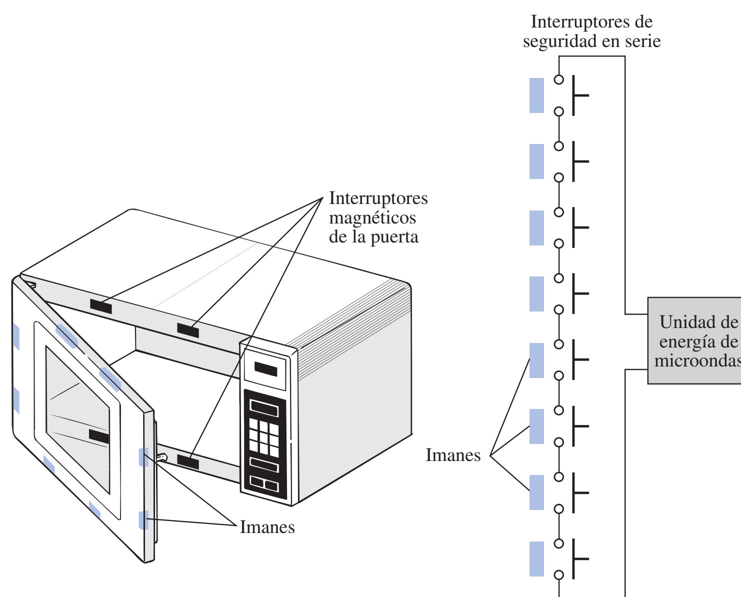


FIGURA 5.64
Interruptores de seguridad en serie en un horno de microondas.

estará completo y no podrá encenderse el aparato. Dentro de la unidad de control de la fuente de alimentación, el circuito en serie completa un circuito para lograr la operación o se establece una corriente de sensor que controla y monitorea la operación del sistema.

Circuito de alarma en serie

El circuito de la figura 5.65 es un circuito simple de alarma. Observe que cada elemento del diseño se encuentra en una configuración en serie. La fuente de alimentación es una fuente de 5 V que puede proporcionarse mediante un diseño similar al de la figura 2.31, una batería de cd, o una combinación de una fuente de cd y ca que asegure que la batería siempre se encontrará completamente cargada. Si todos los sensores se encuentran cerrados se obtendrá una corriente de 5 mA debido a la carga terminal del relevador de cerca de 1 kΩ. La corriente activará el relevador y mantendrá una posición de apagado para la alarma. Sin embargo, si alguno de los sensores se abre, la corriente será interrumpida, el relevador se desactivará y el circuito de alarma se activará. Con relativamente poco cable y unos cuantos sensores, el sistema deberá trabajar bien dado que la caída de voltaje en cada sensor será mínima. Sin embargo, debido a que el cable de alarma por lo general es relativamente delgado, ocasionando un nivel medible de resistencia, si el cable que va a los sensores es demasiado largo, se observará una caída de voltaje en la línea, reduciendo con esto el voltaje en el relevador hasta un punto en que la alarma pudiera no funcionar adecuadamente. De esta forma, la longitud del cable es un factor que debe considerarse cuando se emplea una configuración en serie. Un cuidado adecuado de la longitud del cable deberá eliminar cualquier preocupación concerniente a esta operación. En el capítulo 8 se presentará un mejor diseño de este circuito.

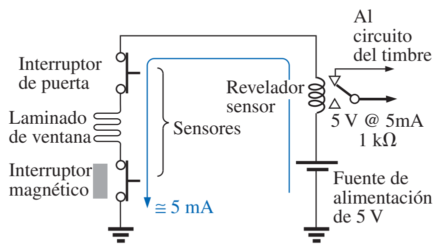


FIGURA 5.65
Circuito de alarma en serie.

5.12 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

En la sección 4.9 se presentó el procedimiento básico para configurar la carpeta de PSpice y ejecutar el programa. Debido al detalle ofrecido en esa sección, el lector deberá revisarlo antes de proceder con este ejemplo. Ya que éste es apenas el segundo ejemplo utilizando PSpice, se proporcionará cierto detalle, pero no al mismo nivel que el visto en la sección 4.9.

El circuito que se analizará aparece en la figura 5.66. Dado que la carpeta de **PSpice** se estableció en la sección 4.9, no hay necesidad de repetir aquí el proceso puesto que se encuentra disponible de manera inmediata. Al hacer doble clic sobre el icono de **Orcad Lite Edition** se generará la pantalla de captura **Orcad Capture-Lite Edition**. Luego se inicia un nuevo proyecto al seleccionar la opción **Create Document** (Crear documento) en la parte superior izquierda de la pantalla (que parece una página con una estrella en la esquina superior izquierda). Con esto se obtiene el cuadro de diálogo **New Project** (Proyecto nuevo) en el que **SeriesDC** se encuentra insertado como el nombre, **Name**. Ya se encuentra seleccionada la opción **Analog or Mixed A/D** y **C:\PSpice** aparece en **Location** —¡sólo deberá ingresarse el nombre, **Name**!. Haga clic sobre **OK** y aparecerá el cuadro de diálogo de **Create PSpice Project**. Seleccione **Create a blank project** (Crear proyecto nuevo), haga clic en **OK** y aparecerá la ventana de trabajo. Al mantener seleccionada la esquina izquierda de la ventana de **SCHEMATIC1:PAGE1** (esquema, página 1) el lector podrá moverla hacia la derecha de forma que pueda ver las dos ventanas. Al hacer clic en el signo + dentro de la ventana de **Project Manager** (Administrador del proyecto) podrá establecerse la secuencia hasta **PAGE1** (página 1). Si prefiere cambiar el nom-

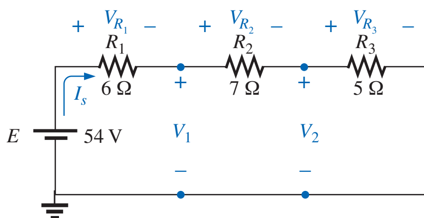


FIGURA 5.66
Red de cd en serie que se analizará utilizando PSpice.

bre de **SCHEMATIC1** selecciónelo y haga clic con el botón derecho del mouse. Aparecerá un listado con la opción **Rename**; al seleccionar ésta se obtendrá el cuadro de diálogo **Rename Schematic** en el cual se puede ingresar el nombre **SeriesDC**. En la figura 5.67 se dejó como **SCHEMATIC1**.

El siguiente paso es muy importante ahora. Si la barra de herramientas en el extremo derecho no aparece, asegúrese de hacer doble clic sobre **PAGE1** en la ventana **Project Manager**, o seleccione la **ventana del esquema**. Cuando el encabezado de la **ventana del esquema** sea azul oscuro, aparecerá la barra de herramientas. Para comenzar a construir el circuito, seleccione la tecla **Place a part** (Colocar un elemento) (la segunda tecla hacia abajo) para obtener el cuadro de diálogo **Place Part**. Observe que ahora la biblioteca **SOURCE** se encuentra ya en su lugar en **Library** (la lista de bibliotecas) como consecuencia del trabajo realizado en el capítulo 4, por lo que no necesita reinstalarse. Al seleccionar **SOURCE** se obtendrá una lista de fuentes debajo de **Part List**, de donde podrá seleccionarse **VDC**. Al hacer clic sobre **OK**, el cursor podrá colocarla en su lugar con un solo clic izquierdo. Haga clic con el botón derecho y seleccione **End Mode** para finalizar el proceso, dado que la red sólo cuenta con una fuente. Con un clic izquierdo adicional la fuente se encontrará en su lugar. Ahora, se selecciona nuevamente la tecla **Place a part**, seguida de la biblioteca **ANALOG** para localizar el transistor **R**. Una vez que éste ha sido seleccionado, al presionar en **OK** se colocará junto al cursor sobre la pantalla. En esta ocasión, como es necesario colocar tres resistores, no hay que desplazarse hacia **End Mode** entre cada colocación de éstos. Simplemente se hace clic en un lugar, luego en el siguiente y por último en un tercer sitio. Entonces se hace clic con el botón derecho para terminar el proceso con **End Mode**. Por último, debe añadirse **GND** (tierra) por medio de la tecla apropiada y seleccionando **0/SOURCE** en el cuadro de diálogo **Place Ground** (colocar tierra). Se hace clic sobre **OK** y se coloca la tierra como se muestra en la figura 5.67.

Ahora los elementos deberán conectarse entre sí utilizando la tecla **Place a wire** (Colocar un cable) para conseguir el cursor en forma de cruz sobre la pantalla. Se comienza en la parte superior de la fuente de voltaje con un clic izquierdo, y se traza el cable, haciendo clic izquierdo en cada giro de 90º. Cuando ya esté conectado un cable de un elemento a otro, se continúa con la siguiente conexión que deba hacerse, no es necesario ir a **End Mode** entre cada conexión. Ahora se

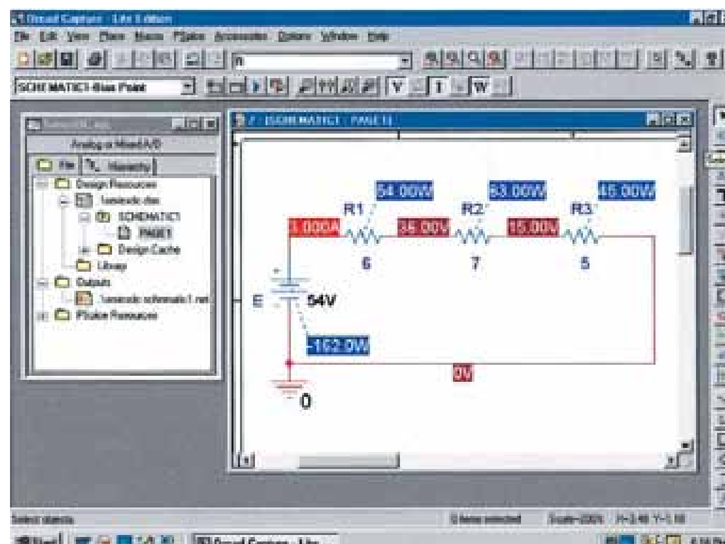


FIGURA 5.67
Aplicación de PSpice a un circuito de cd en serie.

tienen que asignar los valores y las etiquetas mediante un doble clic sobre cada parámetro para obtener el cuadro de diálogo **Display Properties** (Propiedades visuales). Dado que este cuadro de diálogo aparece con la cantidad de interés en un fondo azul, simplemente se teclea el nivel o valor deseado, seguido por **OK**. Ahora la red se encuentra completa y lista para analizarse.

Antes de la simulación, se seleccionan **V, I** y **W** en la barra de herramientas situada en la parte superior de la pantalla para asegurar que se desplieguen los voltajes, las corrientes y la potencia. Para comenzar la simulación, se selecciona la tecla **New Simulation Profile** (la cual aparece como una hoja de datos en la segunda barra de herramientas hacia abajo con una estrella en la esquina superior izquierda) y se obtiene el cuadro de diálogo **New Simulation**. Introduzca **Bias Point** para una solución de cd bajo **Name**, y presione la tecla de creación **Create**. Aparecerá el cuadro de diálogo **Simulation Settings-Bias Point**, en el cual se selecciona **Analysis**, y **Bias Point** se localiza debajo del encabezado de **Analysis type**. Se hace clic en **OK** y luego se selecciona la tecla **Run PSpice** (la flecha azul) para comenzar la simulación. Salga de la pantalla resultante, y se desplegará la de la figura 5.67.

La corriente claramente será de 3 A para el circuito con 15 V en R_3, y 36 V desde un punto entre R_1 y R_2 a tierra. El voltaje en R_2 será de $36\text{V} - 15\text{ V} = 21\text{ V}$, y el voltaje en R_1 será de $54\text{ V} - 36\text{ V} = 18\text{ V}$. También se presentará la potencia suministrada o disipada por cada elemento. No hay duda de que los resultados de la figura 5.67 incluyen además una agradable representación de los niveles de voltaje, corriente y potencia.

Electronics Workbench (EWB)

Debido a que éste es apenas el segundo circuito que se construye utilizando EWB, se presenta una lista detallada de pasos como forma de repaso. Sin embargo, en esencia, el circuito completo de la figura 5.68 puede "trazarse" utilizando simplemente la información para la construcción presentada en el capítulo 4.

Una vez que se ha seleccionado el icono **Multisim 2001**, aparecerá una ventana para el **Multisim Circuit 1** lista para aceptar los elementos del circuito. Se selecciona la tecla de fuentes **Sources** de la parte superior de la barra izquierda de herramientas, y se presentará una colección de fuentes **Sources** con 30 opciones. Se selecciona la opción superior para colocar la tierra **GROUND** en la pantalla de la figura 5.68, y la tercera opción para obtener una fuente de voltaje de cd **DC_VOLTAGE_SOURCE**. Los resistores se obtienen al seleccionar la segunda tecla hacia abajo de la barra de herramientas situada a la izquierda y denominada **Basic** (básica). El resultado de esto son 25 opciones de las que se selecciona **RESISTOR_VIRTUAL** (el resistor virtual). Debe regresarse a la tecla **RESISTOR_VIRTUAL** para colocar cada resistor sobre la pantalla. Sin embargo, cada nuevo resistor se encontrará numerado en secuencia, aunque a todos los resistores se les asignará el valor predeterminado de 1 kΩ. Recuerde del análisis del capítulo 4 que debe añadir los medidores antes de conectar los elementos entre sí, ya que los medidores ocupan espacio y deben orientarse de forma adecuada. La corriente estará determinada por el amperímetro **XMM1** y los voltajes por los voltímetros **XMM2** a **XMM5**. Tiene particular importancia observar que:

en EWB los medidores se conectan exactamente de la misma forma que se conectarían en un circuito activo en el laboratorio. Los amperímetros se colocan en serie con la rama en la que se determinará la corriente, y los voltímetros se conectan entre los dos puntos de interés (en los resistores). Además, para obtener lecturas positivas, los amperímetros se conectan de forma que la corriente convencional entre por la terminal positiva, y para el caso de los voltímetros, se conectan de forma que el punto con el potencial más alto esté conectado con la terminal positiva.

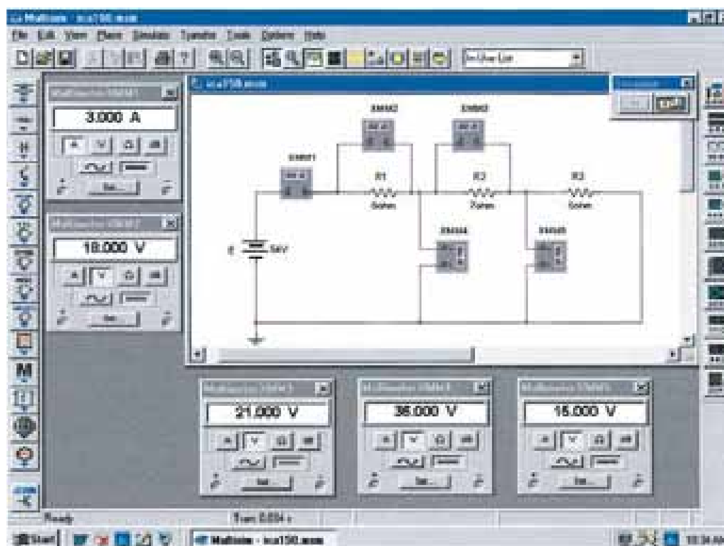


FIGURA 5.68
Aplicación de Electronics Workbench a un circuito de cd en serie.

La configuración de los medidores se realiza mediante un doble clic sobre el símbolo del medidor en el esquema. En cada caso, se debe seleccionar **V** o **I** aunque la línea horizontal para el análisis de cd sea la misma para cada uno. Nuevamente, es posible seleccionar la tecla **Set** para verificar lo que controla, sin embargo, los valores predeterminados de los niveles de resistencia de entrada del medidor serán adecuados para la mayor parte de los análisis descritos en este libro. Deje los medidores en la pantalla de forma que los distintos voltajes y el nivel de corriente se desplieguen después de la simulación.

Debe recordarse del capítulo 4 que es posible mover los elementos simplemente haciendo clic sobre cada símbolo esquemático y arrastrándolo hacia la ubicación deseada. Lo mismo rige para el caso de las etiquetas y los valores. Las etiquetas y los valores se establecen haciendo doble clic sobre la etiqueta o el valor e ingresando su elección. Al presionar **OK** aparecerán cambiados en el esquema. No es necesario seleccionar primero una tecla especial para conectar los elementos. Simplemente se acerca el cursor al punto inicial para generar el pequeño círculo y el cursor en forma de cruz. Se hace clic en el punto inicial y se sigue la ruta deseada hasta la siguiente trayectoria de conexión. Una vez en el lugar, nuevamente se da un clic y la línea aparecerá. Todas las líneas de conexión pueden realizar giros de 90º. Sin embargo, no es posible seguir una ruta diagonal de un punto a otro. Para eliminar cualquier elemento, etiqueta o línea, simplemente se hace clic sobre la cantidad para obtener el estatus activo de cuatro cuadros y se selecciona la tecla de borrado **Delete** o la que tiene forma de tijeras en la barra de menú superior.

Antes de la simulación, debe asegurarse que el interruptor de simulación **Simulate Switch** se encuentre visible seleccionando **View-Show Simulate Switch**. Luego se selecciona la opción **1** del interruptor para que se inicie el análisis. Los resultados que aparecen en la figura 5.68 verifican los obtenidos utilizando PSpice y la solución efectuada a mano.

C++

Ahora nos orientaremos hacia el lenguaje C++ y revisaremos un programa diseñado para efectuar el mismo análisis que se realizó utilizando PSpice y EWB.

Encabezado · Directrices del preprocesador · Definición de variables y tipos de datos · Establecimiento de los objetos y la R_T · Asignación de valores · Cálculo de la R_T · Despliegue de la R_T · Definición de E · $I = E/R_T$ · Despliegue de I · Cálculo del V_R · Despliegue del V_R · Cálculo de la P_R · Despliegue de la P_R · Cálculo de P_E · Despliegue de P_E · Cuerpo del programa

```
//Análisis de un circuito en serie con C++

# include <iostream.h>             //necesario para la entrada/salida

class resistor {                   //se define la clase resistor
public:                            //permite el acceso a variables dentro de la clase
        float value;               //resistencia en ohms
        float voltage;             //voltaje en el resistor
        float power;               //potencia utilizada por el resistor
} ;

class voltage_source {             //define la clase de fuente de voltaje
public:
        float voltage;             //voltaje de la fuente
        float current;             //corriente de la fuente
        float power;               //potencia suministrada por la fuente
} ;

main ( )                          //la ejecución comienza aquí
{
        resistor R1, R2, R3;      //se crean tres objetos resistor
        float Rtotal;             //variable de la resistencia total
        voltage_source V1;        //se crea el objeto fuente de voltaje

        R1.value = 6;             //se asignan valores de resistencia
        R1.value = 7;
        R1.value = 5;
        Rtotal = R1.value + R2.value + R3.value;  //cálculo de la resistencia total
        count << "La resistencia total es " << Rtotal << "Ohms.\n";

        V1.voltage = 54;                             //se asigna el voltaje de la fuente
        V1.current = V1.voltage / Rtotal;            //cálculo de la corriente del circuito
        count << "La corriente del circuito es " << V1.current << "Ampere.\n";

        R1.voltage = V1.current * R1.value;          //cálculo de los voltajes de resistor
        R2.voltage = V1.current * R2.value;
        R3.voltage = V1.current * R3.value;
        count << "El voltaje en R1 es " << R1. voltage << " Volts.\n";
        count << "El voltaje en R2 es " << R2. voltage << " Volts.\n";
        count << "El voltaje en R3 es " << R3. voltage << " Volts.\n";

        R1.power = V1.current * R1.voltage;          //cálculo de la potencia del resistor
        R2.power = V1.current * R2.voltage;
        R3.power = V1.current * R3.voltage;
        count << "La potencia en R1 es " << R1.power << " Watts.\n";
        count << "La potencia en R2 es " << R2.power << " Watts.\n";
        count << "La potencia en R3 es " << R3.power << " Watts.\n";

        V1. power = V1.voltage * V1.current;         //cálculo de la potencia total
        count << "La potencia total es " << V1.power << " Watts.\n";
}
```

FIGURA 5.69

C++ Programa en lenguaje diseñado para realizar un análisis completo de la red presentada en la figura 5.66.

Como se indicó en capítulos anteriores, no intente comprender todos los detalles acerca de la forma en que se escribió el programa y de las decisiones que se tomaron. El propósito aquí es simplemente exponer al lector las características generales de un programa utilizando este lenguaje de creciente popularidad.

En primer lugar observe todos los signos diagonales dobles // que aparecen en el programa de la figura 5.69. Éstos se utilizan para identificar los comentarios en el programa, los cuales no serán reconocidos por el compilador cuando

el programa se ejecute. También pueden utilizarse para recordar al programador acerca de objetivos específicos que deben cubrirse en un punto particular del programa o sobre la razón para entradas específicas. Sin embargo, en este ejemplo, el propósito principal es ilustrar al lector acerca del objetivo de una entrada u operación en particular.

La directriz *#include* indica al compilador que incluya el archivo que sigue dentro del programa C++ El nombre *<iostream.h>* es un archivo de encabezado que establece la ruta de entrada-salida entre el programa y el sistema operativo. El formato *class* define el tipo de datos (en este caso todos son de punto flotante, lo que significa que incluirán un punto decimal), y el estatuto *public* dentro de las llaves { } indica que las variables *value*, *voltage* y *power* serán accesibles para operaciones fuera de la estructura de datos.

Observe que la parte del programa que comprende *main* ( ) se extiende hasta el final del programa, según se identifica por las llaves { }. Dentro de esta región recibirán valores todos los parámetros de la red, se efectuarán todos los cálculos y, por último, serán presentados los resultados. A continuación, se establecen tres objetos del tipo resistor. *Rtotal* se define como una variable de tipo flotante, y se introduce un objeto de tipo fuente de voltaje. Luego se ingresan los valores de los resistores y se calcula la resistencia total. En seguida, mediante *cout*, se despliega la resistencia total utilizando la *Rtotal* que se acaba de calcular. El símbolo *n*” al final de la línea del *cout* llama un salto de línea con el propósito de preparar la siguiente sentencia *cout*.

En la siguiente línea, se introduce la magnitud de la fuente de voltaje, seguida por el cálculo de la corriente de la fuente, la cual se despliega en la siguiente línea. Luego se calcula el voltaje en cada resistor y se despliega en las líneas sucesivas. Por último, se calculan y despliegan las distintas potencias.

Al ejecutar este programa, la salida será como la mostrada en la figura 5.70, obteniendo los mismos resultados logrados con PSpice y EWB. Como se advirtió, el lector no debe confundirse con los detalles o con la razón de que ciertas líneas se muestren de determinada manera. Desde luego, mediante experiencia y preparación, eventualmente todo esto resultará obvio. Sin embargo, observe que las primeras líneas establecen el análisis a desarrollarse indicando a la computadora el tipo de operaciones que deberá manejar y el formato de los datos que se ingresarán, así como el formato de los datos de salida esperados. Luego, existe una parte principal del programa donde se realizan todas las entradas, cálculos y presentaciones de salida. Cuando este programa se ejecute, su flujo irá de arriba hacia abajo; es decir, un paso seguirá a otro sin regresar a ciertos puntos (una opción que se describirá en un programa posterior). No fue necesario numerar las líneas o incluir instrucciones detalladas. Si se eliminan todos los comentarios, el programa real será muy compacto y claro, con la mayor parte de su cuerpo representada por las sentencias *cout*.

```
La resistencia total es de 18 Ohms.
La corriente del circuito es de 3 Ampere.
El voltaje en R1 es de 18 Volts.
El voltaje en R2 es de 21 Volts.
El voltaje en R3 es de 15 Volts.
La potencia en R1 es de 54 Watts.
La potencia en R2 es de 63 Watts.
La potencia en R3 es de 45 Watts.
La potencia total es de 162 Watts.
```

FIGURA 5.70
Resultados de salida del programa en C++ presentado en la figura 5.59.

PROBLEMAS

SECCIÓN 5.2 Circuitos en serie

1. Calcule la resistencia total y la corriente I para cada circuito de la figura 5.71.

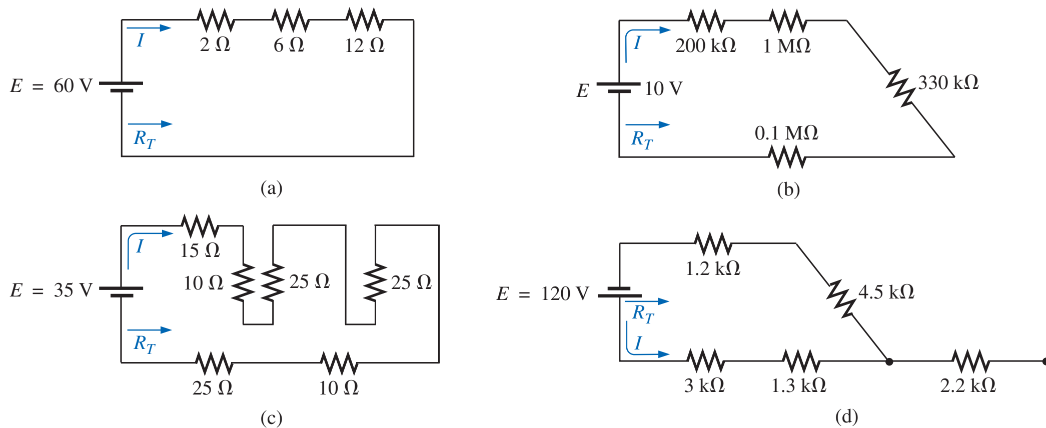


FIGURA 5.71
Problemas 1 y 36.

2. Para los circuitos de la figura 5.72, se especifica la resistencia total. Encuentre las resistencias desconocidas y la corriente I para cada circuito.

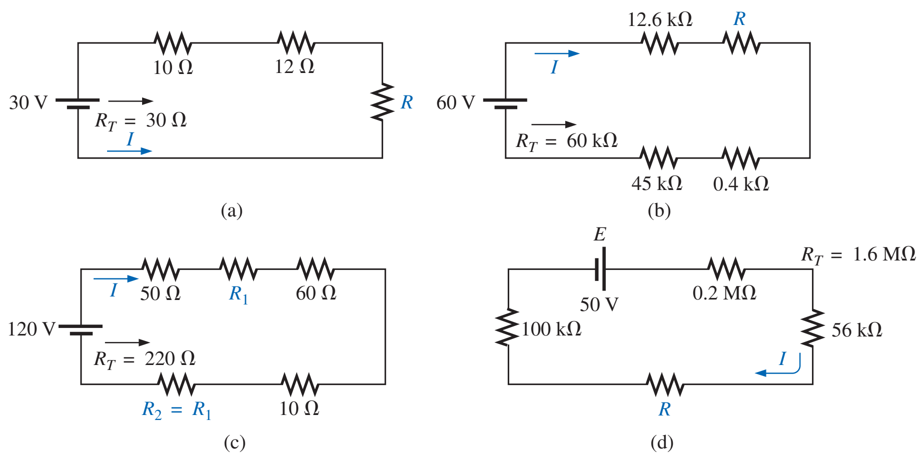


FIGURA 5.72
Problema 2.

3. Encuentre el voltaje E necesario para desarrollar la corriente especificada en cada red de la figura 5.73.

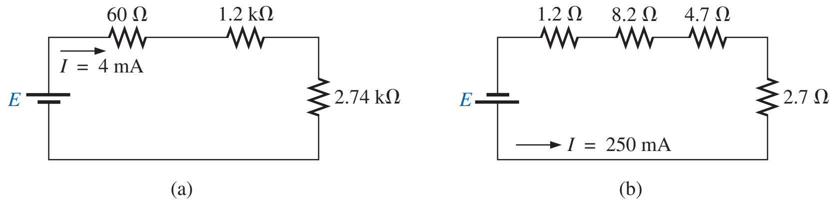


FIGURA 5.73
Problema 3.

***4.** Para cada red de la figura 5.74, determine la corriente I, la fuente de voltaje E, la resistencia desconocida y el voltaje en cada elemento.

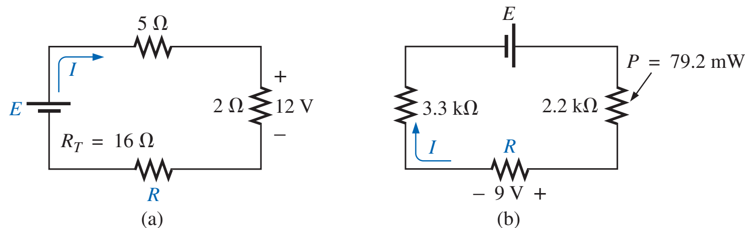


FIGURA 5.74
Problema 4.

SECCIÓN 5.3 Fuentes de voltaje en serie

5. Determine la corriente I y su dirección para cada red de la figura 5.75. Antes de resolver para I, vuelva a trazar cada red con una sola fuente de voltaje.

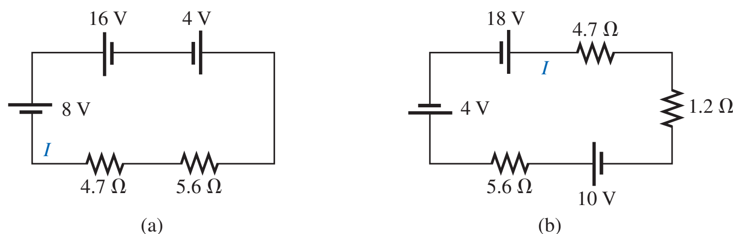


FIGURA 5.75
Problema 5.

*6. Encuentre la fuente de voltaje desconocida y el resistor para las redes de la figura 5.76. También indique la dirección de la corriente resultante.

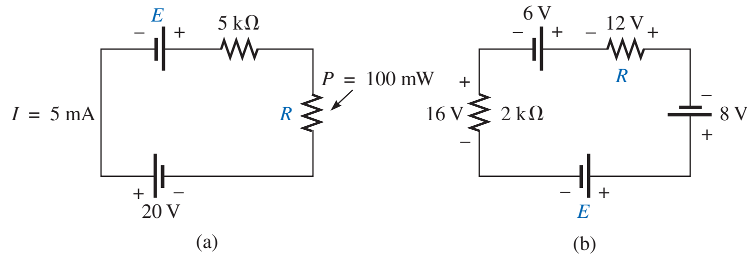


FIGURA 5.76
Problema 6.

SECCIÓN 5.4 Ley de voltaje de Kirchhoff

7. Encuentre V_{ab} con polaridad para los circuitos de la figura 5.77. Cada cuadro puede contener una carga o una fuente de voltaje, o una combinación de ambas.

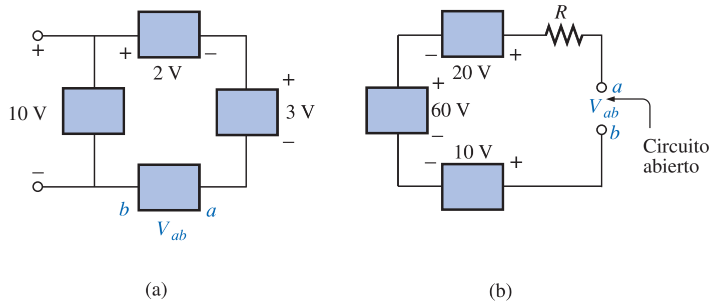


FIGURA 5.77
Problema 7.

8. A pesar de que las redes de la figura 5.78 no son circuitos simples en serie, determine los voltajes desconocidos utilizando la ley de voltaje de Kirchhoff.

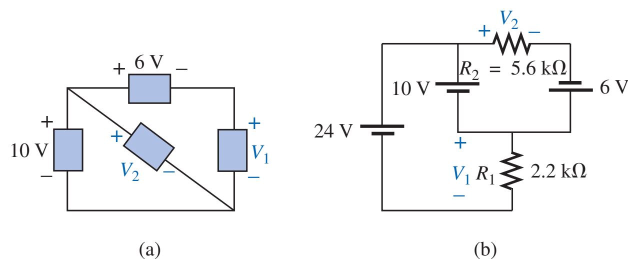


FIGURA 5.78
Problema 8.

9. Determine la corriente I y el voltaje V_1 para la red de la figura 5.79.

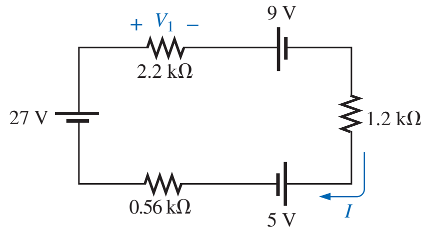


FIGURA 5.79
Problema 9.

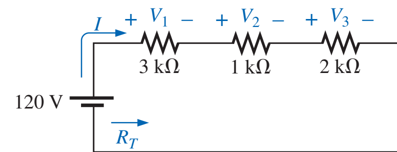


FIGURA 5.80
Problema 10.

10. Para el circuito de la figura 5.80:
- **a.** Calcule la resistencia total, la corriente y las caídas de voltaje desconocidas.
- **b.** Verifique la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo cerrado.
- **c.** Encuentre la potencia disipada por cada resistor, y confirme si la potencia entregada es igual a la potencia disipada.
- **d**. Si los resistores se encuentran disponibles con niveles en watts de 1/2, 1 y 2 W, ¿cuál será el nivel mínimo en watts que puede utilizarse para cada resistor en este circuito?

11. Repita el problema 10 para el circuito de la figura 5.81.

***12.** Encuentre las cantidades desconocidas en los circuitos de la figura 5.82 utilizando la información proporcionada.

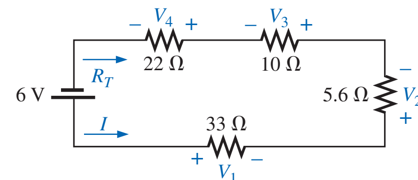
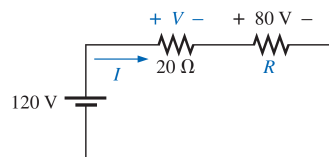
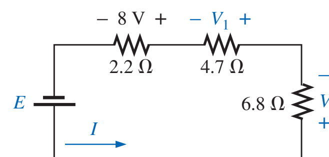
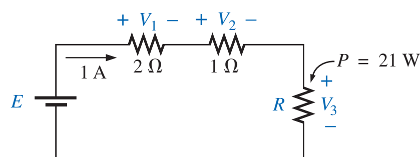


FIGURA 5.81
Problema 11.







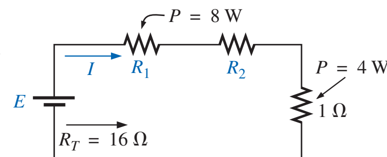


FIGURA 5.82
Problema 12.

13. Ocho luces navideñas se conectan en serie como se muestra en la figura 5.83.
- **a.** Si la serie de luces se conecta a una fuente de 120 V, ¿cuál será la corriente a través de los focos si cada foco tiene una resistencia interna de $28\frac{1}{8}$ Ω?
- **b.** Determine la potencia entregada a cada foco.
- **c.** Calcule la caída de voltaje en cada foco.
- **d.** Si un foco se funde (es decir, si el filamento se abre), ¿cuál será el efecto sobre los focos restantes?

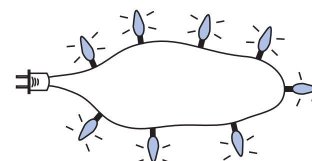


FIGURA 5.83
Problema 13.

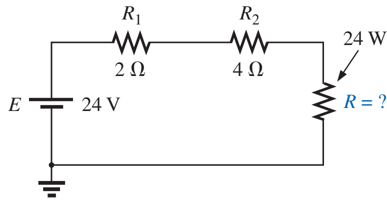


FIGURA 5.84
Problema 14.

***14.** Para las condiciones especificadas en la figura 5.84, determine la resistencia desconocida.

SECCIÓN 5.6 Regla del divisor de voltaje

15. Utilizando la regla del divisor de voltaje, encuentre V_{ab} (con polaridad) para los circuitos de la figura 5.85.

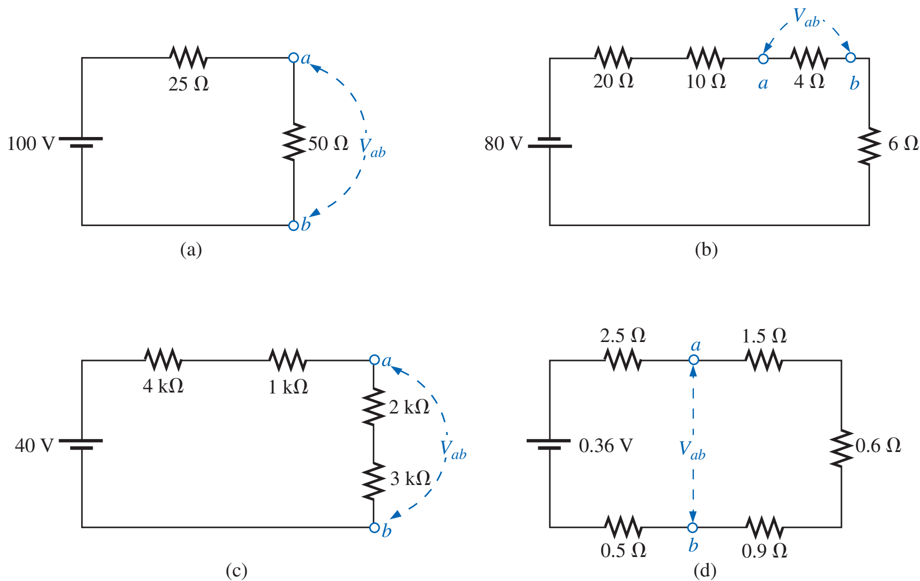


FIGURA 5.85
Problemas 15 y 37.

16. Encuentre la resistencia desconocida utilizando la regla del divisor de voltaje y la información proporcionada para los circuitos de la figura 5.86.

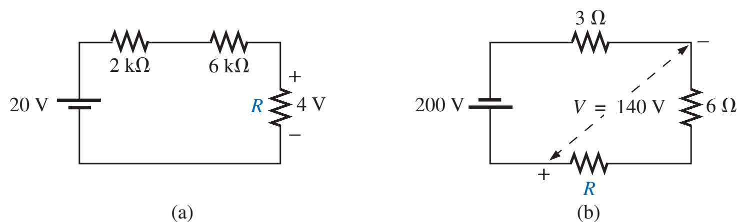


FIGURA 5.86
Problema 16.

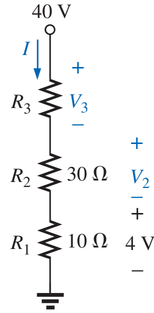


FIGURA 5.87
Problema 17.

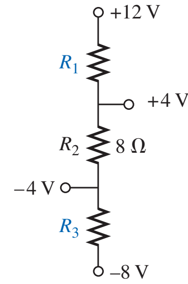


FIGURA 5.88
Problema 18.

17. Con referencia a la figura 5.87:
a. Determine V_2 observando simplemente que $R_2 = 3R_1$.
b. Calcula V_3.
c. Observando la magnitud de V_3 en comparación con V_2 o V_1, determine R_3 mediante inspección.
d. Calcule la corriente de fuente I.
e. Calcule la resistencia R_3 utilizando la ley de Ohm y compárela con el resultado del inciso (c).

18. Con la información proporcionada en la figura 5.88, encuentre el nivel de resistencia para R_1 y R_3.

19. **a.** Diseñe un circuito con divisor de voltaje que permita el uso de un foco de 8 V, 50 mA en un automóvil con un sistema eléctrico de 12 V.
b. ¿Cuál es el nivel mínimo en watts del resistor seleccionado si se encuentran disponibles resistores de ¼ W, ½ W y 1 W.

20. Determine los valores de R_1, R_2, R_3 y R_4 para el divisor de voltaje de la figura 5.89 si la corriente de fuente es de 16 mA.

21. Diseñe el divisor de voltaje de la figura 5.90 de forma que $V_{R_1} = (1/5)V_{R_2}$ si $I = 4$ mA.

22. Encuentre el voltaje en cada resistor de la figura 5.91 si $R_1 = 2R_3$ y $R_2 = 7R_3$.

23. **a.** Diseñe el circuito de la figura 5.92 de forma que $V_{R_2} = 3V_{R_1}$ y $V_{R_3} = 4V_{R_2}$.
b. Si la corriente I se reduce a 10 μA, ¿cuáles serán los nuevos valores de R_1, R_2 y R_3? ¿Cómo se comparan con los resultados del inciso (a)?

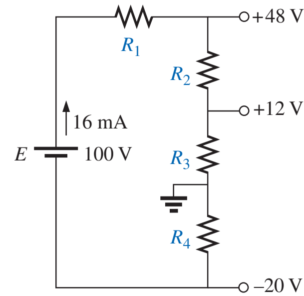


FIGURA 5.89
Problema 20.

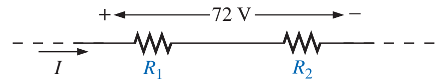


FIGURA 5.90
Problema 21.

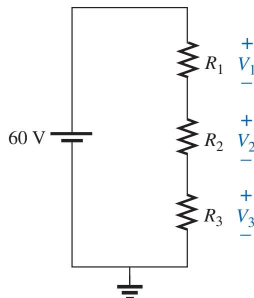


FIGURA 5.91
Problema 22.

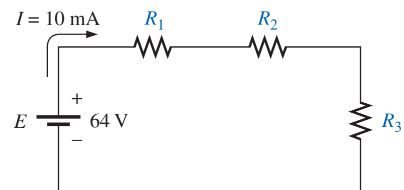


FIGURA 5.92
Problema 23.

SECCIÓN 5.7 Notación

24. Determine los voltajes V_a, V_b y V_{ab} para la red de la figura 5.93.

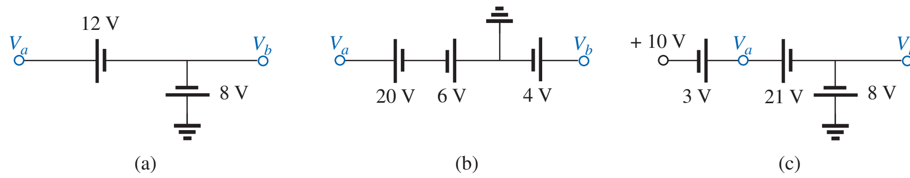


FIGURA 5.93
Problema 24.

25. Determine la corriente I (con dirección) y el voltaje V (con polaridad) para las redes de la figura 5.94.

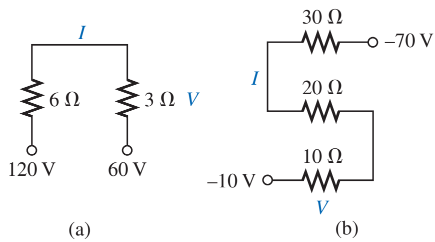


FIGURA 5.94
Problema 25.

26. Determine los voltajes V_a y V_1 para las redes de la figura 5.95.

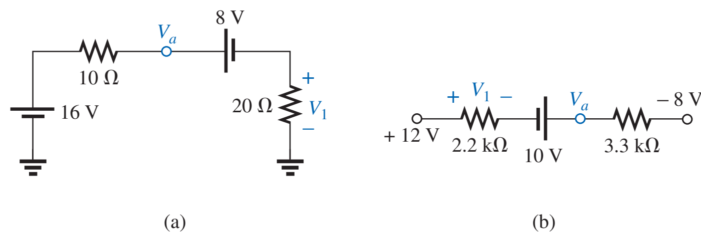


FIGURA 5.95
Problema 26.

***27.** Para la red de la figura 5.96, determine los voltajes:

a. V_a, V_b, V_c, V_d, V_e
b. V_{ab}, V_{dc}, V_{cb}
c. V_{ac}, V_{db}

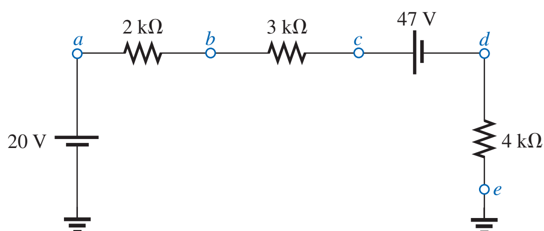


FIGURA 5.96
Problema 27.

***28.** Para la red de la figura 5.97, determine los voltajes:

a. V_a, V_b, V_c, V_d

b. V_{ab}, V_{cb}, V_{cd}

c. V_{ad}, V_{ca}

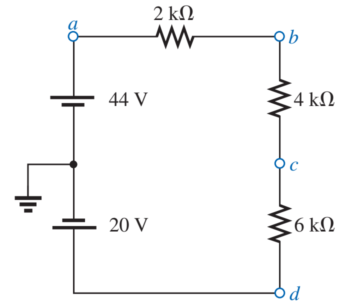


FIGURA 5.97
Problema 28.

***29.** Para el circuito integrado de la figura 5.98, determine V_0, V_4, V_7, V_{10}, V_{23}, V_{30}, V_{67}, V_{56}, e I (magnitud y dirección).

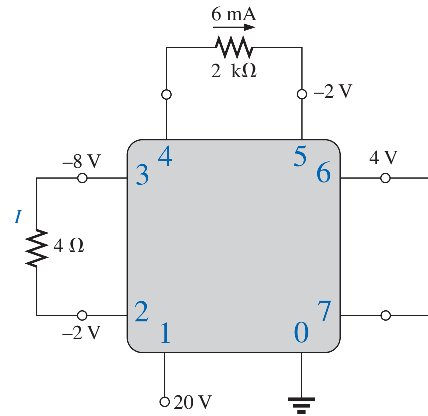


FIGURA 5.98
Problema 29.

***30.** Para el circuito integrado de la figura 5.99, determine V_0, V_{03}, V_2, V_{23}, V_{12}, e I_i.

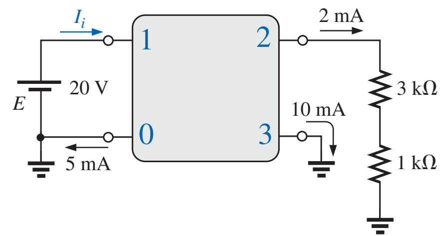


FIGURA 5.99
Problema 30.

SECCIÓN 5.8 Resistencia interna de fuentes de voltaje

31. Encuentre la resistencia interna de una batería que tiene un voltaje de salida sin carga de 60 V y suministra una corriente de 2 A a una carga de 28 Ω.

32. Encuentre el voltaje V_L y la pérdida de potencia en la resistencia interna para la configuración de la figura 5.100.

33. Encuentre la resistencia interna de una batería que tiene un voltaje de salida sin carga de 6 V y suministra una corriente de 10 mA a una carga de 1/2 kΩ.

SECCIÓN 5.9 Regulación de voltaje

34. Determine la regulación de voltaje para la batería del problema 31.

35. Calcule la regulación de voltaje para la fuente de la figura 5.100.

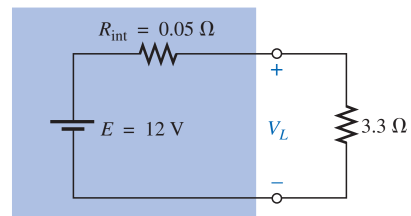


FIGURA 5.100
Problemas 32 y 35.

SECCIÓN 5.12 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

36. Mediante esquematización, determine la corriente I y el voltaje en cada resistor para la red de la figura 5.71 (a).

37. Mediante esquematización, determine el voltaje V_{ab} para la red de la figura 5.85(d).

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

38. Escriba un programa para determinar la resistencia total de cualquier número de resistores en serie.

39. Escriba un programa que aplique la regla del divisor de voltaje a cada resistor de un circuito en serie con una sola fuente y dos resistores en serie.

40. Escriba un programa para tabular la corriente y la potencia del resistor R_L de la red mostrada en la figura 5.101 para un intervalo de valores de R_L desde 1 Ω hasta 20 Ω. Imprima el valor de R_L que ocasione la máxima potencia en R_L

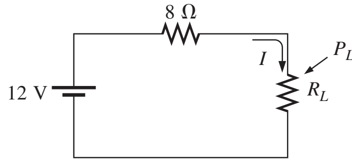


FIGURA 5.101
Problema 40.

GLOSARIO

Circuito Combinación de cierto número de elementos unidos en puntos terminales que proporciona al menos una ruta cerrada a través de la cual la carga pueda fluir.

Circuito en serie Configuración de circuito en la que los elementos tienen solo un punto en común y cada terminal no se encuentra conectada a un tercer elemento portador de corriente.

Flujo de corriente convencional Dirección definida para el flujo de carga en un sistema eléctrico que es opuesto al flujo del movimiento de los electrones.

Flujo de electrones Flujo de carga en un sistema eléctrico que cuenta con la misma dirección que el movimiento de los electrones.

Ley de voltaje de Kirchhoff (LVK) La suma algebraica de las elevaciones y caídas de potencial alrededor de un lazo cerrado (o trayectoria) es cero.

Lazo cerrado Cualquier conexión continua de ramas que permite el trazo de una trayectoria que sale de un punto en una dirección y regresa al mismo punto desde otra dirección sin abandonar el circuito.

Rama Parte de un circuito que consta de uno o más elementos en serie.

Regla del divisor de voltaje (RDV) Método por el cual puede determinarse un voltaje en un circuito en serie sin tener que calcular primero la corriente dentro del circuito.

Regulación de voltaje (*RV*) Valor, dado en forma de porcentaje, que ofrece una indicación del cambio en el voltaje terminal de una fuente ante el cambio en la demanda de carga.

Resistencia interna Resistencia inherente encontrada al interior de cualquier fuente de energía.

6

IPI

Circuitos en paralelo

6.1 INTRODUCCIÓN

Dos configuraciones de redes, en serie y en paralelo, constituyen la base de algunas de las estructuras de redes más complejas. Un entendimiento claro de cada una de estas configuraciones pagará grandes dividendos al examinar redes y métodos más complejos. La conexión en serie fue analizada con todo detalle en el capítulo 5. Ahora se examinará el **circuito en paralelo** y todos los métodos y leyes asociados con esta importante configuración.

6.2 ELEMENTOS EN PARALELO

Dos elementos, ramas, o redes están en paralelo si tienen dos puntos en común.

Por ejemplo, en la figura 6.1, los elementos 1 y 2 tienen las terminales *a* y *b* en común; por tanto, están en paralelo.

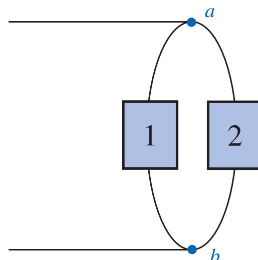


FIGURA 6.1
Elementos en paralelo.

En la figura 6.2, todos los elementos están en paralelo porque satisfacen el criterio anterior. Se proporcionan tres configuraciones para demostrar cómo pueden trazarse las redes en paralelo. No permita que el encuadrar la conexión

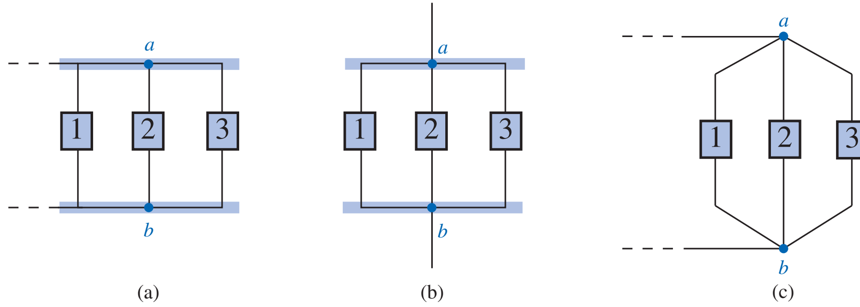


FIGURA 6.2
Diferentes maneras en que pueden presentarse tres elementos en paralelo.

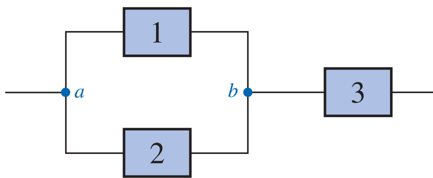


FIGURA 6.3
Red en que 1 y 2 están en paralelo y 3 está en serie con la combinación en paralelo de 1 y 2.

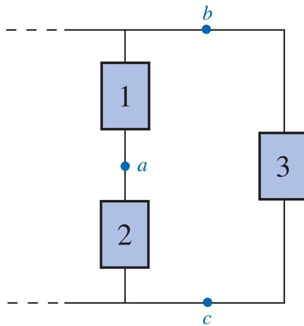


FIGURA 6.4
Red en que 1 y 2 están en serie y 3 está en paralelo con la combinación en serie de 1 y 2.

arriba y abajo de la figura 6.2(a) y (b) empañe el hecho de que todos los elementos están conectados a un punto terminal arriba y abajo, como se muestra en la figura 6.2(c).

En la figura 6.3, los elementos 1 y 2 están en paralelo porque tienen las terminales *a* y *b* en común. La combinación en paralelo de 1 y 2 está entonces en serie con el elemento 3 debido al punto terminal común *b*.

En la figura 6.4, los elementos 1 y 2 están en serie debido al punto común *a*, pero la combinación en serie de 1 y 2 está en paralelo con el elemento 3 tal como se define mediante las conexiones terminales en común en *b* y *c*.

De la figura 6.1 a la 6.4, los recuadros numerados se utilizaron como símbolo general para representar elementos resistivos simples, baterías, o configuraciones complejas de redes.

Ejemplos comunes de elementos en paralelo incluyen los travesaños de una escalera, la unión de más de una cuerda entre dos puntos para aumentar la resistencia de una conexión, y el uso de tubos entre dos puntos para separar agua a una razón determinada por el área de los tubos.

6.3 CONDUCTANCIA Y RESISTENCIA TOTALES

Recuerde que para resistores en serie, la resistencia total es la suma de los valores de los resistores.

Para elementos en paralelo, la conductancia total es la suma de las conductancias individuales.

Esto es, para la red en paralelo de la figura 6.5,

$$G_T = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N \qquad \textbf{(6.1)}$$

Como al incrementar los niveles de conductancia se establecerán mayores niveles de corriente, entre más términos aparezcan en la ecuación (6.1), mayor será el nivel de corriente de entrada. En otras palabras, al aumentar el número

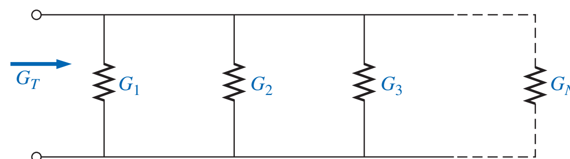


FIGURA 6.5
Determinación de la conductancia total de conductancias en paralelo.

de resistores en paralelo, el nivel de corriente de entrada aumentará para el mismo voltaje aplicado —el efecto opuesto de incrementar el número de resistores en serie.

Al sustituir los valores de los resistores para la red de la figura 6.5 se obtendrá la red de la figura 6.6. Como $G = 1/R$, la resistencia total para la red puede ser determinada por sustitución directa en la ecuación (6.1):

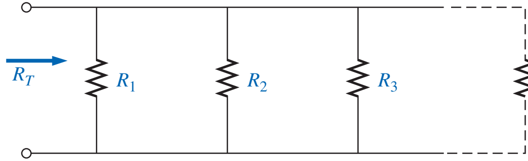


FIGURA 6.6
Determinación de la resistencia total de resistores en paralelo.

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N} \qquad \textbf{(6.2)}$$

Observe que la ecuación es para 1 dividido entre la resistencia total en vez de para la resistencia total. Una vez que la suma de los términos ubicados a la derecha del signo de igual ha sido determinada, será necesario dividir 1 entre el resultado para determinar la resistencia total. Los siguientes ejemplos mostrarán los cálculos adicionales introducidos por la relación inversa.

EJEMPLO 6.1 Determine la conductancia y la resistencia totales para la red en paralelo de la figura 6.7.

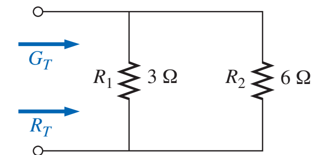


FIGURA 6.7
Ejemplo 6.1.

Solución:

$$G_T = G_1 + G_2 = \frac{1}{3\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega} = 0.333\ \text{S} + 0.167\ \text{S} = \mathbf{0.5\ S}$$

y

$$R_T = \frac{1}{G_T} = \frac{1}{0.5\ \text{S}} = \mathbf{2\ \Omega}$$

EJEMPLO 6.2 Determine el efecto sobre la conductancia y la resistencia totales de la red de la figura 6.7 si otro resistor de 10 Ω fuese agregado en paralelo a los otros elementos.

Solución:

$$G_T = 0.5\ \text{S} + \frac{1}{10\ \Omega} = 0.5\ \text{S} + 0.1\ \text{S} = \mathbf{0.6\ S}$$

$$R_T = \frac{1}{G_T} = \frac{1}{0.6\ \text{S}} \cong \mathbf{1.667\ \Omega}$$

Observe que, como se mencionó líneas arriba, agregar términos aumenta el nivel de conductancia y disminuye el de resistencia.

EJEMPLO 6.3 Determine la resistencia total para la red de la figura 6.8.

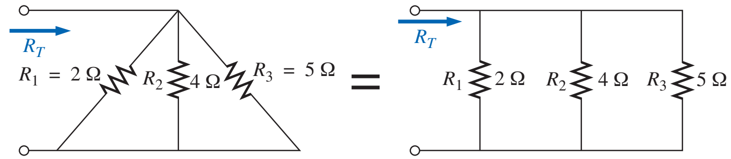


FIGURA 6.8
Ejemplo 6.3.

Solución:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$= \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{5\ \Omega} = 0.5\ \text{S} + 0.25\ \text{S} + 0.2\ \text{S}$$

$$= 0.95\ \text{S}$$

y $$R_T = \frac{1}{0.95\ \text{S}} = \mathbf{1.053\ \Omega}$$

Los ejemplos anteriores demuestran una interesante y útil (para fines de verificación) característica de los resistores en paralelo:

La resistencia total de resistores en paralelo es siempre menor que el valor del resistor más pequeño.

Además, entre más amplia sea la separación en valor numérico entre dos resistores en paralelo, más cercana será la resistencia total al resistor menor. Por ejemplo, la resistencia total de 3 Ω en paralelo con 6 Ω es de 2 Ω, como se vio en el ejemplo 6.1. Sin embargo, la resistencia total de 3 Ω en paralelo con 60 Ω es de 2.85 Ω, la cual está mucho más cercana al valor del resistor menor.

Para resistores *iguales* en paralelo, la ecuación se vuelve considerablemente más fácil de aplicar. Para N resistores iguales en paralelo, la ecuación (6.2) resulta:

$$\frac{1}{R_T} = \underbrace{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{R}}_{N}$$

$$= N\left(\frac{1}{R}\right)$$

y $$R_T = \frac{R}{N} \qquad \textbf{(6.3)}$$

En otras palabras, la resistencia total de N resistores en paralelo de igual valor es la resistencia de *un* resistor dividido entre el número (N) de elementos en paralelo.

Para los niveles de conductancia, tenemos:

$$G_T = NG \qquad \textbf{(6.4)}$$

EJEMPLO 6.4

a. Encuentre la resistencia total de la red de la figura 6.9.
b. Calcule la resistencia total de la red de la figura 6.10.

Soluciones:

a. La figura 6.9 ha sido trazada de nuevo en la figura 6.11:

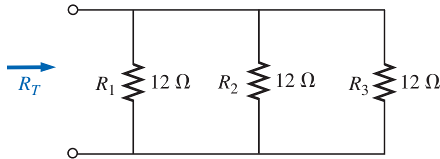


FIGURA 6.11
Nuevo trazado de la red de la figura 6.9.

$$R_T = \frac{R}{N} = \frac{12\ \Omega}{3} = \mathbf{4\ \Omega}$$

b. La figura 6.10 ha sido trazada de nuevo en la figura 6.12:

$$R_T = \frac{R}{N} = \frac{2\ \Omega}{4} = \mathbf{0.5\ \Omega}$$

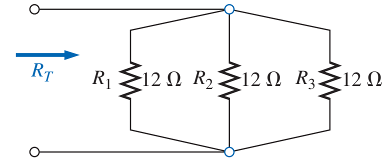


FIGURA 6.9
Ejemplo 6.4: tres resistores, de igual valor, en paralelo.

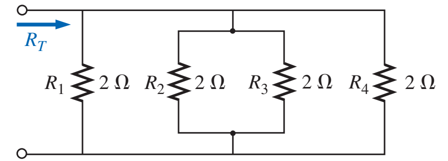


FIGURA 6.10
Ejemplo 6.4: cuatro resistores, de igual valor, en paralelo.

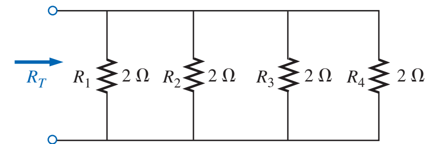


FIGURA 6.12
Nuevo trazado de la red de la figura 6.10.

En la mayoría de las situaciones, sólo dos o tres elementos resistivos en paralelo tienen que ser combinados. Teniendo esto presente, las siguientes ecuaciones fueron desarrolladas para reducir los efectos de la relación inversa al determinar R_T.

Para dos resistores en paralelo, se escribe:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Multiplicar la parte superior e inferior de cada término situado al lado derecho de la ecuación por el otro resistor resultará en:

$$\frac{1}{R_T} = \left(\frac{R_2}{R_2}\right)\frac{1}{R_1} + \left(\frac{R_1}{R_1}\right)\frac{1}{R_2} = \frac{R_2}{R_1R_2} + \frac{R_1}{R_1R_2}$$
$$= \frac{R_2 + R_1}{R_1R_2}$$

y

$$R_T = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \qquad \textbf{(6.5)}$$

En palabras,

la resistencia total de dos resistores en paralelo es el producto de los dos dividido entre su suma.

Para tres resistores en paralelo, la ecuación para R_T es:

$$R_T = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} \qquad \textbf{(6.6a)}$$

se requiere tener mucho cuidado con todas las divisiones entre 1.

La ecuación (6.6a) también se puede desarrollar en la forma de la ecuación (6.5), resultando la ecuación (6.6b):

$$R_T = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \tag{6.6b}$$

con el denominador mostrando todas las posibles combinaciones de productos de los resistores tomando dos a la vez. Una alternativa a cualquier forma de la ecuación (6.6) es simplemente aplicar dos veces la ecuación (6.5), como se verá en el ejemplo 6.6.

EJEMPLO 6.5 Resuelva el ejemplo 6.1 mediante la ecuación (6.5).

Solución:

$$R_T = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(3\ \Omega)(6\ \Omega)}{3\ \Omega + 6\ \Omega} = \frac{18\ \Omega}{9} = \mathbf{2\ \Omega}$$

EJEMPLO 6.6 Resuelva el ejemplo 6.3 mediante la ecuación (6.6a).

Solución:

$$\begin{aligned} R_T &= \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{2\ \Omega} + \dfrac{1}{4\ \Omega} + \dfrac{1}{5\ \Omega}} = \frac{1}{0.5 + 0.25 + 0.2} \\ &= \frac{1}{0.95} = \mathbf{1.053\ \Omega} \end{aligned}$$

Al aplicar dos veces la ecuación (6.5) resulta:

$$R'_T = 2\ \Omega \parallel 4\ \Omega = \frac{(2\ \Omega)(4\ \Omega)}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{4}{3}\ \Omega$$

$$R_T = R'_T \parallel 5\ \Omega = \frac{\left(\dfrac{4}{3}\ \Omega\right)\left(5\ \Omega\right)}{\dfrac{4}{3}\ \Omega + 5\ \Omega} = \mathbf{1.053\ \Omega}$$

Recuerde que los elementos en serie pueden ser intercambiados sin afectar la magnitud de la resistencia o la corriente total. En redes en paralelo,

los elementos en paralelo pueden ser intercambiados sin cambiar la resistencia total o la corriente de entrada.

En el siguiente ejemplo observe cómo trazar de nuevo la red puede a menudo aclarar qué operaciones y ecuaciones deben ser aplicadas.

EJEMPLO 6.7 Calcule la resistencia total de la red en paralelo de la figura 6.13.

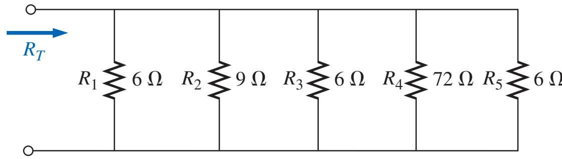


FIGURA 6.13
Ejemplo 6.7.

Solución: La red ha sido trazada nuevamente en la figura 6.14:

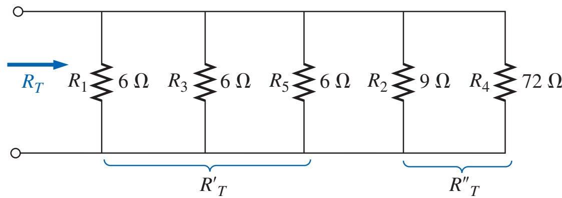


FIGURA 6.14
Nuevo trazado de la red de la figura 6.13.

$$R'_T = \frac{R}{N} = \frac{6\ \Omega}{3} = 2\ \Omega$$

$$R''_T = \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4} = \frac{(9\ \Omega)(72\ \Omega)}{9\ \Omega + 72\ \Omega} = \frac{648\ \Omega}{81} = 8\ \Omega$$

y
$$R_T = R'_T \parallel R''_T$$

(En paralelo con)

$$= \frac{R'_TR''_T}{R'_T + R''_T} = \frac{(2\ \Omega)(8\ \Omega)}{2\ \Omega + 8\ \Omega} = \frac{16\ \Omega}{10} = \mathbf{1.6\ \Omega}$$

Los ejemplos anteriores muestran la sustitución directa, en la cual una vez que la ecuación apropiada está definida, sólo hay que insertar los números y efectuar las maniobras algebraicas requeridas. Los siguientes dos ejemplos tienen una orientación al diseño, donde están definidos algunos parámetros específicos de la red y se deben determinar los elementos del circuito.

EJEMPLO 6.8 Determine el valor de R_2 en la figura 6.15 para establecer una resistencia total de 9 kΩ.

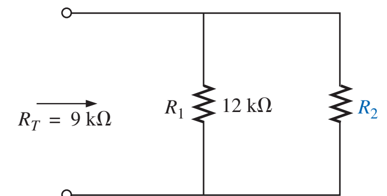


FIGURA 6.15
Ejemplo 6.8.

Solución:

$$R_T = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_T(R_1 + R_2) = R_1R_2$$

$$R_TR_1 + R_TR_2 = R_1R_2$$

$$R_TR_1 = R_1R_2 - R_TR_2$$

$$R_TR_1 = (R_1 - R_T)R_2$$

y
$$R_2 = \frac{R_TR_1}{R_1 - R_T} \quad \textbf{(6.7)}$$

Al sustituir valores:

$$R_2 = \frac{(9\text{ k}\Omega)(12\text{ k}\Omega)}{12\text{ k}\Omega - 9\text{ k}\Omega}$$

$$= \frac{108\text{ k}\Omega}{3} = \mathbf{36\text{ k}\Omega}$$

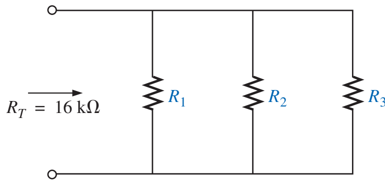


FIGURA 6.16
Ejemplo 6.9.

EJEMPLO 6.9 Determine los valores de R_1, R_2 y R_3 en la figura 6.16 si $R_2 = 2R_1$ y $R_3 = 2R_2$ la resistencia total es de 16 kΩ.

Solución:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{16\text{ k}\Omega} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{4R_1}$$

ya que $\quad R_3 = 2R_2 = 2(2R_1) = 4R_1$

y $\quad \frac{1}{16\text{ k}\Omega} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1}\right)$

$$\frac{1}{16\text{ k}\Omega} = 1.75\left(\frac{1}{R_1}\right)$$

con $\quad R_1 = 1.75(16\text{ k}\Omega) = \mathbf{28\text{ k}\Omega}$

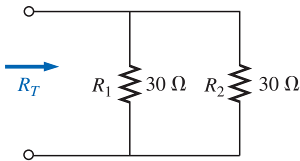


FIGURA 6.17
Ejemplo 6.10: dos resistores iguales en paralelo.

Recuerde que en circuitos en serie la resistencia total aumentará siempre que sean agregados elementos adicionales en serie.

Para resistores en paralelo, la resistencia total siempre disminuirá cuando sean agregados elementos adicionales en paralelo.

El siguiente ejemplo demuestra esta característica única de los resistores en paralelo.

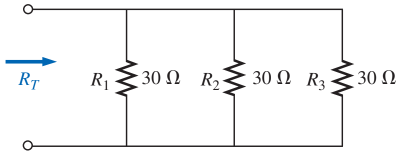


FIGURA 6.18
Adición de un tercer resistor, de igual valor, en paralelo a la red de la figura 6.17.

EJEMPLO 6.10

a. Determine la resistencia total de la red de la figura 6.17.
b. ¿Cuál es el efecto sobre la resistencia total de la red de la figura 6.17 cuando se agrega un resistor adicional del mismo valor, como se muestra en la figura 6.18?
c. ¿Cuál es el efecto sobre la resistencia total de la red de la figura 6.17 cuando se agrega una resistencia muy grande en paralelo, como se muestra en la figura 6.19?
d. ¿Cuál es el efecto sobre la resistencia total de la red de la figura 6.17 cuando se agrega una resistencia muy pequeña en paralelo, como se muestra en la figura 6.20?

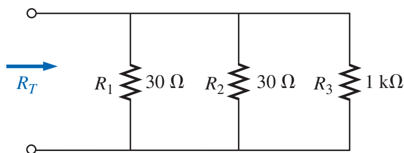


FIGURA 6.19
Adición de un resistor, mucho más grande, en paralelo a la red de la figura 6.17.

Soluciones:

a. $R_T = 30\ \Omega \parallel 30\ \Omega = \dfrac{30\ \Omega}{2} = \mathbf{15\ \Omega}$

b. $R_T = 30\ \Omega \parallel 30\ \Omega \parallel 30\ \Omega = \dfrac{30\ \Omega}{3} = \mathbf{10\ \Omega} < 15\ \Omega$

R_T disminuida

c. $R_T = 30\ \Omega \parallel 30\ \Omega \parallel 1\text{ k}\Omega = 15\ \Omega \parallel 1\text{ k}\Omega$

$$= \frac{(15\ \Omega)(1000\ \Omega)}{15\ \Omega + 1000\ \Omega} = \mathbf{14.778\ \Omega} < 15\ \Omega$$

Disminución pequeña en R_T

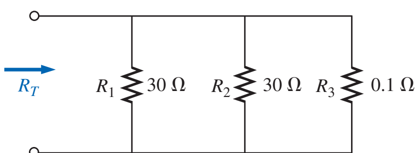


FIGURA 6.20
Adición de un resistor, muy pequeño, en paralelo a la red de la figura 6.17.

d. $R_T = 30\ \Omega \parallel 30\ \Omega \parallel 0.1\ \Omega = \mathbf{15\ \Omega} \parallel 0.1\ \Omega$

$$= \frac{(15\ \Omega)(0.1\ \Omega)}{15\ \Omega + 0.1\ \Omega} = \mathbf{0.099\ \Omega} < 15\ \Omega$$

Disminución considerable en R_T

En cada caso la resistencia total de la red disminuyó al agregar un elemento resistivo adicional en paralelo, no importando si éste fue grande o pequeño. Observe, además, que la resistencia total también es menor que el elemento en paralelo más pequeño.

6.4 CIRCUITOS EN PARALELO

La red de la figura 6.21 es el más simple de los circuitos en paralelo. Todos los elementos tienen terminales a y b en común. La resistencia total está determinada por $R_T = R_1R_2/(R_1 + R_2)$, y la corriente de la fuente por $I_s = E/R_T$. A lo largo de este texto, el subíndice s se usará para denotar una propiedad de la fuente. Como las terminales de la batería están conectadas directamente en los resistores R_1 y R_2, lo siguiente debe ser obvio:

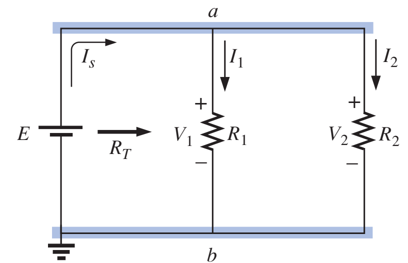


FIGURA 6.21
Red en paralelo.

El voltaje en los elementos en paralelo es el mismo.

Utilizar este hecho resultará en:

$$V_1 = V_2 = E$$

e
$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{E}{R_1}$$

con
$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{E}{R_2}$$

Al tomar la ecuación para la resistencia total y multiplicar ambos lados por el voltaje aplicado se obtiene:

$$E\left(\frac{1}{R_T}\right) = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

y
$$\frac{E}{R_T} = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2}$$

Sustituyendo las relaciones de la ley de Ohm que aparecen líneas arriba, se encontrará que la corriente fuente:

$$I_s = I_1 + I_2$$

lo cual permite concluir que:

Para redes en paralelo de una sola fuente, la corriente de la fuente (Is) es igual a la suma de las corrientes individuales de rama.

La potencia disipada por los resistores y entregada por la fuente se puede determinar a partir de:

$$P_1 = V_1I_1 = I_1^2R_1 = \frac{V_1^2}{R_1}$$

$$P_2 = V_2I_2 = I_2^2R_2 = \frac{V_2^2}{R_2}$$

$$P_s = EI_s = I_s^2R_T = \frac{E^2}{R_T}$$

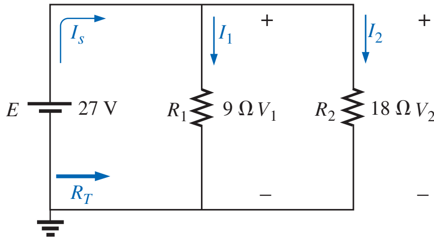


FIGURA 6.22
Ejemplo 6.11.

EJEMPLO 6.11 Para la red en paralelo de la figura 6.22:

a. Calcule R_T.
b. Determine I_s.
c. Calcule I_1 e I_2 y demuestre que $I_s = I_1 + I_2$.
d. Determine la potencia para cada carga resistiva.
e. Determine la potencia entregada por la fuente, y compárela con la potencia total disipada por los elementos resistivos.

Soluciones:

a. $R_T = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{(9\ \Omega)(18\ \Omega)}{9\ \Omega + 18\ \Omega} = \dfrac{162\ \Omega}{27} = \mathbf{6\ \Omega}$

b. $I_s = \dfrac{E}{R_T} = \dfrac{27\ \text{V}}{6\ \Omega} = \mathbf{4.5\ A}$

c.
$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{E}{R_1} = \frac{27\ \text{V}}{9\ \Omega} = \mathbf{3\ A}$$
$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{E}{R_2} = \frac{27\ \text{V}}{18\ \Omega} = \mathbf{1.5\ A}$$
$$I_s = I_1 + I_2$$
$$4.5\ \text{A} = 3\ \text{A} + 1.5\ \text{A}$$
$$\underline{\mathbf{4.5\ A} = \mathbf{4.5\ A} \quad \text{(se comprueba)}}$$

d. $P_1 = V_1 I_1 = E I_1 = (27\ \text{V})(3\ \text{A}) = \mathbf{81\ W}$
$P_2 = V_2 I_2 = E I_2 = (27\ \text{V})(1.5\ \text{A}) = \mathbf{40.5\ W}$

e. $P_s = E I_s = (27\ \text{V})(4.5\ \text{A}) = \mathbf{121.5\ W}$
$= P_1 + P_2 = 81\ \text{W} + 40.5\ \text{W} = \mathbf{121.5\ W}$

EJEMPLO 6.12 Dada la información proporcionada en la figura 6.23:

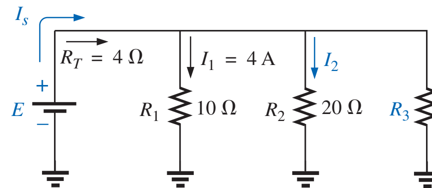


FIGURA 6.23
Ejemplo 6.12.

a. Determine R_3.
b. Calcule E.
c. Encuentre I_s.
d. Encuentre I_2.
e. Determine P_2.

Soluciones:

a.
$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$
$$\frac{1}{4\ \Omega} = \frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{R_3}$$

$$0.25\text{ S} = 0.1\text{ S} + 0.05\text{ S} + \frac{1}{R_3}$$

$$0.25\text{ S} = 0.15\text{ S} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_3} = 0.1\text{ S}$$

$$R_3 = \frac{1}{0.1\text{ S}} = \mathbf{10\ \Omega}$$

b. $E = V_1 = I_1R_1 = (4\text{ A})(10\ \Omega) = \mathbf{40\ V}$

c. $I_s = \dfrac{E}{R_T} = \dfrac{40\text{ V}}{4\ \Omega} = \mathbf{10\ A}$

d. $I_2 = \dfrac{V_2}{R_2} = \dfrac{E}{R_2} = \dfrac{40\text{ V}}{20\ \Omega} = \mathbf{2\ A}$

e. $P_2 = I_2^2R_2 = (2\text{ A})^2(20\ \Omega) = \mathbf{80\ W}$

Solución Mathcad: Este ejemplo proporciona una excelente oportunidad de practicar las habilidades adquiridas en el uso de Mathcad. Como se muestra en la figura 6.24, las cantidades y los parámetros conocidos de la red se introducen primero, seguidos por una ecuación para el resistor desconocido R_3. Observe que después de que fue seleccionado el operador de la primera división, se estableció un corchete izquierdo (a ser seguido eventualmente por un corchete de cierre derecho) para avisar a la computadora que las operaciones matemáticas en el denominador se deben efectuar primero, antes de dividir 1 entre ellas. Además, cada división individual de 1 se separa mediante paréntesis para asegurar que la operación se efectúe antes que cada cantidad se sume al factor vecino. Finalmente, recuerde que el corchete Mathcad debe abarcar cada expresión individual del denominador antes que usted coloque el corchete derecho en su lugar.

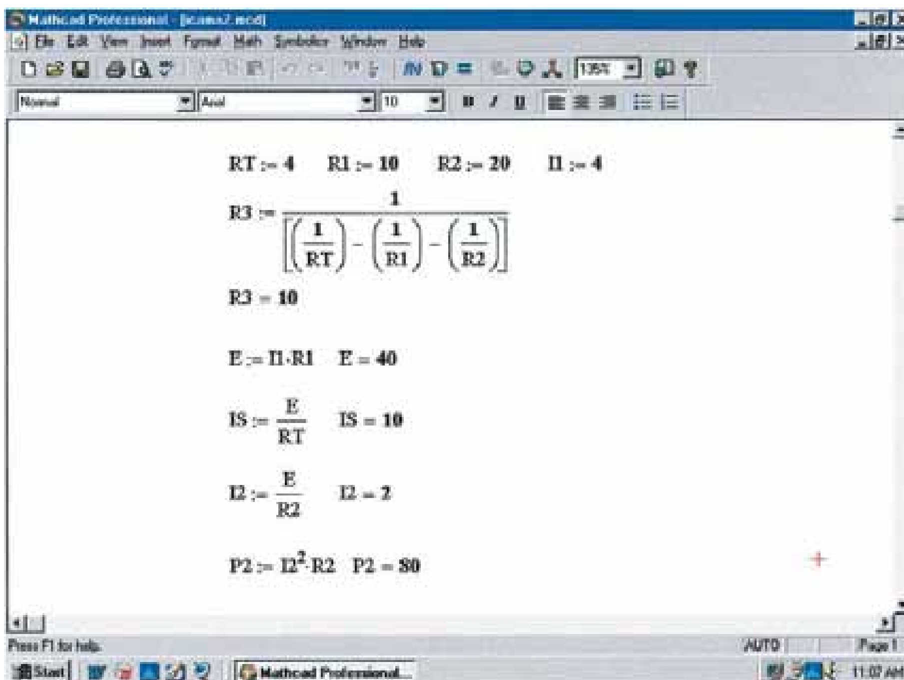


FIGURA 6.24
Uso de Mathcad para confirmar los resultados del ejemplo 6.12.

En cada caso, la cantidad de interés se puso debajo de la ecuación definitoria para obtener el resultado numérico seleccionando un signo igual. Como era de esperarse, todos los resultados concuerdan con la solución manual.

6.5 LEY DE CORRIENTE DE KIRCHHOFF

La ley de voltaje de Kirchhoff proporciona una importante relación entre los niveles de voltaje alrededor de cualquier lazo cerrado de una red. En seguida se considerará la **ley de corriente de Kirchhoff (LCK)**, la cual proporciona una igualmente importante relación entre los niveles de corriente en cualquier unión.

La* ley de corriente de Kirchhoff (LCK) *establece que la suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un área, sistema o unión es cero.

En otras palabras,

la suma de las corrientes que entran a un área, sistema o unión debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del área, sistema o unión.

En forma de ecuación:

$$\Sigma I_{\text{entrante}} = \Sigma I_{\text{saliente}} \qquad \textbf{(6.8)}$$

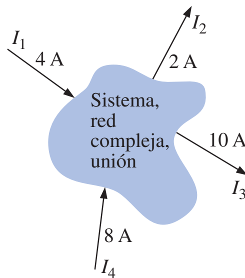


FIGURA 6.25
Presentación de la ley de corriente de Kirchhoff.

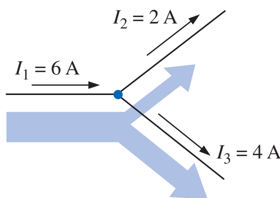


FIGURA 6.26
Demostración de la ley de corriente de Kirchhoff.

Por ejemplo, en la figura 6.25 el área sombreada puede encerrar un sistema entero, una red compleja o simplemente una unión de dos o más trayectorias. En cada caso, la corriente que entra debe ser igual a la que sale, de acuerdo con:

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3$$
$$4\text{ A} + 8\text{ A} = 2\text{ A} + 10\text{ A}$$
$$12\text{ A} = 12\text{ A}$$

La aplicación más común de la ley será en la unión de dos o más trayectorias de flujo de corriente, como se muestra en la figura 6.26. Para algunos estudiantes, inicialmente es difícil determinar si una corriente está entrando o saliendo de una unión. Un enfoque para ayudarlos consiste en imaginarse que se está de pie sobre la unión y tratar las trayectorias de las corrientes como flechas. Si la flecha parece dirigirse hacia la persona, como es el caso para I_1 en la figura 6.26, entonces la corriente está entrando a la unión. Si se ve la cola de la flecha (desde la unión) al viajar por su trayectoria alejándose del lector, la corriente está saliendo de la unión, tal es el caso para I_2 e I_3 en la figura 6.26.

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff a la unión de la figura 6.26:

$$\Sigma I_{\text{entrante}} = \Sigma I_{\text{saliente}}$$
$$6\text{ A} = 2\text{ A} + 4\text{ A}$$
$$6\text{ A} = 6\text{ A} \quad \text{(se comprueba)}$$

En los siguientes dos ejemplos, se pueden determinar corrientes desconocidas aplicando la ley de corriente de Kirchhoff. Simplemente recuerde colocar todos los niveles de corriente que entran a una unión a la izquierda del signo de igual, y la suma de todas las corrientes que salen de la unión a la derecha del signo de igual. La analogía del tubo de agua es excelente para aclarar la ley mencionada. Es obvio que la suma total del agua que entra a una unión debe ser igual al total del agua que salga de los tubos.

En tecnología, se utiliza por lo regular el término **nodo** para referirse a una unión de dos o más ramas. Por tanto, este término se usará con frecuencia en los análisis subsiguientes.

EJEMPLO 6.13 Determine las corrientes I_3 e I_4 de la figura 6.27 utilizando la ley de corriente de Kirchhoff.

Solución: Se debe trabajar primero con la unión a ya que la única incógnita es I_3. En la unión b hay dos incógnitas, y ambas no pueden ser determinadas con una sola aplicación de la ley.

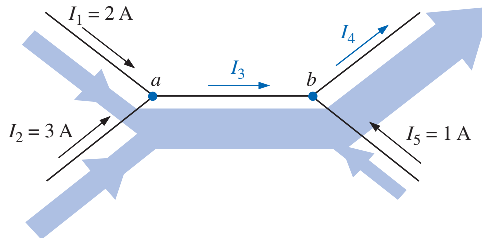


FIGURA 6.27
Ejemplo 6.13.

En a:

$$\Sigma I_{\text{entrante}} = \Sigma I_{\text{saliente}}$$
$$I_1 + I_2 = I_3$$
$$2\text{ A} + 3\text{ A} = I_3$$
$$I_3 = \mathbf{5\text{ A}}$$

En b:

$$\Sigma I_{\text{entrante}} = \Sigma I_{\text{saliente}}$$
$$I_3 + I_5 = I_4$$
$$5\text{ A} + 1\text{ A} = I_4$$
$$I_4 = \mathbf{6\text{ A}}$$

EJEMPLO 6.14 Determine I_1, I_3, I_4 e I_5 para la red de la figura 6.28.

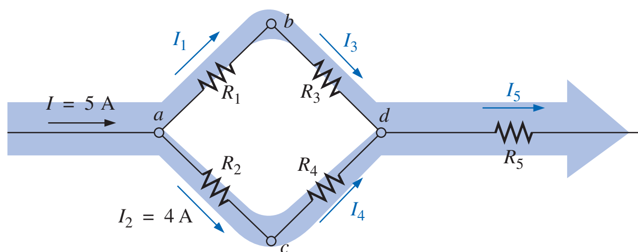


FIGURA 6.28
Ejemplo 6.14.

Solución: En a:

$$\Sigma I_{\text{entrante}} = \Sigma I_{\text{saliente}}$$
$$I = I_1 + I_2$$
$$5\text{ A} = I_1 + 4\text{ A}$$

Al restar 4A en ambos lados resulta

$$5\text{ A} - 4\text{ A} = I_1 + 4\cancel{\text{A}} - 4\cancel{\text{A}}$$
$$I_1 = 5\text{ A} - 4\text{ A} = \mathbf{1\text{ A}}$$

En b:

$$\Sigma I_{\text{entrante}} = \Sigma I_{\text{saliente}}$$
$$I_1 = I_3 = \mathbf{1\ A}$$

tal como debe ser, ya que R_1 y R_3 están en serie y la corriente es la misma en elementos en serie.

en c:

$$I_2 = I_4 = \mathbf{4\ A}$$

por las mismas razones que para la unión b.

En d:

$$\Sigma I_{\text{entrante}} = \Sigma I_{\text{saliente}}$$
$$I_3 + I_4 = I_5$$
$$1\text{ A} + 4\text{ A} = I_5$$
$$I_5 = \mathbf{5\ A}$$

Si se encierra la red entera, se encontrará que la corriente que entra es $I = 5$ A; la corriente neta que sale del extremo derecho es $I_5 = 5$ A. Las dos corrientes deben ser iguales ya que la corriente neta que entra a cualquier sistema debe ser igual a la que sale.

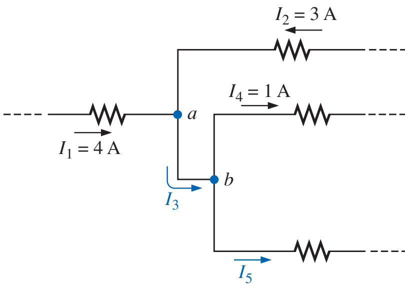


FIGURA 6.29
Ejemplo 6.15.

EJEMPLO 6.15 Determine las corrientes I_3 e I_5 de la figura 6.29 mediante aplicaciones de la ley de corriente de Kirchhoff.

Solución: Observe que como el nodo b tiene dos cantidades desconocidas y el nodo a tiene sólo una, debemos aplicar primero la ley de corriente de Kirchhoff al nodo a. El resultado podrá entonces aplicarse al nodo b.

Para el nodo a,

$$I_1 + I_2 = I_3$$
$$4\text{ A} + 3\text{ A} = I_3$$

e

$$I_3 = \mathbf{7\ A}$$

Para el nodo b,

$$I_3 = I_4 + I_5$$
$$7\text{ A} = 1\text{ A} + I_5$$

e

$$I_5 = 7\text{ A} - 1\text{ A} = \mathbf{6\ A}$$

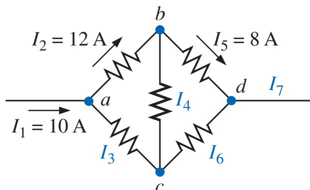


FIGURA 6.30
Ejemplo 6.16.

EJEMPLO 6.16 Encuentre la magnitud y la dirección de las corrientes I_3, I_4, I_6 e I_7 para la red de la figura 6.30. Aunque los elementos no están en serie ni en paralelo, la ley de corriente de Kirchhoff se puede aplicar para determinar todas las corrientes desconocidas.

Solución: Considerando el sistema entero, sabemos que la corriente que entra debe ser igual a la que sale. Por tanto,

$$I_7 = I_1 = \mathbf{10\ A}$$

Como 10 A están entrando al nodo a y 12 A están saliendo de él, I_3 debe estar suministrando corriente al nodo.

Se aplica entonces la ley de corriente de Kirchhoff al nodo a,

$$I_1 + I_3 = I_2$$
$$10\text{ A} + I_3 = 12\text{ A}$$

e

$$I_3 = 12\text{ A} - 10\text{ A} = \mathbf{2\ A}$$

En el nodo b, como 12 A están entrando y 8 A están saliendo, I_4 debe estar saliendo. Por tanto,

$$I_2 = I_4 + I_5$$
$$12\text{ A} = I_4 + 8\text{ A}$$
e $$I_4 = 12\text{ A} - 8\text{ A} = \mathbf{4\text{ A}}$$

En el nodo c, I_3 está saliendo con 2 A e I_4 está entrando con 4 A, requiriéndose que I_6 esté saliendo. Aplicando la ley de corriente de Kirchhoff en el nodo c,

$$I_4 = I_3 + I_6$$
$$4\text{ A} = 2\text{ A} + I_6$$
e $$I_6 = 4\text{ A} - 2\text{ A} = \mathbf{2\text{ A}}$$

Como revisión, en el nodo d,

$$I_5 + I_6 = I_7$$
$$8\text{ A} + 2\text{ A} = 10\text{ A}$$
$$\mathbf{10\text{ A} = 10\text{ A}} \quad \text{(se comprueba)}$$

Al examinar el ejemplo 6.11, se encuentra que la corriente entrante al nodo superior es de 4.5 A y la corriente saliente es $I_1 + I_2 = 3\text{ A} + 1.5\text{ A} = 4.5\text{ A}$. Para el ejemplo 6.12, tenemos:

$$I_s = I_1 + I_2 + I_3$$
$$10\text{ A} = 4\text{ A} + 2\text{ A} + I_3$$
e $$I_3 = 10\text{ A} - 6\text{ A} = 4\text{ A}$$

La aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff no está limitada a redes donde las conexiones internas son conocidas o visibles. Por ejemplo, todas las corrientes del circuito integrado de la figura 6.31 son conocidas excepto I_1. Tratando el sistema como un solo nodo, es posible aplicar la ley de corriente de Kirchhoff empleando los siguientes valores para asegurar un listado exacto de todas las cantidades conocidas:

I_i	I_o
10 mA	5 mA
4 mA	4 mA
8 mA	2 mA
22 mA	6 mA
	17 mA

Al comparar la corriente total de entrada contra la de salida se advierte claramente que I_1 es una corriente de 22 mA − 17 mA = 5 mA que sale del sistema.

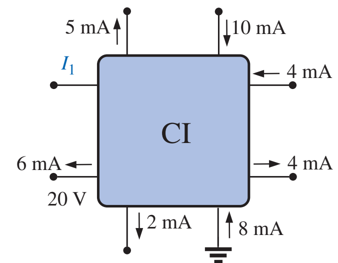


FIGURA 6.31
Circuito integrado.

6.6 REGLA DEL DIVISOR DE CORRIENTE

Tal como lo sugiere su nombre, la **regla del divisor de corriente (RDC)** determinará cómo se divide entre los elementos la corriente que entra a un conjunto de ramas paralelas.

Para dos elementos en paralelo de igual valor, la corriente se dividirá en forma equitativa.

Para elementos en paralelo con valores diferentes, a menor resistencia, mayor será la porción de la corriente de entrada.

Para elementos en paralelo de valores diferentes, la corriente se dividirá según una razón igual a la inversa de los valores de sus resistores.

Por ejemplo, si uno de dos resistores en paralelo es lo doble del otro, entonces la corriente a través del resistor mayor será la mitad de la del otro.

En la figura 6.32, como I_1 es de 1 mA y R_1 es seis veces R_3, la corriente a través de R_3 debe ser de 6 mA (sin hacer ningún otro cálculo incluyendo la corriente total o los niveles reales de resistencia). Para R_2 la corriente debe ser 2 mA ya que R_1 es dos veces R_2. La corriente total debe ser entonces la suma de I_1, I_2 e I_3, o 9 mA. En total, por tanto, conociendo sólo la corriente por R_1, fue posible encontrar todas las otras corrientes de la configuración sin conocer nada más acerca de la red.

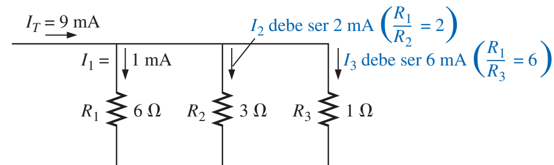


FIGURA 6.32
Demostración de cómo se dividirá la corriente entre resistores distintos.

En redes donde sólo son dados los valores de los resistores junto con la corriente de entrada, se debe aplicar la regla del divisor de corriente para determinar las distintas corrientes de rama. Ello se puede derivar utilizando la red de la figura 6.33.

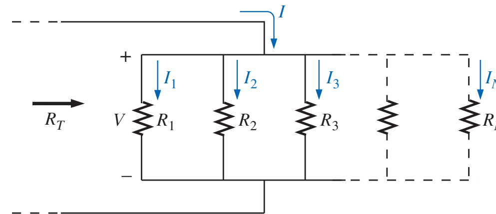


FIGURA 6.33
Derivación de la regla del divisor de corriente.

La corriente de entrada I es igual a V/R_T, donde R_T es la resistencia total de las ramas paralelas. Sustituyendo $V = I_xR_x$ en la ecuación anterior, donde I_x se refiere a la corriente a través de una rama paralela de resistencia R_x, se tiene:

$$I = \frac{V}{R_T} = \frac{I_xR_x}{R_T}$$

e

$$I_x = \frac{R_T}{R_x}I \tag{6.9}$$

que es la forma general para la regla del divisor de corriente. En otras palabras, la corriente a través de cualquier rama paralela es igual al producto de la resistencia *total* de las ramas paralelas y la corriente de entrada dividida entre la resistencia de la rama a través de la cual la corriente va a ser determinada.

Para la corriente I_1,

$$I_1 = \frac{R_T}{R_1}I$$

y para I_2,

$$I_2 = \frac{R_T}{R_2}I$$

y así sucesivamente.

Para el caso particular de *dos resistores en paralelo*, como se muestra en la figura 6.34,

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

e

$$I_1 = \frac{R_T}{R_1} I = \frac{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_1} I$$

e

$$I_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2} \qquad \textbf{(6.10)}$$

Observe la diferencia en los subíndices

De modo similar para I_2,

$$I_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} \qquad \textbf{(6.11)}$$

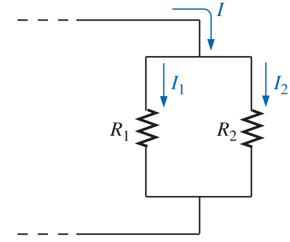


FIGURA 6.34
Desarrollo de una ecuación para división de la corriente entre dos resistores en paralelo.

En otras palabras, para dos ramas paralelas, la corriente a través de cualquier rama es igual al producto del *otro* resistor paralelo y la corriente de entrada dividido entre la *suma* (no la resistencia total en paralelo) de las dos resistencias en paralelo.

EJEMPLO 6.17 Determine la corriente I_2 para la red de la figura 6.35 usando la regla del divisor de corriente.

Solución:

$$I_2 = \frac{R_1 I_s}{R_1 + R_2} = \frac{(4\ \text{k}\Omega)(6\ \text{A})}{4\ \text{k}\Omega + 8\ \text{k}\Omega} = \frac{4}{12}(6\ \text{A}) = \frac{1}{3}(6\ \text{A})$$
$$= \mathbf{2\ A}$$

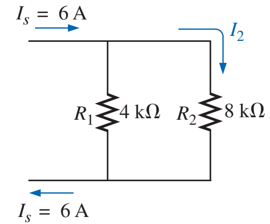


FIGURA 6.35
Ejemplo 6.17.

EJEMPLO 6.18 Encuentre la corriente I_1 para la red de la figura 6.36.

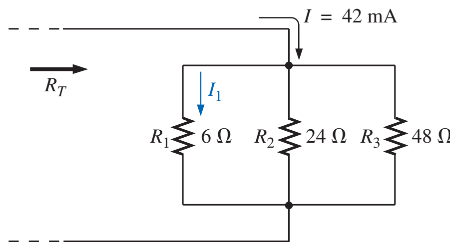


FIGURA 6.36
Ejemplo 6.18.

Solución: Hay dos opciones para resolver este problema. En primer lugar, utilizar la ecuación (6.9) como sigue:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{24\ \Omega} + \frac{1}{48\ \Omega} = 0.1667\ \text{S} + 0.0417\ \text{S} + 0.0208\ \text{S}$$
$$= 0.2292\ \text{S}$$

y $$R_T = \frac{1}{0.2292\text{ S}} = 4.363\ \Omega$$

con $$I_1 = \frac{R_T}{R_1} I = \frac{4.363\ \Omega}{6\ \Omega}(42\text{ mA}) = \mathbf{30.54\ mA}$$

La segunda opción es aplicar la ecuación (6.10) después de combinar R_2 y R_3, como sigue:

$$24\ \Omega \parallel 48\ \Omega = \frac{(24\ \Omega)(48\ \Omega)}{24\ \Omega + 48\ \Omega} = 16\ \Omega$$

e $$I_1 = \frac{16\ \Omega(42\text{ mA})}{16\ \Omega + 6\ \Omega} = \mathbf{30.54\ mA}$$

Ambas opciones generaron la misma respuesta; por ello, en cálculos futuros que impliquen más de dos resistores en paralelo puede elegirse cualquiera de las dos.

EJEMPLO 6.19 Determine la magnitud de las corrientes I_1, I_2 e I_3 para la red de la figura 6.37.

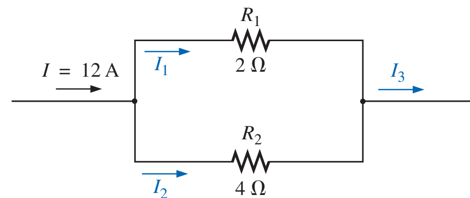


FIGURA 6.37
Ejemplo 6.19.

Solución: Por la ecuación (6.10), la regla del divisor de corriente,

$$I_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2} = \frac{(4\ \Omega)(12\text{ A})}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = \mathbf{8\ A}$$

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff,

$$I = I_1 + I_2$$

e $$I_2 = I - I_1 = 12\text{ A} - 8\text{ A} = \mathbf{4\ A}$$

o, utilizando de nuevo la regla del divisor de corriente,

$$I_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = \frac{(2\ \Omega)(12\text{ A})}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = \mathbf{4\ A}$$

La corriente total que entra a las ramas paralelas debe ser igual a la que sale. Por tanto,

$$I_3 = I = \mathbf{12\ A}$$

o $$I_3 = I_1 + I_2 = 8\text{ A} + 4\text{ A} = \mathbf{12\ A}$$

EJEMPLO 6.20 Determine la resistencia R_1 para efectuar la división de la corriente en la figura 6.38.

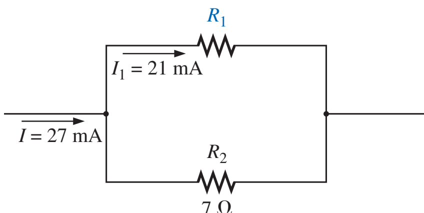


FIGURA 6.38
Ejemplo 6.20.

Solución: Aplicando la regla del divisor de corriente,

$$I_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2}$$

y
$$(R_1 + R_2)I_1 = R_2 I$$
$$R_1 I_1 + R_2 I_1 = R_2 I$$
$$R_1 I_1 = R_2 I - R_2 I_1$$
$$R_1 = \frac{R_2(I - I_1)}{I_1}$$

Al sustituir valores:

$$R_1 = \frac{7\ \Omega(27\text{ mA} - 21\text{ mA})}{21\text{ mA}}$$
$$= 7\ \Omega\left(\frac{6}{21}\right) = \frac{42\ \Omega}{21} = \mathbf{2\ \Omega}$$

Un enfoque alternativo es:

$$I_2 = I - I_1 \quad \text{(ley de corriente de Kirchhoff)}$$
$$= 27\text{ mA} - 21\text{ mA} = 6\text{ mA}$$
$$V_2 = I_2 R_2 = (6\text{ mA})(7\ \Omega) = 42\text{ mV}$$
$$V_1 = I_1 R_1 = V_2 = 42\text{ mV}$$

y
$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{42\text{ mV}}{21\text{ mA}} = \mathbf{2\ \Omega}$$

A partir de los ejemplos anteriores, observe lo siguiente:

La corriente busca la trayectoria de menor resistencia.

Esto es,

1. Pasa más corriente a través del menor de dos resistores en paralelo.
2. La corriente que entra a cualquier número de resistores en paralelo se divide en esos resistores según la razón inversa de sus valores óhmicos. Esta relación se muestra en la figura 6.39.

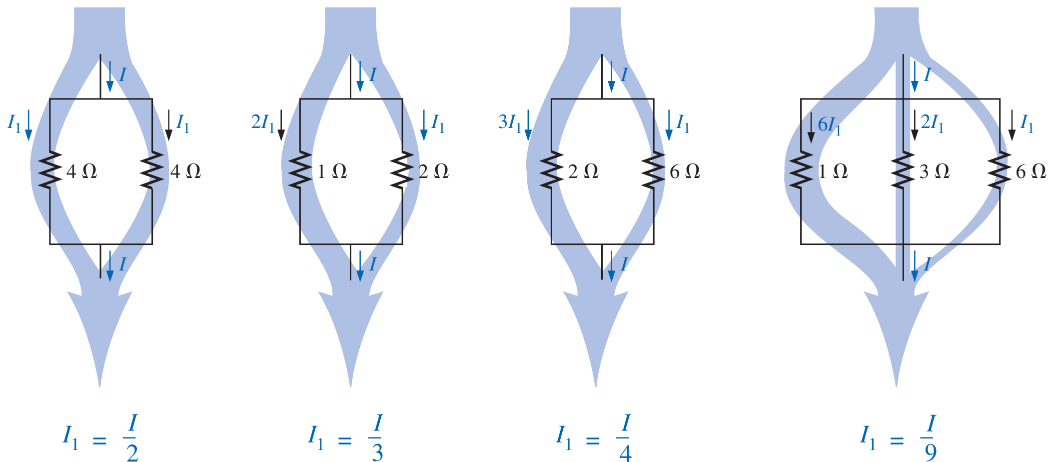


FIGURA 6.39
División de la corriente en ramas paralelas.

6.7 FUENTES DE VOLTAJE EN PARALELO

Las fuentes de voltaje se colocan en paralelo como se muestra en la figura 6.40 sólo si tienen el mismo voltaje. La razón principal para colocar en paralelo dos o más baterías del mismo voltaje sería incrementar la corriente (y, por tanto,

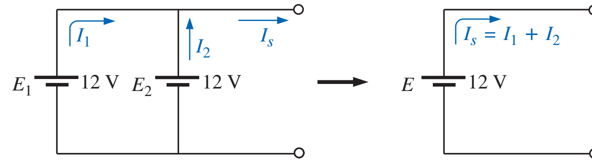


FIGURA 6.40
Fuentes de voltaje en paralelo.

la potencia) de la fuente. Como se ve en la figura 6.40, la corriente de la combinación está determinada por $I_s = I_1 + I_2$ al mismo voltaje. La potencia resultante es el doble de la disponible con un solo suministro.

Si dos baterías de voltajes diferentes se colocan en paralelo, no serían efectivas o se dañarían porque el voltaje de la batería mayor caería rápidamente a la del suministro menor. Considere dos baterías de automóvil de voltajes diferentes colocadas en paralelo, como se muestra en la figura 6.41.

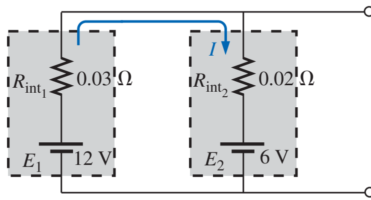


FIGURA 6.41
Baterías en paralelo con voltajes diferentes.

Las resistencias internas relativamente pequeñas de las baterías son los únicos elementos limitantes de corriente del circuito en serie resultante. La corriente es:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_{\text{int}_1} + R_{\text{int}_2}} = \frac{12\text{ V} - 6\text{ V}}{0.03\ \Omega + 0.02\ \Omega} = \frac{6\text{ V}}{0.05\ \Omega} = \mathbf{120\ A}$$

que excede por mucho la especificación por extracción continua del suministro mayor, resultando en una rápida descarga de E_1 y en un impacto destructivo del suministro menor.

6.8 CIRCUITOS ABIERTOS Y CORTO CIRCUITOS

Los circuitos abiertos y los corto circuitos pueden causar a menudo más confusión y dificultades en el análisis de un sistema que las configuraciones estándar en serie o en paralelo. Esto se volverá más obvio en los próximos capítulos, donde se aplicarán algunos de los métodos y teoremas.

Un **circuito abierto** lo constituyen simplemente dos terminales aisladas no conectadas por ninguna clase de elemento, como se muestra en la figura 6.42(a). Como no existe una trayectoria para conducción, la corriente asociada con un circuito abierto debe ser siempre cero. Sin embargo, el voltaje en el circuito abierto puede tener cualquier valor, según se determine por el sistema al que esté conectado. En resumen,

un circuito abierto puede tener una diferencia de potencial (voltaje) en sus terminales, pero la corriente es siempre de cero ampere.

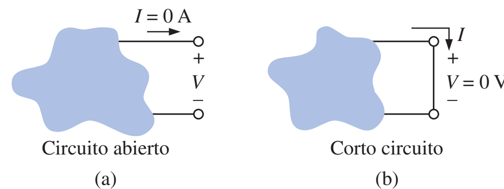


FIGURA 6.42
Dos configuraciones especiales de redes.

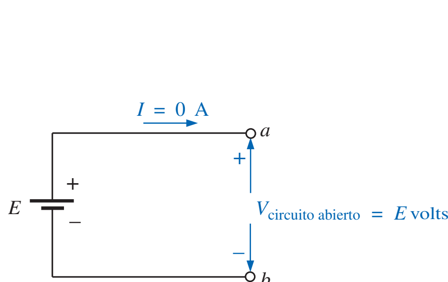


FIGURA 6.43
Demostración de las características de un circuito abierto.

En la figura 6.43, existe un circuito abierto entre las terminales *a* y *b*. Como se muestra en la figura, el voltaje en las terminales del circuito abierto es el de suministro, pero la corriente es cero debido a la ausencia de un circuito completo.

Un **corto circuito** es una conexión directa de muy baja resistencia entre dos terminales de una red, como se muestra en la figura 6.42(b). La corriente a través del corto circuito puede tener cualquier valor, según se determine por el sistema al que esté conectado, pero el voltaje en el corto circuito será siempre de cero volts porque su resistencia se supone igual esencialmente a cero ohms, y $V = IR = I(0\ \Omega) = 0$ V.

En resumen,

un corto circuito puede llevar corriente de un nivel determinado por el circuito externo, pero la diferencia de potencial (voltaje) en sus terminales es siempre de cero volts.

En la figura 6.44(a), la corriente a través del resistor de 2 Ω es de 5 A. Si se desarrolla un corto circuito a través del resistor de 2 Ω la resistencia total de la combinación en paralelo del resistor de 2 Ω y el corto (de esencialmente cero ohms) será $2\ \Omega \parallel 0\ \Omega = \dfrac{(2\ \Omega)(0\ \Omega)}{2\ \Omega + 0\ \Omega} = 0\ \Omega$, y la corriente se elevara a niveles muy altos como se determina por la ley de Ohm:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{10\text{ V}}{0\ \Omega} \longrightarrow \infty\text{ A}$$

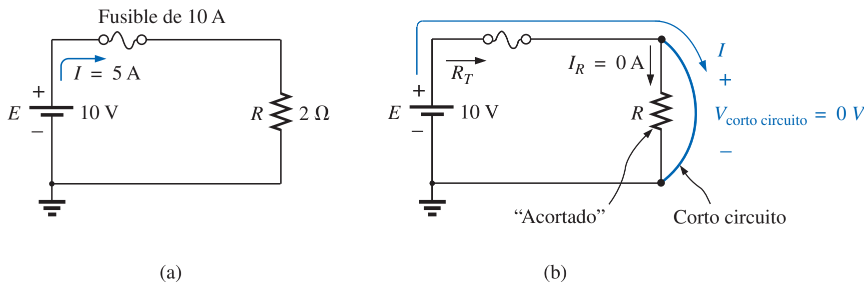


FIGURA 6.44
Demostración del efecto de un corto circuito sobre los niveles de corriente.

El efecto del resistor de 2 Ω ha sido "acortado" efectivamente mediante la conexión de baja resistencia. La corriente máxima está ahora limitada sólo por el interruptor de circuito o fusible en serie con la fuente.

Para alguien no experto, la terminología *corto circuito* o *circuito abierto* está asociada usualmente con situaciones como pérdida de potencia, humo o fuego. Sin embargo, en análisis de redes ambos dispositivos pueden jugar un papel integral en la determinación de los parámetros específicos de un sistema. Muy a menudo, no obstante, si se va a establecer una condición de corto circuito, esto se logra con un *puente* —conductor de resistencia insignificante que se conecta entre los puntos de interés. Establecer un circuito abierto requiere simplemente asegurar que las terminales de interés estén aisladas una de otra.

EJEMPLO 6.21 Determine el voltaje V_{ab} para la red de la figura 6.45.

Solución: El circuito abierto requiere que I sea de cero ampere. La caída de voltaje en ambos resistores es, por tanto, de cero volts ya que $V = IR = (0)R = 0$ V. Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo cerrado,

$$V_{ab} = E = \mathbf{20\ V}$$

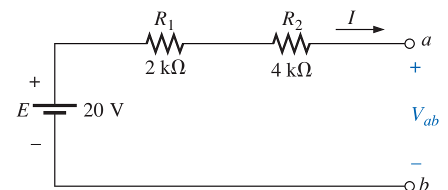


FIGURA 6.45
Ejemplo 6.21.

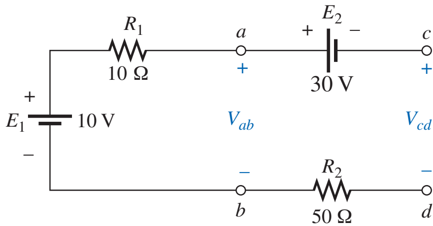


FIGURA 6.46
Ejemplo 6.22.

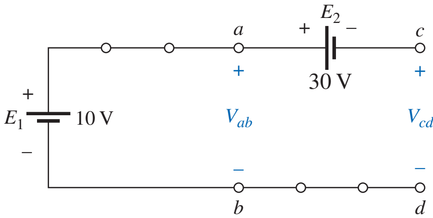


FIGURA 6.47
Nuevo trazado del circuito de la figura.

EJEMPLO 6.22 Determine los voltajes V_{ab} y V_{cd} para la red de la figura 6.46.

Solución: La corriente a través del sistema es de cero ampere debido al circuito abierto que resulta en una caída de 0 V en cada resistor. Ambos resistores pueden, por tanto, ser reemplazados por corto circuitos, como se muestra en la figura 6.47. El voltaje V_{ab} está entonces directamente en la batería de 10 V,

$$V_{ab} = E_1 = \mathbf{10\ V}$$

El voltaje V_{cd} requiere una aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff:

$$+E_1 - E_2 - V_{cd} = 0$$

o bien $\quad V_{cd} = E_1 - E_2 = 10\ \text{V} - 30\ \text{V} = \mathbf{-20\ V}$

El signo negativo en la solución indica simplemente que el voltaje real V_{cd} tiene polaridad opuesta a la que aparece en la figura 6.46.

EJEMPLO 6.23 Determine la corriente y el voltaje desconocidos en cada red de la figura 6.48.

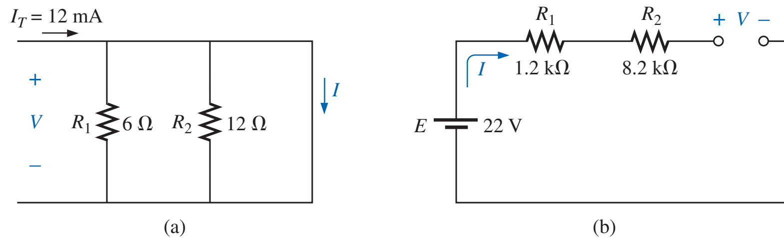


FIGURA 6.48
Ejemplo 6.23.

Solución: Para la red de la figura 6.48(a), la corriente I_T tomará la trayectoria de menor resistencia, y, como la condición de corto circuito en el extremo de la red es la trayectoria de menor resistencia, toda la corriente pasará por el corto circuito. Esta conclusión puede ser verificada mediante la ecuación (6.9). El voltaje en la red es el mismo que en el corto circuito y será de cero volts, como se muestra en la figura 6.49(a).

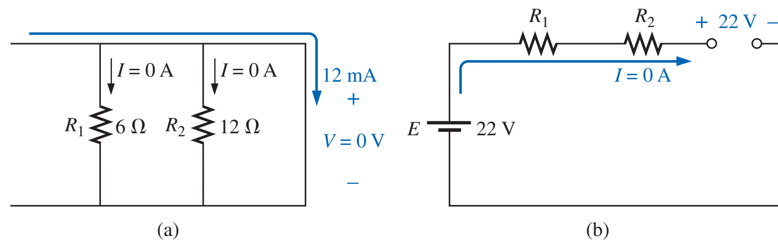


FIGURA 6.49
Soluciones del ejemplo 6.23.

Para la red de la figura 6.48(b), la condición de circuito abierto requiere que la corriente sea de cero ampere. La caída de voltaje en los resistores debe, por

tanto, ser de cero volts, de acuerdo con la ley de Ohm [$V_R = IR = (0)R = 0$ V], con los resistores actuando simplemente como una conexión desde el suministro hasta el circuito abierto. El resultado es que el voltaje del circuito abierto será $E = 22$ V, como se muestra en la figura 6.49(b).

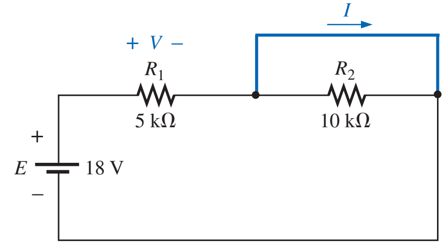


FIGURA 6.50
Ejemplo 6.24.

EJEMPLO 6.24 Calcule la corriente *I* y el voltaje *V* para la red de la figura 6.50.

Solución: El resistor de 10 kΩ ha sido efectivamente puesto en corto circuito por el puente, resultando en la red equivalente de la figura 6.51. Utilizando la ley de Ohm,

$$I = \frac{E}{R_1} = \frac{18 \text{ V}}{5 \text{ k}\Omega} = \mathbf{3.6 \text{ mA}}$$

y
$$V = E = \mathbf{18 \text{ V}}$$

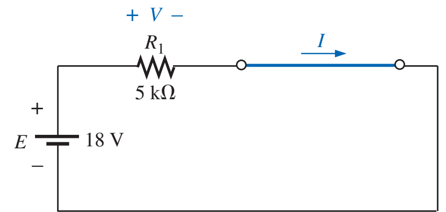


FIGURA 6.51
Nuevo trazado de la red de la figura 6.50.

EJEMPLO 6.25 Determine *V* e *I* para la red de la figura 6.52 si el resistor R_2 se pone en corto circuito.

Solución: La red aparece trazada de nuevo en la figura 6.53. La corriente a través del resistor de 3 Ω es cero debido al circuito abierto, ocasionando que toda la corriente *I* pase por el puente. Como $V_{3\Omega} = IR = (0)R = 0$ V, el voltaje *V* está directamente en el corto, y:

$$V = \mathbf{0 \text{ V}}$$

con
$$I = \frac{E}{R_1} = \frac{6 \text{ V}}{2 \text{ }\Omega} = \mathbf{3 \text{ A}}$$

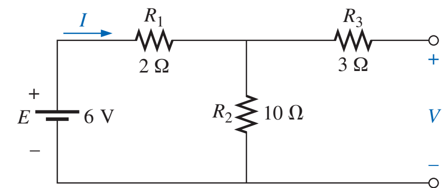


FIGURA 6.52
Ejemplo 6.25.

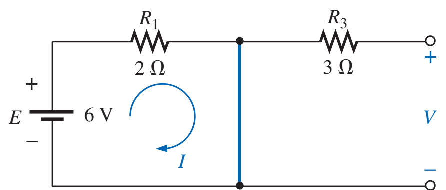


FIGURA 6.53
Red de la figura 6.52 con R_2 reemplazada por un puente.

6.9 VOLTÍMETROS: EFECTO DE CARGA

En los capítulos 2 y 5 se vio que los voltímetros se colocan siempre en un elemento para medir la diferencia de potencial. Ahora es posible darse cuenta de que esta conexión es sinónimo de colocar el voltímetro en paralelo con el elemento. La inserción de un medidor en paralelo con un resistor resulta en una combinación de resistores paralelos como se muestra en la figura 6.54. Como la resistencia de dos ramas en paralelo es siempre menor que la resistencia en paralelo más pequeña, la resistencia del voltímetro debería ser tan grande como fuese posible (idealmente infinita). En la figura 6.54, un DMM con resistencia interna de 11 MΩ está midiendo el voltaje en un resistor de 10 kΩ. La resistencia total de la combinación es:

$$R_T = 10 \text{ k}\Omega \parallel 11 \text{ M}\Omega = \frac{(10^4 \text{ }\Omega)(11 \times 10^6 \text{ }\Omega)}{10^4 \text{ }\Omega + (11 \times 10^6 \text{ }\Omega)} = 9.99 \text{ k}\Omega$$

y se encuentra que la red no está esencialmente perturbada. Sin embargo, al usar un VOM con resistencia interna de 50 kΩ sobre la escala de 2.5 V, la resistencia en paralelo es:

$$R_T = 10 \text{ k}\Omega \parallel 50 \text{ k}\Omega = \frac{(10^4 \text{ }\Omega)(50 \times 10^3 \text{ }\Omega)}{10^4 \text{ }\Omega + (50 \times 10^3 \text{ }\Omega)} = 8.33 \text{ k}\Omega$$

y el comportamiento de la red se alterará un poco ya que el resistor de 10 kΩ parecerá ser ahora de 8.33 kΩ para el resto de la red.

La carga de una red por inserción de medidores no debe tomarse a la ligera, especialmente en trabajos de investigación donde la precisión se considera primordial. Es una buena práctica revisar siempre el nivel de resistencia del medi-

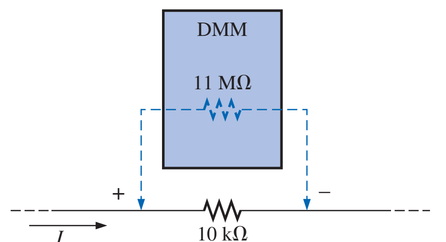


FIGURA 6.54
Carga de un voltímetro.

dor contra los elementos resistivos de la red antes de efectuar mediciones. Un factor de 10 entre niveles de resistencia proporcionará usualmente lecturas del medidor bastante precisas para una amplia gama de aplicaciones.

La mayoría de los DMM tienen niveles de resistencia interna que exceden los 10 MΩ sobre todas las escalas de voltaje, mientras que la resistencia interna de los VOM es sensible a la escala seleccionada. Para determinar la resistencia de cada escala de un VOM en el modo de voltímetro, simplemente multiplique el voltaje máximo de la escala por la **clasificación ohm/volt (Ω/V)** del medidor, encontrada normalmente en la parte baja de la cara del medidor.

Para una clasificación típica ohm/volt de 20,000, la escala 2.5 V tendría una resistencia interna de:

$$(2.5\text{ V})(20{,}000\ \Omega/\text{V}) = 50\text{ k}\Omega$$

mientras que para la escala de 100 V sería:

$$(100\text{ V})(20{,}000\ \Omega/\text{V}) = 2\text{ M}\Omega$$

y para la escala de 250 V,

$$(250\text{ V})(20{,}000\ \Omega/\text{V}) = 5\text{ M}\Omega$$

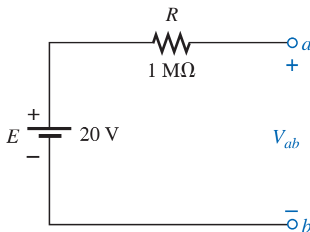


FIGURA 6.55
Ejemplo 6.26.

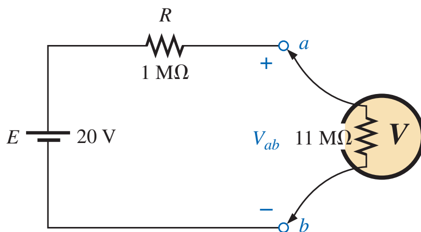


FIGURA 6.56
Aplicación de un DMM al circuito de la figura 6.55.

EJEMPLO 6.26 Para la red relativamente simple de la figura 6.55:

a. ¿Cuál es el voltaje V_{ab} de circuito abierto?
b. ¿Qué indicará un DMM si tiene resistencia interna de 11 MΩ? Compare su respuesta con los resultados de la parte (a).
c. Resuelva la parte (b) para un VOM con clasificación Ω/V de 20,000 sobre la escala de 100 V.

Soluciones:

a. $V_{ab} = \mathbf{20\ V}$
b. El medidor completará el circuito como se muestra en la figura 6.56. Utilizando la regla del divisor de voltaje,

$$V_{ab} = \frac{11\text{ M}\Omega(20\text{ V})}{11\text{ M}\Omega + 1\text{ M}\Omega} = \mathbf{18.33\ V}$$

c. Para el VOM, la resistencia interna del medidor es:

$$R_m = 100\text{ V}(20{,}000\ \Omega/\text{V}) = 2\text{ M}\Omega$$

y
$$V_{ab} = \frac{2\text{ M}\Omega(20\text{ V})}{2\text{ M}\Omega + 1\text{ M}\Omega} = \mathbf{13.33\ V}$$

lo cual revela la necesidad de considerar cuidadosamente la resistencia interna del medidor en algunos casos.

Técnicas de medición

Para componentes en serie, la colocación de amperímetros y voltímetros fue bastante clara si se seguían unas pocas reglas simples. Sin embargo, para circuitos en paralelo, algunas de las mediciones pueden requerir un poco más de cuidado. Para cualquier configuración, tenga presente que todas las mediciones de voltaje pueden realizarse sin perturbar la red en absoluto. Sin embargo, para los amperímetros, la rama en que la corriente va a ser medida debe abrirse e insertar el medidor.

Dado que el voltaje es el mismo en elementos en paralelo, sólo será requerido un voltímetro como se muestra en la figura 6.57. Se trata de una medición de dos puntos, con el conductor negativo o negro conectado al punto de menor potencial y el conductor positivo o rojo al punto de mayor potencial

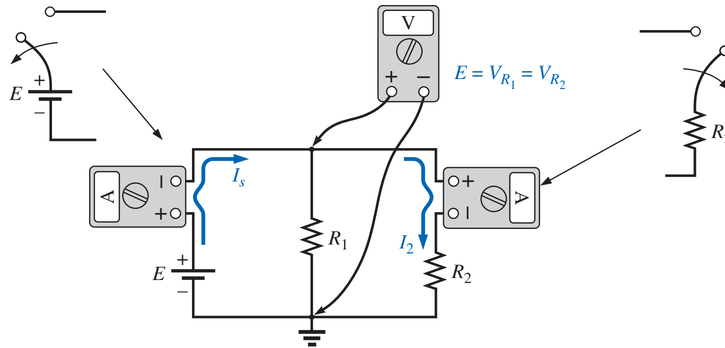


FIGURA 6.57
Instalación de medidores para medir el voltaje y las corrientes de una red en paralelo.

para asegurar una lectura positiva. La corriente a través de la fuente se puede determinar desconectando simplemente la terminal positiva del suministro de la red e insertando el amperímetro como se muestra en la figura 6.57. Observe que está instalado para que la corriente convencional entre por la terminal positiva del medidor y salga por la terminal negativa. La corriente por R_2 también se puede determinar con facilidad desconectando simplemente el conductor de la parte superior del resistor e insertando el amperímetro. De nuevo, el amperímetro está instalado para que la corriente convencional entre a la terminal positiva y se tenga una escala de lectura ascendente.

Medir la corriente a través del resistor R_1 requiere algo más de cuidado. Inicialmente puede parecer que no es muy complicado, pero la experiencia de laboratorio indica claramente que esta medición puede causar algunas dificultades. En general, sólo se requiere que la conexión a la parte superior del resistor R_1 sea removida como se muestra en la figura 6.58(a) para crear un circuito abierto en serie con el resistor R_1. Luego el medidor se inserta como se muestra en la figura 6.58(b), y se obtiene la lectura correcta de la corriente.

Como comprobación de cualquiera de las lecturas del amperímetro, debe recordarse que $I_s = I_1 + I_2$, de manera que si $I_1 = I_s$ o $I_1 = I_2$ (para una red con valores diferentes de R_1 y R_2), habrá que revisar las lecturas. Recuerde también que la lectura del amperímetro será mayor para el menor resistor de dos resistores en paralelo.

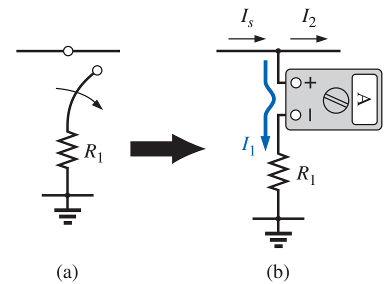


FIGURA 6.58
Medición de la corriente I_1 para la red de la figura 6.57.

6.10 TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El arte de *resolver problemas* no se limita solamente a sistemas eléctricos o electrónicos. En sentido amplio,

resolver problemas es un proceso por medio del cual el conocimiento y la experiencia adquirida se emplean para localizar un problema y ofrecer o implementar una solución.

Hay muchas razones por las que el más simple circuito eléctrico puede no operar correctamente. Una conexión puede estar abierta; los instrumentos de medición pueden necesitar ser calibrados; el suministro de potencia puede no estar encendido o haber sido conectado de forma incorrecta al circuito; un elemento puede no estar funcionando correctamente debido a un daño previo o a fabricación deficiente; un fusible puede haberse fundido; y así en lo sucesivo. Por desgracia, no existe una secuencia definida de pasos para identificar la amplia gama de problemas que pueden presentarse en un sistema eléctrico. Es sólo mediante la experiencia y un entendimiento claro de las leyes básicas de

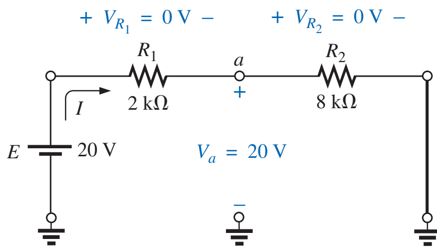


FIGURA 6.59
Red defectuosa.

los circuitos eléctricos que alguien puede esperar volverse experto en localizar rápidamente la causa de una salida errónea.

Sin embargo, resulta bastante obvio que el primer paso indispensable al revisar una red o identificar un problema es tener alguna idea de los niveles esperados de voltaje y corriente. Por ejemplo, el circuito de la figura 6.59 debe tener una corriente en el intervalo bajo de miliampere con la mayoría del voltaje de la fuente en el resistor de 8 kΩ. Sin embargo, como se indicó en la figura 6.59, $V_{R_1} = V_{R_2} = 0$ V y $V_a = 20$ V. Como $V = IR$, los resultados sugieren inmediatamente que $I = 0$ A y que existe en el circuito un circuito abierto. El hecho de que $V_a = 20$ V permite saber inmediatamente que las conexiones son verdaderas desde la tierra de la fuente hasta el punto a. El circuito abierto debe, por tanto, existir entre R_1 y R_2 o en la conexión a tierra de R_2. Un circuito abierto en cualquier punto resultará en $I = 0$ A y en las lecturas obtenidas previamente. Debe recordarse que, aun cuando $I = 0$ A, R_1 forma una conexión entre la fuente y el punto a. Esto es, si $I = 0$ A, $V_{R1} = IR_2 = (0)R_2 = 0$ V, tal como se obtuvo para un corto circuito.

En la figura 6.59, si $V_{R_1} \cong 20$ V y V_{R_2} es muy pequeño ($\cong$0.08 V), ello sugiere primero que el circuito está completo, que una corriente existe, y que un problema rodea al resistor R_2. R_2 no está en corto circuito ya que una condición así daría $V_{R_2} = 0$ V. Una revisión cuidadosa del resistor insertado revela que fue empleado un resistor de 8 Ω en vez del resistor de 8 kΩ solicitado; esto es, se hizo una lectura incorrecta del código de color. Tal vez en el futuro debería usarse un ohmímetro para revisar un resistor y validar la lectura del código de color, o para garantizar que su valor esté aún en el intervalo prescrito por ese código.

Habrá ocasiones en que se desarrolle cierta frustración; cuando se han revisado todos los elementos y todas las conexiones parecen estar en orden. La fuente está encendida y fija al nivel apropiado; los medidores parecen estar funcionando correctamente. En situaciones así, la experiencia es un factor clave. Tal vez el lector pueda recordar cuando una reciente revisión de un resistor reveló que la conexión interna (no externamente visible) era una situación de “conectar o desconectar” o que el resistor fue dañado antes por niveles excesivos de corriente, por lo que su resistencia resultó ser mucho menor que la señalada por el código de color. ¡Verifique la fuente! Tal vez el voltaje estaba fijado correctamente, pero la perilla de control de la corriente se dejó en cero o en posición mínima. ¿Es estable la conexión a tierra? Las preguntas que surgen pueden parecer no tener fin. Sin embargo, recuerde que con la experiencia se adquiere cierta capacidad para localizar problemas más rápidamente. Por supuesto, entre más complicado es el sistema, mayor es la lista de posibilidades, pero a menudo es posible identificar un área particular del sistema que se está comportando impropiamente antes de tener que revisar elementos en forma individual.

6.11 APLICACIONES

Sistema de un automóvil

En el capítulo 3 se examinó el papel que desempeña un potenciómetro en el control de la intensidad de la luz del tablero de un automóvil típico. A continuación se investigará cómo otros elementos del automóvil están conectados a la fuente de cd de 12 V.

Primero, debe ser entendido que todo el sistema eléctrico de un automóvil es un *sistema de corriente directa*. Aunque el generador produce una señal variable de corriente alterna, la rectificación la convierte a otra con nivel promedio de cd para cargar la batería. En particular, observe el capacitor del filtro (Capítulo 10) en la rama del alternador de la figura 6.60 para suavizar la forma

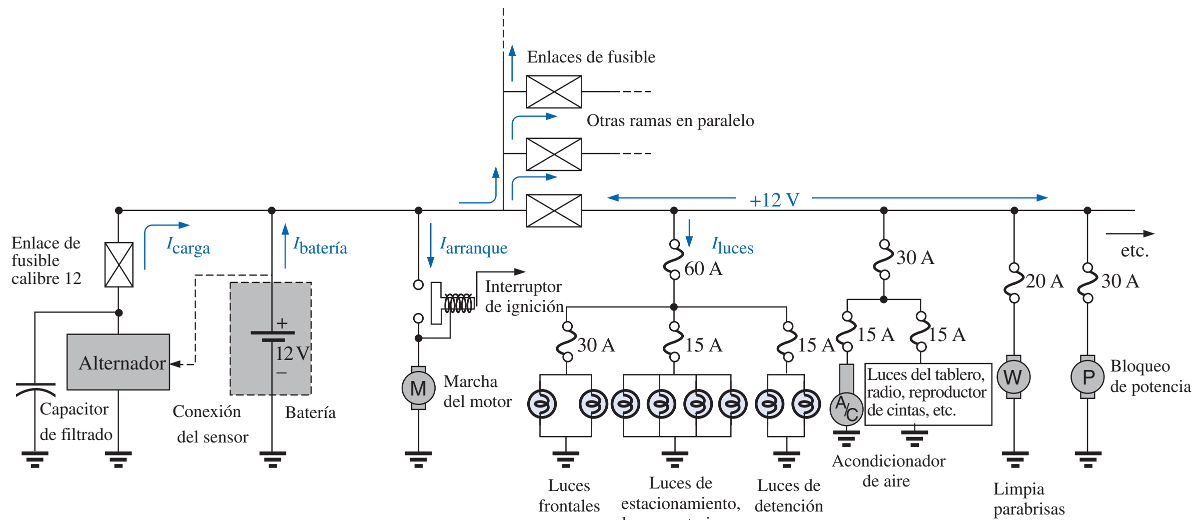


FIGURA 6.60
Vista ampliada del sistema eléctrico de un automóvil.

de onda de ca rectificada y proporcionar un suministro mejorado de cd. Por tanto, la batería cargada debe proporcionar la corriente directa requerida para todo el sistema eléctrico del automóvil. Así, la demanda de potencia sobre la batería en cualquier instante es el producto del voltaje y la corriente demandada por la carga de cada sistema que esté operando en el automóvil. Esto ciertamente establece una carga enorme sobre la batería y en su reacción química interna, lo que justifica todo el cuidado que pueda proporcionársele a la batería.

Como el sistema eléctrico de un automóvil es en sí un sistema en paralelo, la demanda total de corriente de la batería es la suma de las corrientes de todas las ramas en paralelo del automóvil conectadas directamente a la batería. En la figura 6.60 se han esbozado unas cuantas ramas del diagrama de cableado de un automóvil para proporcionar información sobre cableado básico, niveles de corriente y configuraciones de los fusibles. Cada automóvil tiene enlaces de fusibles y fusibles, y algunos tienen también corta circuitos, para proteger los diversas componentes del automóvil y garantizar que no se desarrolle una situación peligrosa de fuego. Excepto por unas cuantas ramas que pueden tener elementos en serie, el voltaje operativo para la mayor parte de los componentes de un automóvil es el voltaje terminal de la batería, que designaremos como 12 V aunque variará típicamente entre 12 V y el nivel de carga de 14.6 V. En otras palabras, cada componente se conecta a la batería en un extremo y a tierra o al chasis del automóvil en el otro extremo.

Con referencia a la figura 6.60, se aprecia que el alternador o rama de carga del sistema está conectado directamente a través de la batería para proporcionar la corriente de carga como se indica. Una vez arrancado el automóvil, el rotor del alternador girará, generando un voltaje variable de ca que pasará entonces por una red rectificadora y un filtro para proporcionar el voltaje de carga de cd para la batería. La carga ocurrirá sólo cuando el sensor, conectado directamente a la batería, señale que el voltaje terminal de la batería es demasiado bajo. Justo a la derecha de la batería se incluyó la rama de arranque para demostrar que no hay una acción de fusible entre la batería y la marcha cuando el interruptor de ignición es activado. La ausencia de acción de fusible está presente porque enormes corrientes de arranque (cientos de ampere) fluirán a través de la marcha para arrancar un automóvil que pueda no haber sido usado durante varios

días y/o haber estado expuesto a un clima frío —y resulta que ocurre una gran fricción entre componentes hasta que el aceite empieza a fluir. El nivel de arranque puede variar tanto que sería difícil encontrar el nivel correcto de fusible, y corrientes altas frecuentes pueden dañar el enlace de fusible y causar una falla a niveles esperados de corriente. Cuando el interruptor de ignición esté activado, el relevador de arranque completará el circuito entre la batería y la marcha, esperándose que el automóvil arranque. Si un automóvil no arranca, lo primero que habría que revisar son las conexiones a la batería, el relevador de arranque y la marcha para asegurarse de que no están proporcionando un circuito abierto inesperado debido a vibraciones, corrosión o humedad.

Una vez que el automóvil ha arrancado, el relevador de arranque se abrirá y la batería se destina entonces a cubrir las demandas de energía de los componentes operativos. Aunque el diagrama de la figura 6.60 no muestra el mecanismo interruptor, toda la red eléctrica del automóvil, excepto por las importantes luces externas, usualmente es desconectada de manera que la intensidad total de la batería pueda dedicarse al proceso de arranque. Las luces se incluyen para situaciones donde apagarlas, incluso por cortos periodos, podría crear situaciones peligrosas; pero si el automóvil está en un ambiente seguro, es mejor dejarlas apagadas durante el arranque para ahorrar a la batería 30 A adicionales. Si las luces están encendidas durante el arranque, puede esperarse una atenuación de su brillo debido a la demanda de corriente de la marcha que puede exceder los 500 A. Hoy en día las baterías son clasificadas típicamente en corriente de arranque en vez de ampere–hora. Actualmente es posible encontrar baterías clasificadas con ampere de arranque frío de entre 700 A y 1000 A.

Separando el alternador de la batería y la batería de las numerosas redes del automóvil están enlaces de fusibles como se muestra en la figura 6.61(a). Éstos son, en realidad, cables de calibre específico diseñados para abrirse a niveles de corriente bastante altos de 100 A o mayores; se incluyen como protección contra esas situaciones en que se presenta una demanda inesperada de corriente de los muchos circuitos a los que están conectados. Esa fuerte demanda puede, por supuesto, originarse en un corto circuito en una de las ramas, pero en tales casos el fusible en esa rama probablemente se desconecte. El enlace de fusible es una protección adicional para la línea si la corriente total demandada por las ramas conectadas en paralelo comienza a exceder niveles seguros. Los fusibles que siguen al enlace tienen la apariencia mostrada en la figura 6.61(b), donde un hueco entre las patas del fusible indica un fusible fundido. Como se muestra en la figura 6.60, el fusible de 60 A (a menudo llamado *fusible de distribución de potencia*) para las luces es un fusible de segunda hilera sensible a la demanda total de los tres circuitos de luz. Finalmente, el tercer nivel del fusible es para

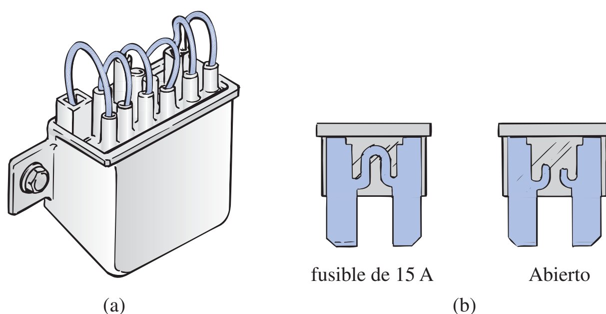


FIGURA 6.61
Fusibles de automóvil: (a) enlace de fusible; (b) de inserción.

las unidades individuales de un automóvil, como luces, acondicionador de aire y bloqueo de potencia. En cada caso, la clasificación del fusible excede la carga normal (nivel de corriente) del componente operativo, pero el nivel de cada fusible da alguna indicación de la demanda por esperarse bajo condiciones de operación normales. Por ejemplo, las luces frontales demandarán típicamente más de 10 A, las luces posteriores más de 5 A, el acondicionador de aire aproximadamente 10 A (cuando se pisa el embrague), y las ventanas eléctricas demandan de 10 a 20 A dependiendo de cuántas operen simultáneamente.

Algunos detalles para sólo una sección de la red total del automóvil se muestran en la figura 6.60. En ésta, se aprecian trayectorias adicionales paralelas con sus respectivos fusibles para revelar los arreglos en paralelo de todos los circuitos.

En todos los vehículos fabricados en Estados Unidos y en algunos automóviles europeos, la trayectoria de retorno a la batería por medio de la conexión a tierra es realmente a través del chasis del automóvil. Esto es, hay sólo un cable a cada carga eléctrica, con el otro extremo puesto a tierra a través del chasis. El retorno a la batería (chasis a la terminal negativa) es, por tanto, un cable de calibre pesado equiparando al conectado a la terminal positiva. En algunos automóviles europeos construidos de una mezcla de materiales como metal, plástico y caucho, la trayectoria de retorno a través del chasis metálico se pierde, debiendo conectarse dos cables a cada carga eléctrica del automóvil.

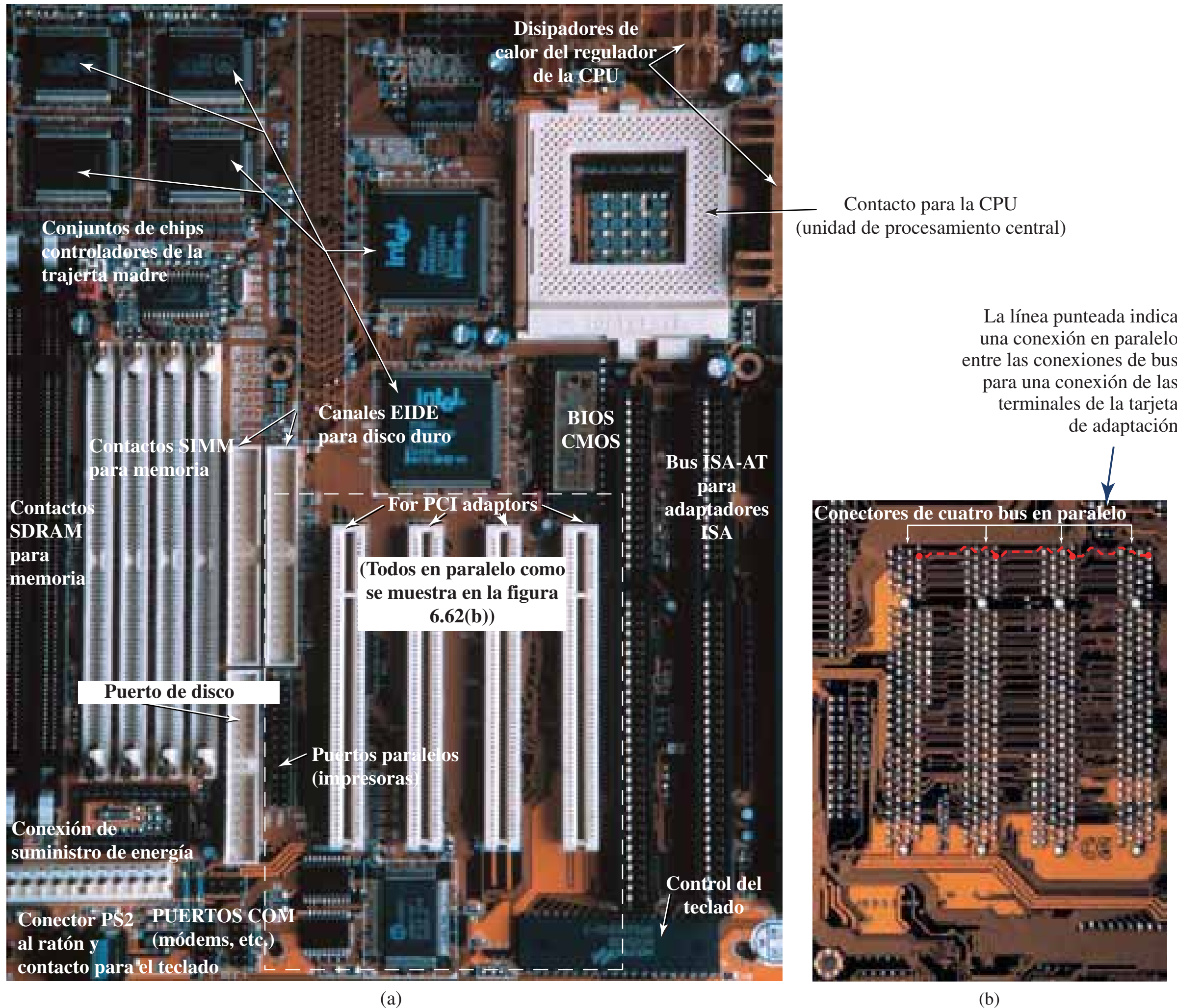
Conexiones en paralelo del bus en una computadora

La construcción interna (hardware) tanto de grandes computadoras como de modelos de escritorio está organizada para aceptar diversas tarjetas en las ranuras que es posible apreciar en la figura 6.62(a). La tarjeta principal (usualmente la más grande), llamada comúnmente *tarjeta madre*, contiene la mayoría de las funciones requeridas para una operación completa de la computadora. Las tarjetas de adaptación normalmente se agregan para ampliar la memoria, establecer una red, agregar equipo periférico, etc. Por ejemplo, si el lector decide agregar un módem a una computadora, simplemente puede insertar la tarjeta módem en el canal apropiado de la figura 6.62(a). Los conectores bus se conectan en paralelo con conexiones comunes a la fuente de energía, buses de dirección y datos, señales de control, tierra, etc. Por ejemplo, si la conexión inferior de cada conector bus es una conexión a tierra, esa conexión a tierra pasa por cada conector bus y es de inmediato conectada a cualquier tarjeta de adaptación instalada. Cada tarjeta tiene un conector de ranura que se ajustará directamente en el conector bus sin necesidad de emplear soldadura o construcción especial. Las terminales de la tarjeta de adaptación, por consiguiente, están diseñadas para proporcionar una trayectoria entre la tarjeta madre y sus componentes que da soporte a la función deseada. Observe en la figura 6.62(b), que es una vista posterior de la región identificada en la figura 6.62(a), que si se sigue la trayectoria de la segunda terminal desde la parte superior en la izquierda, puede verse que estará conectada a la misma terminal sobre los otros tres conectores.

La mayoría de las pequeñas computadoras lap-top tienen actualmente todas las opciones ya instaladas evitando así la necesidad de conectores bus. Una memoria adicional y otras mejoras se añaden como insertos directos en la tarjeta madre.

Cableado doméstico

En el capítulo 4, fueron analizados los niveles básicos de potencia importantes para varios servicios domésticos. Ahora ya es posible iniciar el siguiente paso y examinar las conexiones reales de los elementos en las casas.



(a) (b)

FIGURA 6.62

(a) Tarjeta madre para una computadora de escritorio; (b) se muestran las conexiones de la tarjeta de circuito impreso para la región indicada en la parte (a).

Primero, es importante estar al tanto de que, excepto en algunas circunstancias muy especiales, el cableado básico se realiza en una configuración en paralelo. Sin embargo, cada rama en paralelo puede tener una combinación de elementos en paralelo y en serie. Cada rama completa del circuito recibe todos los 120 V o 208 V, con la corriente determinada por la carga aplicada. La figura 6.63(a) muestra el cableado detallado de un circuito simple que tiene un foco y dos tomas. La figura 6.63(b) permite apreciar la representación esquemática. Observe primero que aunque cada carga está en paralelo con el suministro, los interruptores están siempre conectados en serie con la carga. La potencia llegará al foco sólo cuando el interruptor está cerrado y los 120 V completos aparecen en el foco. El punto de conexión para las dos tomas se halla en la caja del techo que aloja el foco. Como no está presente un interruptor, ambas tomas estarán siempre "listas" a menos que el corta circuito en el tablero principal esté abierto. Es importante que se entienda esto porque podría estarse tentado a cambiar la instalación del foco apagando simplemente el interruptor de pared.

Es cierto que si se es muy cuidadoso podría trabajarse con una línea a la vez (asegurándose de no tocar la otra línea en ningún momento), pero es un procedimiento estándar quitar el corta circuito sobre el tablero siempre que se trabaja sobre un circuito. Observe en la figura 6.63(a) que el cable de *alimentación* (negro) en el aditamento desde el tablero está conectado al interruptor y a ambas tomas en un punto. No está conectado directamente al foco porque eso lo mantendría prendido todo el tiempo. Se suministra potencia al foco a través del interruptor. La conexión continua a las tomas desde el tablero asegura que éstas estén “listas” siempre que el corta circuito en el tablero esté encendido. Observe también cómo el cable de *retorno* (blanco) está conectado directamente al interruptor de la luz y a las tomas para proporcionar un retorno a cada componente. No hay necesidad de que el cable blanco pase por el interruptor ya que un voltaje aplicado es una conexión de dos puntos y el alambre negro está controlado por el interruptor.

La conexión apropiada a tierra de todo el sistema y de las cargas individuales es una de las más importantes facetas de la instalación de cualquier sistema.

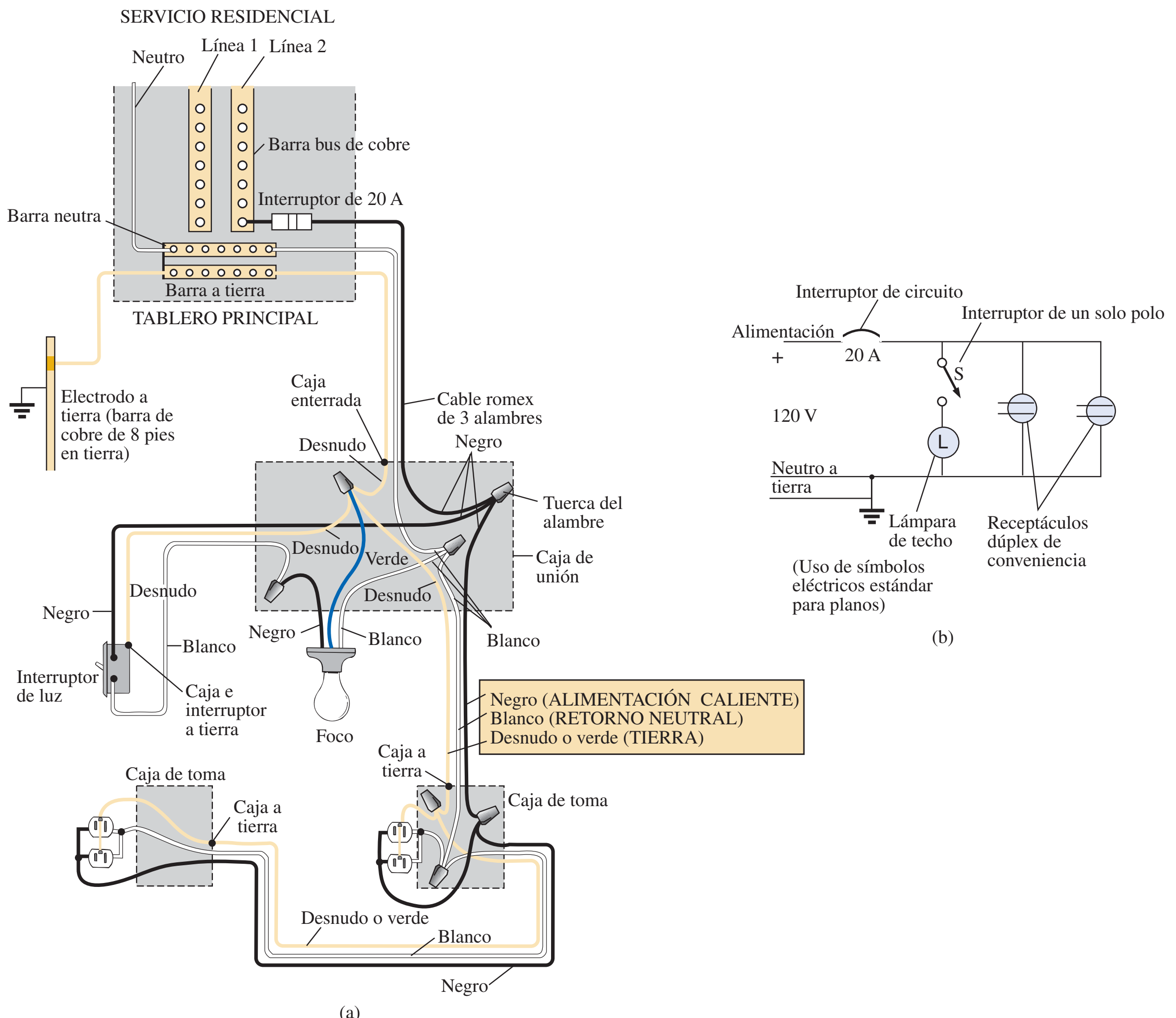


FIGURA 6.63
Cableado doméstico de fase simple: (a) detalles físicos; (b) representación esquemática.

Hay una tendencia ocasional de estar satisfecho si el sistema está trabajando y prestar menos atención a una adecuada conexión a tierra. Recuerde siempre que un sistema conectado apropiadamente a tierra tiene una trayectoria directa a tierra en caso de que se desarrolle una situación no deseable. La ausencia de una conexión directa a tierra ocasionará que el sistema determine su propia trayectoria a tierra, y usted podría ser esa trayectoria si toca el cable equivocado, una caja o un tubo metálicos, etc. En la figura 6.63(a), se han incluido las conexiones para los cables de tierra. Para el romex (alambre recubierto de plástico) usado en la figura 6.63(a), el cable a tierra lo proporciona un alambre de cobre desnudo. Observe que está conectado al tablero que a su vez está conectado directamente a una barra a tierra de cobre de 8 pies. Además, advierta que la conexión a tierra se realiza por todo el circuito, incluyendo el interruptor, el foco y las tomas. Se trata de una conexión continua. Si la caja de tomas, la del interruptor y la cubierta protectora para el foco están hechas de un material conductor como el metal, la tierra estará conectada a cada una de ellas. Si son de plástico, no hay necesidad de la conexión a tierra. Sin embargo, el interruptor, ambas tomas y el foco mismo están conectados a tierra. Para el interruptor y las tomas se tiene usualmente un tornillo verde para el cable a tierra que está conectado a la estructura entera del interruptor o toma, como se muestra en la figura 6.64, incluyendo la conexión a tierra de la toma. Para el interruptor y la toma, incluso el tornillo o tornillos usados para mantener la placa exterior en su lugar están conectados a tierra ya que se encuentran atornillados en el bastidor metálico del interruptor o de la toma. Cuando se atornillan en una caja metálica, la conexión a tierra puede hacerse con los tornillos que sostienen el interruptor o la toma en la caja, tal como se muestra en la figura 6.64. En todo caso, siempre debe ponerse estricta atención al proceso de conectar a tierra al instalar cualquier equipo eléctrico. Esto es un aspecto de la instalación eléctrica que a menudo se trata a la ligera.

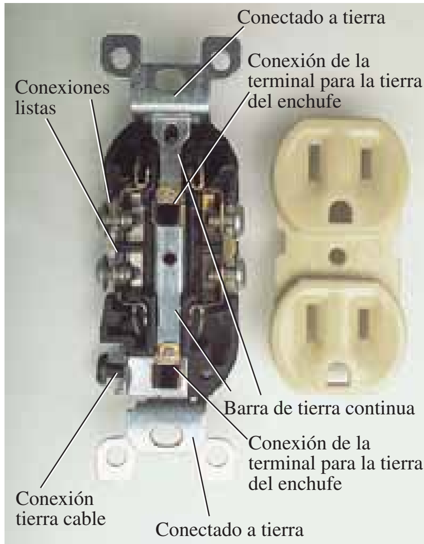


FIGURA 6.64
Conexión continua a tierra en una toma dúplex.

Por el lado práctico, cuando se conecte un alambre a una terminal tipo tornillo, debe enrollarse siempre alrededor del tornillo en el sentido de las manecillas del reloj, de manera que cuando apriete el tornillo, éste agarre al alambre haciéndolo girar en la misma dirección. Una vista ampliada de un arreglo típico de cableado doméstico se mostrará en el capítulo 15.

6.12 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Redes en paralelo de cd La cobertura del análisis por computadora para circuitos en paralelo de cd será muy similar a la de circuitos en serie de cd. Sin embargo, en este caso el voltaje será el mismo en todos los elementos en paralelo, mientras que la corriente por cada rama cambiará con el valor de la resistencia. La red en paralelo por analizar tendrá una amplia gama de valores de resistores para demostrar el efecto sobre la corriente resultante. La siguiente es una lista de abreviaturas para cualquier parámetro de una red cuando se usa PSpice:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= 10^{-15} \\ \mathbf{p} &= 10^{-12} \\ \mathbf{n} &= 10^{-9} \\ \boldsymbol{\mu} &= 10^{-6} \\ \mathbf{m} &= 10^{-3} \\ \mathbf{k} &= 10^{+3} \\ \mathbf{MEG} &= 10^{+6} \\ \mathbf{G} &= 10^{+9} \\ \mathbf{T} &= 10^{+12} \end{aligned}$$

En particular, observe que **m** (o **M**) se usa para “mili”, y **MEG** para “megaohms”. Además, PSpice no distingue entre unidades mayúsculas y minúsculas, pero ciertos parámetros usan típicamente la abreviatura con mayúsculas o minúsculas como se mostró antes.

Como los detalles de establecer una red e ir por el proceso de simulación fueron vistos con detenimiento en las secciones 4.9 y 5.12 para circuitos de corriente directa, la cobertura aquí se limitará solamente a los pasos requeridos. Estos pasos demostrarán que después de adquirir algo de experiencia, “trazar” el circuito y ejecutar la simulación es bastante rápido y directo.

Después de seleccionar la tecla **Create document** (izquierda superior de la pantalla), la siguiente secuencia presentará la ventana de captura esquemática: **ParallelDC-OK-Create a blank project-OK-PAGE1** (si es necesario).

La fuente de voltaje y los resistores se introducen como se describió en secciones anteriores, pero ahora los resistores tienen que ser girados 90º. El lector puede hacer esto por medio de un clic derecho del ratón antes de poner un resistor en su lugar. La larga lista de opciones resultante incluye **Rotate**, que si se selecciona girará el resistor 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj. El resistor también se puede girar seleccionando simultáneamente **Ctrl-R**; entonces, con un clic izquierdo del ratón, es posible ponerlo en posición. Un beneficio adicional de esta maniobra es que los resistores restantes estarán colocados ya en la posición vertical. Los valores seleccionados para la fuente de voltaje y los resistores aparecen en la figura 6.65.

Una vez que la red está completa, la simulación y los resultados de la figura 6.65 pueden obtenerse con la siguiente secuencia: **Select New Simulation Profile key-Bias Point-Create-Analysis-Bias Point-OK-Run PSpice key-Exit(x)**.

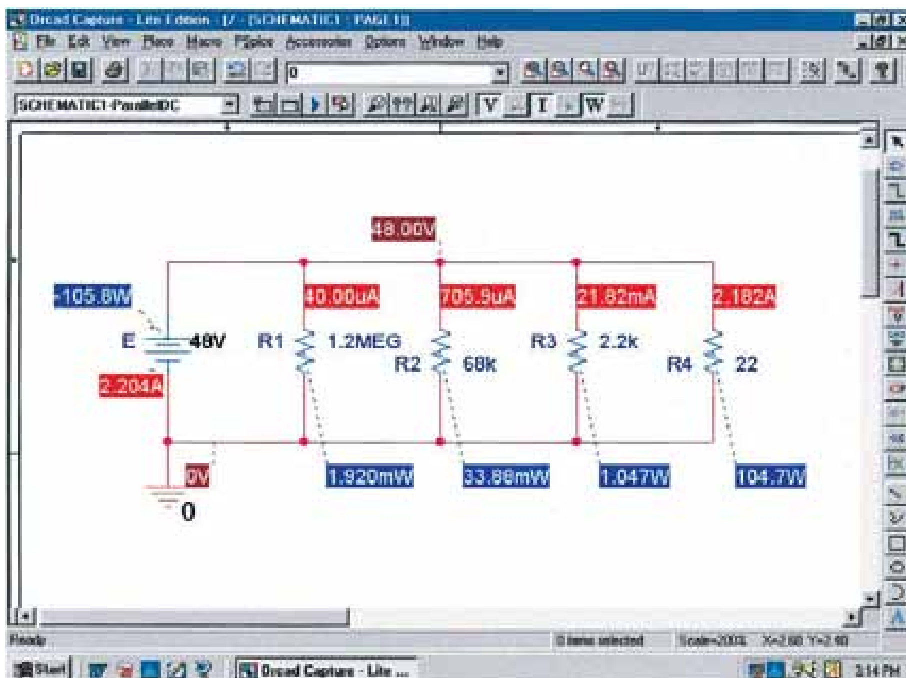


FIGURA 6.65
Aplicación de PSpice a una red en paralelo.

El resultado es la figura 6.65, que revela con claridad el mismo voltaje en todos los elementos en paralelo y que la corriente aumenta de manera significativa con una disminución de la resistencia. El intervalo en valores de los resistores sugiere, por inspección, que la resistencia total será justamente menor que la menor resistencia de 22 Ω. Aplicando la ley de Ohm y la corriente de la fuente de 2.204 A resulta en una resistencia total de $R_T = E/I_s = 48$ V/2.204 A = 21.78 Ω, lo cual confirma la conclusión anterior.

Electronics Workbench

Red en paralelo de cd Con propósitos de comparación, la red en paralelo de la figura 6.65 será analizada en seguida empleando Electronics Workbench. La fuente y la tierra se seleccionan y colocan como se muestra en la figura 6.66 mediante el procedimiento definido en los capítulos previos. Para los resistores se selecciona **VIRTUAL_RESISTOR**, pero se debe girar 90º para concordar con la configuración de la figura 6.65. Esto puede lograrse haciendo primero clic sobre el símbolo de resistor para colocarlo en el estado activo. Es importante asegurarse de que los pequeños cuadrados negros resultantes rodean al símbolo, a la etiqueta y al valor; de otra manera, se habrá activado sólo la etiqueta o el valor. Luego se da un clic derecho con el ratón. Entonces se puede seleccionar **90 Clockwise** y el resistor girará de manera automática. Desafortunadamente, no se tiene aquí un continuo, por lo que el siguiente resistor tendrá que girarse usando el mismo procedimiento. Los valores de cada resistor se fijan por un doble clic sobre el símbolo de resistor para obtener el cuadro de diálogo **Virtual Resistor**. Recuerde que la unidad de medida se controla con las flechas de desplazamiento ubicadas a la derecha de la unidad de medición. Para EWB, a diferencia de PSpice, megaohm usa **M** mayúscula y miliohm usa **m** minúscula.

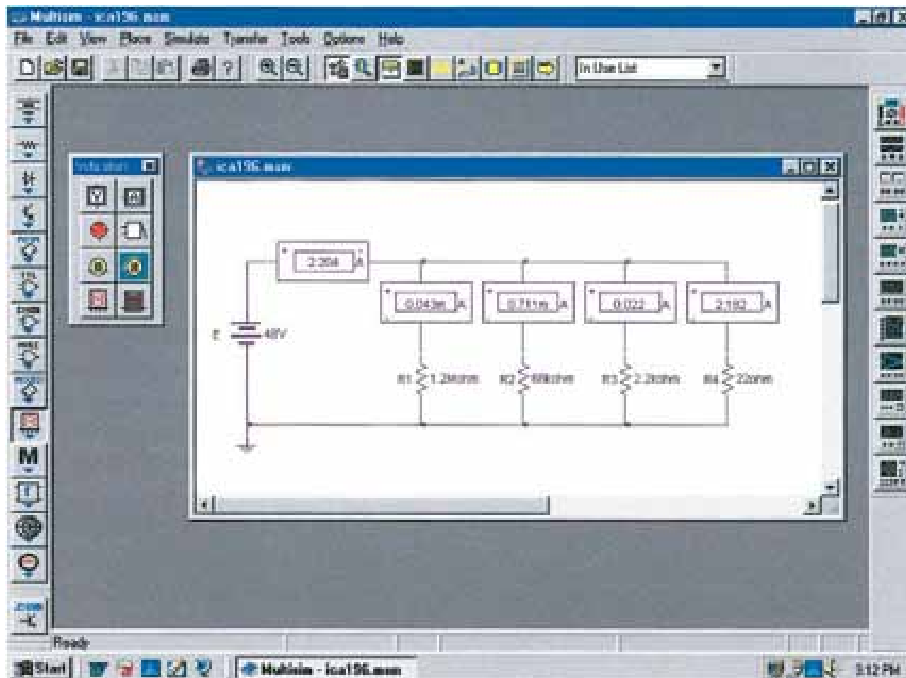


FIGURA 6.66

Uso de los indicadores de Electronics Workbench para exhibir las corrientes de una red de cd en paralelo.

Esta vez, en lugar de medidores se emplearán indicadores para efectuar las mediciones. La tecla **Indicators** es la décima hacia abajo en la barra de herramientas izquierda; tiene la apariencia de una pantalla LCD con el número 8. Una vez que ha sido seleccionada, aparecerán ocho posibles indicadores. Para este ejemplo, se utilizará el indicador **A**, que representa un amperímetro, ya que el interés se centra en los niveles de corriente. Cuando se ha seleccionado **A**, aparece **Component Browser** con cuatro opciones bajo **Component Name List**; cada opción se refiere a una posición para el amperímetro. La **H** significa "horizontal", como se muestra en la ventana de figuras cuando se abre por primera vez el cuadro de diálogo. La **HR** también significa "horizontal", pero con la polaridad invertida. La **V** es para una configuración vertical con el signo positivo en la parte superior, y **VR** es la posición vertical con el signo positivo en la base. Se selecciona simplemente la que se prefiera seguida por un **OK**, y aparecerá en esa posición en la pantalla. Al hacer clic en su posición es posible retornar por el siguiente indicador. Una vez que todos los elementos están en su lugar y se han establecido sus valores, la simulación se puede iniciar con la secuencia **Simulate-Run**. Aparecerán los resultados mostrados en la figura 6.66.

Observe que todos los resultados aparecen con los recuadros indicadores. Todos son resultados positivos porque los amperímetros fueron introducidos con una configuración en la que una corriente convencional entra por la terminal positiva. También puede advertirse que, como fue cierto al insertar los medidores, los indicadores están colocados en serie con la rama en la que va a medirse la corriente.

PROBLEMAS

SECCIÓN 6.2 **Elementos en paralelo**

1. Para cada configuración de la figura 6.67, determine qué elementos están en serie y cuáles están en paralelo.

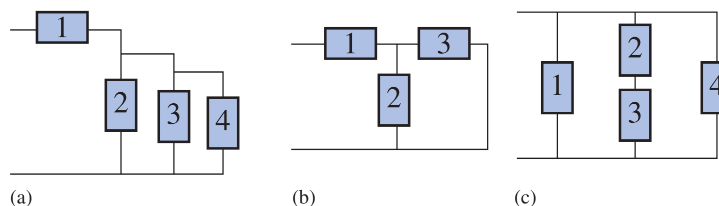


FIGURA 6.67
Problema 1.

2. Para la red de la figura 6.68:

a. ¿Qué elementos están en paralelo?
b. ¿Qué elementos están en serie?
c. ¿Qué ramas están en paralelo?

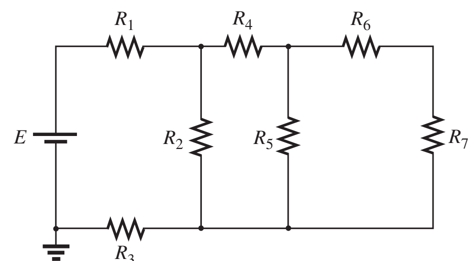


FIGURA 6.68
Problema 2.

SECCIÓN 6.3 Conductancia y resistencia totales

3. Encuentre la conductancia y la resistencia totales para las redes de la figura 6.69.

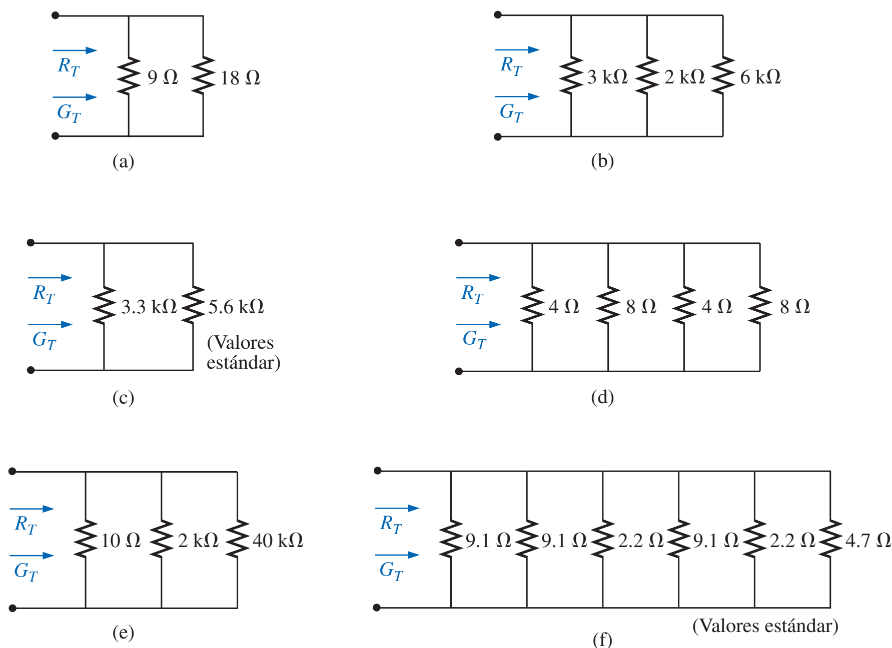


FIGURA 6.69
Problema 3.

4. La conductancia total de cada red de la figura 6.70 está especificada. Encuentre el valor en ohms de las resistencias desconocidas.

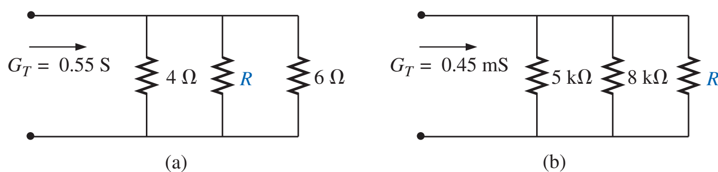


FIGURA 6.70
Problema 4.

5. La resistencia total de cada circuito de la figura 6.71 está especificada. Encuentre el valor en ohms de las resistencias desconocidas.

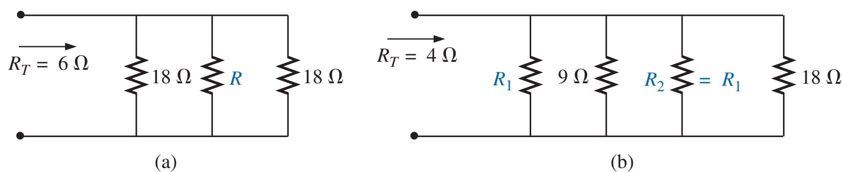


FIGURA 6.71
Problema 5.

***6.** Determine los resistores desconocidos de la figura 6.72 si $R_2 = 5R_1$ y $R_3 = (1/2)R_1$.

***7.** Determine R_1 para la red de la figura 6.73.

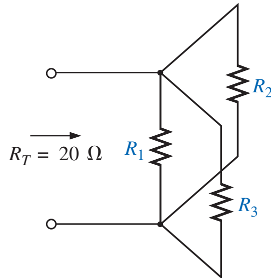


FIGURA 6.72
Problema 6.

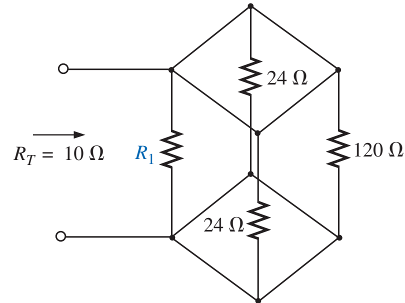


FIGURA 6.73
Problema 7.

SECCIÓN 6.4 Circuitos en paralelo

8. Para la red de la figura 6.74:

a. Encuentre la conductancia y la resistencia totales.

b. Determine I_s y la corriente a través de cada rama paralela.

c. Verifique si la corriente de la fuente es igual a la suma de las corrientes de ramas paralelas.

d. Encuentre la potencia disipada por cada resistor, y observe si la potencia entregada es igual a la potencia disipada.

e. Si los resistores están disponibles con clasificación de potencia de 1/2, 1, 2 y 50 W, ¿cuál es la clasificación de potencia mínima para cada resistor?

9. Resuelva el problema 8 para la red de la figura 6.75.

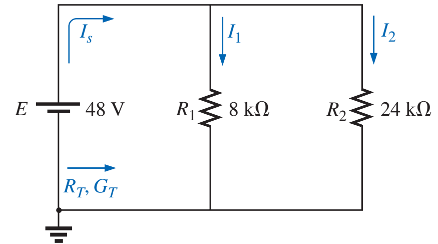


FIGURA 6.74
Problema 8.

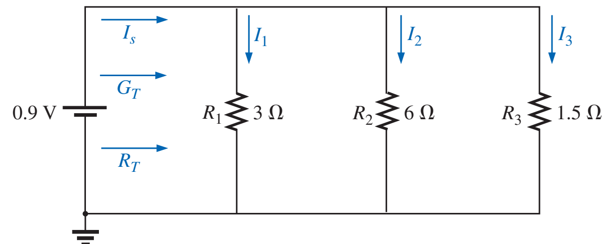


FIGURA 6.75
Problema 9.

10. Resuelva el problema 8 para la red de la figura 6.76 construida con valores de resistores estándar.

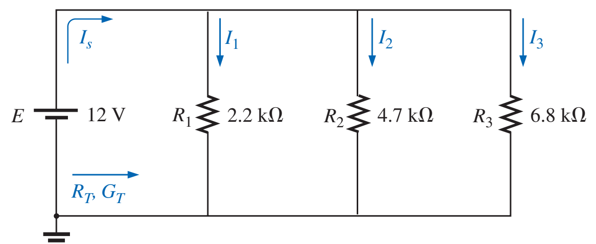


FIGURA 6.76
Problema 10.

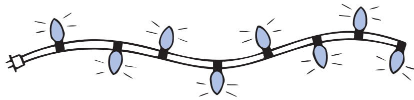


FIGURA 6.77
Problema 11.

11. Ocho focos están conectados en paralelo como se muestra en la figura 6.77.
   a. Si el conjunto está conectado a una fuente de 120 V, ¿cuál es la corriente a través de cada foco si cada uno tiene una resistencia de 1.8 kΩ?
   b. Determine la resistencia total de la red.
   c. Encuentre la potencia entregada a cada foco.
   d. Si un foco se funde (esto es, los filamentos se abren), ¿cuál es el efecto sobre los focos restantes?
   e. Compare el arreglo en paralelo de la figura 6.77 con el arreglo en serie de la figura 5.87. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas relativas del sistema en paralelo comparado con el arreglo en serie?

12. Una parte de un servicio residencial a una casa se muestra en la figura 6.78.
   a. Determine la corriente a través de cada rama en paralelo de la red.
   b. Calcule la corriente extraída de la fuente de 120 V. ¿Se desconectará el interruptor de circuito de 20 A?
   c. ¿Cuál es la resistencia total de la red?
   d. Determine la potencia suministrada por la fuente de 120 V. ¿Cómo se compara con la potencia total de la carga?

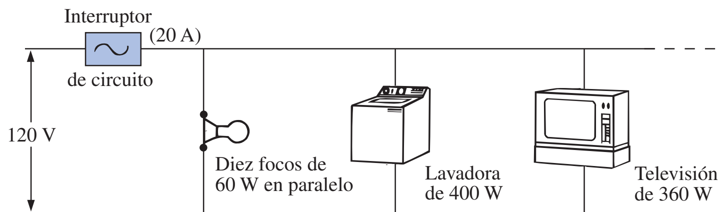


FIGURA 6.78
Problemas 12 y 37.

13. Determine las corrientes I_1 e I_s para las redes de la figura 6.79.

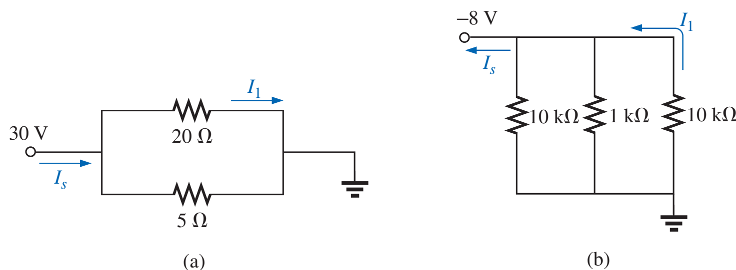


FIGURA 6.79
Problema 13.

14. Use la información proporcionada y determine la resistencia R_1 para la red de la figura 6.80.

***15.** Determine la potencia entregada por la batería de cd en la figura 6.81.

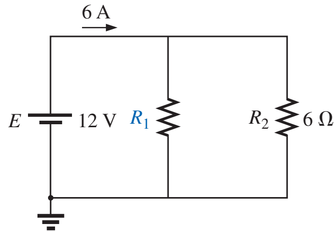


FIGURA 6.80
Problema 14.

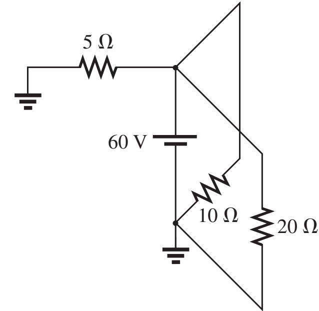


FIGURA 6.81
Problema 15.

***16.** Para la red de la figura 6.82:
 a. Encuentre la corriente I_1.
 b. Calcule la potencia disipada por el resistor de 4 Ω.
 c. Encuentre la corriente I_2.

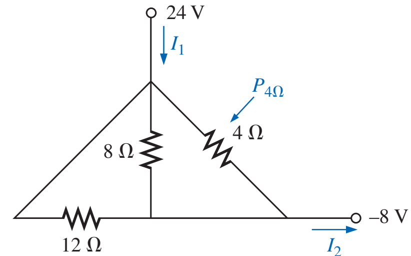


FIGURA 6.82
Problema 16.

***17.** Para la red de la figura 6.83:
 a. Encuentre la corriente *I*.
 b. Determine el voltaje *V*.
 c. Calcule la corriente fuente I_s.

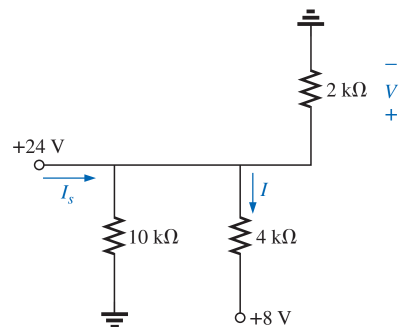


FIGURA 6.83
Problema 17.

SECCIÓN 6.5 Ley de corriente de Kirchhoff

18. Encuentre todas las corrientes desconocidas y sus direcciones en los circuitos de la figura 6.84.

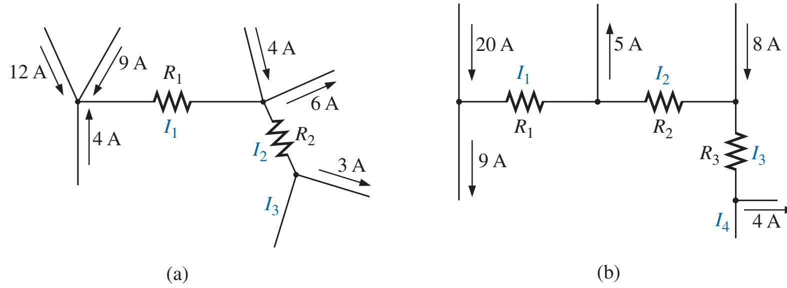


FIGURA 6.84
Problemas 18 y 38.

***19.** Utilice la ley de corriente de Kirchhoff y determine las corrientes desconocidas para las redes de la figura 6.85.

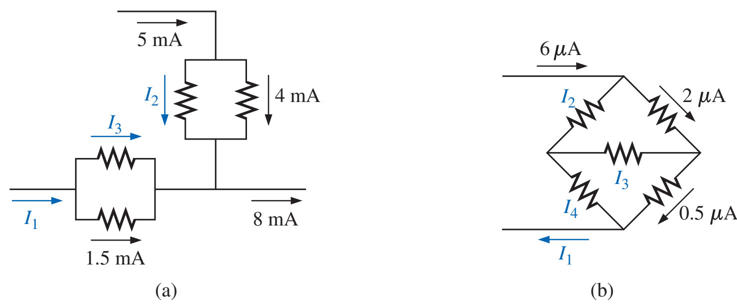


FIGURA 6.85
Problema 19.

20. Utilice la información proporcionada en la figura 6.86 y encuentre los resistores R_1 y R_3, la resistencia total R_T, y la fuente de voltaje E.

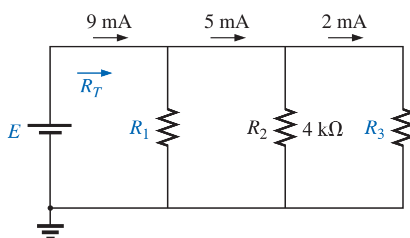


FIGURA 6.86
Problema 20.

***21.** Encuentre las cantidades desconocidas para los circuitos de la figura 6.87 usando la información proporcionada.

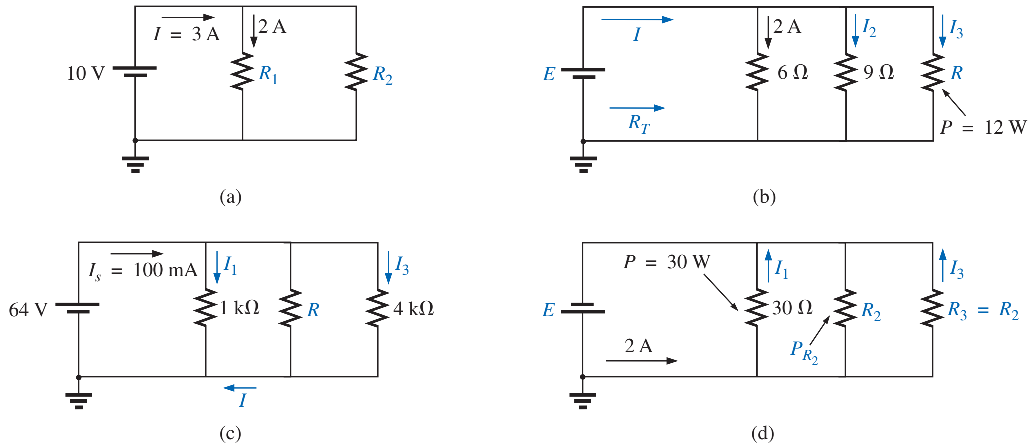


FIGURA 6.87
Problema 21.

SECCIÓN 6.6 Regla del divisor de corriente

22. Con la información proporcionada en la figura 6.88, determine la corriente a través de cada rama usando simplemente la razón de los valores de los resistores en paralelo. Luego determine la corriente total I_T.

23. Utilice la regla del divisor de corriente y encuentre las corrientes desconocidas para las redes de la figura 6.89.

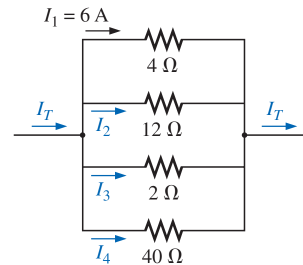


FIGURA 6.88
Problema 22.

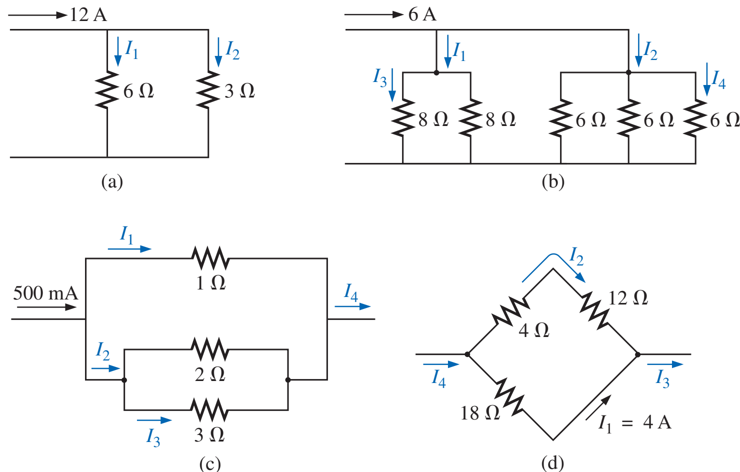


FIGURA 6.89
Problema 23.

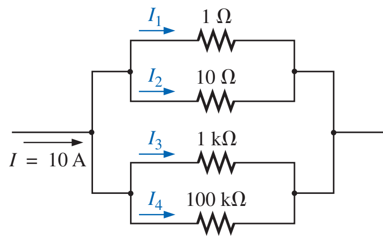


FIGURA 6.90
Problema 24.

***24.** Las partes (a), (b) y (c) de este problema deben resolverse por inspección, esto es, mentalmente. La idea es obtener una solución sin una larga serie de cálculos. Para la red de la figura 6.90:

a. ¿Cuál es el valor aproximado de I_1 considerando la magnitud de los elementos en paralelo?

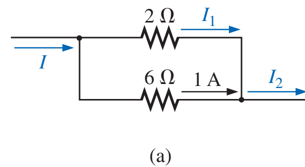
b. ¿Qué son las razones I_1/I_2 e I_3/I_4?

c. ¿Qué son las razones I_2/I_3 e I_1/I_4?

d. Calcule la corriente I_1 y compárela con el resultado de la parte (a).

e. Determine la corriente I_4 y calcule la razón I_1/I_4. ¿Cómo se compara la razón con el resultado de la parte (c)?

25. Encuentre las cantidades desconocidas usando la información proporcionada para las redes de la figura 6.91.



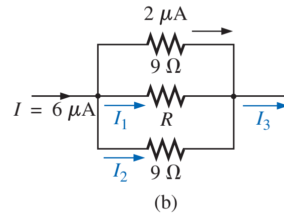


FIGURA 6.91
Problema 25.

***26.** Para la red de la figura 6.92, calcule el resistor R que asegurará una corriente $I_1 = 3I_2$.

***27.** Diseñe la red de la figura 6.93 de tal manera que $I_2 = 4I_1$ e $I_3 = 3I_2$.

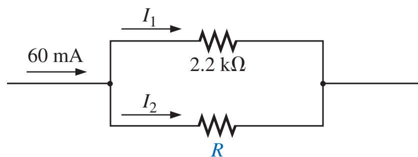


FIGURA 6.92
Problema 26.

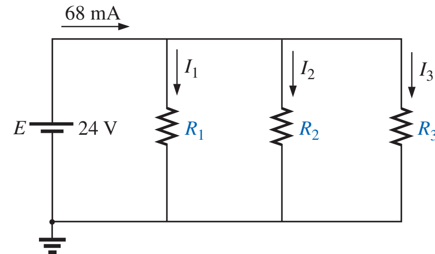


FIGURA 6.93
Problema 27.

SECCIÓN 6.7 Fuentes de voltaje en paralelo

28. Suponga que los suministros son idénticos y determine las corrientes I_1 e I_2 para la red de la figura 6.94.

29. Suponga que los suministros son idénticos y determine la corriente I y la resistencia R para la red en paralelo de la figura 6.95.

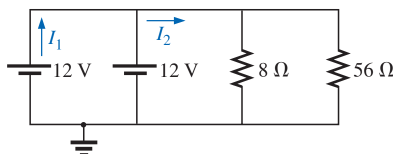


FIGURA 6.94
Problema 28.

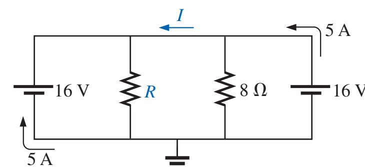


FIGURA 6.95
Problema 29.

SECCIÓN 6.8 Circuitos abiertos y corto circuitos

30. Para la red de la figura 6.96:
- **a.** Determine I_s y V_L.
- **b.** Determine I_s si R_L está en corto circuito.
- **c.** Determine V_L si R_L es reemplazada por un circuito abierto.

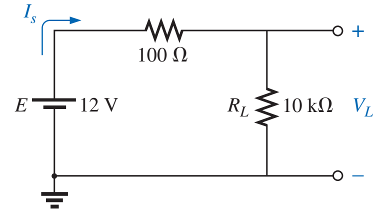


FIGURA 6.96
Problema 30.

31. Para la red de la figura 6.97:
- **a.** Determine el voltaje V_L del circuito abierto.
- **b.** Si el resistor de 2.2 kΩ es puesto en corto circuito, ¿cuál es el nuevo valor de V_L?
- **c.** Determine V_L si el resistor de 4.7 kΩ es reemplazado por un circuito abierto.

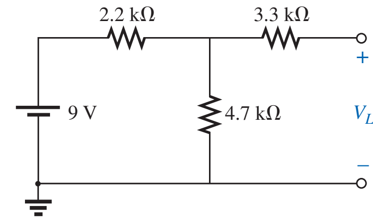


FIGURA 6.97
Problema 31.

***32.** Para la red de la figura 6.98, determine:
- **a.** Las corrientes de corto circuito I_1 e I_2.
- **b.** Los voltajes V_1 y V_2.
- **c.** La corriente fuente I_s.

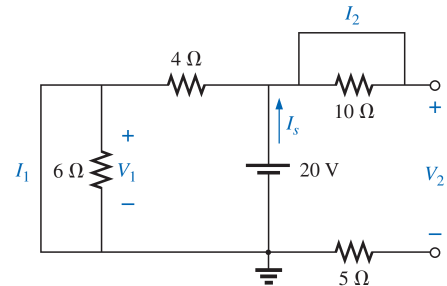


FIGURA 6.98
Problema 32.

SECCIÓN 6.9 Voltímetros: efecto de carga

33. Para la red de la figura 6.99:
- **a.** Determine el voltaje V_2.
- **b.** Determine la lectura de un DMM que tenga una resistencia interna de 11 MΩ al usarlo para medir V_2.
- **c.** Resuelva la parte (b) con un VOM que tenga una clasificación ohm/volt de 20,000 usando la escala de 10 V. Compare los resultados de las partes (b) y (c). Explique cualquier diferencia.
- **d.** Resuelva la parte (c) con $R_1 = 100$ kΩ y $R_2 = 200$ kΩ.
- **e.** Con base en lo anterior, ¿puede usted sacar alguna conclusión general sobre el uso de un voltímetro?

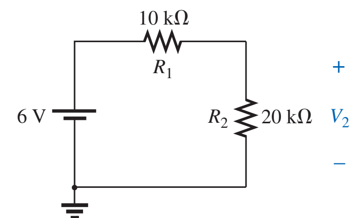


FIGURA 6.99
Problemas 33 y 40.

SECCIÓN 6.10 Técnicas de resolución de problemas

34. Con base en las medidas de la figura 6.100, determine si la red está operando correctamente; si no, trate de determinar el porqué.

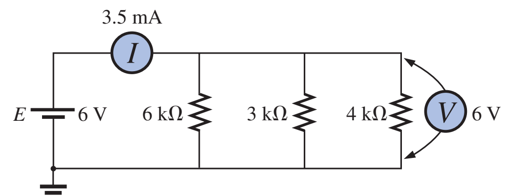


FIGURA 6.100
Problema 34.

35. Con referencia a la red de la figura 6.101, ¿es $V_a = 8.8$ V la lectura correcta para la configuración dada? Si no, ¿qué elemento ha sido conectado incorrectamente en la red?

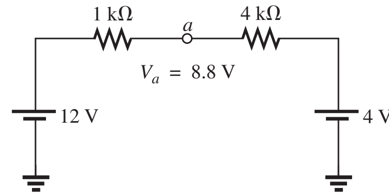


FIGURA 6.101
Problema 35.

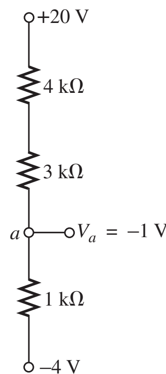


FIGURA 6.102
Problema 36.

36. **a.** El voltaje V_a para la red de la figura 6.102 es de **−1 V**. Si salta repentinamente a 20 V, ¿qué puede haberle pasado a la estructura del circuito? Localice el área del problema.
b. Si el voltaje V_a es de 6 V en vez de −1 V, trate de explicar qué está mal con respecto a la construcción de la red.

SECCIÓN 6.12 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

37. Determine todas las corrientes para la red de la figura 6.78 mediante análisis esquemático.

38. Determine las cantidades desconocidas para la red de la figura 6.84 mediante análisis esquemático.

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

39. Escriba un programa para determinar la resistencia total y la conductancia de cualquier número de elementos en paralelo.

40. Escriba un programa que tabule el voltaje V_2 de la figura 6.99 medido por un VOM con resistencia interna de 200 kΩ conforme R_2 varía desde 10 kΩ hasta 200 kΩ en incrementos de 10 kΩ.

GLOSARIO

Circuito abierto En una red, ausencia de una conexión directa entre dos puntos.

Circuito en paralelo Configuración de circuito en la cual los elementos tienen dos puntos en común.

Clasificación ohm/volt (Ω/V) Clasificación usada para determinar la sensibilidad de la corriente al movimiento y la resistencia interna del medidor.

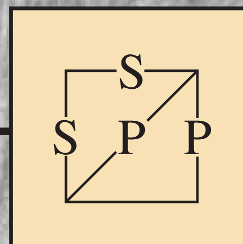
Corto circuito Conexión directa de bajo valor resistivo que puede alterar considerablemente el comportamiento de un elemento o sistema.

Ley de corriente de Kirchhoff (LCK) La suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un nodo es cero.

Nodo Unión de dos o más ramas.

Regla del divisor de corriente (RDC) Método por el cual la corriente a través de elementos en paralelo se puede determinar sin encontrar primero el voltaje en esos elementos.

7



Redes en serie-paralelo

7.1 REDES EN SERIE-PARALELO

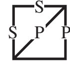
Un firme entendimiento de los principios básicos asociados con los circuitos en serie y en paralelo será un antecedente suficiente para comenzar el análisis de cualquier red de cd con una sola fuente que tenga una combinación de elementos o ramas en serie y en paralelo. Las redes con varias fuentes se considerarán con todo detalle en los capítulos 8 y 9. En general,

las **redes en serie-paralelo** *son redes que contienen configuraciones de circuito tanto en serie como en paralelo.*

Es posible volverse hábil en el análisis de redes en serie-paralelo sólo mediante el contacto, la práctica y la experiencia. Con el tiempo, la ruta hacia la incógnita buscada se volverá más obvia a medida que se recuerden configuraciones similares y la frustración resultante de haber seleccionado un método incorrecto. Son pocos los pasos que pueden servir de apoyo para comenzar con los primeros ejercicios, aunque el valor de cada uno será apreciable sólo a través de la experiencia.

Método general

1. Debe tomarse un momento para estudiar el problema "en general" y realizar un breve bosquejo mental del método general que se planee utilizar. El resultado de esto podrían ser atajos que permitan ahorros de energía y tiempo.
2. Luego se examina cada región de la red de forma independiente antes de unirlas en combinaciones serie-paralelo. Esto, por lo general, simplificará la red y posiblemente revele un método directo hacia la obtención de una o más incógnitas buscadas. También eliminará muchos de los errores que podrían resultar debido a la falta de un método sistemático.
3. Debe hacerse un nuevo trazado de la red lo más seguido posible con las ramas reducidas y las cantidades desconocidas sin cambios para mantener la claridad y proporcionar las redes reducidas para regresar a las cantidades desconocidas desde la fuente.



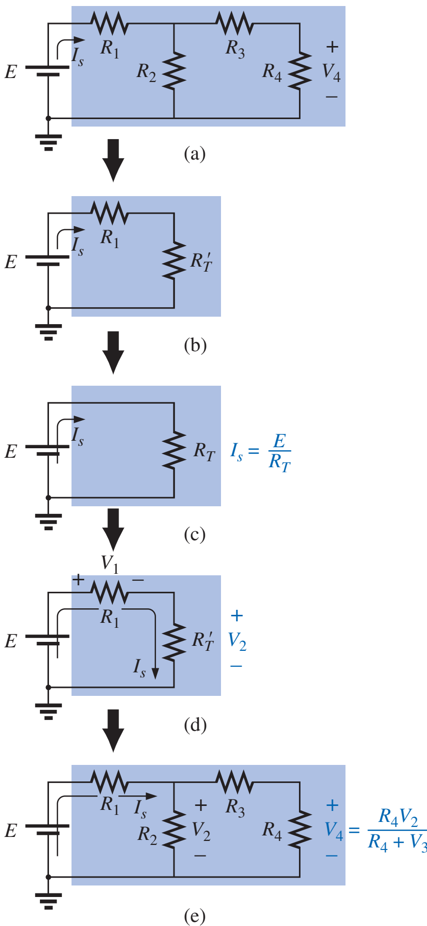


FIGURA 7.1
Presentación del método de reducción y regreso.

4. Cuando se tenga una solución, deberá verificarse si es razonable mediante la consideración de las magnitudes de la fuente de energía y los elementos dentro de la red. Si no parece razonable, el circuito habrá de resolverse utilizando otro método o verificando cuidadosamente el procedimiento inicial.

Método de reducción y regreso

Para muchas redes en serie-paralelo con una sola fuente, el análisis procede hacia la fuente, determina la corriente de la fuente y luego regresa a la incógnita buscada. En la figura 7.1(a), por ejemplo, se busca el voltaje V_4. La ausencia de una sola ruta en serie o en paralelo hacia V_4 desde la fuente revela de forma inmediata que los métodos presentados en los últimos dos capítulos no pueden aplicarse aquí. Primero, deberán combinarse los elementos en serie y en paralelo para establecer el circuito reducido de la figura 7.1(b). Luego, los elementos en serie se combinan para formar la más simple de las configuraciones en la figura 7.1(c). Entonces es posible determinar la corriente de la fuente utilizando la ley de Ohm y proceder de regreso a través de la red como se muestra en la figura 7.1(d). El voltaje V_2 puede calcularse y luego volver a trazar la red original, como se muestra en la figura 7.1(e). Dado que ahora se conoce V_2, es posible utilizar la regla del divisor de voltaje para encontrar el voltaje deseado V_4. Debido a las similitudes entre las redes de las figuras 7.1(a) y 7.1(e), y entre 7.1(b) y 7.1(d), las redes trazadas durante la fase de reducción se utilizan, por lo general, para el camino de regreso.

Aunque en el párrafo anterior no se describieron todos los detalles del análisis, el método general para varios problemas de redes en serie-paralelo utiliza el procedimiento descrito antes: proceda hacia atrás para I_s y luego siga el camino de regreso para la incógnita específica. No todo problema sigue este camino, algunos tendrán soluciones más simples y directas. Sin embargo, el método de reducción y regreso manejará un tipo de problema que con frecuencia se presenta una y otra vez.

Método de diagramas de bloques

A lo largo del libro se utilizará el método de diagramas de bloques para enfatizar el hecho de que es posible encontrar combinaciones de elementos en serie o en paralelo, no sólo elementos resistivos individuales. Este método revelará también la cantidad de redes aparentemente distintas que tienen la misma estructura básica y, por tanto, pueden requerir técnicas de análisis similares.

Inicialmente, existirá cierta inquietud sobre la identificación de elementos y ramas, en serie y en paralelo, y sobre la selección del mejor procedimiento a seguir en la búsqueda de la solución. Sin embargo, a medida que se progrese a través de los ejemplos y se realicen algunos problemas, emergerá un camino común para la mayoría de las soluciones que puede hacer del análisis de tales sistemas una experiencia interesante y agradable.

En la figura 7.2, los bloques B y C se encuentran en paralelo (con los puntos b y c en común), y la fuente de voltaje E se encuentra en serie con el bloque A (punto a en común). La combinación paralela de B y C también se encuentra en serie con A y con la fuente de voltaje E gracias a los puntos comunes b y c, respectivamente.

Para asegurar que el análisis siguiente sea lo más claro y ordenado posible, se utilizará la siguiente notación para las combinaciones de elementos en serie y en paralelo. Para los resistores en serie R_1 y R_2, se insertará una coma entre sus notaciones de subíndice, como se muestra aquí:

$$R_{1,2} = R_1 + R_2$$

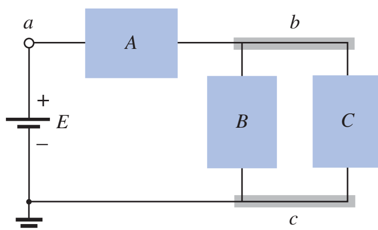


FIGURA 7.2
Presentación del método de diagramas de bloques.



Para los resistores en paralelo R_1 y R_2, el símbolo paralelo se insertará entre sus notaciones de subíndice, como sigue:

$$R_{1\|2} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

EJEMPLO 7.1 Si cada bloque de la figura 7.2 fuera un elemento resistivo único, podría resultar la red de la figura 7.3.

La combinación paralela de R_B y R_C da como resultado:

$$R_{B\|C} = R_B \parallel R_C = \frac{(12\text{ k}\Omega)(6\text{ k}\Omega)}{12\text{ k}\Omega + 6\text{ k}\Omega} = 4\text{ k}\Omega$$

La resistencia equivalente $R_{B\|C}$ se encuentra entonces en serie con R_A, y la resistencia total "observada" por la fuente es:

$$\begin{aligned} R_T &= R_A + R_{B\|C} \\ &= 2\text{ k}\Omega + 4\text{ k}\Omega = \mathbf{6\text{ k}\Omega} \end{aligned}$$

El resultado es una red equivalente, como se muestra en la figura 7.4, que permite la determinación de la corriente de fuente I_s.

$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{54\text{ V}}{6\text{ k}\Omega} = \mathbf{9\text{ mA}}$$

y, dado que la fuente y R_A se encuentran en serie,

$$I_A = I_s = 9\text{ mA}$$

Se puede utilizar la red equivalente de la figura 7.5 para determinar I_B e I_C aplicando la regla del divisor de corriente:

$$I_B = \frac{6\text{ k}\Omega(I_s)}{6\text{ k}\Omega + 12\text{ k}\Omega} = \frac{6}{18}I_s = \frac{1}{3}(9\text{ mA}) = \mathbf{3\text{ mA}}$$

$$I_C = \frac{12\text{ k}\Omega(I_s)}{12\text{ k}\Omega + 6\text{ k}\Omega} = \frac{12}{18}I_s = \frac{2}{3}(9\text{ mA}) = \mathbf{6\text{ mA}}$$

o, mediante la aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff,

$$I_C = I_s - I_B = 9\text{ mA} - 3\text{ mA} = \mathbf{6\text{ mA}}$$

Observe que en esta solución, se procedió de regreso a la fuente para obtener la corriente de fuente o corriente total suministrada por la fuente. Luego se determinaron las incógnitas restantes trabajando de regreso a través de la red para encontrar las otras incógnitas.

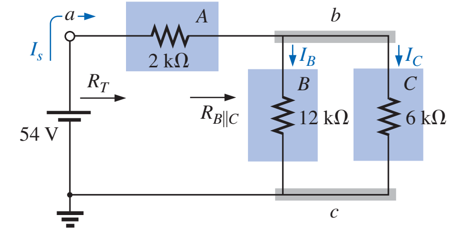


FIGURA 7.3
Ejemplo 7.1.

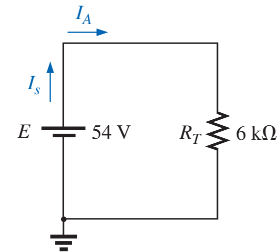


FIGURA 7.4
Equivalente reducido de la figura 7.3.

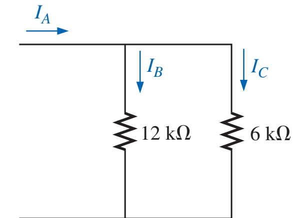


FIGURA 7.5
Determinación de I_B e I_C para la red de la figura 7.3.

EJEMPLO 7.2 También es posible que los bloques *A*, *B* y *C* de la figura 7.2 contengan los elementos y configuraciones de la figura 7.6. Al trabajar con cada región:

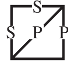
$$A\text{:} \quad R_A = 4\ \Omega$$

$$B\text{:} \quad R_B = R_2 \parallel R_3 = R_{2\|3} = \frac{R}{N} = \frac{4\ \Omega}{2} = 2\ \Omega$$

$$C\text{:} \quad R_C = R_4 + R_5 = R_{4,5} = 0.5\ \Omega + 1.5\ \Omega = 2\ \Omega$$

Los bloques *B* y *C* siguen en paralelo, y

$$R_{B\|C} = \frac{R}{N} = \frac{2\ \Omega}{2} = 1\ \Omega$$



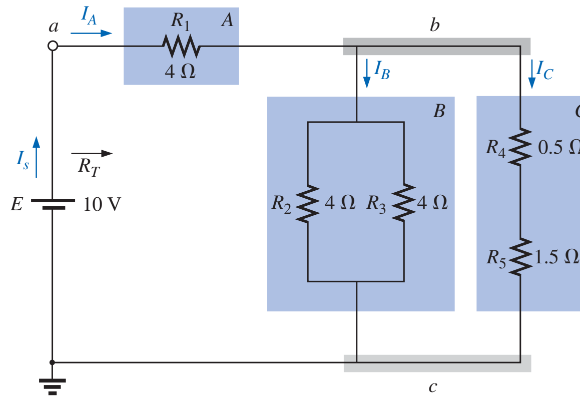


FIGURA 7.6
Ejemplo 7.2.

con

$$R_T = R_A + R_{B\|C}$$
$$= 4\,\Omega + 1\,\Omega = \mathbf{5\,\Omega}$$

(Observe la similitud entre esta ecuación y la obtenida para el ejemplo 7.1.)

e
$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{10\text{ V}}{5\,\Omega} = \mathbf{2\text{ A}}$$

Es posible encontrar las corrientes I_A, I_B e I_C utilizando la reducción de la red de la figura 7.6 (recuerde el paso 3) como se tiene en la figura 7.7. Observe que I_A, I_B e I_C son las mismas en las figuras 7.6 y 7.7 y, por tanto, aparecen también en la figura 7.7. En otras palabras, las corrientes I_A, I_B e I_C de la figura 7.7 tendrán la misma magnitud que las mismas corrientes de la figura 7.6.

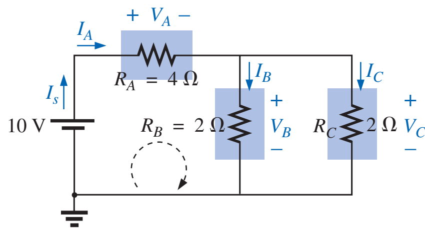


FIGURA 7.7
Equivalente reducido de la figura 7.6.

$$I_A = I_s = \mathbf{2\text{ A}}$$

e
$$I_B = I_C = \frac{I_A}{2} = \frac{I_s}{2} = \frac{2\text{ A}}{2} = \mathbf{1\text{ A}}$$

Regresando a la red de la figura 7.6, tenemos:

$$I_{R_2} = I_{R_3} = \frac{I_B}{2} = \mathbf{0.5\text{ A}}$$

Los voltajes V_A, V_B y V_C de cualquier figura son:

$$V_A = I_A R_A = (2\text{ A})(4\,\Omega) = \mathbf{8\text{ V}}$$
$$V_B = I_B R_B = (1\text{ A})(2\,\Omega) = \mathbf{2\text{ V}}$$
$$V_C = V_B = \mathbf{2\text{ V}}$$

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff para el lazo indicado en la figura 7.7, se obtiene:

$$\Sigma_{\circlearrowright} V = E - V_A - V_B = 0$$
$$E = V_A + V_B = 8\text{ V} + 2\text{ V}$$

o bien:
$$\underline{10\text{ V} = 10\text{ V} \quad \text{(se comprueba)}}$$

EJEMPLO 7.3 Otra posible variación de la figura 7.2 aparece en la figura 7.8.

$$R_A = R_{1\|2} = \frac{(9\,\Omega)(6\,\Omega)}{9\,\Omega + 6\,\Omega} = \frac{54\,\Omega}{15} = 3.6\,\Omega$$

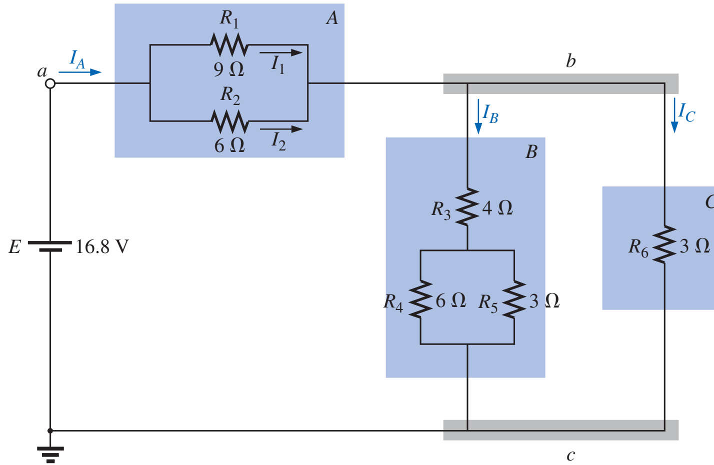


FIGURA 7.8
Ejemplo 7.3.

$$R_B = R_3 + R_{4\|5} = 4\ \Omega + \frac{(6\ \Omega)(3\ \Omega)}{6\ \Omega + 3\ \Omega} = 4\ \Omega + 2\ \Omega = 6\ \Omega$$

$$R_C = 3\ \Omega$$

La red de la figura 7.8 puede volverse a trazar, ahora en forma reducida, como se muestra en la figura 7.9. Observe las similitudes entre este circuito y los circuitos de las figuras 7.3 y 7.7.

$$R_T = R_A + R_{B\|C} = 3.6\ \Omega + \frac{(6\ \Omega)(3\ \Omega)}{6\ \Omega + 3\ \Omega}$$

$$= 3.6\ \Omega + 2\ \Omega = \mathbf{5.6\ \Omega}$$

$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{16.8\ \text{V}}{5.6\ \Omega} = \mathbf{3\ A}$$

$$I_A = I_s = \mathbf{3\ A}$$

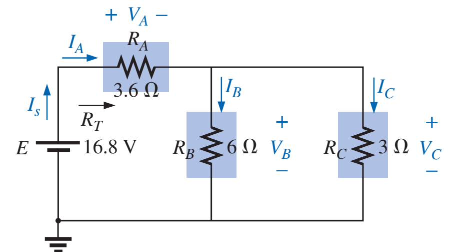


FIGURA 7.9
Equivalente reducido de la figura 7.8.

Al aplicar la regla del divisor de corriente resulta:

$$I_B = \frac{R_C I_A}{R_C + R_B} = \frac{(3\ \Omega)(3\ \text{A})}{3\ \Omega + 6\ \Omega} = \frac{9\ \text{A}}{9} = \mathbf{1\ A}$$

Mediante la ley de corriente de Kirchhoff,

$$I_C = I_A - I_B = 3\ \text{A} - 1\ \text{A} = \mathbf{2\ A}$$

Mediante la ley de Ohm,

$$V_A = I_A R_A = (3\ \text{A})(3.6\ \Omega) = \mathbf{10.8\ V}$$

$$V_B = I_B R_B = V_C = I_C R_C = (2\ \text{A})(3\ \Omega) = \mathbf{6\ V}$$

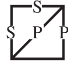
Al regresar a la red original (Figura 7.8) y aplicando la regla del divisor de corriente,

$$I_1 = \frac{R_2 I_A}{R_2 + R_1} = \frac{(6\ \Omega)(3\ \text{A})}{6\ \Omega + 9\ \Omega} = \frac{18\ \text{A}}{15} = \mathbf{1.2\ A}$$

Mediante la ley de corriente de Kirchhoff,

$$I_2 = I_A - I_1 = 3\ \text{A} - 1.2\ \text{A} = \mathbf{1.8\ A}$$

Las figuras 7.3, 7.6 y 7.8 son sólo algunas de la infinita variedad de configuraciones que puede adoptar una red comenzando con el arreglo básico de la figura 7.2. Se incluyeron en este análisis para enfatizar la importancia de con-



siderar cada región de la red de manera independiente antes de buscar la solución de la red como un todo.

Los bloques de la figura 7.2 pueden ajustarse de muchas formas. De hecho, no existe un límite en el número de configuraciones en serie-paralelo que pueden aparecer en una red dada. Al revés, el método de diagramas de bloques puede emplearse de forma efectiva para reducir la aparente complejidad de un sistema mediante la identificación de los principales componentes en serie y en paralelo de una red. Este enfoque será demostrado en los siguientes ejemplos.

7.2 EJEMPLOS DESCRIPTIVOS

EJEMPLO 7.4 Encuentre la corriente I_4 y el voltaje V_2 para la red de la figura 7.10.

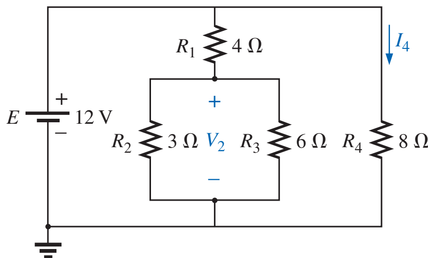


FIGURA 7.10
Ejemplo 7.4.

Solución: En este caso, se buscan incógnitas particulares en lugar de una solución completa. Por tanto, sería una pérdida de tiempo calcular todas las corrientes y voltajes de la red. El método utilizado deberá concentrarse en obtener únicamente las incógnitas solicitadas. Con el método de diagramas de bloques, la red tendrá la estructura básica de la figura 7.11, la cual indica claramente que las tres ramas se encuentran en paralelo y que el voltaje en A y B es el de alimentación. La corriente I_4 se muestra ahora de manera obvia simplemente como el voltaje de alimentación dividido entre la resistencia resultante de B. Si se desea, el bloque A puede dividirse aún más, como se muestra en la figura 7.12, para identificar C y D como elementos en serie, con el voltaje V_2 susceptible de determinarse mediante la regla del divisor de voltaje una vez que la resistencia de C y D se reduzca a un solo valor. Esto es un ejemplo de la forma en que es posible realizar un bosquejo mental antes de aplicar las reglas, leyes, etc., para evitar llegar a un camino sin salida y una creciente frustración.

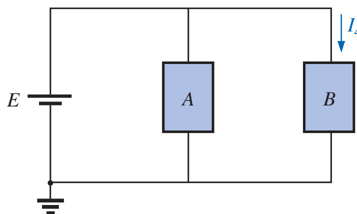


FIGURA 7.11
Diagrama de bloques de la figura 7.10.

Al aplicar la ley de Ohm,

$$I_4 = \frac{E}{R_B} = \frac{E}{R_4} = \frac{12\text{ V}}{8\ \Omega} = \mathbf{1.5\ A}$$

Combinando los resistores R_2 y R_3 de la figura 7.10 se obtendrá:

$$R_D = R_2 \parallel R_3 = 3\ \Omega \parallel 6\ \Omega = \frac{(3\ \Omega)(6\ \Omega)}{3\ \Omega + 6\ \Omega} = \frac{18\ \Omega}{9} = 2\ \Omega$$

y aplicando la regla del divisor de voltaje,

$$V_2 = \frac{R_D E}{R_D + R_C} = \frac{(2\ \Omega)(12\text{ V})}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{24\text{ V}}{6} = \mathbf{4\ V}$$

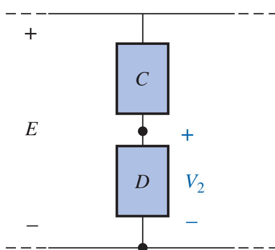
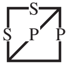


FIGURA 7.12
Diagrama de bloques alternativos para la primera rama en paralelo de la figura 7.10.

EJEMPLO 7.5 Encuentre las corrientes y los voltajes indicados para la red de la figura 7.13.

Solución: Nuevamente, sólo se piden incógnitas específicas. Cuando se vuelva a trazar la red, será particularmente importante observar las incógnitas que se preservan y las que deben determinarse utilizando la configuración original. El diagrama de bloques de la red podría ser como el de la figura 7.14, mostrando claramente que A y B se encuentran en serie. Observe que en esta forma se preserva el número de incógnitas. El voltaje V_1 será el mismo a través de las tres ramas en paralelo de la figura 7.13, y V_5 será el mismo en R_4 y R_5. Las corrientes desconocidas I_2 e I_4 se pierden debido a que representan las corrientes a través de sólo una de las ramas paralelas. Sin embargo, una vez que V_1 y V_5 se conocen, las corrientes requeridas pueden encontrarse utilizando la ley de Ohm.



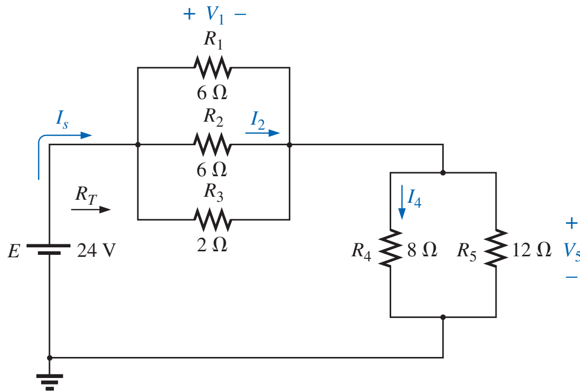


FIGURA 7.13
Ejemplo 7.5.

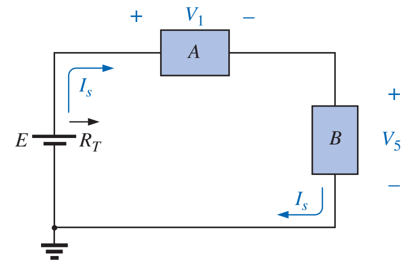


FIGURA 7.14
Diagrama de bloques para la figura 7.13.

$$R_{1\|2} = \frac{R}{N} = \frac{6\ \Omega}{2} = 3\ \Omega$$

$$R_A = R_{1\|2\|3} = \frac{(3\ \Omega)(2\ \Omega)}{3\ \Omega + 2\ \Omega} = \frac{6\ \Omega}{5} = 1.2\ \Omega$$

$$R_B = R_{4\|5} = \frac{(8\ \Omega)(12\ \Omega)}{8\ \Omega + 12\ \Omega} = \frac{96\ \Omega}{20} = 4.8\ \Omega$$

La forma reducida de la figura 7.13 aparecerá entonces como se muestra en la figura 7.15, y

$$R_T = R_{1\|2\|3} + R_{4\|5} = 1.2\ \Omega + 4.8\ \Omega = \mathbf{6\ \Omega}$$

$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{24\ \text{V}}{6\ \Omega} = \mathbf{4\ A}$$

con
$$V_1 = I_s R_{1\|2\|3} = (4\ \text{A})(1.2\ \Omega) = \mathbf{4.8\ V}$$

$$V_5 = I_s R_{4\|5} = (4\ \text{A})(4.8\ \Omega) = \mathbf{19.2\ V}$$

Al aplicar la ley de Ohm,

$$I_4 = \frac{V_5}{R_4} = \frac{19.2\ \text{V}}{8\ \Omega} = \mathbf{2.4\ A}$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_1}{R_2} = \frac{4.8\ \text{V}}{6\ \Omega} = \mathbf{0.8\ A}$$

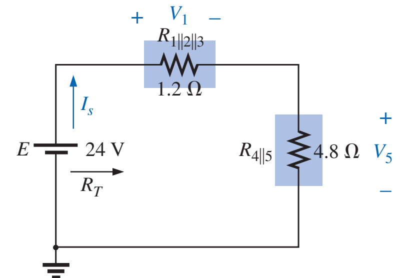


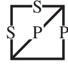
FIGURA 7.15
Forma reducida de la figura 7.13.

El siguiente ejemplo demuestra que los voltajes desconocidos no tienen que estar en los elementos, sino que pueden existir entre dos puntos cualesquiera en una red. Además, la importancia de volver a trazar la red en una forma más familiar se revelará claramente gracias al análisis que se presenta enseguida.

EJEMPLO 7.6

a. Encuentre los voltajes V_1, V_3 y V_{ab} para la red de la figura 7.16.
b. Calcule la corriente de fuente I_s.

Soluciones: Ésta es una de esas situaciones donde podría ser mejor volver a trazar la red antes de comenzar con el análisis. Dado que la combinación de ambas fuentes no afectará las incógnitas, la red se vuelve a trazar como se muestra en la figura 7.17, estableciendo una red paralela con todo el voltaje de la fuente en cada rama paralela. El voltaje neto de la fuente será la diferencia entre las dos con la polaridad de la mayor.



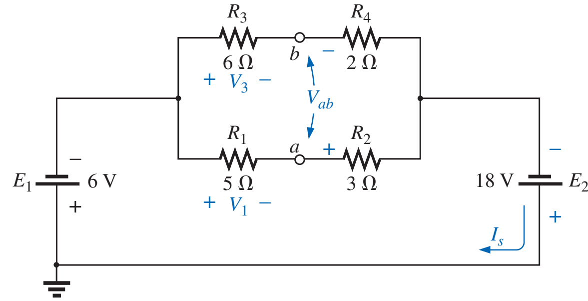


FIGURA 7.16
Ejemplo 7.6.

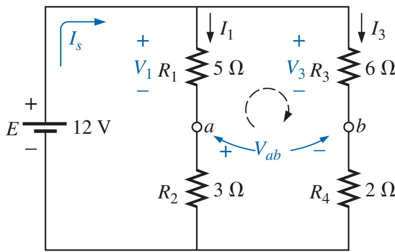


FIGURA 7.17
Red de la figura 7.16 trazada de nuevo.

a. Observe las similitudes con la figura 7.12, lo que permite el uso de la regla del divisor de voltaje para determinar V_1 y V_3:

$$V_1 = \frac{R_1E}{R_1 + R_2} = \frac{(5\ \Omega)(12\ \text{V})}{5\ \Omega + 3\ \Omega} = \frac{60\ \text{V}}{8} = \mathbf{7.5\ V}$$

$$V_3 = \frac{R_3E}{R_3 + R_4} = \frac{(6\ \Omega)(12\ \text{V})}{6\ \Omega + 2\ \Omega} = \frac{72\ \text{V}}{8} = \mathbf{9\ V}$$

El voltaje de circuito abierto V_{ab} se determina mediante la aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo indicado en la figura 7.17 en dirección de las manecillas del reloj y comenzando en la terminal *a*.

$$+V_1 - V_3 + V_{ab} = 0$$

y $$V_{ab} = V_3 - V_1 = 9\ \text{V} - 7.5\ \text{V} = \mathbf{1.5\ V}$$

b. Mediante la ley de Ohm,

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{7.5\ \text{V}}{5\ \Omega} = 1.5\ \text{A}$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{9\ \text{V}}{6\ \Omega} = 1.5\ \text{A}$$

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff,

$$I_s = I_1 + I_3 = 1.5\ \text{A} + 1.5\ \text{A} = \mathbf{3\ A}$$

EJEMPLO 7.7 Para la red de la figura 7.18 determine los voltajes V_1 y V_2 así como la corriente *I*.

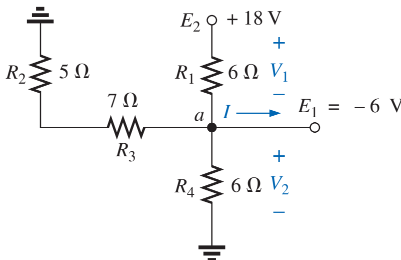


FIGURA 7.18
Ejemplo 7.7.

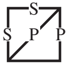
Solución: Verdaderamente sería muy difícil analizar la red en la forma de la figura 7.18 con la notación simbólica para las fuentes y la referencia o conexión a tierra en la esquina superior izquierda del diagrama. Sin embargo, cuando la red se vuelve a trazar como se observa en la figura 7.19, las incógnitas y la relación entre las ramas se vuelven significativamente más claras. Observe la conexión común de las tierras y el reemplazo de la notación terminal por fuentes reales.

Ahora es obvio que:

$$V_2 = -E_1 = \mathbf{-6\ V}$$

El signo menos indica simplemente que la polaridad elegida para V_2 en la figura 7.18 es opuesta a la del voltaje real. Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff al lazo indicado se obtiene:

$$-E_1 + V_1 - E_2 = 0$$



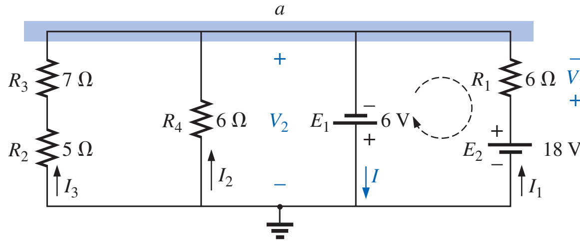


FIGURA 7.19
Red de la figura 7.18 trazada nuevamente.

y $$V_1 = E_2 + E_1 = 18 \text{ V} + 6 \text{ V} = \mathbf{24 \text{ V}}$$

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff al nodo *a* se obtiene:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= \frac{V_1}{R_1} + \frac{E_1}{R_4} + \frac{E_1}{R_2 + R_3} \\ &= \frac{24 \text{ V}}{6 \ \Omega} + \frac{6 \text{ V}}{6 \ \Omega} + \frac{6 \text{ V}}{12 \ \Omega} \\ &= 4 \text{ A} + 1 \text{ A} + 0.5 \text{ A} \\ I &= \mathbf{5.5 \text{ A}} \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo es una evidencia clara de que las técnicas aprendidas en los capítulos en curso tendrán aplicaciones de largo alcance y no serán abandonadas para dar lugar a métodos mejorados. Aunque el **transistor** no ha sido presentado en este texto, los niveles de cd de una red de transistores pueden analizarse utilizando las reglas y leyes básicas presentadas en los primeros capítulos.

EJEMPLO 7.8 Para la configuración del transistor de la figura 7.20, en la que se proporcionan V_B y V_{BE}:

a. Determine el voltaje V_E y la corriente I_E.
b. Calcule V_1.
c. Determine V_{BC} utilizando el hecho de que la aproximación $I_C = I_E$ se aplica, por lo general, a redes de transistores.
d. Calcule V_{CE} utilizando la información obtenida en los incisos (a) al (c).

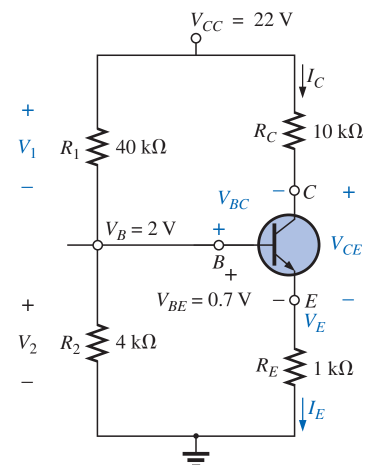


FIGURA 7.20
Ejemplo 7.8.

Soluciones:

a. A partir de la figura 7.20, se encuentra:

$$V_2 = V_B = 2 \text{ V}$$

Escribiendo la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo menor tenemos:

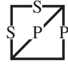
$$V_2 - V_{BE} - V_E = 0$$

o bien $$V_E = V_2 - V_{BE} = 2 \text{ V} - 0.7 \text{ V} = \mathbf{1.3 \text{ V}}$$

e $$I_E = \frac{V_E}{R_E} = \frac{1.3 \text{ V}}{1000 \ \Omega} = \mathbf{1.3 \text{ mA}}$$

b. Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff al lado de entrada (región izquierda de la red) se tendrá como resultado:

$$V_2 + V_1 - V_{CC} = 0$$



$$\text{y} \qquad V_1 = V_{CC} - V_2$$
$$\text{pero} \qquad V_2 = V_B$$
$$\text{y} \qquad V_1 = V_{CC} - V_2 = 22\text{ V} - 2\text{ V} = \mathbf{20\text{ V}}$$

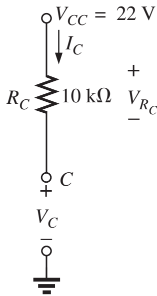


FIGURA 7.21
Determinación de V_C para la red de la figura 7.20.

c. Al volver a trazar la sección de la red de interés inmediato se obtendrá la figura 7.21, donde la ley de voltaje de Kirchhoff genera:

$$V_C + V_{R_C} - V_{CC} = 0$$
$$\text{y} \qquad V_C = V_{CC} - V_{R_C} = V_{CC} - I_C R_C$$
$$\text{pero} \qquad I_C = I_E$$
$$\text{y} \qquad V_C = V_{CC} - I_E R_C = 22\text{ V} - (1.3\text{ mA})(10\text{ k}\Omega) = 9\text{ V}$$
$$\text{Entonces} \qquad V_{BC} = V_B - V_C = 2\text{ V} - 9\text{ V} = \mathbf{-7\text{ V}}$$

d.
$$V_{CE} = V_C - V_E = 9\text{ V} - 1.3\text{ V} = \mathbf{7.7\text{ V}}$$

EJEMPLO 7.9 Calcule las corrientes y el voltaje indicados en la figura 7.22.

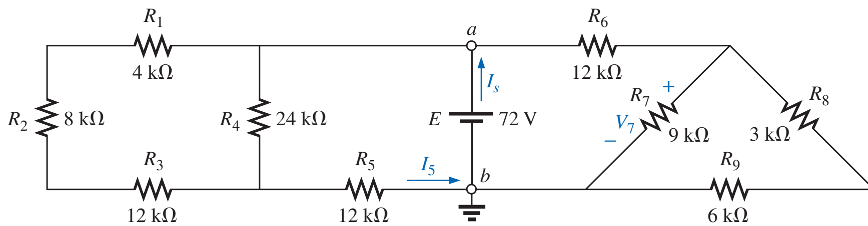


FIGURA 7.22
Ejemplo 7.9.

Solución: Al volver a trazar la red después de combinar los elementos en serie se obtiene la figura 7.23, y

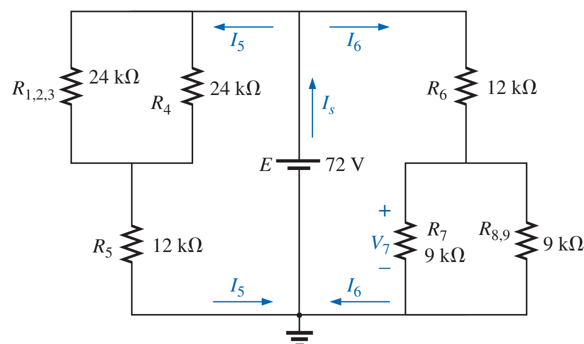


FIGURA 7.23
Red de la figura 7.22 trazada de nuevo.

$$I_5 = \frac{E}{R_{(1,2,3)\|4} + R_5} = \frac{72\text{ V}}{12\text{ k}\Omega + 12\text{ k}\Omega} = \frac{72\text{ V}}{24\text{ k}\Omega} = \mathbf{3\text{ mA}}$$

con

$$V_7 = \frac{R_{7\|(8,9)}E}{R_{7\|(8,9)} + R_6} = \frac{(4.5\text{ k}\Omega)(72\text{ V})}{4.5\text{ k}\Omega + 12\text{ k}\Omega} = \frac{324\text{ V}}{16.5} = \mathbf{19.6\text{ V}}$$

$$I_6 = \frac{V_7}{R_{7\|(8,9)}} = \frac{19.6\text{ V}}{4.5\text{ k}\Omega} = \mathbf{4.35\text{ mA}}$$

e $$I_s = I_5 + I_6 = 3\text{ mA} + 4.35\text{ mA} = \mathbf{7.35\text{ mA}}$$

Dado que la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* de la figura 7.22 está fija en *E* volts, el circuito a la derecha o la izquierda no se ve afectado si la red se reconstruye como se muestra en la figura 7.24.

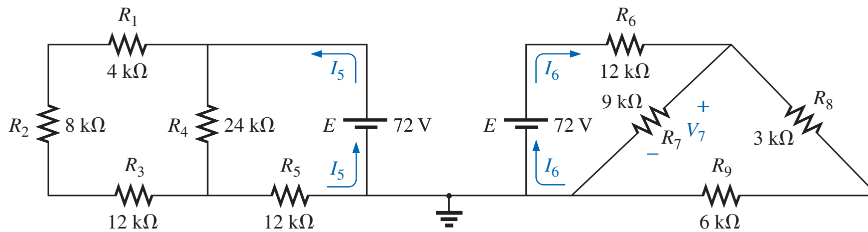


FIGURA 7.24
Método alternativo para el ejemplo 7.9.

Se puede calcular cada cantidad requerida, excepto I_s, mediante el análisis independiente de cada circuito. Para encontrar I_s, se debe encontrar la corriente de fuente para cada circuito y sumarla como en la solución anterior; es decir, $I_S = I_5 + I_6$.

EJEMPLO 7.10 Este ejemplo demuestra el poder de la ley de voltaje de Kirchhoff al determinar los voltajes V_1, V_2 y V_3 para la red de la figura 7.25. Para la trayectoria 1 de la figura 7.26,

$$E_1 - V_1 - E_3 = 0$$

y $$V_1 = E_1 - E_3 = 20\text{ V} - 8\text{ V} = \mathbf{12\text{ V}}$$

Para la trayectoria 2,

$$E_2 - V_1 - V_2 = 0$$

y $$V_2 = E_2 - V_1 = 5\text{ V} - 12\text{ V} = \mathbf{-7\text{ V}}$$

lo cual indica que V_2 tiene una magnitud de 7 V pero una polaridad opuesta a la que aparece en la figura 7.25. Para la trayectoria 3,

$$V_3 + V_2 - E_3 = 0$$

y $$V_3 = E_3 - V_2 = 8\text{ V} - (-7\text{ V}) = 8\text{ V} + 7\text{ V} = \mathbf{15\text{ V}}$$

Observe que la polaridad de V_2 se mantuvo como originalmente se supuso, requiriendo que se sustituyan −7 V en V_2.

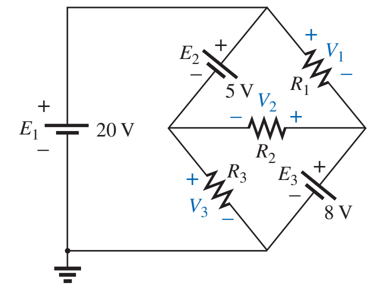


FIGURA 7.25
Ejemplo 7.10.

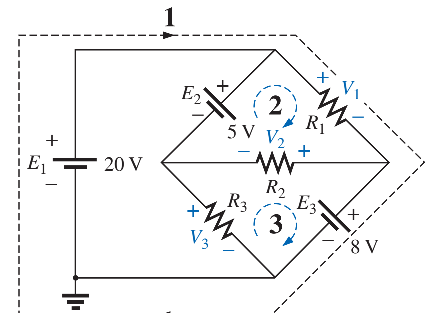
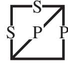


FIGURA 7.26
Definición de las trayectorias para la ley de voltaje de Kirchhoff.

7.3 REDES DE ESCALERA

En la figura 7.27 se muestra una **red de escalera** de tres secciones. La razón para emplear esta terminología resulta obvia a partir de la estructura repetitiva de la red. Se emplean básicamente dos métodos para resolver las redes de este tipo.



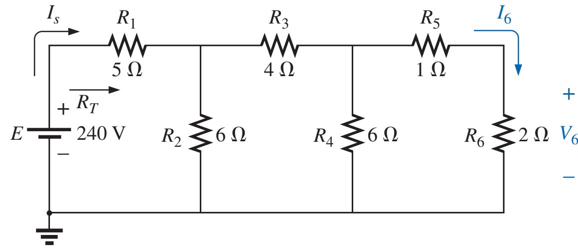


FIGURA 7.27
Red de escalera.

Método 1

Calcule la resistencia y la corriente de fuente resultante totales, y luego proceda de regreso a través de la escalera hasta que obtenga la corriente o el voltaje deseados. Este método se utilizará en seguida para determinar V_6 en la figura 7.27.

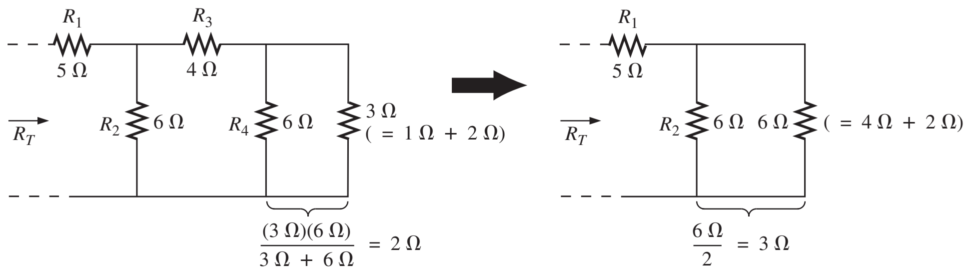


FIGURA 7.28
Se procede de regreso hacia la fuente para determinar R_T en la red de la figura 7.27.

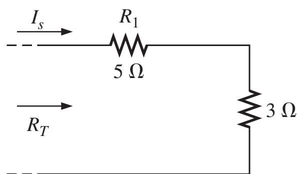


FIGURA 7.29
Cálculo de R_T e I_s.

Al combinar los elementos en serie y en paralelo como se muestra en la figura 7.28, se obtendrá la red reducida de la figura 7.29, y

$$R_T = 5\ \Omega + 3\ \Omega = 8\ \Omega$$

$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{240\text{ V}}{8\ \Omega} = 30\text{ A}$$

Procediendo de regreso hacia I_6 (Figura 7.30), se encuentra que:

$$I_1 = I_s$$

e

$$I_3 = \frac{I_s}{2} = \frac{30\text{ A}}{2} = 15\text{ A}$$

y, por último (Figura 7.31),

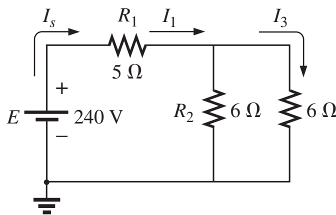


FIGURA 7.30
Se procede de nuevo hacia I_6.

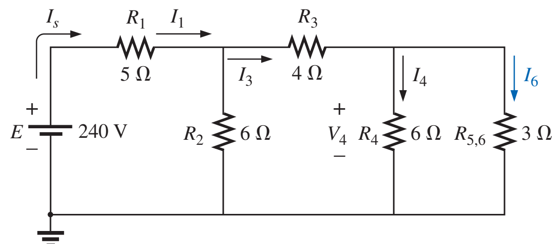


FIGURA 7.31
Cálculo de I_6.



$$I_6 = \frac{(6\ \Omega)I_3}{6\ \Omega + 3\ \Omega} = \frac{6}{9}(15\ \text{A}) = 10\ \text{A}$$

y $$V_6 = I_6R_6 = (10\ \text{A})(2\ \Omega) = \mathbf{20\ V}$$

Método 2

Se asigna una letra a la última corriente de rama y se procede de regreso sobre la red hacia la fuente, manteniendo asignada esta corriente o alguna otra corriente de interés. Entonces se puede obtener la corriente deseada de forma directa. Este método puede describirse mejor mediante el análisis de la misma red considerada antes en el ejemplo 7.27, y vuelta a trazar en la figura 7.32.

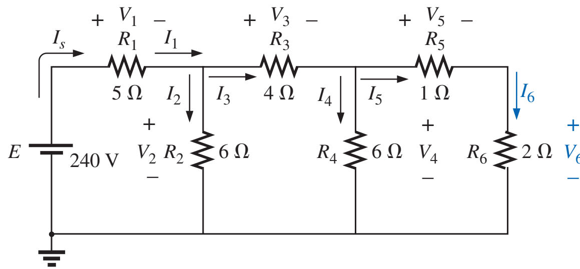


FIGURA 7.32
Un método alternativo para las redes de escalera.

La notación asignada para la corriente que circula a través de la última rama es I_6:

$$I_6 = \frac{V_4}{R_5 + R_6} = \frac{V_4}{1\ \Omega + 2\ \Omega} = \frac{V_4}{3\ \Omega}$$

o bien $$V_4 = (3\ \Omega)I_6$$

de manera que: $$I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{(3\ \Omega)I_6}{6\ \Omega} = 0.5I_6$$

e $$I_3 = I_4 + I_6 = 0.5I_6 + I_6 = 1.5I_6$$

$$V_3 = I_3R_3 = (1.5I_6)(4\ \Omega) = (6\ \Omega)I_6$$

Además, $$V_2 = V_3 + V_4 = (6\ \Omega)I_6 + (3\ \Omega)I_6 = (9\ \Omega)I_6$$

de manera que: $$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{(9\ \Omega)I_6}{6\ \Omega} = 1.5I_6$$

e $$I_s = I_2 + I_3 = 1.5I_6 + 1.5I_6 = 3I_6$$

con $$V_1 = I_1R_1 = I_sR_1 = (5\ \Omega)I_s$$

de manera que: $$E = V_1 + V_2 = (5\ \Omega)I_s + (9\ \Omega)I_6$$
$$= (5\ \Omega)(3I_6) + (9\ \Omega)I_6 = (24\ \Omega)I_6$$

e $$I_6 = \frac{E}{24\ \Omega} = \frac{240\ \text{V}}{24\ \Omega} = 10\ \text{A}$$

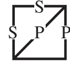
con $$V_6 = I_6R_6 = (10\ \text{A})(2\ \Omega) = \mathbf{20\ V}$$

tal como se obtuvo empleando el método 1.

Mathcad

Ahora se utilizará Mathcad para analizar la red de escalera de la figura 7.27 empleando el método 1. Esto proporcionará una excelente oportunidad para practicar las manipulaciones básicas presentadas en los capítulos anteriores.

Primero, como se muestra en la figura 7.33, es necesario definir todos los parámetros de la red. Luego se sigue la misma secuencia que se incluyó en el



material del texto. Sin embargo, para Mathcad debe asegurarse que la secuencia de definición para cada variable nueva fluya de izquierda a derecha, como se ilustra en la figura 7.33, hasta que se defina R_{10}. Entonces podrá escribirse la ecuación de la resistencia total y desplegar el resultado. Luego se definen todos los parámetros restantes y se despliegan como se muestra. Los resultados coinciden exactamente con la solución realizada a mano.

La característica más valiosa que ofrece Mathcad es la posibilidad de almacenar esta secuencia en memoria y recuperarla cuando se requiera para distintas redes. Simplemente se redefinen los parámetros de la red, y de inmediato se desplegarán todos los nuevos valores de los parámetros importantes de ésta.

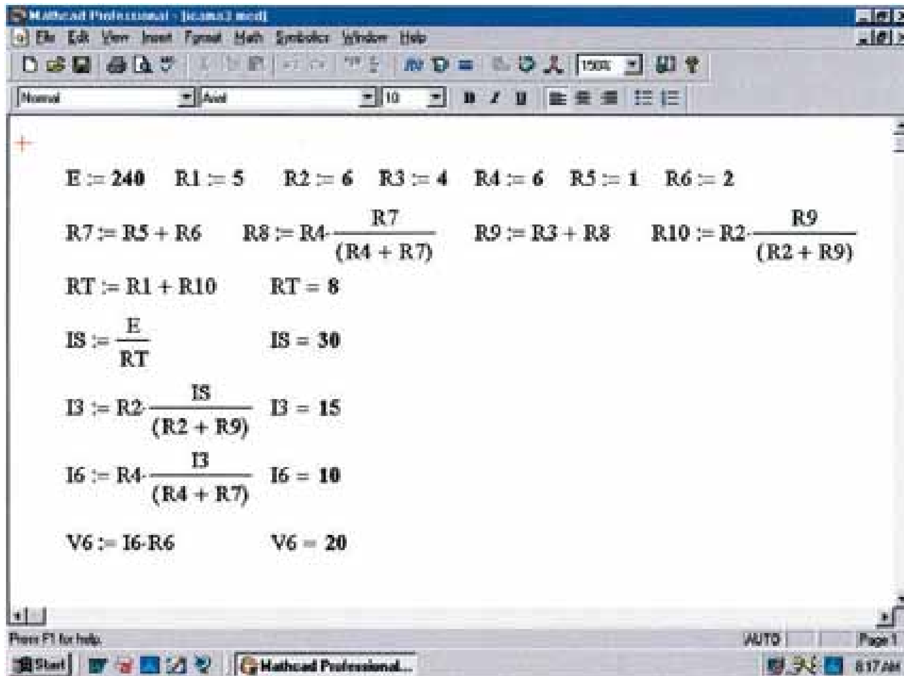


FIGURA 7.33
Utilización de Mathcad para analizar la red de escalera de la figura 7.27.

7.4 FUENTE CON DIVISOR DE VOLTAJE (CON Y SIN CARGA)

El término *con carga* que aparece en el título de esta sección se refiere a la aplicación de un elemento, red o sistema, a una fuente que consuma corriente de ésta. Como se indicó en la sección 5.8, la aplicación de una carga puede afectar el voltaje de la fuente.

Mediante una red de divisor de voltaje como la de la figura 7.34, se pueden tener disponibles varios voltajes a partir de una sola fuente de alimentación. Los niveles de voltaje mostrados (con respecto a tierra) están determinados mediante la aplicación directa de la regla del divisor de voltaje. La figura 7.34 refleja una situación sin carga debido a la ausencia de cualquier elemento consumidor de corriente conectado entre las terminales *a, b* o *c* y tierra.

Mientras mayor sea el nivel de resistencia de las cargas aplicadas en comparación con el nivel de resistencia de la red de divisor de voltaje, más cercano será el voltaje terminal resultante a los niveles sin carga. En otras palabras, mientras menor sea la demanda de corriente a una fuente, más cercanas se encontrarán las características terminales a los niveles sin carga.

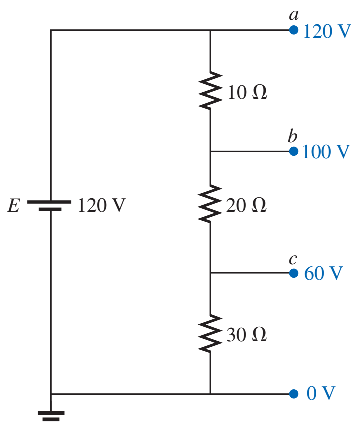


FIGURA 7.34
Fuente con divisor de voltaje.

Para demostrar la validez de la aseveración anterior, considérese la red de la figura 7.34 con cargas resistivas iguales al promedio de los elementos resistivos de la red de divisor de voltaje, como se muestra en la figura 7.35.

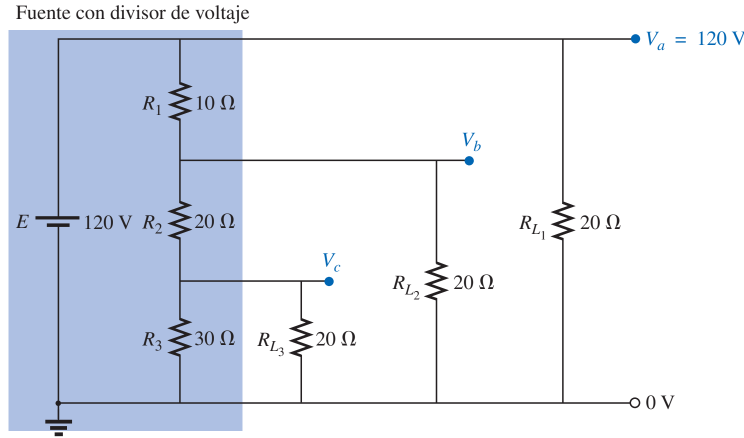


FIGURA 7.35
Fuente con divisor de voltaje y cargas iguales al valor promedio de los elementos resistivos que constituyen la fuente.

Al voltaje V_a no lo afecta la carga R_{L_1} ya que la carga se encuentra en paralelo con la fuente de alimentación E. El resultado es $V_a = 120$ V, el mismo que para el nivel sin carga. Para determinar V_b, debe observarse primero que R_3 y R_{L_3} se encuentran en paralelo y que $R'_3 = R_3 \parallel R_{L_3} = 30\ \Omega \parallel 20\ \Omega = 12\ \Omega$. La combinación en paralelo $R'_2 = (R_2 + R'_3) \parallel R_{L_2} = (20\ \Omega + 12\ \Omega) \parallel 20\ \Omega = 32\ \Omega \parallel 20\ \Omega = 12.31\ \Omega$. Al aplicar la regla del divisor de voltaje se tiene:

$$V_b = \frac{(12.31\ \Omega)(120\ \text{V})}{12.31\ \Omega + 10\ \Omega} = 66.21\ \text{V}$$

contra 100 V bajo condiciones sin carga.

El voltaje V_c es:

$$V_c = \frac{(12\ \Omega)(66.21\ \text{V})}{12\ \Omega + 20\ \Omega} = 24.83\ \text{V}$$

contra 60 V bajo condiciones sin carga.

El efecto de tener resistores de carga cercanos en valor al resistor utilizado en la red de divisor de voltaje es, por tanto, disminuir significativamente algunos de los voltajes.

Si los resistores de carga se cambian a 1 kΩ, los voltajes se encontrarán relativamente cercanos a los valores sin carga. El análisis es similar al anterior, con los siguientes resultados:

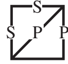
$$V_a = 120\ \text{V} \qquad V_b = 98.88\ \text{V} \qquad V_c = 58.63\ \text{V}$$

Al comparar los consumos de corriente establecidos por las cargas aplicadas, para la red de la figura 7.35 se encontrará que:

$$I_{L_2} = \frac{V_{L_2}}{R_{L_2}} = \frac{66.21\ \text{V}}{20\ \Omega} = 3.31\ \text{A}$$

y para 1 kΩ,

$$I_{L_2} = \frac{98.88\ \text{V}}{1\ \text{k}\Omega} = 98.88\ \text{mA} < 0.1\ \text{A}$$



Como indica el párrafo resaltado en los inicios de esta sección, a mayor consumo de corriente, más grande es el cambio en el voltaje con la aplicación de la carga. Esto ciertamente se verifica por el hecho de que I_{L_2} es cerca de 33.5 veces más grande que con las cargas de 20 Ω.

El siguiente ejemplo es un ejercicio de diseño. Se proporcionan los valores nominales de voltaje y corriente de cada carga, junto con los valores de la fuente. Se deben encontrar los resistores del divisor de voltaje requeridos.

EJEMPLO 7.11 Determine R_1, R_2 y R_3 para la fuente con divisor de voltaje de la figura 7.36. ¿Es posible utilizar resistores de 2 W en el diseño?

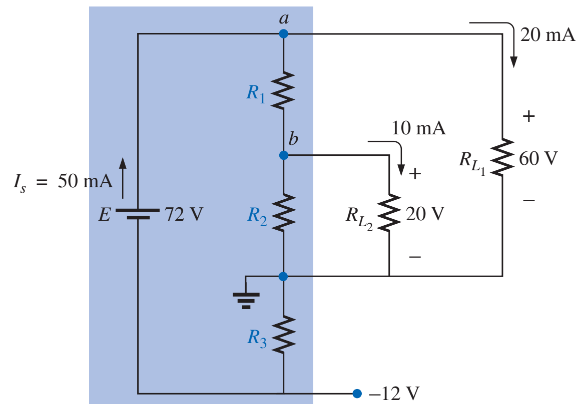


FIGURA 7.36
Ejemplo 7.11.

Solución: R_3:

$$R_3 = \frac{V_{R_3}}{I_{R_3}} = \frac{V_{R_3}}{I_s} = \frac{12\text{ V}}{50\text{ mA}} = \mathbf{240\ \Omega}$$

$$P_{R_3} = (I_{R_3})^2 R_3 = (50\text{ mA})^2\ 240\ \Omega = 0.6\text{ W} < 2\text{ W}$$

R_1: Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff al nodo a:

$$I_s - I_{R_1} - I_{L_1} = 0$$

e
$$I_{R_1} = I_s - I_{L_1} = 50\text{ mA} - 20\text{ mA}$$
$$= 30\text{ mA}$$

$$R_1 = \frac{V_{R_1}}{I_{R_1}} = \frac{V_{L_1} - V_{L_2}}{I_{R_1}} = \frac{60\text{ V} - 20\text{ V}}{30\text{ mA}} = \frac{40\text{ V}}{30\text{ mA}}$$
$$= \mathbf{1.33\ k\Omega}$$

$$P_{R_1} = (I_{R_1})^2 R_1 = (30\text{ mA})^2\ 1.33\text{ k}\Omega = 1.197\text{ W} < 2\text{ W}$$

R_2: Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff al nodo b:

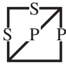
$$I_{R_1} - I_{R_2} - I_{L_2} = 0$$

e
$$I_{R_2} = I_{R_1} - I_{L_2} = 30\text{ mA} - 10\text{ mA}$$
$$= 20\text{ mA}$$

$$R_2 = \frac{V_{R_2}}{I_{R_2}} = \frac{20\text{ V}}{20\text{ mA}} = \mathbf{1\ k\Omega}$$

$$P_{R_2} = (I_{R_2})^2 R_2 = (20\text{ mA})^2\ 1\text{ k}\Omega = 0.4\text{ W} < 2\text{ W}$$

Dado que P_{R_1}, P_{R_2} y P_{R_3} son menores a 2 W, es posible utilizar resistores de 2 W para el diseño.



7.5 CARGA DEL POTENCIÓMETRO

Para el potenciómetro sin carga de la figura 7.37, el voltaje de salida estará determinado por la regla del divisor de corriente, con R_T en la figura representando la resistencia total del potenciómetro. A menudo se supone que el voltaje en una carga conectada a la terminal central del potenciómetro está determinado únicamente por el potenciómetro, y que es posible ignorar el efecto de la carga. Definitivamente este no es el caso, como se demostrará en los siguientes párrafos.

Cuando se aplica una carga como se muestra en la figura 7.38, el voltaje de salida V_L es entonces una función de la magnitud de la carga aplicada ya que R_1 no se encuentra tal como en la figura 7.37, sino que es la combinación paralela de R_1 y R_L.

El voltaje de salida es ahora:

$$V_L = \frac{R'E}{R' + R_2} \qquad \text{con } R' = R_1 \parallel R_L \tag{7.1}$$

Si se desea tener un buen control del voltaje de salida V_L mediante la perilla, selector o tornillo de control, se recomienda elegir una carga o un potenciómetro que satisfagan la siguiente relación:

$$R_L \geq R_T \tag{7.2}$$

Por ejemplo, si se hace caso omiso de la ecuación (7.2) y se elige un potenciómetro de 1 MΩ con carga de 100 Ω estableciendo la terminal central del potenciómetro a 1/10 de la resistencia total, como se muestra en la figura 7.39, entonces:

$$R' = 100\ \text{k}\Omega \parallel 100\ \Omega = 99.9\ \Omega$$

y $$V_L = \frac{99.9\ \Omega(10\ \text{V})}{99.9\ \Omega + 900\ \text{k}\Omega} \cong 0.001\ \text{V} = 1\ \text{mV}$$

lo cual es extremadamente pequeño en comparación con el nivel esperado de 1 V.

De hecho, si movemos la terminal central del potenciómetro al punto medio,

$$R' = 500\ \text{k}\Omega \parallel 100\ \Omega = 99.98\ \Omega$$

y $$V_L = \frac{(99.98\ \Omega)(10\ \text{V})}{99.98\ \Omega + 500\ \text{k}\Omega} \cong 0.002\ \text{V} = 2\ \text{mV}$$

lo cual es insignificante en comparación con el nivel esperado de 5 V. Incluso con R_1 = 900 kΩ, V_L será simplemente 0.01 V, o 1/1000 del voltaje disponible.

Utilizando la situación contraria para R_T = 100 Ω y R_L = 1 MΩ y la terminal central del potenciómetro en la posición de 1/10, como en la figura 7.40, se encuentra que:

$$R' = 10\ \Omega \parallel 1\ \text{M}\Omega \cong 10\ \Omega$$

y $$V_L = \frac{10\ \Omega(10\ \text{V})}{10\ \Omega + 90\ \Omega} = 1\ \text{V}$$

como se deseaba.

Para el límite menor (diseño del peor caso) de $R_L = R_T$ = 100 Ω, según lo definió la ecuación (7.2) y la posición central de la figura 7.38,

$$R' = 50\ \Omega \parallel 100\ \Omega = 33.33\ \Omega$$

y $$V_L = \frac{33.33\ \Omega(10\ \text{V})}{33.33\ \Omega + 50\ \Omega} \cong 4\ \text{V}$$

Lo anterior puede no ser el nivel ideal de 5 V, pero al menos el 40% del voltaje E se ha obtenido en la posición central en lugar de 0.02% obtenido con R_L = 100 Ω y R_T = 1 MΩ.

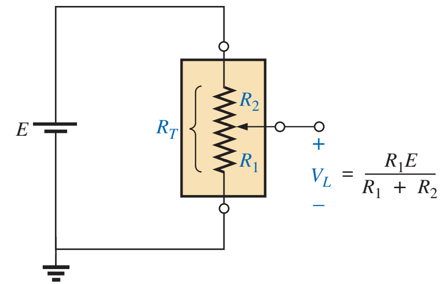


FIGURA 7.37
Potenciómetro sin carga.

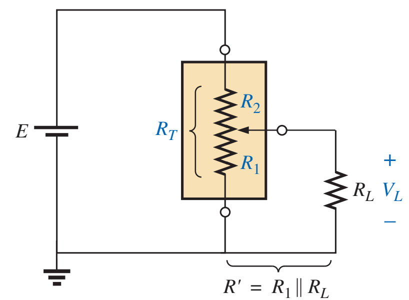


FIGURA 7.38
Potenciómetro con carga.

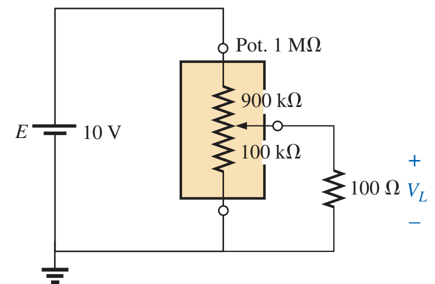


FIGURA 7.39
$R_T > R_L$.

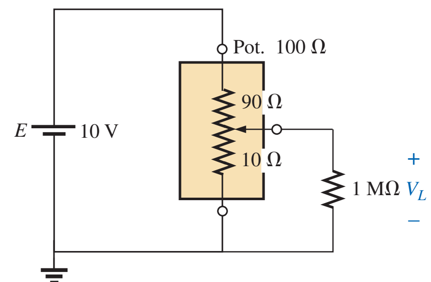
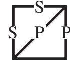


FIGURA 7.40
$R_L > R_T$.



Por tanto, y en general, debe tratarse de establecer una situación para el control del potenciómetro en la cual la ecuación (7.2) se satisfaga al más alto grado posible.

Alguien podría sugerir que se trabaje con una R_T lo más pequeña posible para llevar el resultado porcentual lo más cercano posible al ideal. Sin embargo, debe tenerse presente que el potenciómetro cuenta con un valor nominal de potencia, y que para redes como las de la figura 7.40, $P_{máx} \cong E^2/R_T = (10\text{ V})^2/100\ \Omega = 1\text{ W}$. Si R_T se redujera a 10 Ω, $P_{máx} = (10\text{ V})^2/10\ \Omega = 10\text{ W}$, lo cual requeriría una unidad *mucho más grande.*

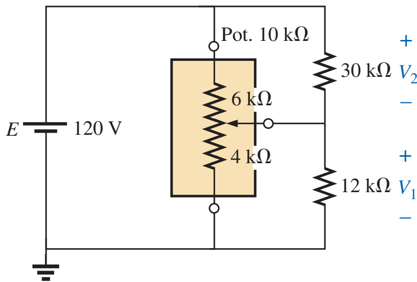


FIGURA 7.41
Ejemplo 7.12.

EJEMPLO 7.12 Encuentre los voltajes V_1 y V_2 para el potenciómetro con carga de la figura 7.41.

Solución:

$$\text{Ideal (sin carga): } V_1 = \frac{4\text{ k}\Omega(120\text{ V})}{10\text{ k}\Omega} = 48\text{ V}$$

$$V_2 = \frac{6\text{ k}\Omega(120\text{ V})}{10\text{ k}\Omega} = 72\text{ V}$$

$$\text{Con carga: } R' = 4\text{ k}\Omega \parallel 12\text{ k}\Omega = 3\text{ k}\Omega$$

$$R'' = 6\text{ k}\Omega \parallel 30\text{ k}\Omega = 5\text{ k}\Omega$$

$$V_1 = \frac{3\text{ k}\Omega(120\text{ V})}{8\text{ k}\Omega} = \mathbf{45\text{ V}}$$

$$V_2 = \frac{5\text{ k}\Omega(120\text{ V})}{8\text{ k}\Omega} = \mathbf{75\text{ V}}$$

Los niveles de voltaje ideal y con carga se encuentran tan cercanos que el diseño puede considerarse adecuado para las cargas aplicadas. Una ligera variación en la posición de la terminal central del potenciómetro establecerá los niveles de voltaje ideales en las dos cargas.

7.6 DISEÑO DE UN AMPERÍMETRO, UN VOLTÍMETRO Y UN OHMÍMETRO

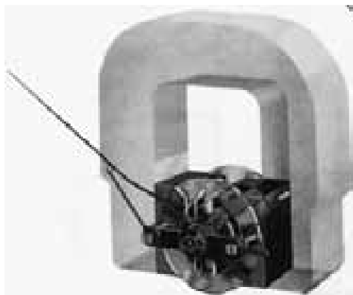


FIGURA 7.42
Galvanómetro de d'Arsonval. (Cortesía de Weston Instruments, Inc.)

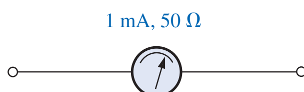


FIGURA 7.43
Notación del movimiento.

En este punto, una vez presentados los fundamentos de las redes en serie, en paralelo y en serie-paralelo, el estudiante se encuentra preparado para analizar el diseño fundamental de un amperímetro, un voltímetro y un ohmímetro. El diseño de cada uno de estos instrumentos hará uso del **galvanómetro de d'Arsonval**, mostrado en la figura 7.42. Este galvanómetro consta básicamente de una bobina con centro de hierro montada sobre cojinetes entre un imán permanente. Los resortes helicoidales limitan el movimiento de giro de la bobina y proporcionan una trayectoria para que la corriente llegue a la bobina. Cuando se haga pasar una corriente a través de la bobina móvil, los flujos de la bobina y del imán permanente interactuarán para desarrollar un torque sobre la bobina que ocasionará que ésta rote sobre sus cojinetes. El movimiento se ajusta para indicar un giro de cero sobre una escala de medidor cuando la corriente a través de la bobina es cero. La dirección de la corriente a través de la bobina determinará entonces si la aguja indicadora se presentará en una corriente por encima o por debajo de cero. Por este motivo, los amperímetros y los voltímetros tienen asignada una polaridad sobre sus terminales para asegurar una lectura de escala positiva.

Los galvanómetros de d'Arsonval se valoran, por lo general, mediante corriente y resistencia. Las especificaciones de un galvanómetro típico podrían ser de 1 mA, 50 Ω. El valor de 1 mA es la *sensibilidad a la corriente* (*CS* para efectos de la nomenclatura utilizada en los subíndices pertinentes) del galvanómetro, que es la corriente requerida para un giro de escala completa y se indicará por el símbolo I_{CS}. Los 50 Ω representan la resistencia interna (R_m) del galva-

nómetro. En la figura 7.43 se presenta una notación común para el galvanómetro de d'Arsonval y sus especificaciones.

El amperímetro

La corriente máxima que el galvanómetro de d'Arsonval puede interpretar de forma independiente es igual a la sensibilidad del galvanómetro a la corriente. Sin embargo, es posible medir corrientes mayores si se introducen componentes adicionales de circuito. Estos componentes adicionales de circuito, como se muestra en la figura 7.44, forman la estructura básica de un amperímetro.

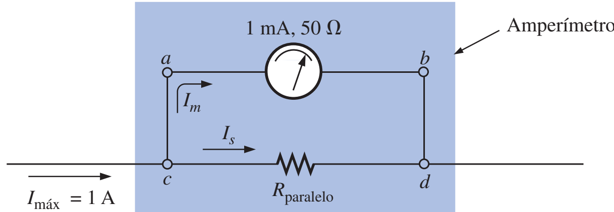


FIGURA 7.44
Amperímetro básico.

La resistencia $R_{paralelo}$ se eligió en el amperímetro de la figura 7.44 para permitir que 1 mA fluya a través del galvanómetro cuando una corriente máxima de 1 A ingrese al amperímetro. Si a través del amperímetro fluye menos de 1 A, el galvanómetro tendrá un flujo menor a 1 mA e indicará un giro menor al de escala completa.

Debido a que el voltaje en elementos en paralelo debe ser el mismo, la caída de potencial en *a-b* en la figura 7.44 debe ser igual que en *c-d*; es decir,

$$(1 \text{ mA})(50 \ \Omega) = R_{paralelo} I_s$$

Además, I_s debe ser igual a 1 A – 1 mA = 999 mA si la corriente se limita a 1 mA a través del galvanómetro (ley de corriente de Kirchhoff). Por tanto,

$$(1 \text{ mA})(50 \ \Omega) = R_{paralelo}(999 \text{ mA})$$

$$R_{paralelo} = \frac{(1 \text{ mA})(50 \ \Omega)}{999 \text{ mA}}$$

$$\cong 0.05 \ \Omega$$

En general,

$$R_{paralelo} = \frac{R_m I_{CS}}{I_{máx} - I_{CS}} \qquad \textbf{(7.3)}$$

Un método para construir un amperímetro con múltiples intervalos se muestra en la figura 7.45, donde el interruptor giratorio determina la $R_{paralelo}$ que se utilizará para la corriente máxima indicada en la carátula del medidor. La mayoría

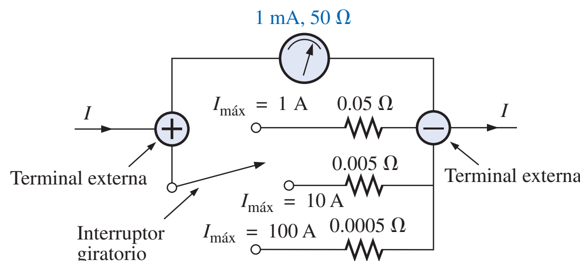
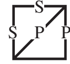


FIGURA 7.45
Amperímetro de múltiples intervalos.



de los medidores utilizan la misma escala para distintos valores de corriente máxima. Si se obtiene una lectura de 375 en la escala de 0-5 mA con el interruptor en la posición 5, la corriente será de 3.75 mA; en la posición 50, la corriente será 37.5 mA, y así sucesivamente.

El voltímetro

Una variación en los componentes de circuito adicionales permitirá la aplicación del galvanómetro de d'Arsonval en el diseño de un voltímetro. El galvanómetro de 1 mA, 50 Ω también se puede especificar como un galvanómetro de 50 mV (1 mA × 50 Ω), 50 Ω, para indicar que el voltaje máximo que el galvanómetro puede medir de forma independiente son 50 mV. La especificación de milivolt en ocasiones se denomina *sensibilidad de voltaje* (*VS* para efectos de la nomenclatura utilizada en los subíndices pertinentes). En la figura 7.46 se presenta la estructura básica del voltímetro.

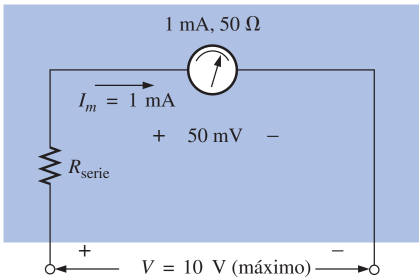


FIGURA 7.46
Voltímetro básico.

La R_{serie} se encuentra ajustada para limitar la corriente a través del galvanómetro a 1 mA cuando el voltaje máximo se aplique al voltímetro. Un menor voltaje simplemente reducirá la corriente en el circuito y, por tanto, la deflexión del galvanómetro.

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo cerrado de la figura 7.46 se obtiene:

$$[10\text{ V} - (1\text{ mA})(R_{\text{serie}})] - 50\text{ mV} = 0$$

o bien
$$R_{\text{serie}} = \frac{10\text{ V} - (50\text{ mV})}{1\text{ mA}} = 9950\ \Omega$$

En general,

$$R_{\text{serie}} = \frac{V_{\text{máx}} - V_{VS}}{I_{CS}} \qquad \textbf{(7.4)}$$

En la figura 7.47 aparece un método para construir un voltímetro de múltiples intervalos. Si el interruptor giratorio se establece en 10 V, R_{serie} = 9.950 kΩ; en 50 V, R_{serie} = 40 kΩ + 9.950 kΩ = 49.950 kΩ; y en 100 V, R_{serie} = 50 kΩ + 40 kΩ + 9.950 kΩ = 99.950 kΩ.

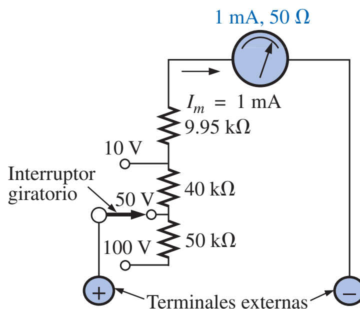


FIGURA 7.47
Voltímetro de múltiples intervalos.

El ohmímetro

En general, los ohmímetros están diseñados para medir la resistencia en los intervalos bajo, medio y alto. El más común de estos instrumentos es el **ohmímetro en serie**, diseñado para tomar lectura de los niveles de resistencia en el intervalo medio. Este ohmímetro utiliza la configuración en serie de la figura 7.48. El

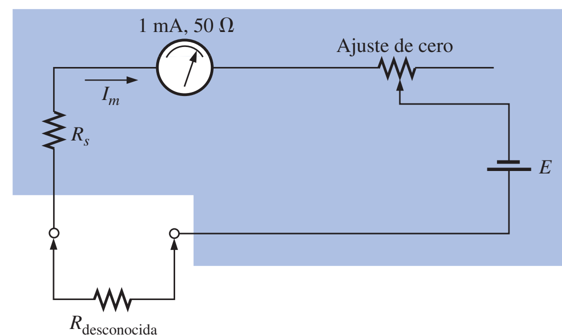


FIGURA 7.48
Ohmímetro en serie.

diseño es muy diferente al del amperímetro o del voltímetro dado que mostrará una deflexión de escala completa para cero ohms y ninguna para una resistencia infinita.

Para determinar la resistencia en serie R_s, las terminales externas se ponen en corto (conexión directa de cero ohms entre las dos) para simular cero ohms, y el ajuste de cero se establece a la mitad de su valor máximo. La resistencia R_s se ajusta entonces para permitir que una corriente igual a la sensibilidad de corriente del galvanómetro (1 mA) fluya en el circuito. El ajuste de cero se establece a la mitad de su valor para que cualquier variación en los componentes del medidor que pueda producir una corriente mayor o menor que la sensibilidad de corriente pueda compensarse. La corriente I_m es:

$$I_m \,(\text{escala completa}) = I_{CS} = \frac{E}{R_s + R_m + \dfrac{\text{ajuste de cero}}{2}} \tag{7.5}$$

y

$$R_s = \frac{E}{I_{CS}} - R_m - \frac{\text{ajuste de cero}}{2} \tag{7.6}$$

Si se coloca una resistencia desconocida entre las terminales externas se reducirá la corriente, ocasionando una deflexión menor a la escala completa. Si las terminales se dejan abiertas, simulando una resistencia infinita, la aguja indicadora no se moverá dado que la corriente a través del circuito es cero.

En la figura 7.49 aparece un instrumento diseñado para tomar lecturas de valores muy bajos de resistencia. Debido a su bajo intervalo de medición, su diseño es mucho más elaborado que el descrito líneas arriba. Este mili-ohmímetro utiliza componentes electrónicos que eliminan las imprecisiones introducidas por las resistencias de contacto y de las puntas. Es similar al sistema anterior en el sentido de que es completamente portátil y requiere una batería de cd para establecer las condiciones de medición. Se utilizan puntas especiales para limitar cualquier nivel de resistencia introducida. La configuración de escala máxima puede establecerse tan bajo como 0.00352 (3.52 mΩ).

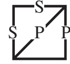


FIGURA 7.49
Mili-ohmímetro. (Cortesía de Keithley Instruments, Inc.)

El **mega-ohmímetro** (a veces llamado *megger*) es un instrumento para medir valores de resistencia muy altos. Su función principal es verificar el aislante que se encuentra en sistemas de transmisión de potencia, maquinaria eléctrica, transformadores, etc. Para medir valores grandes de resistencia, se establece un voltaje de cd alto mediante un generador accionado manualmente. Si el eje se gira por encima de cierto valor establecido, la salida del generador se fijará a un voltaje que se pueda seleccionar, por lo general a 250 V, 500 V o 1000 V. En la figura 7.50 se muestra la fotografía de un probador de este tipo que se encuentra disponible comercialmente. Para este instrumento en particular, el intervalo de medición va de cero a 5000 MΩ.



FIGURA 7.50
Mega-ohmímetro. (Cortesía de AEMC Corp.)



7.7 CONEXIÓN A TIERRA

A pesar de que, por lo general, se trata de forma demasiado superficial en la mayoría de los textos eléctricos o electrónicos introductorios, el impacto de la conexión a tierra y la forma en que puede proporcionar una medida de seguridad a un diseño son temas muy importantes. El potencial de tierra es de 0 V en todo punto dentro de una red que cuente con un símbolo de tierra. Dado que todos los puntos se encuentran al mismo potencial, pueden conectarse entre sí, pero para propósitos de claridad la mayoría se dejan aislados en un esquema grande. En un esquema los niveles de voltaje presentados siempre son con respecto a tierra. Por tanto, un sistema puede verificarse en forma rápida conectando simplemente la punta negra del voltímetro a la conexión a tierra y colocando la punta roja en los distintos puntos donde se proporcionan los voltajes típicos de operación. Una aproximación cercana entre estos valores implicará que esa parte del sistema se encuentra trabajando de forma adecuada. Aunque una parte importante del análisis siguiente incluye sistemas de ca, los cuales no serán presentados sino hasta el capítulo 13, el contenido es tal que los antecedentes establecidos hasta este punto serán suficientes para comprender el material que se examinará. El concepto de conexión a tierra debe presentarse a la primera oportunidad por motivos teóricos y de seguridad.

Existen distintos tipos de tierras, dependiendo de la aplicación. Una *tierra física* es aquella que se encuentra conectada directamente con tierra firme por medio de una conexión de baja impedancia. Se establece que la superficie completa de la tierra cuenta con un potencial de 0 V, y tendrá este mismo potencial en cualquier punto gracias a que existen suficientes agentes conductores en el suelo, como agua y electrolitos, para asegurar que cualquier diferencia en el voltaje de la superficie se encuentre balanceada mediante un flujo de carga entre los dos puntos. Todas las casas cuentan con una tierra física, establecida generalmente por una barra conductora larga enterrada y conectada al tablero de alimentación. El código eléctrico exige una conexión directa de la tierra física a las tuberías de agua fría por razones de seguridad doméstica. Un cable "vivo" que toque una tubería de agua fría consumirá suficiente corriente debido a la conexión de baja impedancia a tierra como para abrir el corta circuitos. De otra forma, cualquier persona en el baño podría recibir el voltaje al tocar la llave de agua fría, arriesgándose a un daño corporal. Ya que el agua es un agente conductor, cualquier área del hogar donde exista agua como el baño o la cocina será de consideración particular. La mayoría de los sistemas eléctricos se conectan a tierra física principalmente por cuestiones de seguridad. Todas las líneas de energía en un laboratorio, en instalaciones industriales o en el hogar, deben ser conectadas a tierra física.

Un segundo tipo se denomina como *tierra de chasis*, la cual puede encontrarse *flotante* o conectada de forma directa a la tierra física. Una tierra de chasis simplemente estipula que el chasis cuenta con un potencial de referencia para todos los demás puntos de la red. Si el chasis no está conectado al potencial de tierra física (0 V), se dice que se encuentra *flotando* y puede tener cualquier otro voltaje de referencia para los otros voltajes a ser comparados. Por ejemplo, si el chasis se encuentra asentado a 120 V, todos los voltajes medidos de la red se encontrarán con referencia a este nivel. Una lectura de 32 V entre un punto dentro de la red y la tierra de chasis en realidad será de 152 V con respecto al potencial de tierra física. Sin embargo, la mayoría de los sistemas de alto voltaje no se dejan flotando debido a la pérdida del factor seguridad. Por ejemplo, si una persona llegara a tocar el chasis encontrándose de pie sobre una tierra adecuada, los 120 V completos caerían sobre ella.

La conexión a tierra es particularmente importante cuando se trabaja con numerosas piezas de equipo de medición en el laboratorio. Por ejemplo, la fuente y el osciloscopio de la figura 7.51(a) están conectados directamente a tierra física mediante la terminal negativa de cada uno. Si el osciloscopio se

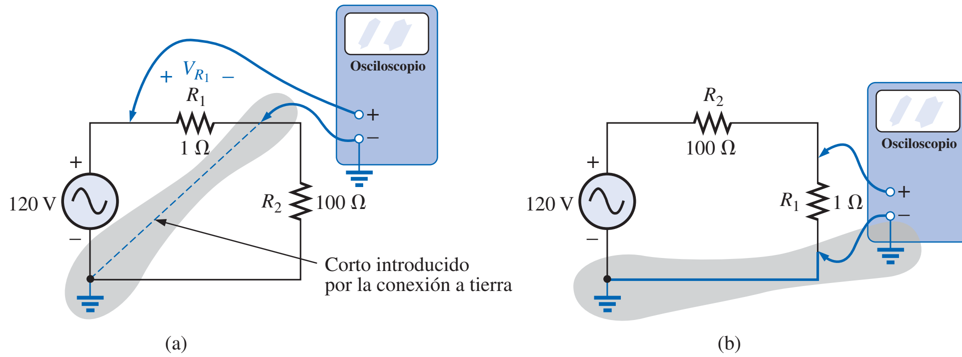


FIGURA 7.51
Demostración del efecto de la conexión a tierra del osciloscopio sobre la medición del voltaje en el resistor R_1.

conecta como se muestra en la figura 7.51(a) para medir el voltaje V_{R_1}, se generará una situación peligrosa. Las tierras de cada pieza de equipo están conectadas entre sí mediante la tierra física, y pondrán en corto al resistor. Debido a que el resistor es el principal elemento controlador de corriente en la red, la corriente se elevará a un nivel muy alto y posiblemente dañe los instrumentos o cause peligrosos efectos colaterales. En este caso, la fuente o el osciloscopio deberán utilizarse en el modo flotante, o intercambiar los resistores como se muestra en la figura 7.51(b). En la figura 7.51(b) las tierras tienen un punto común y no afectan la estructura de la red.

El Código Eléctrico Nacional estadounidense exige que la línea “viva” (o de *alimentación*) que lleva la corriente a la carga sea *negra*, y la línea (llamada *neutra*) que lleva la corriente de regreso a la fuente sea *blanca*. Los conductores de tres hilos tienen un cable de tierra que debe ser *verde* o *desnudo* (sin aislamiento), el cual asegurará una tierra común pero no está diseñado para portar corriente. En la figura 7.52 se muestran los componentes de un cable de extensión de tres terminales y de un enchufe doméstico. Observe que en ambos accesorios la conexión de la terminal energizada es más pequeña que la terminal de retorno, y que la conexión a tierra es parcialmente circular.

En la figura 7.53 se presenta el diagrama completo del cableado para un enchufe doméstico. Observe que la corriente a través del cable de tierra es cero, y que tanto el cable de retorno como el de tierra se encuentran conectados a tierra física. Toda la corriente hacia las cargas fluye a través de las líneas de alimentación y de retorno.

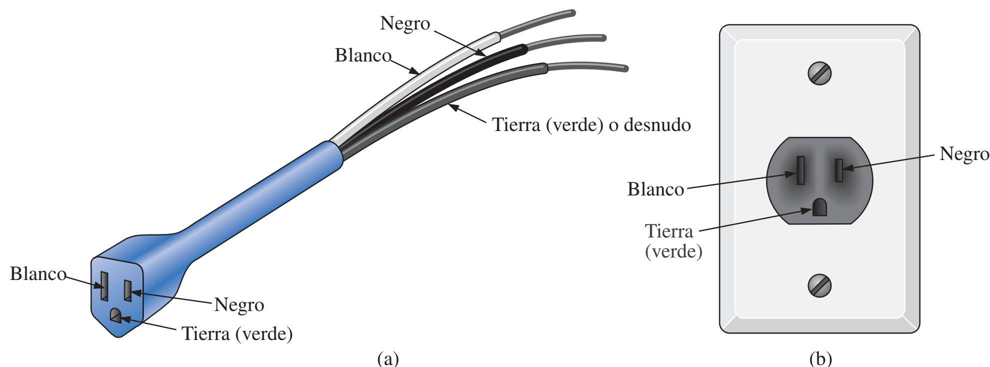
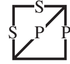


FIGURA 7.52
Conductores de tres hilos: (a) cable de extensión; (b) enchufe doméstico.



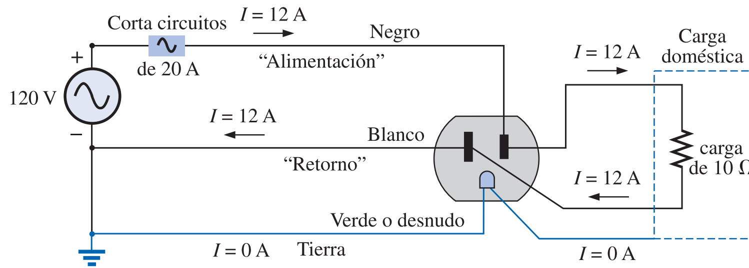


FIGURA 7.53
Sistema completo de cableado para un enchufe doméstico con una carga de 10Ω.

La importancia del cable de tierra en un sistema de tres hilos puede demostrarse mediante el tostador de la figura 7.54 que tiene especificaciones de 1200 W a 120 V. A partir de la ecuación de la potencia $P = EI$, la corriente consumida bajo condiciones normales de operación es $I = P/E = 1200\ \text{W}/120\ \text{V} = 10\ \text{A}$. Si se emplea una línea de dos hilos como se muestra en la figura 7.54(a), el corta circuitos de 20 A no tendrá problemas con la corriente de 10 A, y el sistema funcionará de manera normal. Pero si alguna circunstancia irregular ocasionara que el alimentador (o línea de retorno) se dañara y perdiera su recubrimiento aislante, y tocara la cubierta metálica del tostador, se generaría la situación ilustrada en la figura 7.54(b). La cubierta metálica "estará viva", pero el corta circuitos no se "abrirá" ya que la corriente sigue siendo de 10 A. Con esto se presenta una condición peligrosa ya que cualquier persona que toque el tostador recibirá los 120 V a tierra. Si se conectara el cable de tierra al chasis como

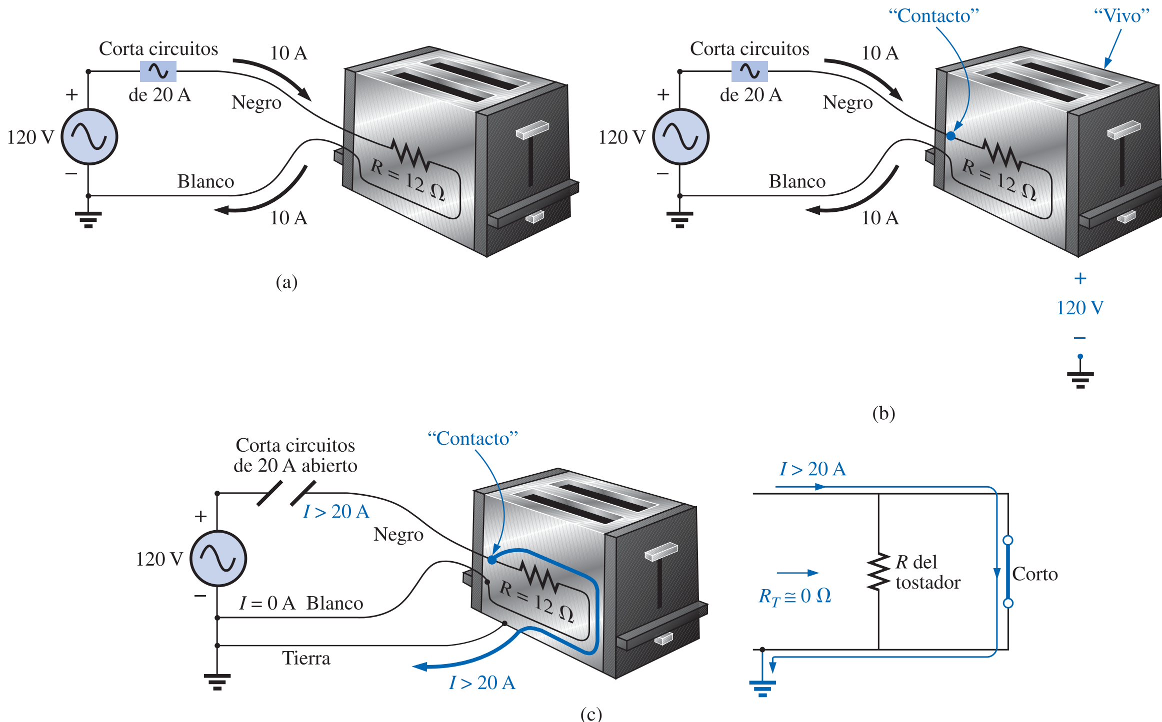
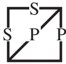


FIGURA 7.54
Demostración de la importancia de que un aparato eléctrico tenga una conexión a tierra adecuada: (a) sin conexión a tierra; (b) sin conexión a tierra y con un contacto no deseado; (c) aparato con conexión a tierra y un contacto no deseado.



se muestra en la figura 7.54(c), se crearía una trayectoria de baja resistencia entre el punto de corto circuito y tierra, y la corriente saltaría a niveles muy altos. El corta circuitos se "abriría" y el usuario se daría cuenta de que existe algún problema.

A pesar de que la argumentación anterior no cubre todas las áreas posibles de interés acerca de la adecuada conexión a tierra ni presenta todos los matices asociados con el efecto de la tierra en el desempeño de un sistema, deberá generar una conciencia de la importancia de comprender su impacto. Se presentarán comentarios adicionales sobre los efectos de la conexión a tierra en los capítulos siguientes a medida que surja la necesidad.

7.8 APLICACIONES

Carga de una batería de automóvil

Aunque la carga de una batería de automóvil podría parecer una aplicación simple de redes en paralelo, en realidad se trata de una operación en serie-paralelo que merece cierto estudio. Como se indicó en el capítulo 2, toda fuente de cd cuenta con cierta resistencia interna. En una batería de automóvil típica de plomo-ácido, esta resistencia es muy pequeña (en el intervalo de los miliohms). En la mayoría de los casos, la baja resistencia interna asegurará que la mayor parte del voltaje (o potencia) se entregue a la carga y que no exista pérdida sobre la resistencia interna. En la figura 7.55, la batería número 2 se descargó debido a que se dejaron las luces encendidas durante las tres horas que duró una película. Por fortuna, alguien que sí se cercioró de que las luces de su automóvil estuviesen apagadas tiene una batería completamente cargada (número 1) y un buen juego de cables con 16 pies de cable trenzado del número 6 y pinzas bien diseñadas. La adquisición de un buen juego de cables gruesos con suficiente longitud es una buena inversión, especialmente en clima frío. La flexibilidad que ofrece un cable estándar también es una característica deseable bajo ciertas condiciones. Asegúrese de verificar el calibre del cable y no solo el espesor de la funda de recubrimiento. Se obtiene lo que se paga, y el cobre es la parte más cara de los cables. Con frecuencia la etiqueta dice "trabajo pesado", sin embargo el cable no tiene el calibre adecuado.

La secuencia de pasos más apropiada para arrancar un automóvil con batería muerta frecuentemente depende de la persona con quien se hable o de la información que se lea. Por motivos de seguridad, algunas personas recomiendan que el automóvil con la batería en buenas condiciones se encuentre apagado al realizar las conexiones. Esto, sin embargo, puede crear un problema inmediato si la batería "muerta" se encuentra en tan mal estado que, cuando se conecte con la batería "buena", en seguida comience a vaciarla hasta un punto en que ninguno de los dos automóviles arranque. Con esto presente, tiene sentido dejar el automóvil encendido para asegurar que el proceso de carga continúe hasta que se inicie el proceso de arranque en el automóvil inhabilitado. Ya que los accidentes

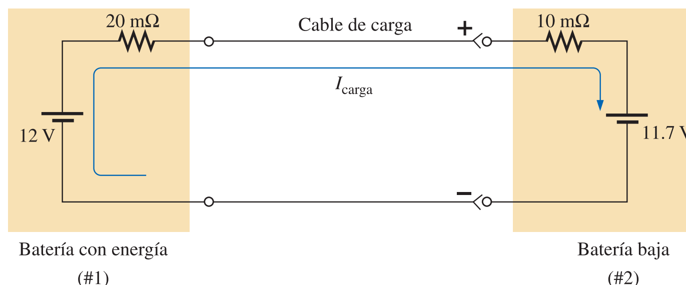
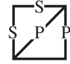


FIGURA 7.55
Carga de una batería de automóvil.



ocurren, se recomienda firmemente que la persona que realice las conexiones utilice algún tipo de equipo protector de ojos, aunque sea sólo un par de lentes. Debe tomarse el tiempo suficiente para identificar las terminales positivas y negativas de ambos automóviles. Si esto no se aprecia de forma inmediata, téngase presente que la sección negativa o de tierra se encuentra, por lo general, conectada al chasis del automóvil mediante un cable pequeño y ancho. Una vez que se esté seguro de cuáles son las terminales positiva y negativa, se conecta primero una de las pinzas del cable rojo de los cables de carga a la terminal positiva de la batería descargada, asegurándose antes que la otra pinza roja no está tocando la batería o el automóvil. Luego se conecta el otro extremo del cable rojo a la terminal positiva de la batería que está completamente cargada. A continuación, un extremo del cable negro de los cables de carga se conecta a la terminal negativa de la batería cargada y, por último, se conecta el otro extremo del cable negro al bloque del motor del vehículo detenido (no al poste negativo de la batería muerta), alejado del carburador, las mangueras de combustible o las partes móviles del automóvil. Por último, haga que alguien mantenga una velocidad en reposo constante en el automóvil con la batería en buen estado mientras usted arranca el automóvil con la batería dañada. Una vez que el vehículo arranque, retire los cables en el orden inverso comenzando con el cable conectado al bloque del motor. Siempre tenga cuidado en asegurarse de que las pinzas no toquen la batería o el chasis del automóvil o se acerquen a partes en movimiento. Algunas personas creen que el automóvil con la batería en buen estado debe cargar a la batería baja durante 10 o 15 minutos antes de intentar encender el automóvil descompuesto de manera que arranque con su propia batería. Debe tenerse presente que en el instante que se conecten los cables de carga, el automóvil con carga estará realizando un esfuerzo concertado para cargar tanto su propia batería como la descargada. Al empezar se le solicitará que proporcione una fuerte corriente para arrancar el otro automóvil, lo cual representa una carga pesada para una sola batería. En cuanto a la situación de la figura 7.55, el voltaje de la batería número 2 será menor que el de la batería número 1, y la corriente de carga fluirá como se muestra. La resistencia en serie con la batería cargada es mayor debido a la larga extensión del cable de carga al otro automóvil. La corriente está limitada sólo por los resistores en serie del orden de los miliohms de las baterías, pero la diferencia de voltaje es tan pequeña que la corriente de arranque inicial se encontrará dentro del margen seguro de los cables involucrados. La corriente inicial de carga será $I = (12\text{ V} - 11.7\text{ V})/(20\text{ m}\Omega + 10\text{ m}\Omega) = 0.3\text{ V}/30\text{ m}\Omega = 10\text{ A}$. En el arranque, los niveles de corriente serán como los mostrados en la figura 7.56 para los niveles de resistencia y voltajes de batería supuestos. Al arrancar, se supone que la resistencia interna del circuito de arranque es de $0.1\ \Omega = 100\text{ m}\Omega$. Observe que la batería del automóvil descompuesto ya se cargó hasta 11.8 V con un incremento asociado en su nivel de potencia. La presencia de dos baterías requiere que el análisis espere por los métodos que se presentarán en el siguiente capítulo.

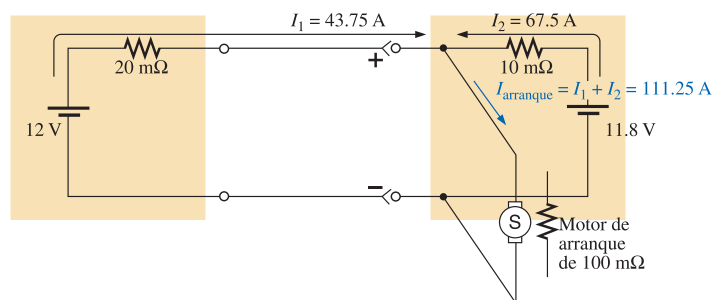
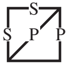


FIGURA 7.56
Niveles de corriente en el arranque.



Observe también que la corriente consumida por el circuito de arranque para el automóvil descompuesto es superior a 100 A, y que la mayor parte de la corriente de arranque la proporciona la batería que está siendo cargada. Por tanto, en esencia, la mayor parte de la corriente de arranque proviene del automóvil descompuesto. La batería en buen estado proporcionó una carga inicial a la batería baja y también ofreció la corriente adicional necesaria para arrancar el automóvil. Pero, en general, es la batería del automóvil descompuesto la fuente primaria de la corriente de arranque. Por esta misma razón, se recomienda permitir que la acción de carga continúe durante 10 o 15 minutos antes de intentar arrancar el automóvil descompuesto. Si éste se encuentra realmente en malas condiciones con un nivel de voltaje de solo 11 V, los niveles resultantes de corriente se invertirán, siendo la batería en buenas condiciones la que proporcione 68.75 A y la batería en malas condiciones sólo 37.5 A. Por tanto, resulta obvio que mientras peor sea la condición de la batería baja, más fuerte será el consumo sobre la batería con carga. También se puede alcanzar un punto en el que la batería defectuosa se encuentre en tan malas condiciones que no pueda recibir una buena carga o proporcionar su parte de corriente de arranque. El resultado de esto puede ser un continuo esfuerzo de intentos de encendido (marcha) sin llegar a arrancar y un posible daño a la batería del automóvil que funciona bien, como consecuencia de la enorme demanda de corriente. Una vez que el automóvil con la batería descargada haya arrancado, y los cables de carga se desconecten, continuará encendido debido a que el alternador mantendrá la carga (cargando la batería y proporcionando el voltaje de cd necesario) después del encendido.

La exposición anterior procedió de forma más bien clara, pero a continuación se verá lo que podría suceder si el lector se encuentra en una oscura y lluviosa noche, apresurado, y conecta lo cables de forma incorrecta, como se muestra en la figura 7.57. El resultado serán dos baterías de apoyo en serie y una trayectoria de resistencia muy baja. La corriente resultante entonces puede ser, en teoría, muy alta [$I = (12\text{ V} + 11.7\text{ V})/30\text{ m}\Omega = 23.7\text{ V}/30\text{ m}\Omega = 790\text{ A}$], con posible daño permanente al sistema eléctrico de ambos automóviles y, lo peor de todo, ocasionando una explosión que puede herir seriamente a alguien. Por ello, es muy importante que este proceso de carga se maneje con mucho cuidado. Consígase una linterna, verifique dos veces las conexiones, y asegúrese que todo mundo se aleje cuando arranque el automóvil.

Antes de abandonar el tema, debe señalarse que obtener energía de una grúa genera una situación distinta. Las conexiones a la batería de la grúa son muy seguras; el cable que sale de la grúa es grueso y tiene asilamiento denso; las pinzas también son grandes y ejercen una excelente conexión con la batería de un automóvil; y la batería es de alto rendimiento, previniendo este tipo de carga. El resultado de todo esto será una menor resistencia interna por el lado del suministro, y una corriente más fuerte proveniente de la batería de la grúa. En este caso, la grúa realmente es la que arranca al automóvil descompuesto, el cual simplemente reacciona ante la oleada de energía proporcionada.

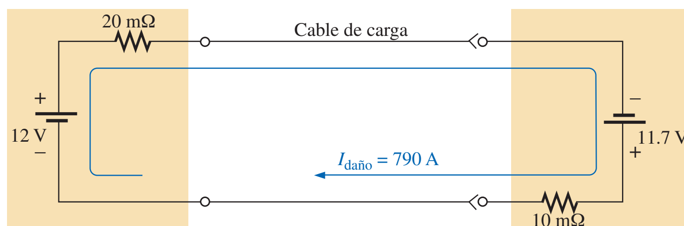
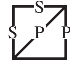


FIGURA 7.57
Niveles de corriente si la batería por cargar se encuentra conectada de forma incorrecta.



Circuitos electrónicos

La operación de la mayoría de los sistemas electrónicos requiere cierta distribución de voltajes de cd a lo largo del diseño. Aunque la amplia explicación del porqué se requiere el nivel de cd (ya que será una señal de ca la que se amplificará) tendrá que esperar hasta los cursos introductorios en circuitos electrónicos, el análisis de cd procederá de forma muy similar a la descrita en este capítulo. En otras palabras, este capítulo y los capítulos anteriores ofrecen los antecedentes suficientes como para realizar el análisis de cd en la mayoría de las redes electrónicas que el lector encuentre siempre y cuando se proporcionen las características terminales de cd de los elementos electrónicos. Por ejemplo, la red de la figura 7.58 que emplea un transistor será cubierta con todo detalle en cualquier curso introductorio de electrónica. El voltaje de cd entre la base (B) del transistor y el emisor (E) es aproximadamente de 0.7 V bajo condiciones normales de operación, y el colector (C) se relaciona con la corriente de base mediante $I_C = \beta I_B = 50 I_B$ (β varía de transistor a transistor). Utilizando estos hechos es posible determinar todas las corrientes y los voltajes de cd de la red aplicando simplemente las leyes presentadas en este capítulo. Por tanto, en general, siéntase seguro por el hecho de que el contenido de este capítulo encontrará numerosas aplicaciones en los cursos a seguir.

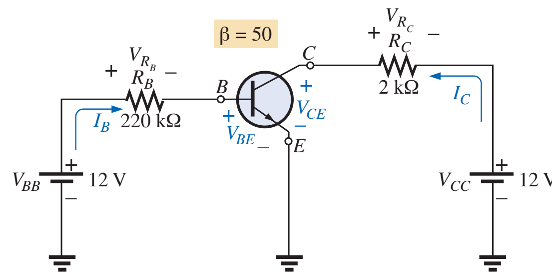


FIGURA 7.58
Niveles de polarización de cd para un amplificador con transistor.

Para la red de la figura 7.58, es posible comenzar con el análisis al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff al circuito de base:

$$+V_{BB} - V_{R_B} - V_{BE} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad V_{BB} = V_{R_B} + V_{BE}$$

y $\quad V_{R_B} = V_{BB} - V_{BE} = 12\text{ V} - 0.7\text{ V} = 11.3\text{ V}$

de manera que: $\quad V_{R_B} = I_B R_B = 11.3\text{ V}$

e $\quad I_B = \dfrac{V_{R_B}}{R_B} = \dfrac{11.3\text{ V}}{220\text{ k}\Omega} = \mathbf{51.4\ \mu A}$

Entonces $\quad I_C = \beta I_B = 50 I_B = 50(51.4\ \mu\text{A}) = \mathbf{2.57\ mA}$

y $\quad +V_{CE} + V_{R_C} - V_{CC} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad V_{CC} = V_{R_C} + V_{CE}$

con $\quad V_{CE} = V_{CC} - V_{R_C} = V_{CC} - I_C R_C = 12\text{ V} - (2.57\text{ mA})(2\text{ k}\Omega)$

$$= 12\text{ V} - 5.14\text{ V} = \mathbf{6.86\ V}$$

Para un análisis típico de cd de un transistor, ahora ya se conocen todas las corrientes y voltajes de interés: I_B, V_{BE}, I_C y V_{CE}. Entonces, todos los niveles restantes de voltaje, corriente y potencia de la red pueden obtenerse utilizando las leyes básicas aplicadas en este capítulo.

El ejemplo anterior es característico del tipo de ejercicios que se pide realizar en un primer curso de electrónica. En este momento sólo es necesario que el lector conozca el dispositivo y entienda la razón de las relaciones entre sus distintas corrientes y voltajes.

7.9 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Fuente con divisor de voltaje Ahora se utilizará PSpice para verificar los resultados del ejemplo 7.11. Se sustituirán los valores calculados de los resistores y se verificarán los niveles de voltaje y corriente para ver si corresponden con la solución realizada a mano. La red se traza según se describió en capítulos anteriores empleando únicamente las herramientas descritas hasta ahora (vea la figura 7.59) —de alguna forma, es un ejercicio práctico acerca de todo lo aprendido sobre **Capture Lite Edition**—. En este caso observe que al rotar el primer resistor se establecen las condiciones para el resto de los resistores. Por otro lado, es una ventaja apreciable que pueda colocarse un resistor después de otro sin tener que ir a la opción de **End Mode**. Debe tenerse un cuidado especial con la ubicación de la tierra y asegurarse de que se utiliza **0/SOURCE**. También observe que el resistor R_1 de la figura 7.59 se capturó como 1.333 kΩ en lugar de 1.33 kΩ como en el ejemplo. La razón de esto fue que, al ejecutar el programa, se encontró que las soluciones por computadora no coincidían exactamente con la solución realizada a mano a un nivel de precisión deseado a menos que se efectuara este cambio.

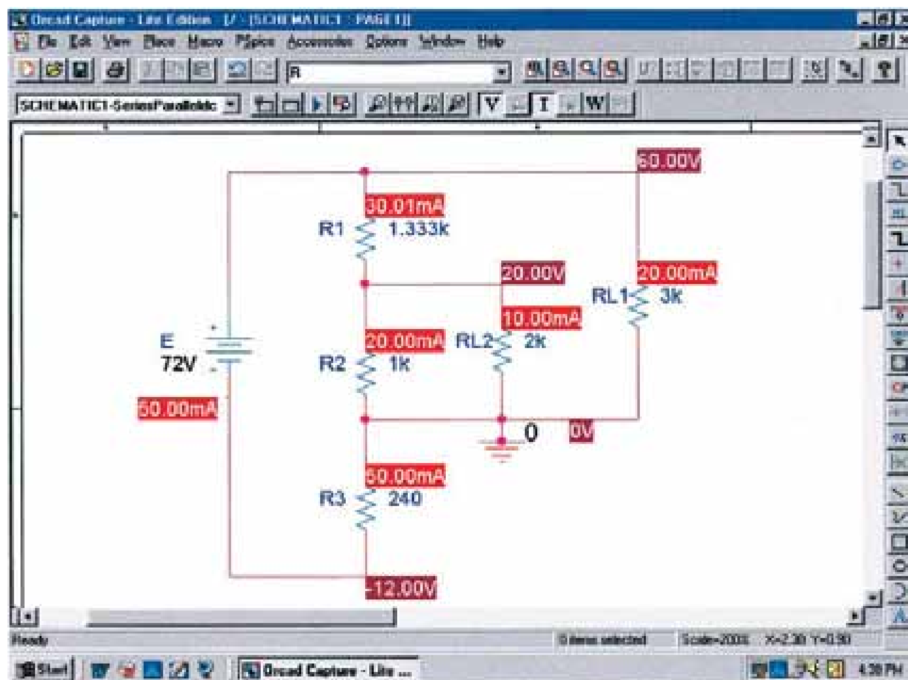
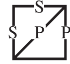


FIGURA 7.59
Utilización de PSpice para verificar los resultados del ejemplo 7.11.

Dado que todos los voltajes se especifican con respecto a tierra, el voltaje en R_{L_1} es 60 V; en R_{L_2}, 20 V; y en R_3, –12 V. Las corrientes también coinciden perfectamente con la solución manual con I_E = 50 mA, I_{R_1} = 30 mA, I_{R_2} = 20 mA, I_{R_3} = 50 mA, $I_{R_{L_2}}$ = 10 mA e $I_{R_{L_1}}$ = 20 mA. En la imagen de la figura 7.59, se inhabilitó la opción **W** para concentrarse en los niveles de voltaje y corriente.

De nuevo existe una correspondencia exacta con la solución manual.



C++

Red de escalera El programa en C++ que se presentará realiza un análisis detallado de la red mostrada en la figura 7.60 (que aparece con anterioridad en el texto en la figura 7.27). Una vez que todos los parámetros se introducen, el programa desplegará R_T, I_s, I_3 e I_6. El orden del programa es exactamente el mismo que el de la solución manual. En la figura 7.60, $R_a = R_5 + R_6$ se determina primero, seguida por $R_b = R_4 \| R_a$ y $R_c = R_3 + R_b$, con $R_d = R_2 \| R_c$ y $R_T = R_1 + R_d$. Luego $I_s = E/R_T$ con I_3 e I_6 según lo determina la regla del divisor de corriente.

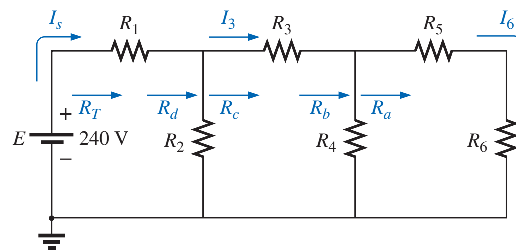
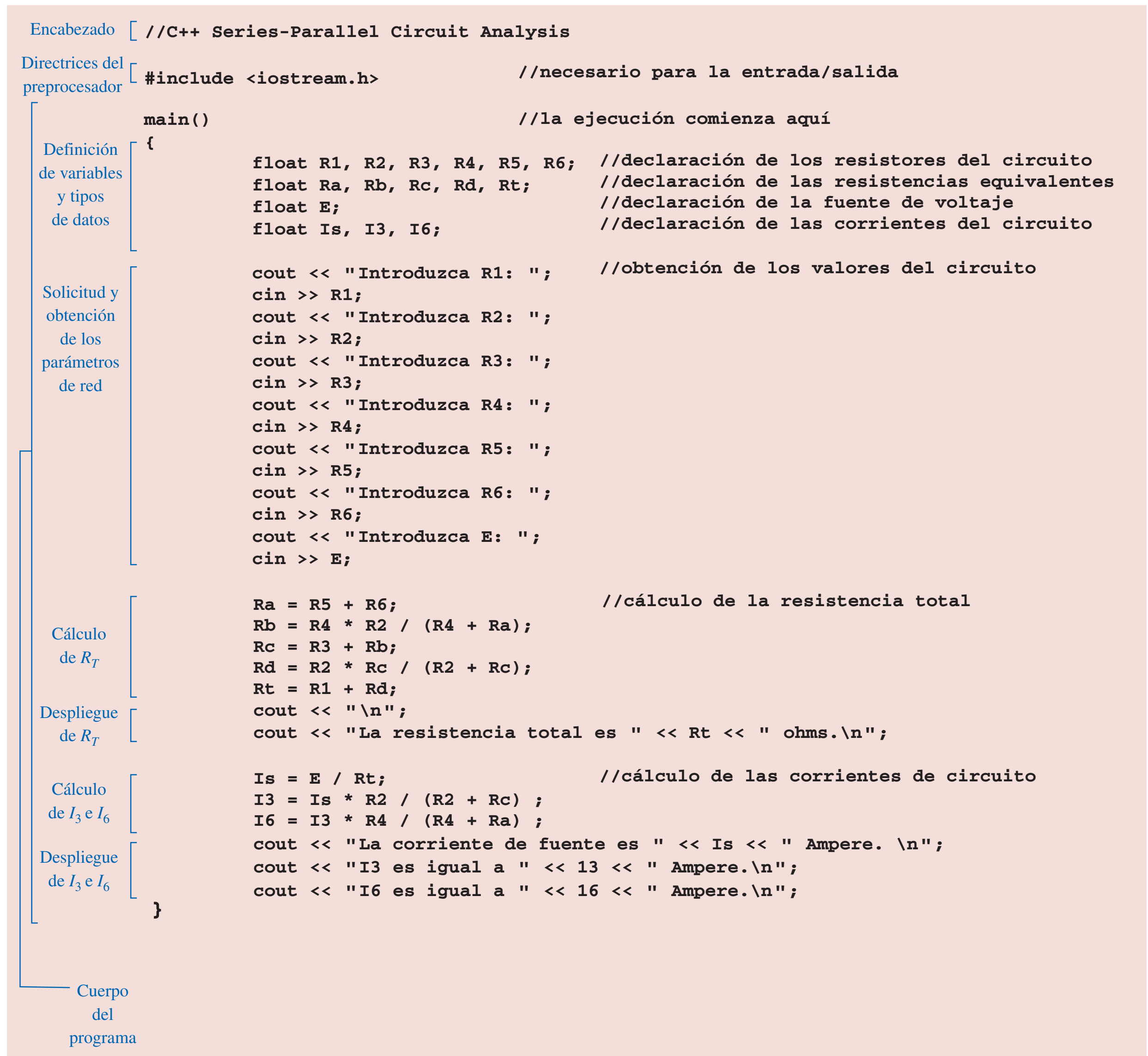


FIGURA 7.60
Red de escalera para analizarse usando C++.

El programa comienza con un encabezado y una directriz del preprocesador. El archivo de encabezado <*iostream.h*> configura la trayectoria de entrada-salida entre el programa y el sistema operativo. La sección *main*( ) del programa, definida por las llaves { }, incluye todas las instrucciones y estatutos restantes. Primero, los parámetros y cantidades de la red a determinar se definen como variables de punto flotante. Luego, se utilizan las órdenes *cout* y *cin* para obtener del usuario los valores de los resistores y el voltaje de la fuente. La resistencia total se determina entonces conforme al orden descrito antes, seguido de un salto de línea "*n*" y el despliegue del valor. Luego se determinan las corrientes y se despliegan gracias a las últimas tres líneas.

El programa (Figura 7.61) es muy sencillo y con un poco de experiencia no resulta difícil de desarrollar. Además, considérense los beneficios de tener en archivo un programa que pueda resolver cualquier red de escalera que presente la configuración de la figura 7.60. Para los valores de los parámetros de la figura 7.27, el despliegue de salida será como se muestra en la figura 7.62, la cual confirma los resultados de la sección 7.3. Si falta algún elemento, simplemente se inserta un equivalente de corto circuito o de circuito abierto donde sea adecuado. Por ejemplo, si R_5 y R_6 no están disponibles, dejando una red de dos lazos, se insertan valores muy grandes de R_5 y R_6 en comparación con los otros elementos de la red, y aparecerán como equivalentes de circuito abierto en el análisis. Esto se demuestra en la ejecución de la figura 7.63 con una fuente negativa de 60 V. Los resultados tienen signos negativos para las corrientes debido a que la dirección definida en el programa tiene la dirección opuesta. La corriente I_6 es básicamente de cero ampere, como debe ser si R_5 y R_6 no existen. Si cualquiera de R_1, R_3, R_5 o R_6 fuera el único elemento resistivo que faltara, se insertaría un equivalente de corto circuito. Si fuera R_2 o R_4 el único elemento faltante, se sustituiría el equivalente de circuito abierto.



```
//C++ Series-Parallel Circuit Analysis

#include <iostream.h>              //necesario para la entrada/salida

main()                             //la ejecución comienza aquí
{
         float R1, R2, R3, R4, R5, R6;  //declaración de los resistores del circuito
         float Ra, Rb, Rc, Rd, Rt;      //declaración de las resistencias equivalentes
         float E;                       //declaración de la fuente de voltaje
         float Is, I3, I6;              //declaración de las corrientes del circuito

         cout << "Introduzca R1: ";     //obtención de los valores del circuito
         cin >> R1;
         cout << "Introduzca R2: ";
         cin >> R2;
         cout << "Introduzca R3: ";
         cin >> R3;
         cout << "Introduzca R4: ";
         cin >> R4;
         cout << "Introduzca R5: ";
         cin >> R5;
         cout << "Introduzca R6: ";
         cin >> R6;
         cout << "Introduzca E: ";
         cin >> E;

         Ra = R5 + R6;                  //cálculo de la resistencia total
         Rb = R4 * R2 / (R4 + Ra);
         Rc = R3 + Rb;
         Rd = R2 * Rc / (R2 + Rc);
         Rt = R1 + Rd;
         cout << "\n";
         cout << "La resistencia total es " << Rt << " ohms.\n";

         Is = E / Rt;                   //cálculo de las corrientes de circuito
         I3 = Is * R2 / (R2 + Rc) ;
         I6 = I3 * R4 / (R4 + Ra) ;
         cout << "La corriente de fuente es " << Is << " Ampere. \n";
         cout << "I3 es igual a " << 13 << " Ampere.\n";
         cout << "I6 es igual a " << 16 << " Ampere.\n";
 }
```


FIGURA 7.61

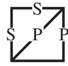
Programa en C++ para analizar la red de escalera de la figura 7.60.

```
Introduzca R1: 5
Introduzca R2: 6
Introduzca R3: 4
Introduzca R4: 6
Introduzca R5: 1
Introduzca R6: 2
Introduzca E: 240

La resistencia total es 8 ohms.
La corriente de fuente es 30 Ampere.
I3 es igual a 15 Ampere.
I6 es igual a 10 Ampere.
```

FIGURA 7.62

Respuesta del programa en C++ a un análisis de la red de escalera mostrada en la figura 7.60 con los valores de los parámetros de la figura 7.27.




```
Introduzca R1: 10
Introduzca R2: 220
Introduzca R3: 12
Introduzca R4: 100
Introduzca R5: 1e30
Introduzca R6: 1e30
Introduzca E: -60

La resistencia total es 84.216866 ohms.
La corriente de fuente es -0.712446 Ampere.
I3 es igual a -0.472103 Ampere.
I6 es igual a -2.360515e-29 Ampere.
```

FIGURA 7.63
Respuesta del programa de C++ a un análisis de la red de escalera mostrada en la figura 7.60 sin los elementos R_5 y R_6.

PROBLEMAS

SECCIÓN 7.2 Ejemplos descriptivos

1. ¿Cuáles elementos de las redes de la figura 7.64 se encuentran en serie y cuáles en paralelo? En otras palabras, ¿cuáles elementos de las redes dadas cuentan con la misma corriente (en serie) o el mismo voltaje (en paralelo)? Restrinja su decisión a elementos individuales, no incluya elementos combinados.

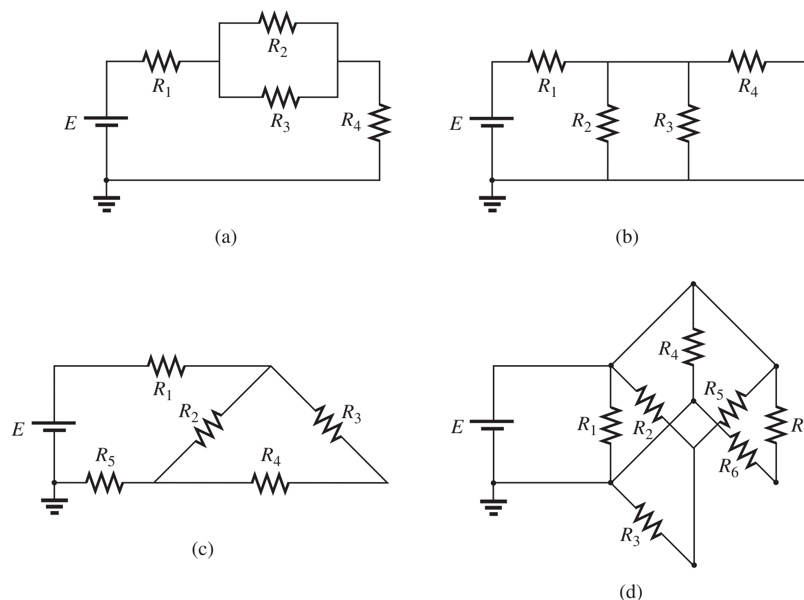
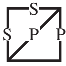


FIGURA 7.64
Problema 1.



2. Determine R_T para las redes de la figura 7.65.

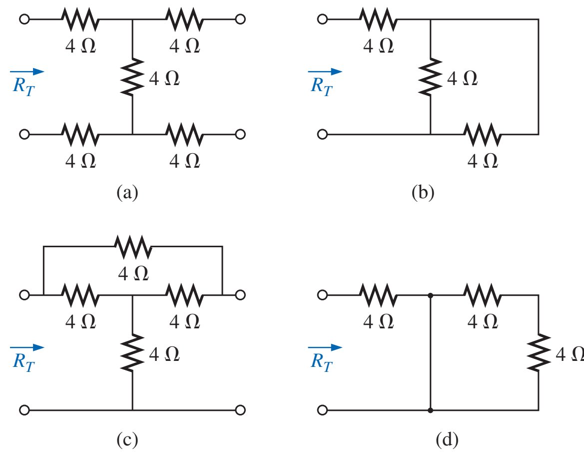


FIGURA 7.65
Problema 2.

3. Para la red de la figura 7.66:
   a. ¿Es $I = I_3 = I_6$? Explique.
   b. Si $I = 5$ A e $I_1 = 2$ A, encuentre I_2.
   c. ¿Es $I_1 + I_2 = I_4 + I_5$? Explique.
   d. Si $V_1 = 6$ V y $E = 10$ V, encuentre V_2.
   e. Si $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$ y $R_4 = 1\ \Omega$, ¿cuál será el valor de R_T?
   f. Si los resistores tienen los valores dados en el inciso (e) y $E = 10$ V, ¿cuál será el valor de I en ampere?
   g. Utilizando los valores dados en los incisos (e) y (f), encuentre la potencia entregada por la batería E y disipada por los resistores R_1 y R_2.

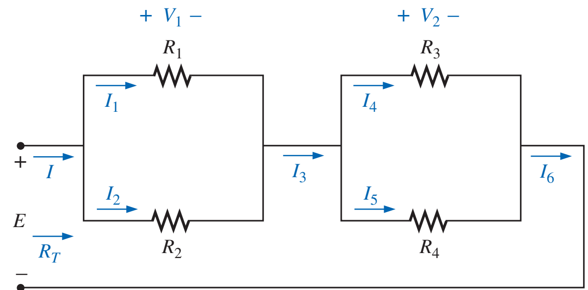


FIGURA 7.66
Problema 3.

4. Para la red de la figura 7.67:
   a. Calcule R_T.
   b. Determine I e I_1.
   c. Encuentre V_3.

5. Para la red de la figura 7.68:
   a. Calcule R_T.
   b. Determine I_s, I_1 e I_2.
   c. Encuentre V_a.

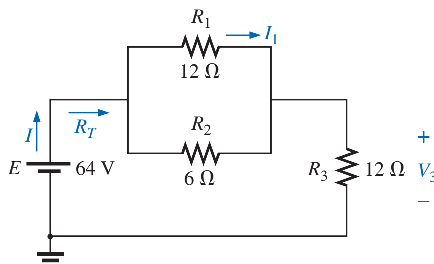


FIGURA 7.67
Problema 4.

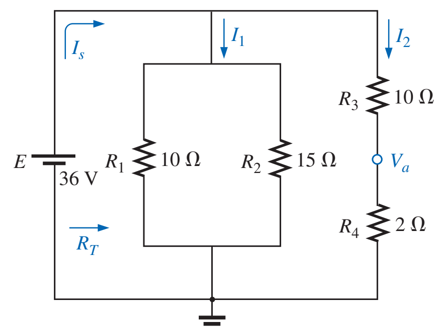
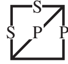


FIGURA 7.68
Problema 5.



6. Determine las corrientes I_1 e I_2 para la red de la figura 7.69.

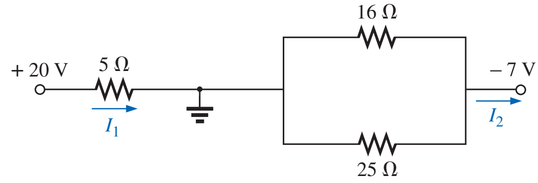


FIGURA 7.69
Problema 6.

7. **a.** Encuentre la magnitud y la dirección de las corrientes I, I_1, I_2 e I_3 para la red de la figura 7.70.
b. Indique su dirección sobre la figura 7.70.

***8.** Para la red de la figura 7.71:
a. Determine las corrientes I_s, I_1, I_3 e I_4.
b. Calcule V_a y V_{bc}.

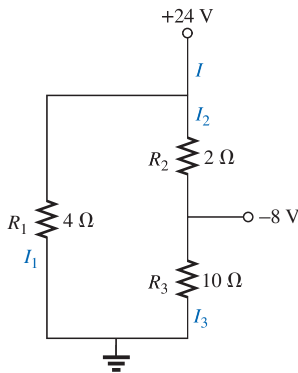


FIGURA 7.70
Problema 7.

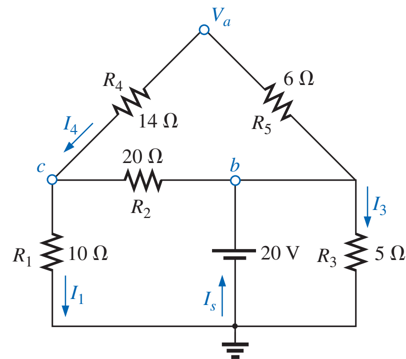


FIGURA 7.71
Problema 8.

9. Para la red de la figura 7.72:
a. Determine la corriente I_1.
b. Calcule las corrientes I_2 e I_3.
c. Determine los niveles de voltaje V_a y V_b.

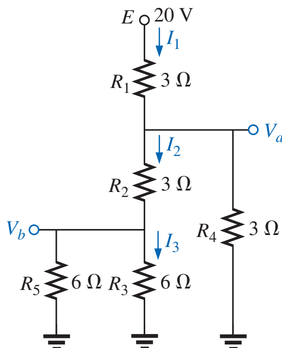
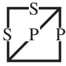


FIGURA 7.72
Problema 9.



10. Para la red de la figura 7.73:

a. Encuentre las corrientes I e I_6.

b. Encuentre los voltajes V_1 y V_5.

c. Encuentre la potencia entregada al resistor de 6 kΩ.

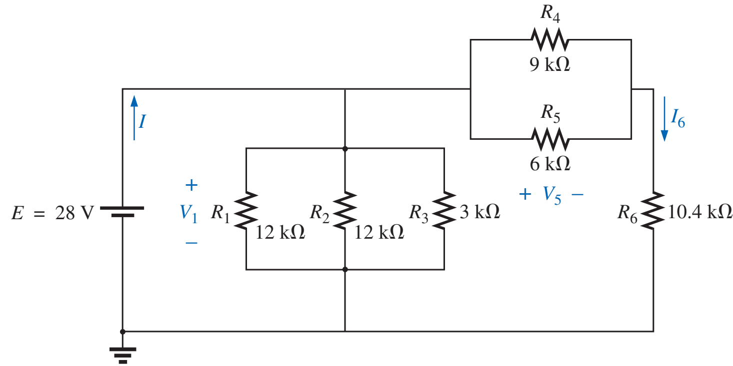


FIGURA 7.73
Problema 10.

***11.** Para la red en serie-paralelo de la figura 7.74:

a. Encuentre la corriente I.

b. Encuentre las corrientes I_3 e I_9.

c. Encuentre la corriente I_8.

d. Encuentre el voltaje V_{ab}.

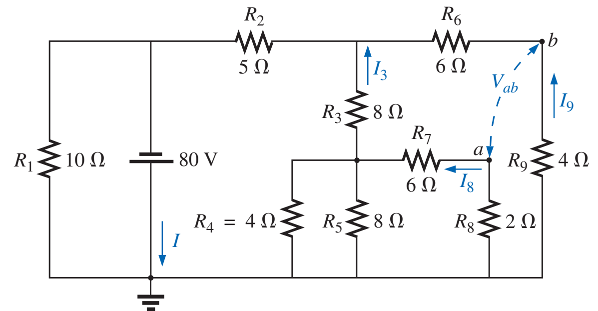


FIGURA 7.74
Problema 11.

***12.** Determine los niveles de cd para la red de transistor de la figura 7.75 empleando el hecho de que $V_{BE} = 0.7$ V, $V_E = 2$ V e $I_C = I_E$. Es decir:

a. Determine I_E e I_C.

b. Calcule I_B.

c. Determine V_B y V_C.

d. Encuentre V_{CE} y V_{BC}.

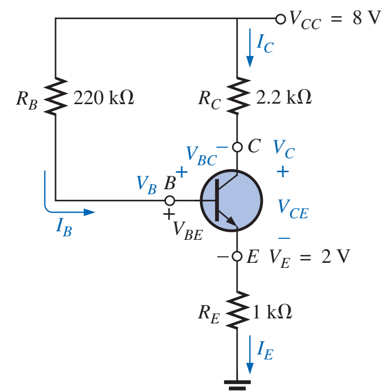
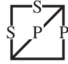


FIGURA 7.75
Problema 12.



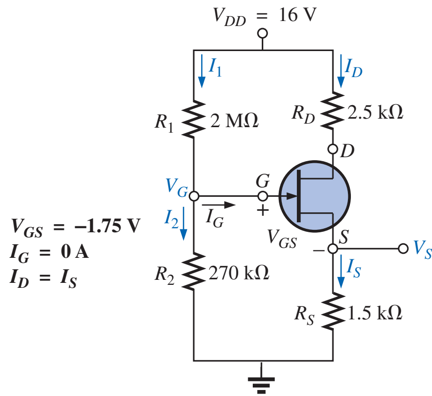


FIGURA 7.76
Problema 13.

***13.** La red de la figura 7.76 representa el arreglo básico para la polarización del *transistor de efecto de campo* (FET), un dispositivo de importancia creciente en el diseño electrónico. (*Polarización* significa, simplemente, la aplicación de niveles de cd para establecer un conjunto particular de condiciones de operación.) A pesar de que al lector no le sea familiar el FET, puede realizar el siguiente análisis utilizando solamente las leyes básicas presentadas en este capítulo y la información proporcionada en el diagrama.

a. Determine los voltajes V_G y V_S.
b. Calcule las corrientes I_1, I_2, I_D e I_S.
c. Determine V_{DS}.
d. Calcule V_{DG}.

***14.** Para la red de la figura 7.77:

a. Determine R_T.
b. Calcule V_a.
c. Encuentre V_1.
d. Calcule V_2.
e. Determine I (con dirección).

15. Para la red de la figura 7.78:

a. Determine la corriente I.
b. Encuentre V.

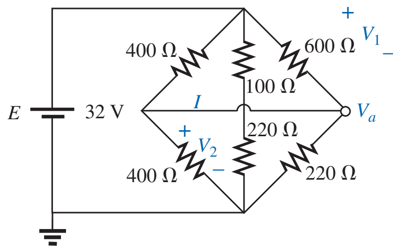


FIGURA 7.77
Problema 14.

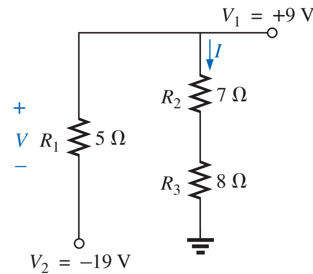


FIGURA 7.78
Problema 15.

***16.** Determine la corriente I y los voltajes V_a, V_b y V_{ab} para la red de la figura 7.79.

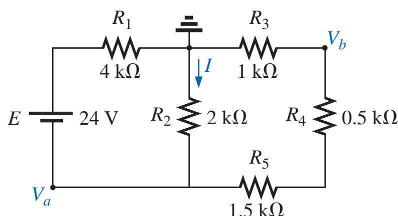
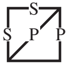


FIGURA 7.79
Problema 16.



17. Para la configuración de la figura 7.80:
a. Encuentre las corrientes I_2, I_6 e I_8.
b. Encuentre los voltajes V_4 y V_8.

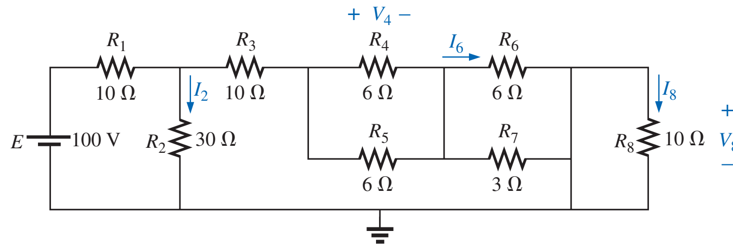


FIGURA 7.80
Problema 17.

18. Determine el voltaje V y la corriente I para la red de la figura 7.81.

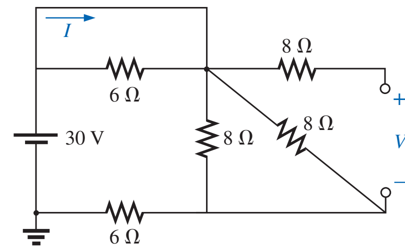


FIGURA 7.81
Problema 18.

***19.** Para la red de la figura 7.82:
a. Determine R_T combinando los elementos resistivos.
b. Encuentre V_1 y V_4.
c. Calcule I_3 (con dirección).
d. Determine I_s encontrando la corriente a través de cada elemento y aplicando luego la ley de corriente de Kirchhoff. Entonces calcule R_T a partir de $R_T = E/I_s$, y compare la respuesta con la solución del inciso (a).

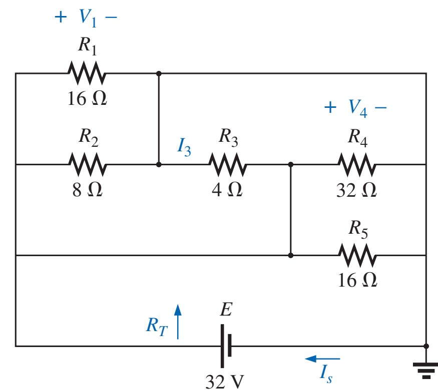


FIGURA 7.82
Problema 19.

20. Para la red de la figura 7.83:
a. Determine el voltaje V_{ab}. (*Sugerencia:* utilice precisamente la ley de voltaje de Kirchhoff.)
b. Calcule la corriente I.

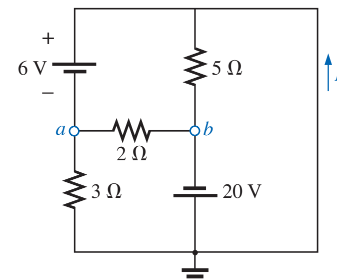
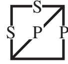


FIGURA 7.83
Problema 20.



***21.** Para la red de la figura 7.84:

a. Determine la corriente *I*.

b. Calcule el voltaje de circuito abierto *V*.

***22.** Para la red de la figura 7.85, encuentre la resistencia R_3 si la corriente a través de ella es de 2 A.

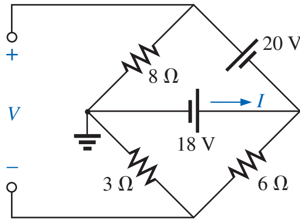


FIGURA 7.84
Problema 21.

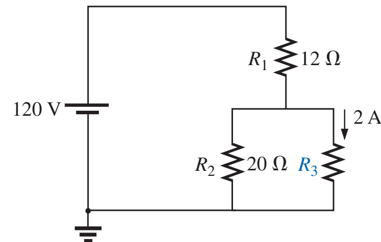


FIGURA 7.85
Problema 22.

***23.** Si todos los resistores del cubo de la figura 7.86 son de 10 Ω, ¿cuál será la resistencia total? (*Sugerencia:* realice algunas suposiciones básicas sobre la división de corriente a través del cubo.)

***24.** Dada la lectura del voltímetro $V = 27$ V mostrado en la figura 7.87:

a. ¿La red se encuentra operando adecuadamente?

b. Si no es así, ¿qué podría estar ocasionando la lectura incorrecta?

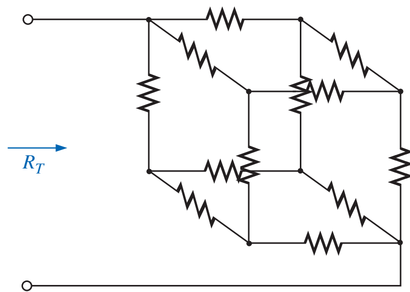


FIGURA 7.86
Problema 23.

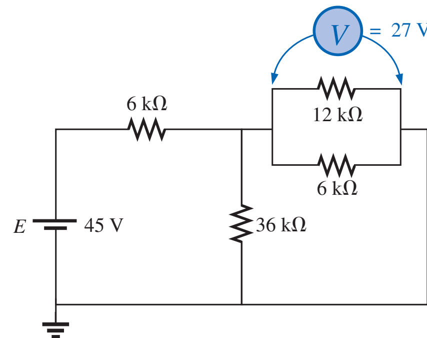


FIGURA 7.87
Problema 24.

SECCIÓN 7.3 Redes de escalera

25. Para la red de escalera de la figura 7.88:

a. Encuentre la corriente *I*.

b. Encuentre la corriente I_7.

c. Determine los voltajes V_3, V_5 y V_7.

d. Calcule la potencia entregada a R_7, y compárela con la potencia entregada por la fuente de 240 V.

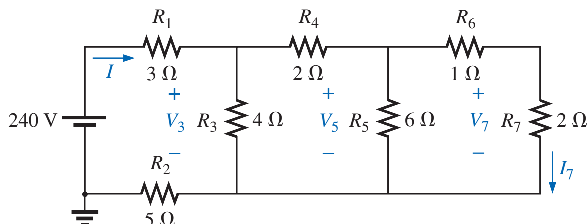
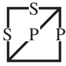


FIGURA 7.88
Problema 25.



26. Para la red de escalera de la figura 7.89:
- **a.** Determine R_T.
- **b.** Calcule I.
- **c.** Encuentre I_8.

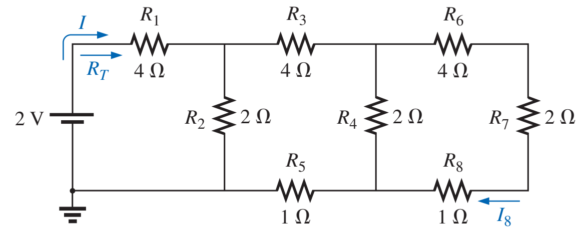


FIGURA 7.89
Problema 26.

***27.** Determine la potencia entregada a la carga de 10 Ω de la figura 7.90.

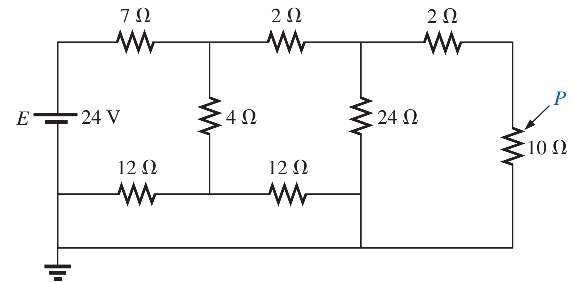


FIGURA 7.90
Problema 27.

***28.** Para la configuración de escalera múltiple de la figura 7.91:
- **a.** Determine I.
- **b.** Calcule I_4.
- **c.** Encuentre I_6.
- **d.** Encuentre I_{10}.

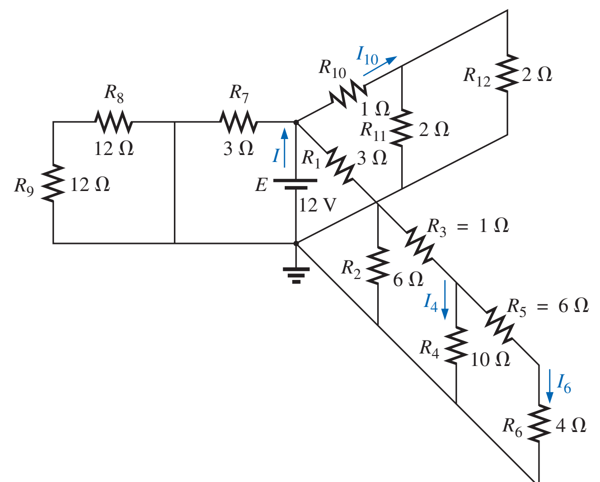


FIGURA 7.91
Problema 28.

SECCIÓN 7.4 Fuente con divisor de voltaje (con y sin carga)

29. Dada la fuente con divisor de voltaje de la figura 7.92:
- **a.** Determine el voltaje de alimentación E.
- **b.** Encuentre los resistores de carga R_{L_2} y R_{L_3}.
- **c.** Determine los resistores de divisor de voltaje R_1, R_2 y R_3.

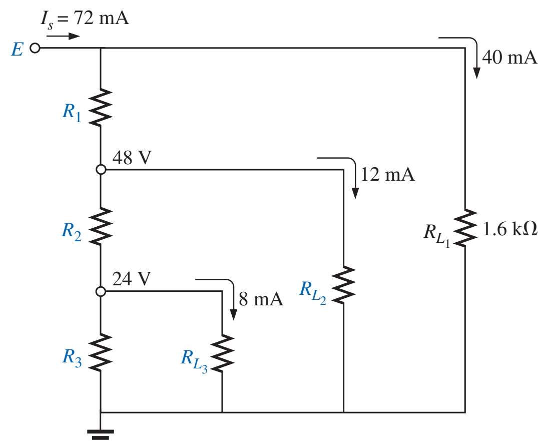
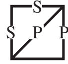


FIGURA 7.92
Problema 29.



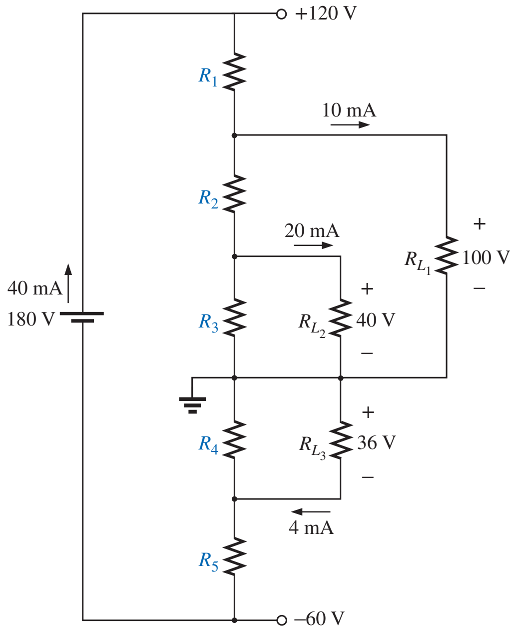


FIGURA 7.93
Problema 30.

***30.** Determine los resistores de la fuente con divisor de voltaje para la configuración de la figura 7.93. También determine el valor nominal de potencia en watts para cada resistor, y compare sus niveles.

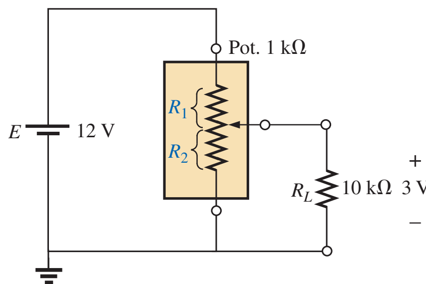


FIGURA 7.94
Problema 31.

SECCIÓN 7.5 Carga del potenciómetro

***31.** Para el sistema de la figura 7.94:

a. A primera vista, ¿el diseño parece ser adecuado?

b. En ausencia de la carga de 10 kΩ, ¿cuáles serán los valores de R_1 y R_2 para establecer 3 V en R_2?

c. Determine los valores de R_1 y R_2 cuando se aplica una carga, y compárelos con los resultados del inciso (b).

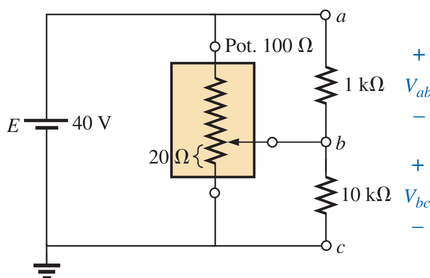


FIGURA 7.95
Problema 32.

***32.** Para el potenciómetro de la figura 7.95:

a. ¿Cuáles son los voltajes V_{ab} y V_{bc} sin carga aplicada?

b. ¿Cuáles son los voltajes V_{ab} y V_{bc} con las cargas indicadas aplicadas?

c. ¿Cuál es la potencia disipada por el potenciómetro bajo las condiciones de carga mostradas en la figura 7.95?

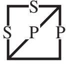
d. ¿Cuál es la potencia disipada por el potenciómetro sin carga aplicada? Compare su respuesta con los resultados del inciso (c).

SECCIÓN 7.6 Diseño de un amperímetro, un voltímetro y un ohmímetro

33. Un galvanómetro de d'Arsonval está clasificado como de 1 mA, 100 Ω.

a. ¿Cuál es la sensibilidad de corriente?

b. Diseñe un amperímetro de 20 A utilizando el galvanómetro anterior. Muestre el circuito y los valores de los componentes.



34. Utilizando un galvanómetro de d'Arsonval de 50 μA, 1000 Ω, diseñe un miliamperímetro multiintervalos que tenga escalas de 25 mA, 50 mA y 100 mA. Muestre el circuito y los valores de los componentes.

35. Un galvanómetro de d'Arsonval está clasificado como 50 μA, 1000 Ω.

a. Diseñe un voltímetro de 15 V de cd. Muestre el circuito y los valores de los componentes.

b. ¿Cuál es la relación ohm/volt del voltímetro?

36. Utilizando un galvanómetro de d'Arsonval de 1 mA, 100 Ω, diseñe un voltímetro multiintervalos que tenga escalas de 5 V, 50 V y 500 V. Muestre el circuito y los valores de los componentes.

37. Un multímetro digital tiene resistencia interna de 10 MΩ en el intervalo de 0.5 V. Si se tuviera que construir un voltímetro con un galvanómetro de d'Arsonval, ¿qué sensibilidad de corriente se necesitaría si el medidor fuera a tener la misma resistencia interna en la misma escala de voltaje?

***38.** **a.** Diseñe un ohmímetro en serie utilizando un galvanómetro de 100 μA, 1000 Ω; ajuste en cero con un valor máximo de 2 kΩ; una batería de 3 V; y un resistor en serie a determinar.

b. Encuentre la resistencia requerida para deflexiones de escala completa, de 3/4 de escala, de 1/2 escala y de 1/4 de escala.

c. Utilice los resultados del inciso (b) y elabore la escala que se utilizará con el ohmímetro.

39. Describa la estructura básica y la operación del mega-ohmímetro.

***40.** Determine la lectura del ohmímetro para la configuración de la figura 7.96.

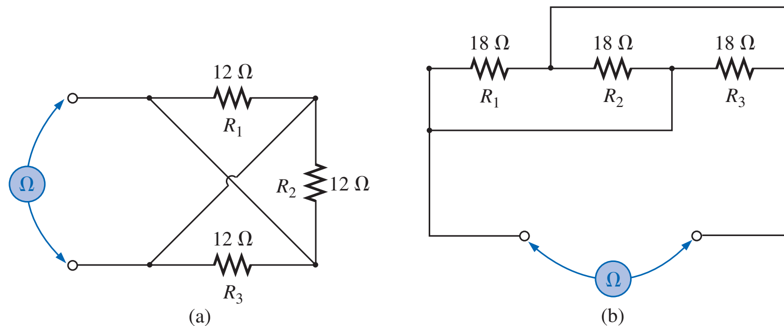


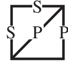
FIGURA 7.96
Problema 40.

SECCIÓN 7.9 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

41. Mediante un esquema, determine V_1, V_3, V_{ab} e I_s para la red de la figura 7.16.

42. Mediante un esquema, determine I_s, I_5 y V_7 para la red de la figura 7.22.



Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

43. Escriba un programa que calcule la solución completa para la red de la figura 7.6. Es decir, dados todos los parámetros de la red, calcule la corriente, el voltaje y la potencia para cada elemento.

44. Escriba un programa para calcular todas las cantidades del ejemplo 7.8 dados los parámetros de red.

GLOSARIO

Galvanómetro de d'Arsonval Bobina con centro de hierro montada sobre cojinetes entre un imán permanente. Una aguja indicadora conectada al centro móvil señala la magnitud de la corriente que pasa a través de la bobina.

Mega-ohmímetro Instrumento para medir niveles muy altos de resistencia, como en el intervalo de los megaohms.

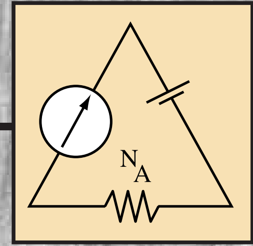
Ohmímetro en serie Instrumento de medición de resistencia en el que el galvanómetro está ubicado en serie con la resistencia desconocida.

Red de escalera Red que consta de un conjunto de combinaciones en serie-paralelo en cascada y tiene la apariencia de una escalera.

Redes en serie-paralelo Red constituida por una combinación de ramas tanto en serie como en paralelo.

Transistor Dispositivo electrónico semiconductor de tres terminales que puede utilizarse para propósitos de amplificación y conmutación.

8



Métodos de análisis y temas seleccionados (cd)

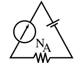
8.1 INTRODUCCIÓN

Los circuitos descritos en los capítulos anteriores contaban con sólo una fuente o con dos o más fuentes en serie o en paralelo. El procedimiento detallado presentado entonces no podía aplicarse si las fuentes no se encontraban en serie o en paralelo, ya que existiría una interacción entre las fuentes que no permitiría emplear la técnica de reducción utilizada en el capítulo 7 para determinar cantidades como la resistencia total y la corriente de fuente.

Se han desarrollado métodos de análisis que permiten aproximaciones, en forma sistemática, a una red que cuente con cualquier número de fuentes en cualquier disposición. Por fortuna, estos métodos también pueden aplicarse a redes que tengan una sola fuente. Los métodos que se analizarán con todo detalle en este capítulo incluyen el **análisis de corriente de rama**, el **análisis de mallas** y el **análisis de nodos**. Cada uno de éstos puede aplicarse a la misma red. El "mejor" método no puede definirse mediante un conjunto de reglas sino que puede determinarse sólo mediante la adquisición de un firme entendimiento de las ventajas relativas de cada uno. Todos los métodos pueden aplicarse a las redes *bilaterales lineales*. El término *lineal* indica que las características de los elementos de red (como los resistores) son independientes del voltaje o de la corriente que pasa a través de ellos. El término *bilateral* se refiere al hecho de que no existirá un cambio en el comportamiento o en las características de un elemento si la corriente o el voltaje en el elemento se invierten. De los tres métodos anotados líneas arriba, el método de corriente de rama es el único que no se encuentra restringido a dispositivos bilaterales. Antes de proceder con el análisis detallado de estos métodos, se deben considerar la fuente de corriente y las conversiones entre fuentes de voltaje y de corriente. Hacia el final del presente capítulo se analizarán las redes puente y las conversiones Δ-Y e Y-Δ. El capítulo 9 presentará los importantes teoremas del análisis de red que pueden utilizarse también para resolver redes con más de una fuente.

8.2 FUENTES DE CORRIENTE

El concepto de **fuentes de corriente** se presentó en la sección 2.4 junto con la fotografía de una unidad disponible comercialmente. Ahora se investigarán sus características con mayor detalle, de forma que sea posible determinar adecuadamente su efecto sobre las redes que se analizarán en este capítulo.



Con frecuencia, la fuente de corriente se refiere como el *dual* de la fuente de voltaje, ya que una batería suministra un voltaje *fijo*, y la corriente de fuente puede variar; pero la fuente de corriente suministra una corriente *fija* a la rama en la que se ubique, mientras que su voltaje terminal puede variar según lo determine la red a la que se aplica. A partir de lo anterior observe que la *dualidad* indica simplemente un intercambio de corriente o de voltaje como forma de distinguir las características de una fuente de las de la otra.

El interés en la fuente de corriente se debe principalmente a los dispositivos semiconductores como el transistor. En los cursos de electrónica básica, el lector encontrará que el transistor es un dispositivo controlado por corriente. En el modelo físico (circuito equivalente) del transistor, utilizado en el análisis de redes de transistores, aparece una fuente de corriente como se ilustra en la figura 8.1. En la figura 8.1(a) se presenta el símbolo de una fuente de corriente. La orientación de la flecha dentro del círculo indica la dirección en que se suministra la corriente.

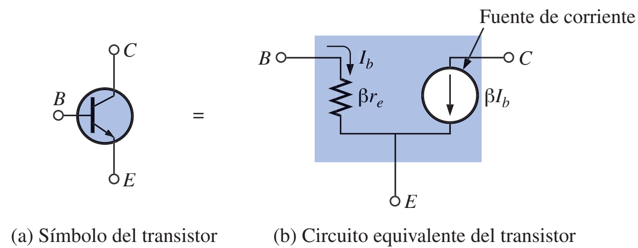


FIGURA 8.1
Fuente de corriente dentro del circuito equivalente del transistor.

Para una comparación adicional, en la figura 8.2 se presentan las características de una fuente de corriente y una de voltaje de *cd ideales*. El término *ideal* se refiere a fuentes perfectas, sin pérdidas internas sensibles a la demanda de la carga aplicada. Observe que para la fuente de voltaje, el voltaje en sus terminales está fijo en E volts independientemente de la dirección de la corriente I. La dirección y la magnitud de I estarán determinadas por la red a la cual se conecte la fuente.

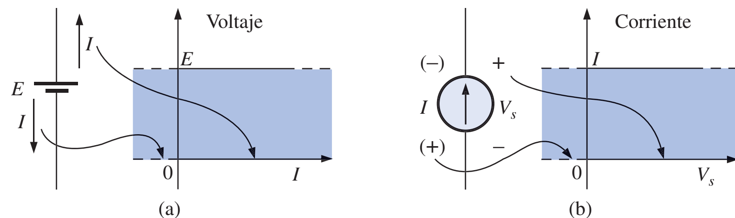


FIGURA 8.2
Comparación de las características de una fuente de voltaje y de una fuente de corriente ideales.

En la figura 8.2(b) se presentan las características de una fuente de corriente ideal, mostrando que la magnitud de la fuente de corriente es independiente de la polaridad del voltaje presente en la fuente. La polaridad y la magnitud de la fuente de voltaje V_s estarán determinadas por la red a la cual se conecte la fuente.

Para todas las redes de una sola fuente de voltaje, la corriente tendrá la dirección indicada a la derecha de la batería en la figura 8.2(a). Para todas las redes de una sola fuente de corriente, ésta tendrá la polaridad indicada a la derecha de la fuente de corriente en la figura 8.2(b).



En resumen:

Una fuente de corriente determinará la corriente dentro de la rama en la que se ubique.

y

la magnitud y la polaridad del voltaje en una fuente de corriente estarán en función de la red a la que ésta se aplique.

EJEMPLO 8.1 Encuentre el voltaje de fuente V_s y la corriente I_1 para el circuito de la figura 8.3.

Solución:

$$I_1 = I = \mathbf{10\ mA}$$
$$V_s = V_1 = I_1R_1 = (10\ \text{mA})(20\ \text{k}\Omega) = \mathbf{200\ V}$$

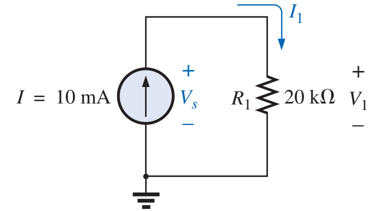


FIGURA 8.3
Ejemplo 8.1.

EJEMPLO 8.2 Encuentre el voltaje V_s y las corrientes I_1 e I_2 para el circuito de la figura 8.4.

Solución:

$$V_s = E = \mathbf{12\ V}$$
$$I_2 = \frac{V_R}{R} = \frac{E}{R} = \frac{12\ \text{V}}{4\ \Omega} = \mathbf{3\ A}$$

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff:

$$I = I_1 + I_2$$

e $$I_1 = I - I_2 = 7\ \text{A} - 3\ \text{A} = \mathbf{4\ A}$$

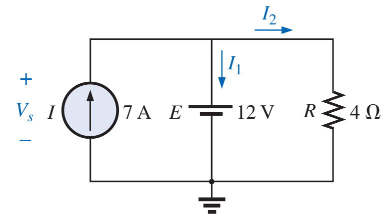


FIGURA 8.4
Ejemplo 8.2.

EJEMPLO 8.3 Determine la corriente I_1 y el voltaje V_s para la red de la figura 8.5.

Solución: Utilizando la regla del divisor de corriente:

$$I_1 = \frac{R_2 I}{R_2 + R_1} = \frac{(1\ \Omega)(6\ \text{A})}{1\ \Omega + 2\ \Omega} = \mathbf{2\ A}$$

El voltaje V_1 es:

$$V_1 = I_1R_1 = (2\ \text{A})(2\ \Omega) = 4\ \text{V}$$

y, al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff,

$$+V_s - V_1 - 20\ \text{V} = 0$$

y $$V_s = V_1 + 20\ \text{V} = 4\ \text{V} + 20\ \text{V}$$
$$= \mathbf{24\ V}$$

Observe la polaridad de V_s determinada mediante la red multifuente.

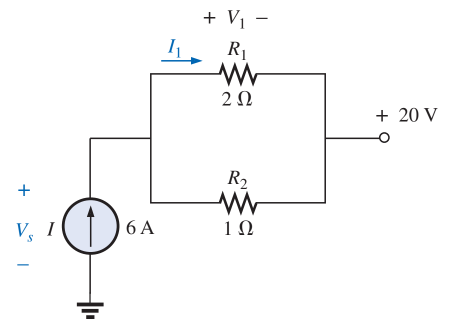


FIGURA 8.5
Ejemplo 8.3.

8.3 CONVERSIONES DE FUENTES

La fuente de corriente descrita en la sección anterior se denomina *fuente ideal* debido a la ausencia de cualquier resistencia interna. En realidad, todas las fuentes —ya sean de voltaje o de corriente— cuentan con cierta resistencia interna en las posiciones relativas que se muestran en las figuras 8.6 y 8.7. Para



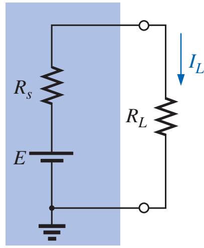


FIGURA 8.6
Fuente de voltaje práctica.

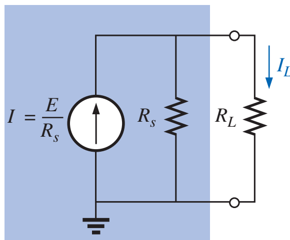


FIGURA 8.7
Fuente de corriente práctica.

la fuente de voltaje, si $R_s = 0\ \Omega$ o si es muy pequeña en comparación con cualquier resistencia en serie, como para ser ignorada, entonces se tiene una fuente de voltaje "ideal". Para la fuente de corriente, si $R_s = \infty\ \Omega$ o si es lo suficientemente grande en comparación con los otros elementos en paralelo como para ser ignorada, entonces se tiene una fuente de corriente "ideal".

Si la resistencia interna se incluye con cualquier fuente, entonces esa fuente podrá convertirse al otro tipo de fuente utilizando el procedimiento que se describirá en esta sección. Dado que con frecuencia resulta positivo realizar tal conversión, la sección completa se dedica a asegurarse que los pasos del proceso se comprendan. Sin embargo, es importante observar, a medida que avancemos en esta sección, que:

las conversiones de fuentes son equivalentes sólo en sus terminales externas.

Las características internas de cada fuente son muy diferentes.

Se busca la equivalencia para asegurar que la carga aplicada de las figuras 8.6 y 8.7 recibirá la misma corriente, voltaje y potencia desde cada fuente y sin tener que saber o preocuparse por cuál fuente se encuentra presente.

En la figura 8.6, si se resuelve para la corriente de carga I_L se obtiene:

$$I_L = \frac{E}{R_s + R_L} \tag{8.1}$$

Al multiplicar esto por un factor de 1, el cual puede elegirse ser R_s/R_s, se obtiene:

$$I_L = \frac{(1)E}{R_s + R_L} = \frac{(R_s/R_s)E}{R_s + R_L} = \frac{R_s(E/R_s)}{R_s + R_L} = \frac{R_sI}{R_s + R_L} \tag{8.2}$$

Si se define $I = E/R_s$, la ecuación (8.2) será la misma que la obtenida al aplicar la regla del divisor de corriente a la red de la figura 8.7. El resultado es una equivalencia entre las redes de las figuras 8.6 y 8.7, la cual simplemente requiere que $I = E/R_s$ y que el resistor en serie R_s de la figura 8.6 se coloque en paralelo como en la figura 8.7. La validez de esto se demuestra en el ejemplo 8.4 de esta sección.

Con propósitos de claridad, las fuentes equivalentes, *en cuanto a las terminales a y b concierne*, se repiten en la figura 8.8 junto con las ecuaciones para convertir hacia cualquier dirección. Observe, como se acaba de indicar, que el resistor R_s es el mismo en cada fuente; sólo cambia su posición. La corriente de la fuente de corriente o el voltaje de la fuente de voltaje se determinan utilizando la ley de Ohm y los parámetros de la otra configuración. En el capítulo 6 se señaló con cierto detalle que toda fuente de voltaje posee alguna resistencia interna en serie. *Para la fuente de corriente, en la práctica, siempre se presentará cierta resistencia interna en paralelo.* Sin embargo, en muchos casos, será una excelente aproximación eliminar la resistencia interna de la

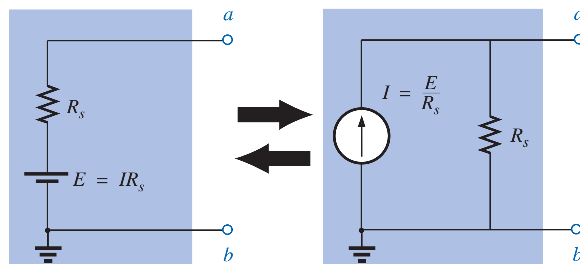


FIGURA 8.8
Conversión de fuente.



fuente debido a la magnitud de los elementos de la red a la cual se aplicará. Por esta razón, en los análisis siguientes, las fuentes de voltaje pueden presentarse sin un resistor en serie, y las fuentes de corriente pueden presentarse sin una resistencia en paralelo. Sin embargo, observe que para poder efectuar la conversión de un tipo de fuente a otro, la fuente de voltaje deberá contar con un resistor en serie y la fuente de corriente deberá tener un resistor en paralelo.

EJEMPLO 8.4

a. Convierta la fuente de voltaje de la figura 8.9(a) a una fuente de corriente, y calcule la corriente a través de la carga de 4 Ω para cada fuente.
b. Reemplace la carga de 4 Ω con una carga de 1 kΩ, y calcule la corriente I_L para la fuente de voltaje.
c. Repita los cálculos del inciso (b) asumiendo que la fuente de voltaje es ideal ($R_s = 0\ \Omega$) ya que R_L es mucho mayor que R_s. ¿Es ésta una de aquellas situaciones donde el asumir que la fuente es ideal resulta en una aproximación apropiada?

Soluciones:

a. Vea la figura 8.9.

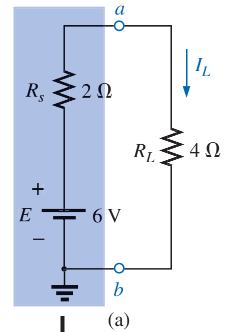
$$\text{Figura 8.9(a):}\quad I_L = \frac{E}{R_s + R_L} = \frac{6\text{ V}}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = \mathbf{1\ A}$$

$$\text{Figura 8.9(b):}\quad I_L = \frac{R_s I}{R_s + R_L} = \frac{(2\ \Omega)(3\text{ A})}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = \mathbf{1\ A}$$

b. $I_L = \dfrac{E}{R_s + R_L} = \dfrac{6\text{ V}}{2\ \Omega + 1\text{ k}\Omega} \cong \mathbf{5.99\ mA}$

c. $I_L = \dfrac{E}{R_L} = \dfrac{6\text{ V}}{1\text{ k}\Omega} = \mathbf{6\ mA} \cong 5.99\text{ mA}$

Sí, ya que $R_L \gg R_s$ (fuente de voltaje).



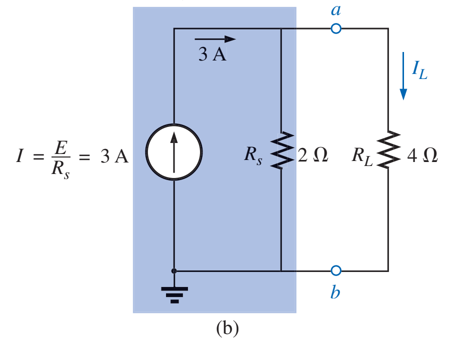


FIGURA 8.9
Ejemplo 8.4.

EJEMPLO 8.5

a. Convierta la fuente de corriente de la figura 8.10(a) a una fuente de voltaje, y encuentre la corriente de carga para cada fuente.
b. Reemplace la carga de 6 kΩ con una carga de 10 Ω, y calcule la corriente I_L para la fuente de corriente.
c. Repita los cálculos del inciso (b) asumiendo que la fuente de corriente es ideal ($R_s = \infty\ \Omega$) ya que R_L es mucho menor que R_s. ¿Es ésta una de aquellas situaciones donde el asumir que la fuente es ideal es una aproximación adecuada?

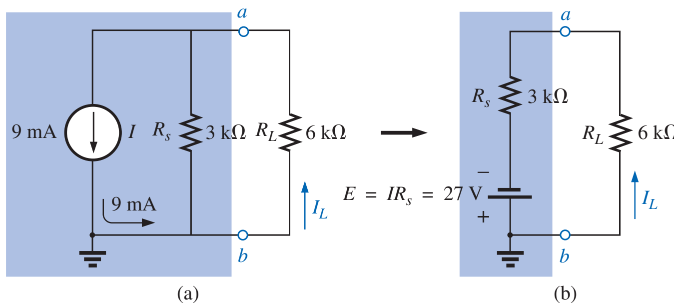


FIGURA 8.10
Ejemplo 8.5.



Soluciones:

a. Vea la figura 8.10.

$$\text{Figura 8.10(a):}\quad I_L = \frac{R_s I}{R_s + R_L} = \frac{(3\text{ k}\Omega)(9\text{ mA})}{3\text{ k}\Omega + 6\text{ k}\Omega} = \mathbf{3\text{ mA}}$$

$$\text{Figura 8.10(b):}\quad I_L = \frac{E}{R_s + R_L} = \frac{27\text{ V}}{3\text{ k}\Omega + 6\text{ k}\Omega} = \frac{27\text{ V}}{9\text{ k}\Omega} = \mathbf{3\text{ mA}}$$

b. $I_L = \frac{R_s I}{R_s + R_L} = \frac{(3\text{ k}\Omega)(9\text{ mA})}{3\text{ k}\Omega + 10\ \Omega} = \mathbf{8.97\text{ mA}}$

c. $I_L = I = \mathbf{9\text{ mA}} \cong 8.97\text{ mA}$

Sí, ya que $R_s \gg R_L$ (fuente de corriente).

8.4 FUENTES DE CORRIENTE EN PARALELO

Si dos o más fuentes de corriente están en paralelo, todas pueden ser reemplazadas por una fuente de corriente que tenga la magnitud y la dirección de la resultante, la cual puede encontrarse mediante la suma de las corrientes en una dirección y la resta de las corrientes en dirección opuesta. La nueva resistencia en paralelo se determina mediante los métodos descritos en el análisis de los resistores en paralelo en el capítulo 5. Considere los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 8.6 Reduzca las fuentes de corriente en paralelo de las figuras 8.11 y 8.12 a una sola fuente de corriente.

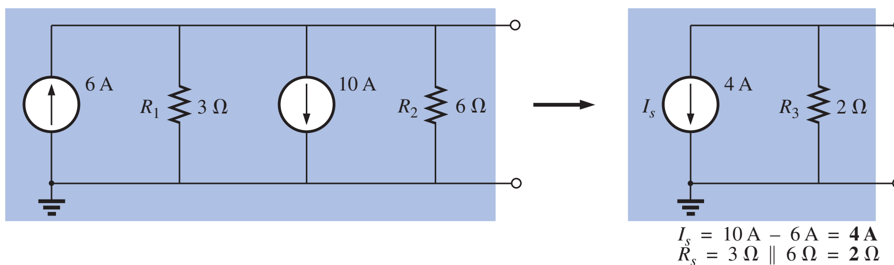


FIGURA 8.11
Ejemplo 8.6.

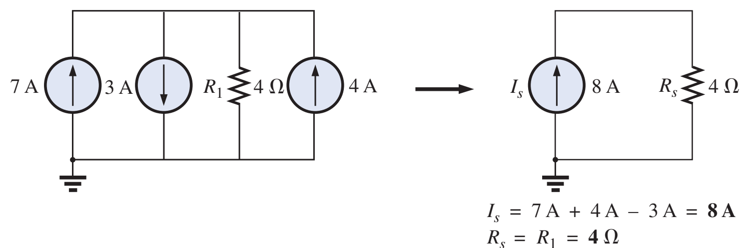


FIGURA 8.12
Ejemplo 8.6.

Solución: Observe la solución presentada en cada figura.



EJEMPLO 8.7 Reduzca la red de la figura 8.13 a una sola fuente de corriente, y calcule la corriente a través de R_L.

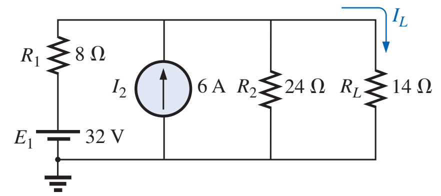


FIGURA 8.13
Ejemplo 8.7.

Solución: En este ejemplo, la fuente de voltaje será convertida primero a una fuente de corriente como se muestra en la figura 8.14. Al combinar las fuentes de corriente,

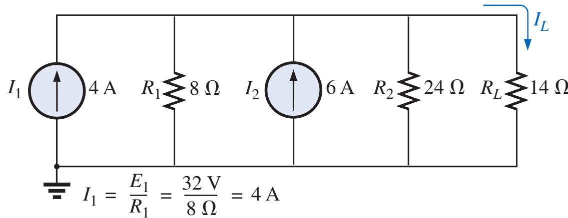


FIGURA 8.14
Red de la figura 8.13 después de la conversión de la fuente de voltaje a una fuente de corriente.

$$I_s = I_1 + I_2 = 4\text{ A} + 6\text{ A} = \mathbf{10\ A}$$

y
$$R_s = R_1 \parallel R_2 = 8\ \Omega \parallel 24\ \Omega = \mathbf{6\ \Omega}$$

Al aplicar la regla del divisor de corriente a la red resultante de la figura 8.15,

$$I_L = \frac{R_s I_s}{R_s + R_L} = \frac{(6\ \Omega)(10\text{ A})}{6\ \Omega + 14\ \Omega} = \frac{60\text{ A}}{20} = \mathbf{3\ A}$$

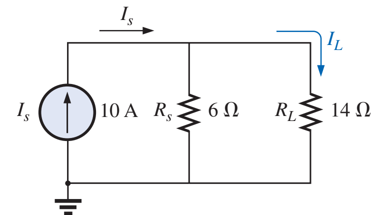


FIGURA 8.15
Red de la figura 8.14 reducida a su forma más simple.

EJEMPLO 8.8 Determine la corriente I_2 en la red de la figura 8.16.

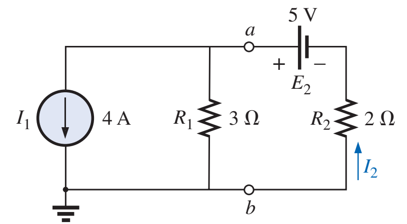


FIGURA 8.16
Ejemplo 8.8.

Solución: A pesar de que podría parecer que la red no puede resolverse utilizando los métodos presentados hasta aquí, una conversión de fuente como la mostrada en la figura 8.17 dará por resultado un circuito simple en serie:

$$E_s = I_1R_1 = (4\text{ A})(3\ \Omega) = 12\text{ V}$$

y
$$R_s = R_1 = 3\ \Omega$$

e
$$I_2 = \frac{E_s + E_2}{R_s + R_2} = \frac{12\text{ V} + 5\text{ V}}{3\ \Omega + 2\ \Omega} = \frac{17\text{ V}}{5\ \Omega} = \mathbf{3.4\ A}$$

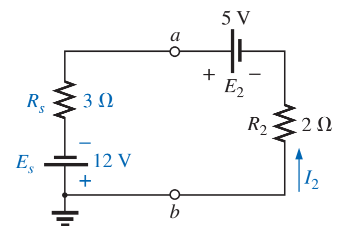


FIGURA 8.17
Red de la figura 8.16 después de la conversión de la fuente de corriente a una fuente de voltaje.

8.5 FUENTES DE CORRIENTE EN SERIE

La corriente a través de cualquier rama de un circuito puede tener sólo un valor. Para la situación indicada en el punto a de la figura 8.18, mediante la aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff se encuentra que la corriente que abandona el punto es mayor que la que ingresa a él —lo cual es una situación imposible—. Por tanto,

las fuentes de corriente con distintos valores nominales de corriente no se conectan en serie,

de la misma forma que las fuentes de voltaje con distintos valores nominales de voltaje no se conectan en paralelo..

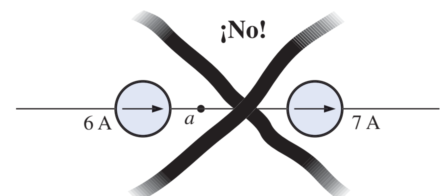
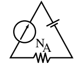


FIGURA 8.18
Situación inválida.

8.6 ANÁLISIS DE CORRIENTE DE RAMA

Ahora se considerará el primero de una serie de métodos para resolver redes con dos o más fuentes. Una vez que el **método de corriente de rama** se



domine, no existirá red lineal de cd para la que no sea posible encontrar una solución. Debe tenerse presente que las redes con dos fuentes de voltaje aisladas no pueden resolverse utilizando el método del capítulo 7. Para obtener una evidencia adicional de este hecho, intente resolver los elementos desconocidos del ejemplo 8.9 utilizando los métodos presentados en el capítulo 7. La red de la figura 8.21 puede resolverse mediante las conversiones de fuente descritas en la sección anterior, sin embargo, el método que se presenta en esta sección posee aplicaciones más allá de la configuración de esta red. La introducción más directa a un método de este tipo es enumerar los pasos requeridos para su aplicación. Existen cuatro pasos, como se indica en seguida. Antes de continuar, debe entenderse que este método obtendrá la corriente a través de cada rama de la red, la *corriente de rama*. Una vez que ésta se conoce, todas las demás cantidades, como el voltaje o la potencia, pueden determinarse.

1. ***Asigne una corriente distinta de dirección arbitraria a cada rama de la red.***
2. ***Indique las polaridades para cada resistor según lo determine la dirección de la corriente asumida.***
3. ***Aplique la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de cada lazo cerrado independiente en la red.***

La mejor forma de saber cuántas veces deberá aplicarse la ley de voltaje de Kirchhoff es determinando el número de "ventanas" dentro de la red. La red del ejemplo 8.9 posee una clara similitud con la configuración de dos ventanas de la figura 8.19(a). Como resultado de esto se necesitará aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff dos veces. Para las redes con tres ventanas, como la mostrada en la figura 8.19(b), se requerirán tres aplicaciones de la ley de voltaje de Kirchhoff, etcétera.

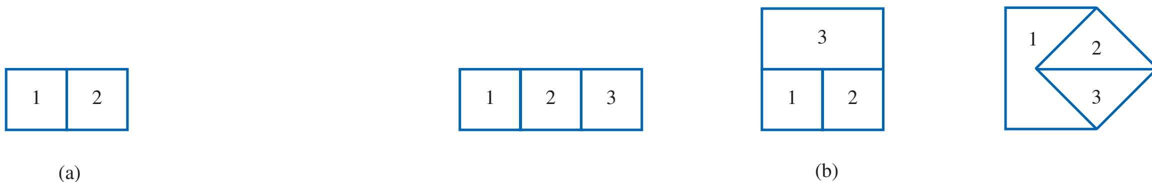


FIGURA 8.19
Determinación del número de lazos cerrados independientes.

4. ***Aplique la ley de corriente de Kirchhoff al número mínimo de nodos que incluya todas las corrientes de rama de la red.***

El número mínimo de nodos será uno menos que el número de nodos independientes de la red. Para los propósitos de este análisis, un **nodo** es una unión de dos o más ramas, donde una rama es cualquier combinación de elementos

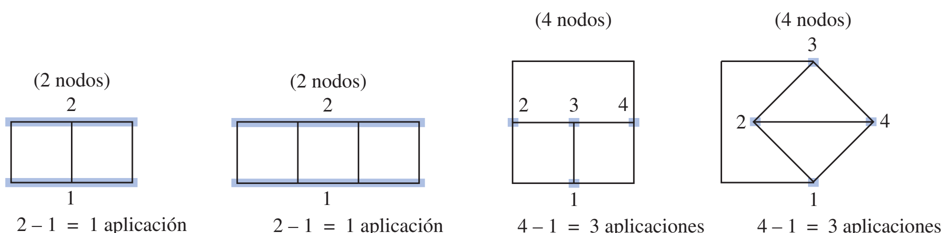


FIGURA 8.20
Determinación del número de aplicaciones requeridas de la ley de corriente de Kirchhoff.

en serie. La figura 8.20 define el número de aplicaciones de la ley de corriente de Kirchhoff para cada configuración de la figura 8.19.

*5. **Resuelva las ecuaciones lineales simultáneas resultantes para las corrientes de rama asumidas.***

Se asume que el uso del **método de determinantes** para resolver las corrientes I_1, I_2 e I_3 es comprendido y forma parte de los antecedentes matemáticos del estudiante. Si no es así, puede consultarse el apéndice C de este texto donde se proporciona una explicación detallada del procedimiento. Las calculadoras y los paquetes de software de computadora como Mathcad pueden calcular las soluciones de forma rápida y precisa.

EJEMPLO 8.9 Aplique el método de corriente de rama a la red de la figura 8.21.

Solución 1:

Paso 1: Dado que existen tres ramas distintas (*cda, cba, ca*), se seleccionan tres corrientes con dirección arbitraria (I_1, I_2, I_3), como se indica en la figura 8.21. Las direcciones de la corriente de I_1 e I_2 se eligieron para que coincidieran con la "presión" aplicada por las fuentes E_1 y E_2, respectivamente. Dado que tanto I_1 como I_2 ingresan al nodo *a*, I_3 lo abandona.

Paso 2: Se trazan las polaridades de cada resistor para que concuerden con las direcciones de corriente supuestas, como se indica en la figura 8.22.

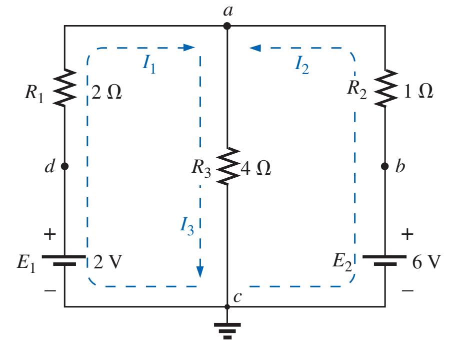


FIGURA 8.21
Ejemplo 8.9.

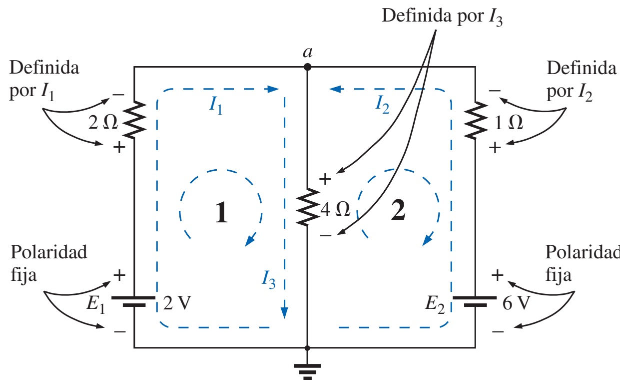


FIGURA 8.22
Inserción de las polaridades en los elementos resistivos según las definen las corrientes de rama elegidas.

Paso 3: Se aplica la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de cada lazo cerrado (1 y 2) en el sentido de las manecillas del reloj:

Elevación del potencial

$$\text{Lazo 1: } \Sigma_{\circlearrowright} V = +E_1 - V_{R_1} - V_{R_3} = 0$$

Caída del potencial

Elevación del potencial

$$\text{Lazo 2: } \Sigma_{\circlearrowright} V = +V_{R_3} + V_{R_2} - E_2 = 0$$

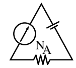
Caída del potencial

y

$$\text{Lazo 1: } \Sigma_{\circlearrowright} V = +2\text{ V} - (2\ \Omega)I_1 - (4\ \Omega)I_3 = 0$$

Potencial de la batería; Caída de voltaje en el resistor de 2 Ω; Caída de voltaje en el resistor de 4 Ω

$$\text{Lazo 2: } \Sigma_{\circlearrowright} V = (4\ \Omega)I_3 + (1\ \Omega)I_2 - 6\text{ V} = 0$$



Paso 4: Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff al nodo a (en una red de dos nodos, la ley se aplica sólo sobre un nodo),

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Paso 5: Existen tres ecuaciones y tres incógnitas (se eliminan las unidades para mayor claridad):

$$\begin{aligned} 2 - 2I_1 - 4I_3 &= 0 \\ 4I_3 + 1I_2 - \;\; 6 &= 0 \\ I_1 + \;\; I_2 &= I_3 \end{aligned} \qquad \text{Reescritas:} \quad \begin{aligned} 2I_1 + 0 + 4I_3 &= 2 \\ 0 + I_2 + 4I_3 &= 6 \\ I_1 + I_2 - \;\; I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando determinantes de tercer orden (Apéndice C), se tiene:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = -1\ \mathbf{A}$$

Un signo negativo frente a una corriente de rama indica únicamente que la corriente real tiene dirección opuesta a la corriente asumida

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{D} = \mathbf{2\ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{D} = \mathbf{1\ A}$$

Solución con Mathcad: Una vez entendido el procedimiento para capturar los parámetros, es posible utilizar Mathcad para resolver de forma muy rápida deter-

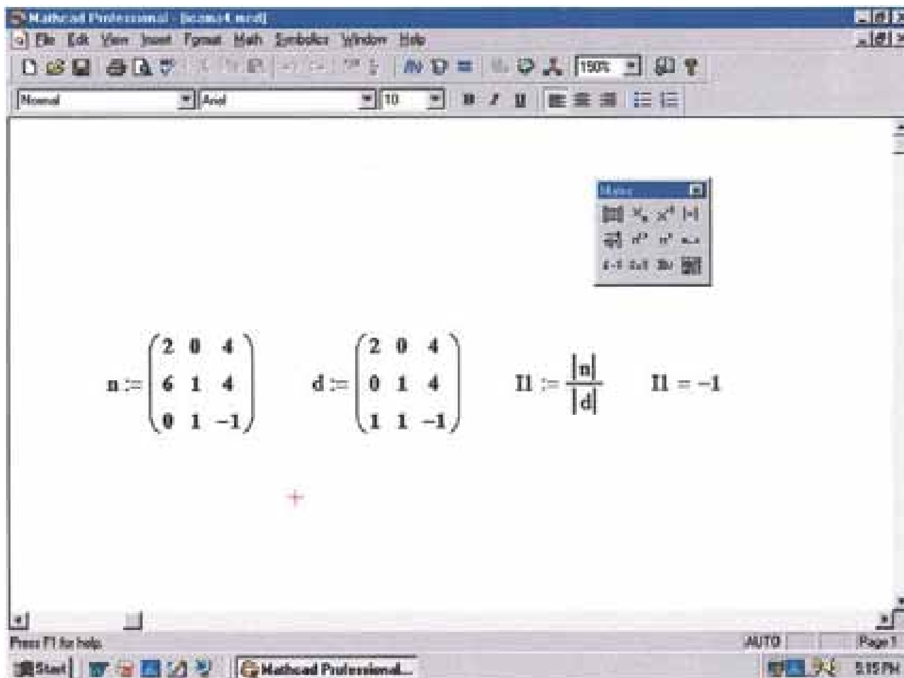


FIGURA 8.23
Utilización de Mathcad para verificar los cálculos numéricos del ejemplo 8.9.



minantes como las que aparecen en la solución 1. El numerador está definido por n de la misma forma descrita en ejercicios anteriores. Luego se aplica la secuencia **View-Toolbars-Matrix** para obtener la barra de herramientas de matrices **Matrix** que aparece en la figura 8.23. Al seleccionar la opción superior izquierda llamada **Matrix** se obtendrá la ventana de selección para insertar la matriz, **Insert Matrix**, en la que se encontrará seleccionada la opción **3 × 3**. La matriz de 3 × 3 aparecerá con un corchete para indicar el parámetro que deberá capturarse. Ingrese el parámetro y luego utilice el botón izquierdo del ratón para seleccionar el siguiente parámetro que desee capturar. Cuando haya terminado, proceda a definir el denominador d de la misma forma. Luego defina la corriente de interés, seleccione la opción **Determinant** de la barra de herramientas **Matrix**, e inserte la variable de numerador n. Continúe con un signo de división, e ingrese el determinante del denominador en **Determinant** como se muestra en la figura 8.23. Vuelva a teclear **I1** y seleccione el signo igual; aparecerá el resultado correcto **−1**.

Una vez que el lector domine el proceso directo y sencillo descrito, apreciará la disponibilidad de Mathcad como herramienta de verificación o mecanismo de solución.

Solución 2: En lugar de utilizar determinantes de tercer orden como en la solución 1, es posible reducir las tres ecuaciones a dos mediante la sustitución de la tercera ecuación en las ecuaciones primera y segunda:

$$\left.\begin{aligned} 2 - 2I_1 - 4\overbrace{(I_1 + I_2)}^{I_3} &= 0 \\ 4\overbrace{(I_1 + I_2)}^{I_3} + I_2 - 6 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2 - 2I_1 - 4I_1 - 4I_2 &= 0 \\ 4I_1 + 4I_2 + I_2 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} -6I_1 - 4I_2 &= -2 \\ +4I_1 + 5I_2 &= +6 \end{aligned}$$

Al multiplicar por −1 en la ecuación superior se obtiene:

$$\begin{aligned} 6I_1 + 4I_2 &= +2 \\ 4I_1 + 5I_2 &= +6 \end{aligned}$$

y empleando determinantes,

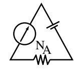
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 24}{30 - 16} = \frac{-14}{14} = \mathbf{-1\,A}$$

Utilizando la calculadora TI-86:

det[[2,4][6,5]]/det[[6,4][4,5]] (ENTER)	−1

CÁLCULO 8.1

Observe el det (determinante) obtenido a partir del listado de Math debajo del menú de MATRX, y el hecho de que cada determinante debe ser calculado de forma individual. El primer conjunto de corchetes dentro de los corchetes del determinante general del primer determinante define el primer renglón del determinante, mientras que el segundo conjunto de corchetes dentro del mismo determinante define el segundo renglón. La coma separa los datos de cada renglón. Obviamente, el tiempo para aprender la forma de capturar los parámetros es mínimo cuando se consideran los ahorros en tiempo y la precisión obtenida.



$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{14} = \frac{36 - 8}{14} = \frac{28}{14} = \mathbf{2\ A}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = -1 + 2 = \mathbf{1\ A}$$

Ahora es importante entender el impacto de los resultados obtenidos. Las corrientes I_1, I_2 e I_3 son las corrientes reales dentro de las ramas en que se definieron. Un signo negativo en la solución revela simplemente que la corriente real tiene dirección opuesta a la que inicialmente se definió —la magnitud es correcta—. Una vez que las direcciones reales de las corrientes y sus magnitudes se insertan en la red original, será posible determinar los distintos niveles de voltaje y corriente. Para este ejemplo, las direcciones reales de las corrientes así como sus magnitudes se colocaron sobre la red original de la figura 8.24. Observe que la corriente a través de los elementos en serie R_1 y E_1 es igual a 1 A; la corriente a través de R_3 es igual a 1 A; y la corriente a través de los elementos en serie R_2 y E_2 es igual a 2A. Debido al signo menos en la solución, la dirección de I_1 será opuesta a la mostrada en la figura 8.21. Ahora es posible encontrar el voltaje en cualquier resistor utilizando la ley de Ohm, y la potencia entregada por cualquier fuente o hacia cualquiera de los tres resistores se conocerá utilizando la ecuación de potencia adecuada.

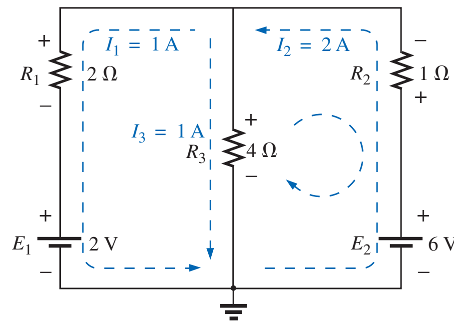


FIGURA 8.24
Revisión de los resultados del análisis efectuado a la red de la figura 8.21.

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo indicado en la figura 8.24,

$$\Sigma_{\circlearrowright} V = +(4\ \Omega)I_3 + (1\ \Omega)I_2 - 6\ V = 0$$

o bien: $$(4\ \Omega)I_3 + (1\ \Omega)I_2 = 6\ V$$

y $$(4\ \Omega)(1\ A) + (1\ \Omega)(2\ A) = 6\ V$$
$$4\ V + 2\ V = 6\ V$$
$$6\ V = 6\ V \quad \text{(se comprueba)}$$

EJEMPLO 8.10 Aplique el análisis de corriente de rama a la red de la figura 8.25.

Solución: Nuevamente, las direcciones de la corriente se eligieron para que coincidieran con la "presión" de cada batería. Luego se añadieron las polaridades y se aplicó la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de cada lazo cerrado en el sentido de las manecillas del reloj. El resultado es el siguiente:

Lazo 1: $+15\ V - (4\ \Omega)I_1 + (10\ \Omega)I_3 - 20\ V = 0$

Lazo 2: $+20\ V - (10\ \Omega)I_3 - (5\ \Omega)I_2 + 40\ V = 0$

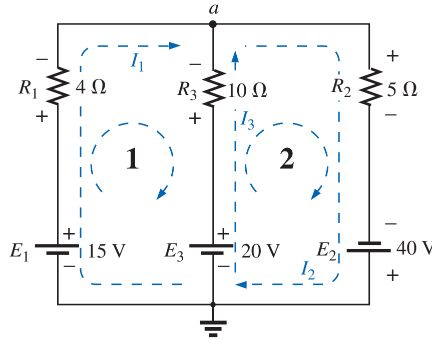


FIGURA 8.25
Ejemplo 8.10.

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff en el nodo *a*,

$$I_1 + I_3 = I_2$$

Sustituir la tercera ecuación en las otras dos lleva a (se eliminan las unidades para mayor claridad):

$$\left.\begin{aligned} 15 - 4I_1 + 10I_3 - 20 &= 0 \\ 20 - 10I_3 - 5(I_1 + I_3) + 40 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Se sustituye para I_2 (dado que este valor se presenta sólo una vez en las dos ecuaciones)

o bien:

$$\begin{aligned} -4I_1 + 10I_3 &= 5 \\ -5I_1 - 15I_3 &= -60 \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación inferior por –1, tenemos:

$$\begin{aligned} -4I_1 + 10I_3 &= 5 \\ 5I_1 + 15I_3 &= 60 \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 60 & 15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 5 & 15 \end{vmatrix}} = \frac{75 - 600}{-60 - 50} = \frac{-525}{-110} = \mathbf{4.773\ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 60 \end{vmatrix}}{-110} = \frac{-240 - 25}{-110} = \frac{-265}{-110} = \mathbf{2.409\ A}$$

$$I_2 = I_1 + I_3 = 4.773 + 2.409 = \mathbf{7.182\ A}$$

lo cual revela que las direcciones asumidas son las reales, siendo I_2 igual a la suma de I_1 e I_3.

8.7 ANÁLISIS DE MALLAS (MÉTODO GENERAL)

El segundo método de análisis a ser descrito se denomina **análisis de mallas**. El término *malla* se deriva de las similitudes en apariencia entre los lazos cerrados de una red y una malla de tela metálica. A pesar de que este método se encuentra en un plano más sofisticado que el de corriente de rama, incorpora muchas de las ideas recién presentadas. De los dos métodos, el análisis de mallas es el utilizado con mayor frecuencia actualmente. El análisis de corriente de rama se presentó como un peldaño hacia el análisis de mallas debido a que las corrientes de rama se presentan de manera inicial más "reales" al estudiante que las **corrientes de malla (lazo)** utilizadas en el análisis de mallas. En lo básico, el método de análisis de



mallas simplemente elimina la necesidad de sustituir los resultados de la ley de corriente de Kirchhoff en las ecuaciones derivadas a partir de la ley de voltaje de Kirchhoff. Esto se cumple ahora en la escritura inicial de las ecuaciones. El enfoque sistemático descrito a continuación deberá seguirse al aplicar este método.

1. ***Asigne una corriente diferente en el sentido de las manecillas del reloj a cada lazo cerrado e independiente de la red. No es absolutamente necesario elegir el sentido de las manecillas del reloj para cada corriente de lazo. De hecho, es posible elegir cualquier orientación para cada corriente de lazo sin pérdida de precisión; siempre y cuando los pasos restantes se sigan de forma adecuada. Sin embargo, al elegir el sentido de las manecillas del reloj como un estándar, es posible desarrollar un método abreviado (sección 8.8) para escribir las ecuaciones requeridas que ahorrará tiempo y posiblemente contribuirá a evitar algunos errores.***

El primer paso se logra de forma más efectiva al colocar una corriente de lazo *dentro* de cada "ventana" de la red, como se demostró en la sección anterior, para asegurar que todas las corrientes sean independientes. Es posible asignar una variedad de otras corrientes de lazo. Sin embargo, en cada caso debe asegurarse que la información transportada por cualquier ecuación de lazo no esté incluida dentro de una combinación de las otras ecuaciones de red. Éste es el punto crucial de la terminología: *independiente*. Sin importar la forma en que se seleccionen las corrientes de lazo, el número de corrientes de lazo requeridas será siempre igual al número de ventanas de una red planar (sin cruces). En ocasiones una red podría parecer no planar, sin embargo, volver a trazarla podría revelar que, en efecto, es planar. Tal es el caso de uno o dos problemas presentados al final de este capítulo.

Antes de continuar con el siguiente paso, es importante asegurarse de que el concepto de corriente de lazo esté claro. Para la red de la figura 8.26, la corriente de lazo I_1 será la corriente de rama de la rama que contiene al resistor de 2 Ω y la batería de 2 V. Sin embargo, la corriente a través del resistor de 4 Ω no es I_1, dado que también existe una corriente de lazo I_2 a través de él. Debido a que estas corrientes tienen direcciones opuestas, $I_{4\Omega}$ será igual a la diferencia entre las dos, $I_1 - I_2$ o $I_2 - I_1$, dependiendo de la dirección establecida. En otras palabras, *una corriente de lazo es una corriente de rama sólo cuando es la única corriente de lazo asignada a esa rama.*

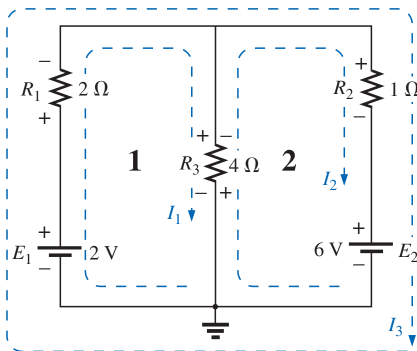


FIGURA 8.26
Definición de las corrientes de malla para una red de "dos ventanas".

2. ***Indique las polaridades dentro de cada lazo para cada resistor según lo determine la dirección asumida para la corriente de lazo en ese lazo. Advierta el requisito de que las polaridades se coloquen dentro de cada lazo. Esto implica, como se muestra en la figura 8.26, que el resistor de 4 Ω tenga dos juegos de polaridades en él.***
3. ***Aplique la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de cada lazo cerrado en el sentido de las manecillas del reloj. Nuevamente, se eligió el sentido de las manecillas del reloj para establecer uniformidad y como preparación para el método que se presentará en la sección siguiente.***
   a. ***Si un resistor cuenta con dos o más corrientes asumidas a través de él, la corriente total por él será la corriente asumida del lazo en el que se esté aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff, más las corrientes asumidas de los otros lazos que lo cruzan en la misma dirección, menos las corrientes asumidas que van en dirección opuesta.***
   b. ***La polaridad de la fuente de voltaje no se ve afectada por la dirección asignada a las corrientes de lazo.***
4. ***Resuelva las ecuaciones lineales simultáneas resultantes para las corrientes de lazo asumidas.***



EJEMPLO 8.11 Considere la misma red básica como en el ejemplo 8.9 de la sección anterior, que ahora se presenta en la figura 8.26.

Solución:

Paso 1: Se asignan dos corrientes de lazo (I_1 e I_2) en el sentido de las manecillas del reloj dentro de las ventanas de la red. Se podría incluir un tercer lazo (I_3) alrededor de la red completa, sin embargo, la información que maneja este lazo ya se encuentra incluida en los otros dos.

Paso 2: Se dibujan las polaridades dentro de cada ventana de forma que concuerden con las direcciones de corriente asumidas. Observe que para este caso, las polaridades en el resistor de 4 Ω son opuestas para cada corriente de lazo.

Paso 3: Se aplica la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de cada lazo en el sentido de las manecillas del reloj. A medida que este paso se realiza, debe tenerse presente que la ley se relaciona únicamente con la magnitud y la polaridad de los voltajes alrededor del lazo cerrado y no con el hecho de si la subida o caída de voltaje se debe a una batería o a un elemento resistivo. El voltaje en cada resistor está determinado mediante $V = IR$, y para un resistor con más de una corriente a través de él, la corriente será la corriente de lazo del lazo que se esté analizando más o menos las otras corrientes de lazo según estén determinadas por sus direcciones. Si se selecciona aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff siempre en el sentido de las manecillas del reloj, las otras corrientes de lazo siempre se restarán a la corriente de lazo del lazo que se analice.

lazo 1: $+E_1 - V_1 - V_3 = 0$ (en el sentido de las manecillas del reloj comenzando en el punto *a*)

$$+2\text{ V} - (2\ \Omega)\,I_1 - \overbrace{(4\ \Omega)\underbrace{(I_1 - I_2)}_{\substack{\text{Corriente total}\\ \text{a través del}\\ \text{resistor de 4 }\Omega}}}^{\substack{\text{Caída de voltaje}\\ \text{en el resistor de 4 }\Omega}} = 0$$

Se resta ya que I_2 tiene dirección opuesta a I_1

lazo 2: $-V_3 - V_2 - E_2 = 0$ (en el sentido de las manecillas del reloj comenzando en el punto *b*)

$$-(4\ \Omega)(I_2 - I_1) - (1\ \Omega)I_2 - 6\text{ V} = 0$$

Paso 4: Luego, las ecuaciones se vuelven a escribir de la siguiente forma (sin unidades para mayor claridad):

$$\text{lazo 1:}\quad +2 - 2I_1 - 4I_1 + 4I_2 = 0$$
$$\text{lazo 2:}\quad -4I_2 + 4I_1 - 1I_2 - 6 = 0$$

y

$$\text{lazo 1:}\quad +2 - 6I_1 + 4I_2 = 0$$
$$\text{lazo 2:}\quad -5I_2 + 4I_1 - 6 = 0$$

o bien:

$$\text{lazo 1:}\quad -6I_1 + 4I_2 = -2$$
$$\text{lazo 2:}\quad +4I_1 - 5I_2 = +6$$

Al aplicar los determinantes se obtiene:

$$I_1 = \mathbf{-1\ A} \quad \text{e} \quad I_2 = \mathbf{-2\ A}$$

El signo menos indica que las corrientes poseen una dirección opuesta a la indicada por la corriente de lazo asumida.

La corriente real a través de la fuente de 2 V y el resistor de 2 Ω será, por tanto, de 1 A en la otra dirección, y la corriente a través de la fuente de 6 V y el resistor de 1 Ω será de 2 A en la dirección opuesta a la indicada en el circuito. La corriente a través del resistor de 4 Ω está determinada por la siguiente ecuación de la red original:



$$\text{lazo 1:}\quad I_{4\Omega} = I_1 - I_2 = -1\text{ A} - (-2\text{ A}) = -1\text{ A} + 2\text{ A}$$
$$= \mathbf{1\ A}\quad (\text{en la dirección de } I_1)$$

El lazo exterior (I_3) y *uno* de los lazos interiores (ya sea I_1 o I_2) también habrían generado los resultados correctos. Sin embargo, este enfoque por lo regular llevará a errores dado que las ecuaciones de lazo podrían ser más difíciles de escribir. El mejor método para seleccionar estas corrientes de lazo es utilizar el método de las ventanas.

EJEMPLO 8.12 Encuentre la corriente a través de cada rama de la red de la figura 8.27.

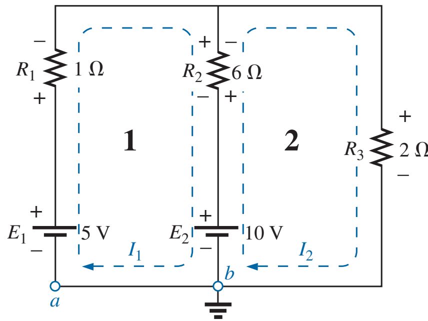


FIGURA 8.27
Ejemplo 8.12.

Solución:

Los *pasos 1 y 2* se indican en el circuito. Observe que las polaridades del resistor de 6 Ω son distintas para cada corriente de lazo.

Paso 3: La ley de voltaje de Kirchhoff se aplica alrededor de cada lazo cerrado en el sentido de las manecillas del reloj:

lazo 1: $+E_1 - V_1 - V_2 - E_2 = 0$ (en el sentido de las manecillas del reloj comenzando en el punto *a*):

$$+5\text{ V} - (1\ \Omega)I_1 - (6\ \Omega)(I_1 - I_2) - 10\text{ V} = 0$$

I_2 fluye a través del resistor de 6 Ω en dirección opuesta a I_1

lazo 2: $E_2 - V_2 - V_3 = 0$ (en el sentido de las manecillas del reloj comenzando en el punto *b*):

$$+10\text{ V} - (6\ \Omega)(I_2 - I_1) - (2\ \Omega)I_2 = 0$$

Las ecuaciones se vuelven a escribir como:

$$\left.\begin{aligned} 5 - I_1 - 6I_1 + 6I_2 - 10 &= 0 \\ 10 - 6I_2 + 6I_1 - 2I_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} -7I_1 + 6I_2 &= 5 \\ +6I_1 - 8I_2 &= -10 \end{aligned}$$

Paso 4:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -10 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-40 + 60}{56 - 36} = \frac{20}{20} = \mathbf{1\ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}}{20} = \frac{70 - 30}{20} = \frac{40}{20} = \mathbf{2\ A}$$

Debido a que I_1 e I_2 son positivas y fluyen en direcciones opuestas a través del resistor de 6 Ω y la fuente de 10 V, la corriente total en esta rama es igual a la diferencia de las dos corrientes en la dirección de la más grande:

$$I_2 > I_1 \quad (2\text{ A} > 1\text{ A})$$

Por tanto,

$$I_{R_2} = I_2 - I_1 = 2\text{ A} - 1\text{ A} = \mathbf{1\ A}\quad \text{en la dirección de } I_2$$

En ocasiones no resulta práctico trazar todas las ramas de un circuito en ángulos rectos entre sí. El siguiente ejemplo demuestra la forma en que una parte de la red puede presentarse debido a distintas restricciones. El método de análisis no se modifica con este cambio en la configuración.

EJEMPLO 8.13 Encuentre las corrientes de rama de la red de la figura 8.28.

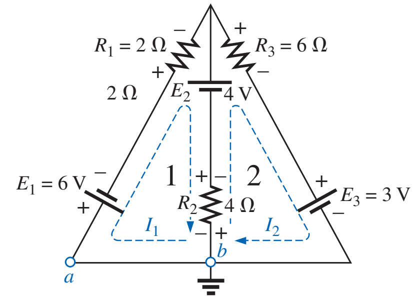


FIGURA 8.28
Ejemplo 8.13.

Solución:

Los *pasos 1 y 2* se indican en el circuito.

Paso 3: La ley de voltaje de Kirchhoff se aplica alrededor de cada lazo cerrado:

lazo 1: $-E_1 - I_1R_1 - E_2 - V_2 = 0$ (en el sentido de las manecillas del reloj desde el punto *a*):

$$-6\text{ V} - (2\ \Omega)I_1 - 4\text{ V} - (4\ \Omega)(I_1 - I_2) = 0$$

lazo 2: $-V_2 + E_2 - V_3 - E_3 = 0$ (en el sentido de las manecillas del reloj desde el punto *b*):

$$-(4\ \Omega)(I_2 - I_1) + 4\text{ V} - (6\ \Omega)(I_2) - 3\text{ V} = 0$$

lo cual se puede volver a escribir como:

$$\left.\begin{aligned}-10 - 4I_1 - 2I_1 + 4I_2 &= 0\\ +\ 1 + 4I_1 - 4I_2 - 6I_2 &= 0\end{aligned}\right\}\begin{aligned}-6I_1 + \ \ 4I_2 &= +10\\ +4I_1 - 10I_2 &= -1\end{aligned}$$

o, mediante la multiplicación de la ecuación superior por -1, se obtiene:

$$\begin{aligned}6I_1 - \ \ 4I_2 &= -10\\ 4I_1 - 10I_2 &= -1\end{aligned}$$

Paso 4:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix}-10 & -4\\ -1 & -10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -4\\ 4 & -10\end{vmatrix}} = \frac{100 - 4}{-60 + 16} = \frac{96}{-44} = \mathbf{-2.182\ A}$$

Utilizando la calculadora TI-86:

det[[−10,−4][−1,−10]]/det[[6,−4][4,−10]] (ENTER)	−2.182

CÁLCULO 8.2

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix}6 & -10\\ 4 & -1\end{vmatrix}}{-44} = \frac{-6 + 40}{-44} = \frac{34}{-44} = \mathbf{-0.773\ A}$$

La corriente en el resistor de 4 Ω y en la fuente de 4 V para el lazo 1 es:

$$\begin{aligned}I_1 - I_2 &= -2.182\text{ A} - (-0.773\text{ A})\\ &= -2.182\text{ A} + 0.773\text{ A}\\ &= \mathbf{-1.409\ A}\end{aligned}$$

mostrando que son 1.409 A en dirección opuesta (debido al signo menos) a I_1 en el lazo 1.

Corrientes de supermallas

En ocasiones existirán fuentes de corriente dentro de la red a la cual se aplicará el análisis de mallas. En tales casos es posible convertir la fuente de corriente a fuente de voltaje (si se encuentra presente un resistor en paralelo) y continuar como antes o utilizar una corriente de *supermalla* y proceder de la siguiente forma.

Se empieza como antes y se asigna una corriente de malla a cada trayectoria (lazo) independiente, incluyendo las fuentes de corriente, como si fueran resistores o fuentes de voltaje. Luego, mentalmente (se vuelve a trazar la red si es nece-



sario) se eliminan las fuentes de corriente (reemplazándolas con equivalentes de circuito abierto), y se aplica la ley de voltaje de Kirchhoff a todas las trayectorias independientes restantes de la red utilizando las corrientes de malla que se acaban de definir. Cualquier trayectoria resultante, que incluya dos o más corrientes de malla, se dice ser la trayectoria de una corriente de *supermalla*. Luego se relacionan las corrientes de malla elegidas de la red con las fuentes de corriente independientes de la red, y se resuelve para las corrientes de malla. El siguiente ejemplo aclarará la definición de una corriente de *supermalla* y el procedimiento.

EJEMPLO 8.14 Utilizando el análisis de mallas, determine las corrientes de la red de la figura 8.29.

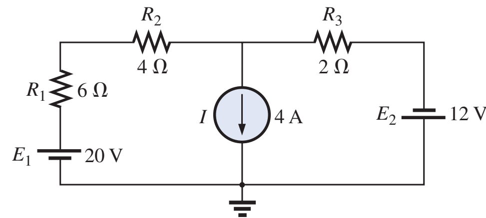


FIGURA 8.29
Ejemplo 8.14.

Solución: Primero, se definen las corrientes de malla para la red, como se muestra en la figura 8.30. Luego, la fuente de corriente se elimina mentalmente, como se muestra en la figura 8.31, y se aplica la ley de voltaje de Kirchhoff a la red resultante. La trayectoria sencilla que ahora incluye los efectos de las dos corrientes de malla se denomina trayectoria de una corriente de *supermalla*.

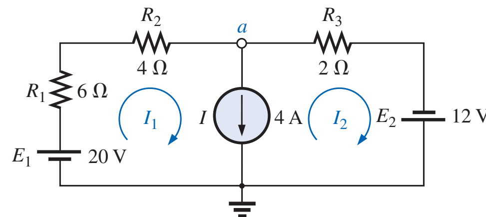


FIGURA 8.30
Definición de las corrientes de malla para la red de la figura 8.29.

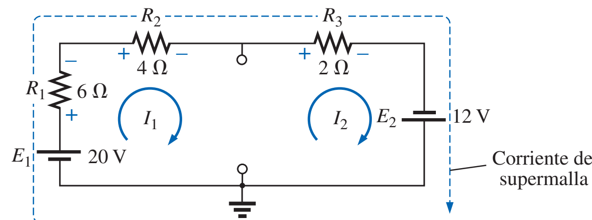


FIGURA 8.31
Definición de la corriente de supermalla.

Al aplicar la ley de Kirchhoff:

$$20\text{ V} - I_1(6\ \Omega) - I_1(4\ \Omega) - I_2(2\ \Omega) + 12\text{ V} = 0$$

o bien:
$$10I_1 + 2I_2 = 32$$



El nodo *a* se utiliza entonces para relacionar las corrientes de malla y la fuente de corriente por medio de la ley de corriente de Kirchhoff:

$$I_1 = I + I_2$$

El resultado son dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{aligned} 10I_1 + 2I_2 &= 32 \\ I_1 - I_2 &= 4 \end{aligned}$$

Al aplicar los determinantes:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 32 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(32)(-1) - (2)(4)}{(10)(-1) - (2)(1)} = \frac{40}{12} = \mathbf{3.33\ A}$$

e $$I_2 = I_1 - I = 3.33\text{ A} - 4\text{ A} = \mathbf{-0.67\ A}$$

En el análisis anterior, podría parecer que $I_1 = I_2$ cuando la fuente de corriente fue eliminada. Sin embargo, el método de supermalla requiere que se siga la definición original de cada corriente de malla y no se alteren esas definiciones cuando se eliminan las fuentes de corriente.

EJEMPLO 8.15 Utilizando el análisis de mallas, determine las corrientes para la red de la figura 8.32.

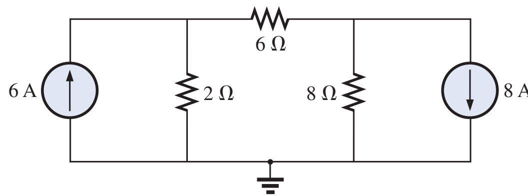


FIGURA 8.32
Ejemplo 8.15.

Solución: Las corrientes de malla se definen en la figura 8.33. Las fuentes de corriente se eliminan, y la trayectoria simple de supermalla se define en la figura 8.34.

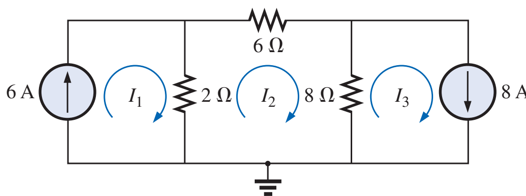


FIGURA 8.33
Definición de las corrientes de malla para la red de la figura 8.32.

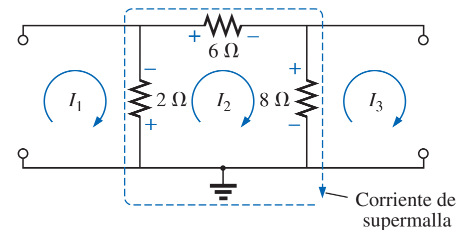
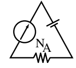


FIGURA 8.34
Definición de la corriente de supermalla para la red de la figura 8.32.

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de la trayectoria de la supermalla:

$$\begin{aligned} &-V_{2\Omega} - V_{6\Omega} - V_{8\Omega} = 0 \\ &-(I_2 - I_1)2\ \Omega - I_2(6\ \Omega) - (I_2 - I_3)8\ \Omega = 0 \\ &-2I_2 + 2I_1 - 6I_2 - 8I_2 + 8I_3 = 0 \\ &2I_1 - 16I_2 + 8I_3 = 0 \end{aligned}$$



Al introducir la relación entre las corrientes de malla y las fuentes de corriente:

$$I_1 = 6\text{ A}$$
$$I_3 = 8\text{ A}$$

da por resultado las siguientes soluciones:

$$2I_1 - 16I_2 + 8I_3 = 0$$
$$2(6\text{ A}) - 16I_2 + 8(8\text{ A}) = 0$$

e $$I_2 = \frac{76\text{ A}}{16} = \mathbf{4.75\text{ A}}$$

Entonces: $$I_{2\Omega}\downarrow = I_1 - I_2 = 6\text{ A} - 4.75\text{ A} = \mathbf{1.25\text{ A}}$$

e $$I_{8\Omega}\uparrow = I_3 - I_2 = 8\text{ A} - 4.75\text{ A} = \mathbf{3.25\text{ A}}$$

Nuevamente, observe que debe seguirse con las definiciones originales de las distintas corrientes de malla al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de las trayectorias de supermalla resultantes.

8.8 ANÁLISIS DE MALLAS (MÉTODO DE FORMATO)

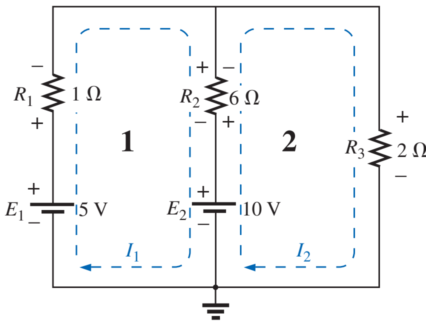


FIGURA 8.35
Red de la figura 8.27 trazada de nuevo con las corrientes de malla asignadas.

Una vez establecidas las bases del método de análisis de mallas, se examinará una técnica para escribir ecuaciones de malla de una forma más rápida y a menudo con menos errores. Como apoyo en la presentación del procedimiento, se vuelve a trazar la red del ejemplo 8.12 (Figura 8.27) en la figura 8.35 con las corrientes de malla asignadas. (Observe que cada corriente de malla posee el sentido de las manecillas del reloj.)

Las ecuaciones obtenidas son:

$$-7I_1 + 6I_2 = 5$$
$$6I_1 - 8I_2 = -10$$

lo cual también puede escribirse como:

$$7I_1 - 6I_2 = -5$$
$$8I_2 - 6I_1 = 10$$

y de manera ampliada como:

Col. 1	**Col. 2**	**Col. 3**
$(1 + 6)I_1 -$	$6I_2$	$= (5 - 10)$
$(2 + 6)I_2 -$	$6I_1$	$= 10$

Observe en las ecuaciones anteriores que la columna 1 está compuesta por una corriente de lazo multiplicada por la suma de los resistores a través de los cuales pasa la corriente. La columna 2 es el producto de los resistores comunes a otra corriente de lazo multiplicada por otra corriente de lazo. Observe que en cada ecuación, la columna 2 se resta de la columna 1. La columna 3 es la suma *algebraica* de las fuentes de voltaje a través de las cuales pasa la corriente de interés. Se asigna un signo positivo a una fuente si la corriente de malla pasa de una terminal negativa a una positiva, y un valor negativo si las polaridades están invertidas. Los comentarios anteriores son válidos sólo para una dirección estándar de la corriente de lazo en cada ventana, siendo la elegida la que va en el sentido de las manecillas del reloj.

Las declaraciones anteriores pueden extenderse para desarrollar el siguiente *método de formato* para el análisis de mallas:



1. ***Asigne una corriente de lazo a cada trayectoria (lazo) cerrada independiente (como en la sección anterior) en el sentido de las manecillas del reloj.***
2. ***El número de ecuaciones requeridas será igual al número de lazos cerrados independientes seleccionados. La columna 1 de cada ecuación estará formada por la suma de los valores de resistencia de aquellos resistores a través de los cuales la corriente de lazo de interés cruza, multiplicando el resultado por el de la corriente de lazo.***
3. ***Ahora se deben considerar los términos mutuos, los que, según se observó en los ejemplos anteriores, siempre se restan de la primera columna. Un término mutuo es simplemente cualquier elemento resistivo que cuente con una corriente de lazo adicional que pase a través de él. Es posible tener más de un término mutuo si la corriente de lazo de interés tiene un término en común con más de una corriente de lazo. Esto se demostrará en el ejemplo que sigue. Cada término será el producto del resistor mutuo y de la otra corriente de lazo que pasa a través del mismo elemento.***
4. ***La columna a la derecha del signo de igualdad será la suma algebraica de las fuentes de voltaje a través de las cuales pasa la corriente de lazo de interés. Los signos positivos se asignan a aquellas fuentes de voltaje con polaridad tal que la corriente de lazo pase de la terminal negativa a la positiva. Se asigna un signo negativo a aquellos potenciales que presentan el caso contrario.***
5. ***Resuelva las ecuaciones simultáneas resultantes para las corrientes de lazo deseadas.***

Antes de considerar algunos ejemplos, el lector debe ser consciente de que, dado que la columna a la derecha del signo de igualdad es la suma algebraica de las fuentes de voltaje dentro de ese lazo, *el método de formato podrá aplicarse únicamente a redes en las que todas las fuentes de corriente han sido convertidas a su fuente de voltaje equivalente.*

EJEMPLO 8.16 Escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 8.36, y encuentre la corriente a través del resistor de 7 Ω.

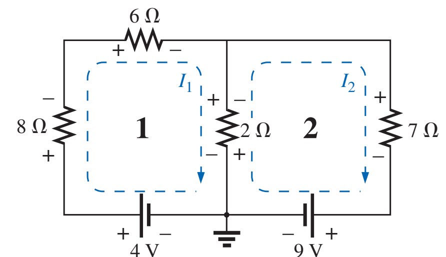


FIGURA 8.36
Ejemplo 8.16.

Solución:

Paso 1: Como se indicó en la figura 8.36, cada corriente de lazo asignada tiene dirección en el sentido de las manecillas del reloj.

Pasos del 2 al 4:

$$I_1: \quad (8\ \Omega + 6\ \Omega + 2\ \Omega)I_1 - (2\ \Omega)I_2 = 4\ \text{V}$$
$$I_2: \quad (7\ \Omega + 2\ \Omega)I_2 - (2\ \Omega)I_1 = -9\ \text{V}$$

y

$$16I_1 - 2I_2 = 4$$
$$9I_2 - 2I_1 = -9$$

las cuales, por determinantes, son:

$$16I_1 - 2I_2 = 4$$
$$-2I_1 + 9I_2 = -9$$

e

$$I_2 = I_{7\Omega} = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 4 \\ -2 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{-144 + 8}{144 - 4} = \frac{-136}{140}$$
$$= \mathbf{-0.971\ A}$$



EJEMPLO 8.17 Escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 8.37.

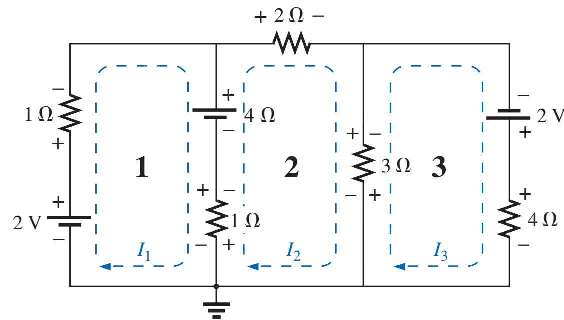


FIGURA 8.37
Ejemplo 8.17.

Solución:

Paso 1: Se asigna una corriente de lazo a cada ventana en el sentido de las manecillas del reloj:

I_1 no pasa a través de un elemento mutuo con I_3

$$
\begin{aligned}
I_1: &\quad (1\,\Omega + 1\,\Omega)I_1 - (1\,\Omega)I_2 + 0 = 2\text{ V} - 4\text{ V}\\
I_2: &\quad (1\,\Omega + 2\,\Omega + 3\,\Omega)I_2 - (1\,\Omega)I_1 - (3\,\Omega)I_3 = 4\text{ V}\\
I_3: &\quad (3\,\Omega + 4\,\Omega)I_3 - (3\,\Omega)I_2 + 0 = 2\text{ V}
\end{aligned}
$$

I_3 no pasa a través de un elemento mutuo con I_1

Al sumar los términos se tiene:

$$
\begin{aligned}
2I_1 - I_2 + 0 &= -2\\
6I_2 - I_1 - 3I_3 &= 4\\
7I_3 - 3I_2 + 0 &= 2
\end{aligned}
$$

los cuales se vuelven a escribir para los determinantes como:

$$
\begin{aligned}
2I_1 - I_2 + 0 &= -2\\
-I_1 + 6I_2 - 3I_3 &= 4\\
0 - 3I_2 + 7I_3 &= 2
\end{aligned}
$$

(diagonales marcadas: c — $2I_1$, $6I_2$, $7I_3$; b — $-I_2$, $-3I_3$ y $-I_1$, $-3I_2$; a — 0 y 0)

Observe que los coeficientes de las diagonales *a* y *b* son iguales. Esta *simetría* sobre el eje *c* siempre estará presente para las ecuaciones escritas utilizando el método de formato. Es una verificación sobre si las ecuaciones se obtuvieron de forma correcta.

Ahora se considerará una red con sólo una fuente de voltaje para demostrar que el análisis de mallas puede usarse en provecho de otras redes distintas de las de múltiples fuentes.

EJEMPLO 8.18 Encuentre la corriente a través del resistor de 10 Ω de la red de la figura 8.38.

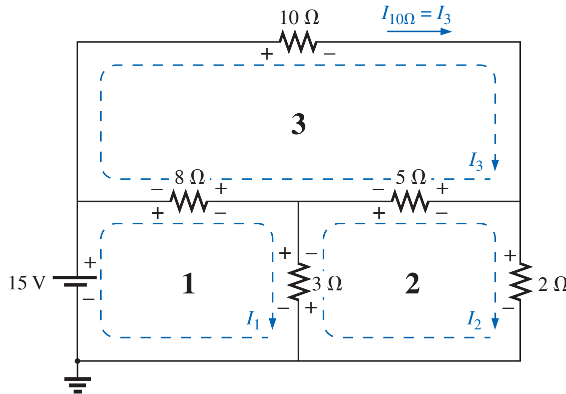


FIGURA 8.38
Ejemplo 8.18.

Solución 1:

$$\begin{aligned}
I_1&: \quad (8\ \Omega + 3\ \Omega)I_1 - (8\ \Omega)I_3 - (3\ \Omega)I_2 = 15\ \text{V}\\
I_2&: \quad (3\ \Omega + 5\ \Omega + 2\ \Omega)I_2 - (3\ \Omega)I_1 - (5\ \Omega)I_3 = 0\\
I_3&: \quad (8\ \Omega + 10\ \Omega + 5\ \Omega)I_3 - (8\ \Omega)I_1 - (5\ \Omega)I_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11I_1 - 8I_3 - 3I_2 &= 15\\
10I_2 - 3I_1 - 5I_3 &= 0\\
23I_3 - 8I_1 - 5I_2 &= 0
\end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned}
11I_1 - 3I_2 - 8I_3 &= 15\\
-3I_1 + 10I_2 - 5I_3 &= 0\\
-8I_1 - 5I_2 + 23I_3 &= 0
\end{aligned}$$

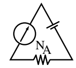
e

$$I_3 = I_{10\Omega} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -3 & 15 \\ -3 & 10 & 0 \\ -8 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -3 & -8 \\ -3 & 10 & -5 \\ -8 & -5 & 23 \end{vmatrix}} = \mathbf{1.220\ A}$$

Solución con Mathcad: Para este ejemplo, en lugar de tomar tiempo para desarrollar el determinante a partir de cada variable, se aplicará Mathcad directamente a las ecuaciones resultantes. Como se muestra en la figura 8.39, primero deberá definirse un valor de estimación **Guess** para cada variable. Tales valores de estimación ayudan a la computadora a comenzar su proceso de iteración para buscar una solución. Al proporcionar un estimado grueso de 1, la computadora reconocerá que el resultado probablemente será un número con una magnitud menor a 100 en lugar de tener que ocuparse en buscar soluciones que se extiendan a miles o decenas de miles —ya que la búsqueda se ha estrechado de forma considerable.

Luego, como se muestra, debe teclearse la palabra **Given** para indicar a la computadora que las ecuaciones de definición vienen en seguida. Por último, cada ecuación deberá capturarse cuidadosamente e igualarse con la constante localizada a la derecha utilizando la operación **Ctrl=**.

Los resultados se obtienen mediante la expresión **Find(I1,I2,I3)** y el signo igual. Como se muestra, los resultados se presentan con un grado aceptable de precisión incluso cuando la captura de las ecuaciones y la ejecución del análisis tomó apenas uno o dos minutos (con práctica).



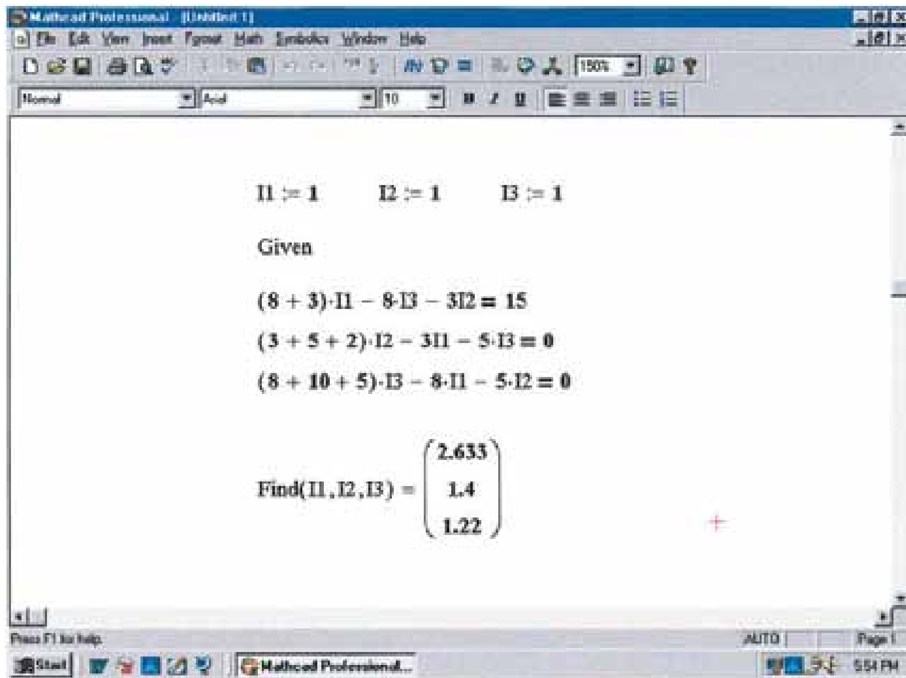


FIGURA 8.39
Utilización de Mathcad para verificar los cálculos numéricos del ejemplo 8.18.

Solución 2: Utilizando la calculadora TI-86:

det[[11,−3,15][−3,10,0][−8,−5,0]]/det[[11,−3,−8][−3,10,−5][−8,−5,23]] (ENTER)	1.220

CÁLCULO 8.3

La disposición del cálculo ciertamente requiere algún cuidado al capturar la secuencia correcta de los corchetes en el formato requerido, pero sigue siendo un formato compacto y ordenado.

8.9 ANÁLISIS DE NODOS (MÉTODO GENERAL)

Recuerde del desarrollo del análisis de mallas que las ecuaciones de la red general se obtuvieron al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de cada lazo cerrado. Ahora se utilizará la ley de corriente de Kirchhoff para desarrollar un método denominado **análisis de nodos**.

Un **nodo** se define como la unión de una o más ramas. Si ahora se define un nodo de cualquier red como una referencia (es decir, un punto con potencial cero o tierra), los nodos restantes de la red tendrán un potencial fijo con respecto a esta referencia. Por tanto, para una red con N nodos, existirán $(N - 1)$ nodos con potencial fijo respecto del nodo de referencia asignado. Las ecuaciones que relacionan estos voltajes nodales pueden escribirse al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff sobre cada uno de los $(N - 1)$ nodos. Para obtener la solución completa de una red, estos voltajes nodales se evalúan entonces en la misma forma en que se calcularon las corrientes de lazo en el análisis de mallas.



El método de análisis de nodos se aplica de la siguiente forma:

1. ***Determine el número de nodos dentro de la red.***
2. ***Escoja un nodo de referencia, y etiquete cada nodo restante con un valor de voltaje con subíndice: V1, V2, etcétera.***
3. ***Aplique la ley de corriente de Kirchhoff sobre cada nodo excepto sobre el de referencia. Asuma que todas las corrientes desconocidas abandonan el nodo por cada aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff. En otras palabras, para que cada nodo no se vea influenciado por la dirección que una corriente desconocida en otro nodo pudiera haber tenido. Cada nodo se debe tratar como una entidad distinta e independiente de la aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff a los otros nodos.***
4. ***Resuelva las ecuaciones resultantes para los voltajes nodales.***

Algunos ejemplos volverán más claro el proceso definido en el paso 3. Al principio tomará cierta práctica escribir correctamente las ecuaciones para la ley de corriente de Kirchhoff, pero con el tiempo la ventaja de asumir que todas las corrientes salen de un nodo en lugar de identificar una dirección específica para cada rama será más obvia. (El mismo tipo de ventaja se obtiene al asumir que todas las corrientes de malla se encuentran en el sentido de las manecillas del reloj al aplicar el análisis de mallas.)

EJEMPLO 8.19 Aplique el análisis de nodos a la red de la figura 8.40.

Solución:

Pasos 1 y 2: La red cuenta con dos nodos, como se muestra en la figura 8.41. El nodo inferior se define como el nodo de referencia al potencial de tierra (cero volts), y el otro nodo como V_1, que es el voltaje del nodo 1 a tierra.

Paso 3: En la figura 8.42 se establece que I_1 e I_2 abandonan el nodo, y se aplica la ley de corriente de Kirchhoff de la siguiente forma:

$$I = I_1 + I_2$$

La corriente I_2 se relaciona con el voltaje nodal V_1 mediante la ley de Ohm:

$$I_2 = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{V_1}{R_2}$$

La corriente I_1 también está determinada por la ley de Ohm de la siguiente forma:

$$I_1 = \frac{V_{R_1}}{R_1}$$

con:
$$V_{R_1} = V_1 - E$$

Al sustituir en la ecuación de la ley de corriente de Kirchhoff:

$$I = \frac{V_1 - E}{R_1} + \frac{V_1}{R_2}$$

y reagrupando, se tiene:

$$I = \frac{V_1}{R_1} - \frac{E}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} = V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{E}{R_1}$$

o bien:
$$V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{E}{R_1} + I$$

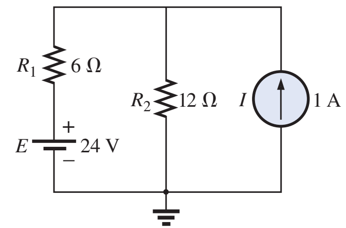


FIGURA 8.40
Ejemplo 8.19.

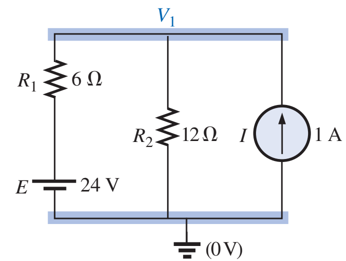


FIGURA 8.41
Red de la figura 8.40 con nodos asignados.

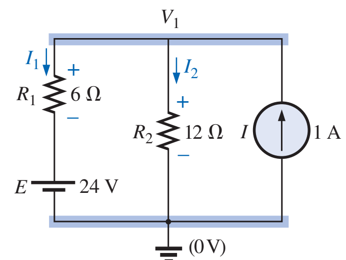


FIGURA 8.42
Aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo V_1.



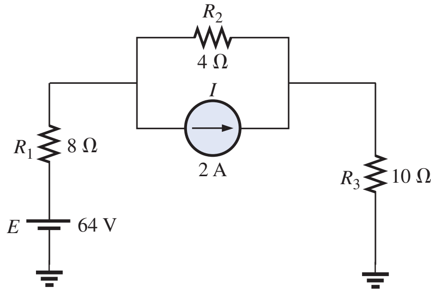


FIGURA 8.43
Ejemplo 8.20.

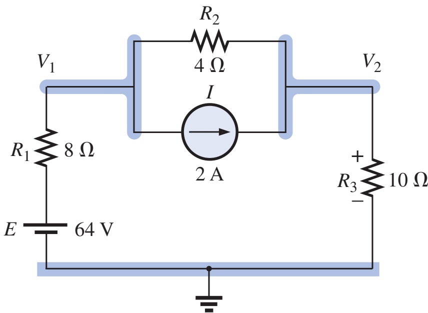


FIGURA 8.44
Definición de los nodos para la red de la figura 8.43.

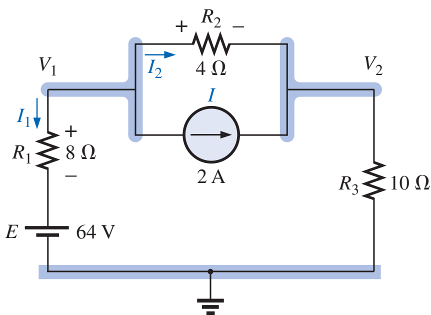


FIGURA 8.45
Aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo V_1.

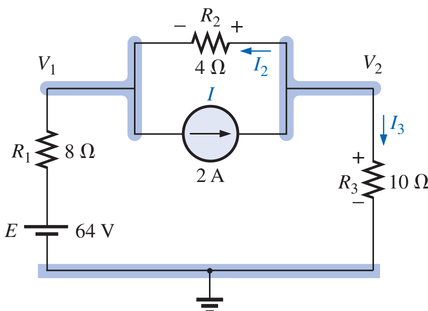


FIGURA 8.46
Aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo V_2.

Al sustituir los valores numéricos, se obtiene:

$$V_1\left(\frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{12\ \Omega}\right) = \frac{24\ \text{V}}{6\ \Omega} + 1\ \text{A} = 4\ \text{A} + 1\ \text{A}$$

$$V_1\left(\frac{1}{4\ \Omega}\right) = 5\ \text{A}$$

$$V_1 = \mathbf{20\ V}$$

Las corrientes I_1 e I_2 pueden determinarse entonces utilizando las ecuaciones anteriores:

$$I_1 = \frac{V_1 - E}{R_1} = \frac{20\ \text{V} - 24\ \text{V}}{6\ \Omega} = \frac{-4\ \text{V}}{6\ \Omega}$$

$$= \mathbf{-0.667\ A}$$

El signo negativo indica simplemente que la corriente I_1 tiene una dirección opuesta a la que aparece en la figura 8.42.

$$I_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{20\ \text{V}}{12\ \Omega} = \mathbf{1.667\ A}$$

EJEMPLO 8.20 Aplique el análisis de nodos a la red de la figura 8.43.

Solución 1:

Pasos 1 y 2: La red cuenta con tres nodos, como se define en la figura 8.44, siendo el nodo inferior nuevamente definido como el de referencia (con un potencial de tierra o de cero volts), y los otros nodos como V_1 y V_2.

Paso 3: Para el nodo V_1 las corrientes se definen como se muestra en la figura 8.45, y se aplica la ley de corriente de Kirchhoff:

$$0 = I_1 + I_2 + I$$

con:

$$I_1 = \frac{V_1 - E}{R_1}$$

e

$$I_2 = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{V_1 - V_2}{R_2}$$

de manera que:

$$\frac{V_1 - E}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} + I = 0$$

o bien:

$$\frac{V_1}{R_1} - \frac{E}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} - \frac{V_2}{R_2} + I = 0$$

y

$$V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - V_2\left(\frac{1}{R_2}\right) = -I + \frac{E}{R_1}$$

Al sustituir valores:

$$V_1\left(\frac{1}{8\ \Omega} + \frac{1}{4\ \Omega}\right) - V_2\left(\frac{1}{4\ \Omega}\right) = -2\ \text{A} + \frac{64\ \text{V}}{8\ \Omega} = 6\ \text{A}$$

Para el nodo V_2 las corrientes se definen como se muestra en la figura 8.46, y se aplica la ley de corriente de Kirchhoff:

$$I = I_2 + I_3$$

con:

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R_2} + \frac{V_2}{R_3}$$



o bien: $$I = \frac{V_2}{R_2} - \frac{V_1}{R_2} + \frac{V_2}{R_3}$$

y $$V_2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_1\left(\frac{1}{R_2}\right) = I$$

Al sustituir valores:

$$V_2\left(\frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{10\ \Omega}\right) - V_1\left(\frac{1}{4\ \Omega}\right) = 2\ \text{A}$$

Paso 4: El resultado son dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$V_1\left(\frac{1}{8\ \Omega} + \frac{1}{4\ \Omega}\right) - V_2\left(\frac{1}{4\ \Omega}\right) = 6\ \text{A}$$
$$-V_1\left(\frac{1}{4\ \Omega}\right) + V_2\left(\frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{10\ \Omega}\right) = 2\ \text{A}$$

las cuales se convierten en:

$$0.375V_1 - 0.25V_2 = 6$$
$$-0.25V_1 + 0.35V_2 = 2$$

Utilizando determinantes,

$$V_1 = \mathbf{37.818\ V}$$
$$V_2 = \mathbf{32.727\ V}$$

Dado que E es mayor que V_1, la corriente I_1 fluirá desde tierra hasta V_1 y es igual a:

$$I_{R_1} = \frac{E - V_1}{R_1} = \frac{64\ \text{V} - 37.818\ \text{V}}{8\ \Omega} = \mathbf{3.273\ A}$$

El valor positivo de V_2 da por resultado una corriente I_{R_3} desde el nodo V_2 hasta tierra igual a:

$$I_{R_3} = \frac{V_{R_3}}{R_3} = \frac{V_2}{R_3} = \frac{32.727\ \text{V}}{10\ \Omega} = \mathbf{3.273\ A}$$

Dado que V_1 es mayor que V_2, la corriente I_{R_2} fluirá desde V_1 hasta V_2 y es igual a:

$$I_{R_2} = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = \frac{37.818\ \text{V} - 32.727\ \text{V}}{4\ \Omega} = \mathbf{1.273\ A}$$

Solución con Mathcad: Para este ejemplo, se utilizará Mathcad para trabajar de forma directa con las ecuaciones de la ley de corriente de Kirchhoff en lugar de tomar el proceso matemático hasta llegar a formas más familiares. Simplemente debe definirse todo de forma correcta, proporcionando los valores de estimación **Guess** e insertando la palabra **Given** donde se requiera. El proceso deberá ser muy sencillo.

Observe en la figura 8.47 que la primera ecuación proviene del hecho de que $I_1 + I_2 + I = 0$, mientras que la segunda ecuación proviene de $I_2 + I_3 = I$. Préstese especial atención al hecho de que la primera ecuación está definida por la figura 8.45 y la segunda por la figura 8.46 debido a que la dirección de I_2 es diferente para cada una.

Los resultados de $V_1 = 37.82$ V y $V_2 = 32.73$ V confirman la solución teórica.

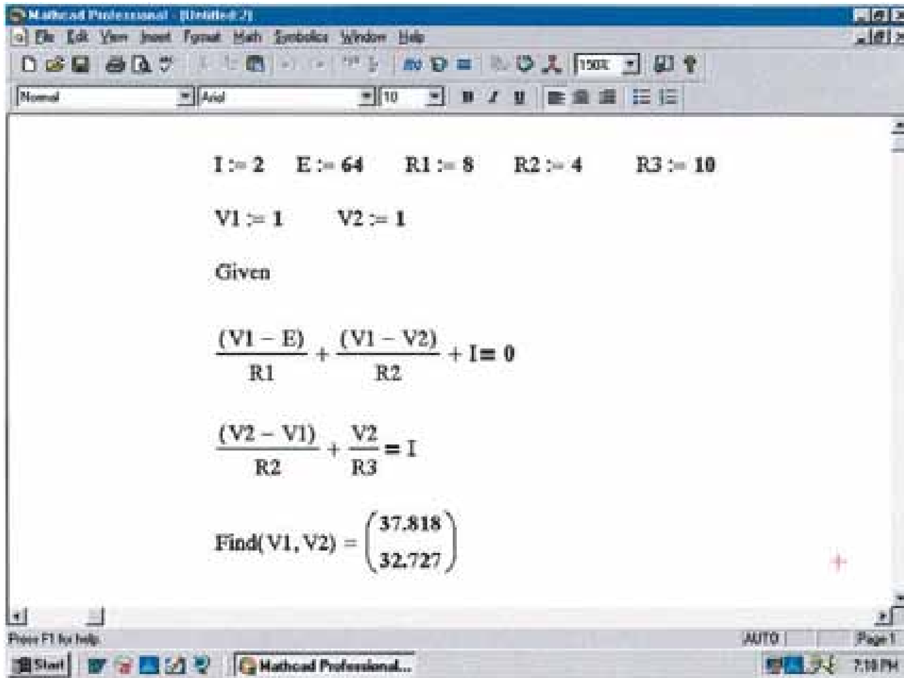


FIGURA 8.47
Utilización de Mathcad para verificar los cálculos matemáticos del ejemplo 8.20.

EJEMPLO 8.21 Determine los voltajes nodales para la red de la figura 8.48.

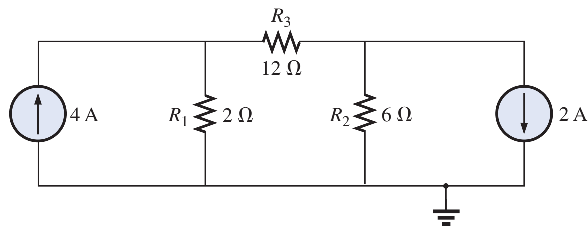


FIGURA 8.48
Ejemplo 8.21.

Solución:

Pasos 1 y 2: Como se indica en la figura 8.49.

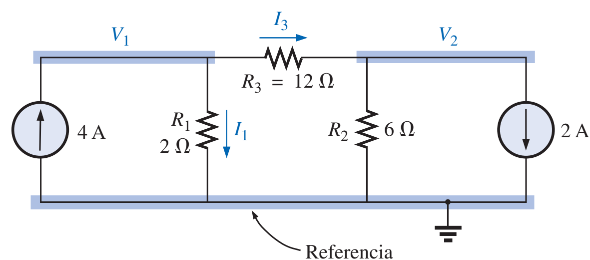


FIGURA 8.49
Definición de los nodos y aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff para el nodo V_1.



Paso 3: Incluido en la figura 8.49 para el nodo V_1. Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff:

$$4\text{ A} = I_1 + I_3$$

y
$$4\text{ A} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_3} = \frac{V_1}{2\ \Omega} + \frac{V_1 - V_2}{12\ \Omega}$$

Ampliando y volviendo a agrupar:

$$V_1\left(\frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{12\ \Omega}\right) - V_2\left(\frac{1}{12\ \Omega}\right) = 4\text{ A}$$

Para el nodo V_2 las corrientes están definidas como en la figura 8.50.

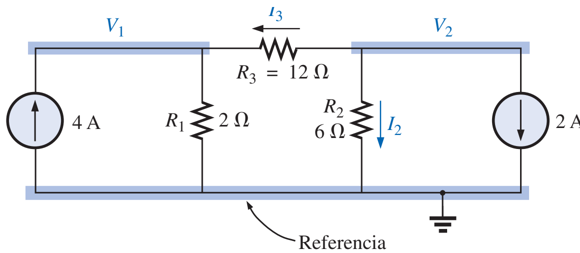


FIGURA 8.50
Aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff para el nodo V_2.

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff:

$$0 = I_3 + I_2 + 2\text{ A}$$

y
$$\frac{V_2 - V_1}{R_3} + \frac{V_2}{R_2} + 2\text{ A} = 0 \longrightarrow \frac{V_2 - V_1}{12\ \Omega} + \frac{V_2}{6\ \Omega} + 2\text{ A} = 0$$

Ampliando y volviendo a agrupar:

$$V_2\left(\frac{1}{12\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega}\right) - V_1\left(\frac{1}{12\ \Omega}\right) = -2\text{ A}$$

lo que da por resultado dos ecuaciones y dos incógnitas (numeradas para referencia posterior):

$$\left.\begin{aligned} V_1\left(\frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{12\ \Omega}\right) - V_2\left(\frac{1}{12\ \Omega}\right) &= +4\text{ A} \\ V_2\left(\frac{1}{12\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega}\right) - V_1\left(\frac{1}{12\ \Omega}\right) &= -2\text{ A} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(8.3)}$$

lo cual genera:

$$\left.\begin{aligned} \frac{7}{12}V_1 - \frac{1}{12}V_2 &= +4 \\ -\frac{1}{12}V_1 + \frac{3}{12}V_2 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 7V_1 - V_2 &= 48 \\ -1V_1 + 3V_2 &= -24 \end{aligned}$$

y
$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 48 & -1 \\ -24 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{120}{20} = \mathbf{+6\ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 48 \\ -1 & -24 \end{vmatrix}}{20} = \frac{-120}{20} = \mathbf{-6\ V}$$



Dado que V_1 es mayor que V_2, la corriente a través de R_3 pasa de V_1 a V_2. Su valor es:

$$I_{R_3} = \frac{V_1 - V_2}{R_3} = \frac{6\text{ V} - (-6\text{ V})}{12\ \Omega} = \frac{12\text{ V}}{12\ \Omega} = \mathbf{1\ A}$$

El que V_1 sea positivo ocasiona que la corriente I_{R_1} desde V_1 hasta tierra sea igual a:

$$I_{R_1} = \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{6\text{ V}}{2\ \Omega} = \mathbf{3\ A}$$

Por último, dado que V_2 es negativo, la corriente I_{R_2} fluye desde tierra hasta V_2 y es igual a:

$$I_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{V_2}{R_2} = \frac{6\text{ V}}{6\ \Omega} = \mathbf{1\ A}$$

Supernodo

En ocasiones existirán fuentes independientes de voltaje dentro de la red a la que se aplique el análisis de nodos. En tales casos es posible convertir la fuente de voltaje a una fuente de corriente (si se encuentra presente un resistor en serie) y continuar como antes, o introducir el concepto de un *supernodo* y proceder de la siguiente forma.

Se comienza como antes y se asigna un voltaje nodal a cada nodo independiente de la red, incluyendo a cada fuente de voltaje independiente como si ésta fuera un resistor o una fuente de corriente. Luego, mentalmente se reemplazan las fuentes de voltaje independientes con equivalentes de corto circuito, y se aplica la ley de corriente de Kirchhoff a los nodos definidos de la red. Cualquier nodo que incluya el efecto de elementos ligados sólo a *otros* nodos se denomina *supernodo* (dado que tiene un número adicional de términos). Por último, se relacionan los nodos definidos con las fuentes de voltaje independientes de la red, y se resuelve para los voltajes nodales. El siguiente ejemplo aclarará la definición de *supernodo*.

EJEMPLO 8.22 Determine los voltaje nodales V_1 y V_2 de la figura 8.51 utilizando el concepto de supernodo.

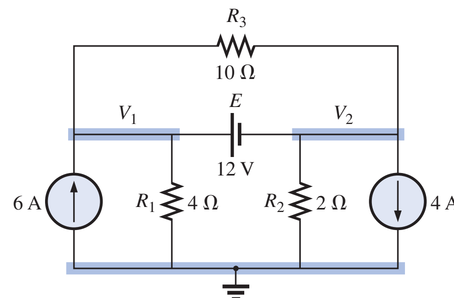


FIGURA 8.51
Ejemplo 8.22.

Solución: Al reemplazar la fuente de voltaje independiente de 12 V con un equivalente de corto circuito se obtendrá la red de la figura 8.52. Aunque se analizó antes la aplicación mental del equivalente de corto circuito, podría ser prudente en esta temprana etapa de desarrollo volver a dibujar la red como se

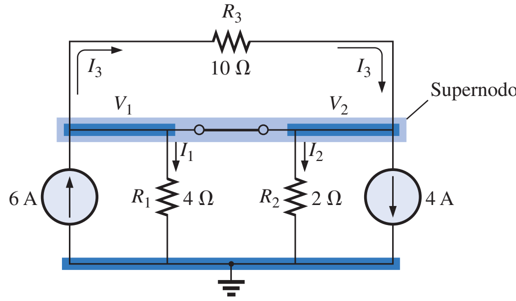


FIGURA 8.52
Definición de los supernodos para la red de la figura 8.51.

muestra en la figura 8.52. El resultado será un solo supernodo para el cual deberá aplicarse la ley de corriente de Kirchhoff. Es importante asegurarse de dejar los otros nodos definidos en su lugar y utilizarlos para definir las corrientes provenientes de esa región de la red. En particular, observe que la corriente I_3 dejará al supernodo en V_1 y entonces ingresará al mismo supernodo en V_2. Por tanto, esta corriente deberá aparecer dos veces al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff, como se muestra a continuación:

$$\Sigma\, I_i = \Sigma\, I_o$$

$$6\text{ A} + I_3 = I_1 + I_2 + 4\text{ A} + I_3$$

o bien:
$$I_1 + I_2 = 6\text{ A} - 4\text{ A} = 2\text{ A}$$

Entonces:
$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = 2\text{ A}$$

y
$$\frac{V_1}{4\,\Omega} + \frac{V_2}{2\,\Omega} = 2\text{ A}$$

Al relacionar los voltajes nodales definidos con la fuente de voltaje independiente se tiene:

$$V_1 - V_2 = E = 12\text{ V}$$

la cual da por resultado dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{aligned} 0.25V_1 + 0.5V_2 &= 2 \\ V_1 - 1V_2 &= 12 \end{aligned}$$

Al sustituir:

$$V_1 = V_2 + 12$$

$$0.25(V_2 + 12) + 0.5V_2 = 2$$

y
$$0.75V_2 = 2 - 3 = -1$$

de manera que:
$$V_2 = \frac{-1}{0.75} = \mathbf{-1.333\text{ V}}$$

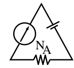
y
$$V_1 = V_2 + 12\text{ V} = -1.333\text{ V} + 12\text{ V} = \mathbf{+10.667\text{ V}}$$

La corriente de la red puede determinarse entonces en la siguiente forma:

$$I_1\!\downarrow\; = \frac{V}{R_1} = \frac{10.667\text{ V}}{4\,\Omega} = \mathbf{2.667\text{ A}}$$

$$I_2\!\uparrow\; = \frac{V_2}{R_2} = \frac{1.333\text{ V}}{2\,\Omega} = \mathbf{0.667\text{ A}}$$

$$\underset{\rightarrow}{I_3} = \frac{V_1 - V_2}{10\,\Omega} = \frac{10.667\text{ V} - (-1.333\text{ V})}{10\,\Omega} = \frac{12\text{ V}}{10\,\Omega} = \mathbf{1.2\text{ A}}$$



Una inspección cuidadosa de la red al comienzo del análisis habría mostrado que el voltaje en el resistor R_3 debe ser igual a 12 V e I_3 debe ser igual a 1.2 A.

8.10 ANÁLISIS DE NODOS (MÉTODO DE FORMATO)

Un análisis minucioso de la ecuación (8.3) que aparece en el ejemplo 8.21 muestra que el voltaje con subíndice en el nodo en que se aplica la ley de corriente de Kirchhoff se multiplica por la suma de las conductancias conectadas a ese nodo. También observe que los otros voltajes nodales dentro de la misma ecuación se multiplican por el negativo de la conductancia entre los dos nodos. Las fuentes de corriente se representan a la derecha del signo de igualdad con signo positivo si suministran corriente al nodo, y con signo negativo si toman corriente del nodo.

Estas conclusiones pueden extenderse para incluir redes con cualquier número de nodos; lo cual permitirá escribir ecuaciones nodales de forma rápida y conveniente para el uso de determinantes. Sin embargo, un requerimiento principal es que *todas las fuentes de voltaje deben convertirse primero a fuentes de corriente antes de aplicar el procedimiento.* Observe el paralelismo entre los siguientes cuatro pasos de aplicación con los requeridos para el análisis de mallas en la sección 8.8:

1. ***Seleccione un nodo de referencia y asigne una etiqueta de voltaje con subíndice a los (N – 1) nodos restantes de la red.***
2. ***El número de ecuaciones requeridas para una solución completa será igual al número (N – 1) de voltajes con subíndice. La columna 1 de cada ecuación está formada por la suma de las conductancias ligadas al nodo de interés y multiplicando el resultado por el voltaje nodal con subíndice de ese nodo de interés.***
3. ***Ahora deben considerarse los términos mutuos que, según se indicó en el ejemplo anterior, siempre se restan de la primera columna. Es posible tener más de un término mutuo si el voltaje nodal de la corriente de interés tiene un elemento en común con más de otro voltaje nodal. Esto se demostrará en un ejemplo más adelante. Cada término mutuo será el producto de la conductancia mutua y el otro voltaje nodal ligado a esa conductancia.***
4. ***La columna a la derecha del signo de igualdad será la suma algebraica de las fuentes de corriente ligadas al nodo de interés. A una fuente de corriente se le asigna un signo positivo si suministra corriente a un nodo y un signo negativo si toma corriente del nodo.***
5. ***Resuelva las ecuaciones simultáneas resultantes para los voltajes deseados.***

En seguida se considerarán algunos ejemplos.

EJEMPLO 8.23 Escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 8.53.

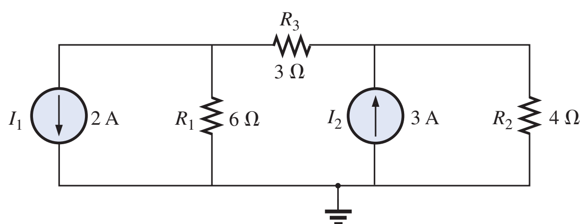


FIGURA 8.53
Ejemplo 8.23.

Solución:

Paso 1: La figura se vuelve a trazar con los voltajes con subíndice asignados en la figura 8.54.

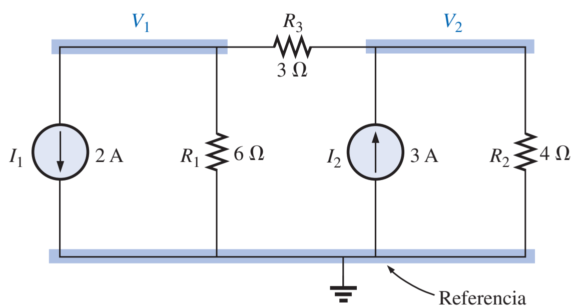


FIGURA 8.54
Definición de los nodos para la red de la figura 8.53.

Pasos del 2 al 4:

Toma corriente del nodo 1

$$V_1\text{:}\quad \underbrace{\left(\frac{1}{6\ \Omega}+\frac{1}{3\ \Omega}\right)}_{\substack{\text{Suma de}\\ \text{las conductancias}\\ \text{conectadas al nodo 1}}}V_1-\underbrace{\left(\frac{1}{3\ \Omega}\right)}_{\substack{\text{Conductancia}\\ \text{mutua}}}V_2 = -2\text{ A}$$

Suministra corriente al nodo 2

$$V_2\text{:}\quad \underbrace{\left(\frac{1}{4\ \Omega}+\frac{1}{3\ \Omega}\right)}_{\substack{\text{Suma de}\\ \text{las conductancias}\\ \text{conectadas al nodo 2}}}V_2-\underbrace{\left(\frac{1}{3\ \Omega}\right)}_{\substack{\text{Conductancia}\\ \text{mutua}}}V_1 = +3\text{ A}$$

y

$$\frac{1}{2}V_1-\frac{1}{3}V_2 = -2$$

$$-\frac{1}{3}V_1+\frac{7}{12}V_2 = 3$$



EJEMPLO 8.24 Encuentre el voltaje en el resistor de 3 Ω de la figura 8.55 mediante el análisis de nodos.

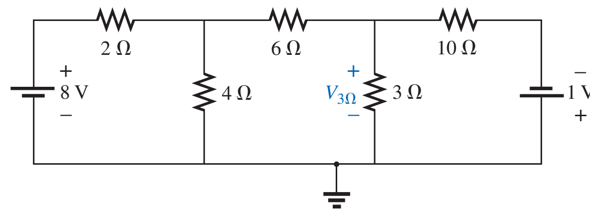


FIGURA 8.55
Ejemplo 8.24.

Solución: Al convertir las fuentes y seleccionar los nodos (Figura 8.56) se tiene:

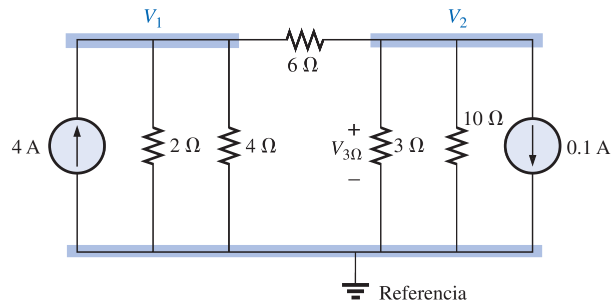


FIGURA 8.56
Definición de los nodos para la red de la figura 8.55.

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{2\,\Omega}+\frac{1}{4\,\Omega}+\frac{1}{6\,\Omega}\right)V_1-\left(\frac{1}{6\,\Omega}\right)V_2&=+4\text{ A}\\ \left(\frac{1}{10\,\Omega}+\frac{1}{3\,\Omega}+\frac{1}{6\,\Omega}\right)V_2-\left(\frac{1}{6\,\Omega}\right)V_1&=-0.1\text{ A}\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{11}{12}V_1-\frac{1}{6}V_2=4$$
$$-\frac{1}{6}V_1+\frac{3}{5}V_2=-0.1$$

lo cual da por resultado:

$$\begin{aligned}11V_1-\ \ 2V_2&=+48\\ -5V_1+18V_2&=-3\end{aligned}$$

y

$$V_2=V_{3\Omega}=\frac{\begin{vmatrix}11 & 48\\ -5 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}11 & -2\\ -5 & 18\end{vmatrix}}=\frac{-33+240}{198-10}=\frac{207}{188}=\mathbf{1.101\ V}$$

Como se demostró para el análisis de mallas, el análisis de nodos puede ser también una técnica muy útil para resolver redes que cuenten con una sola fuente.

EJEMPLO 8.25 Utilizando análisis de nodos, determine el potencial en el resistor de 4 Ω de la figura 8.57.

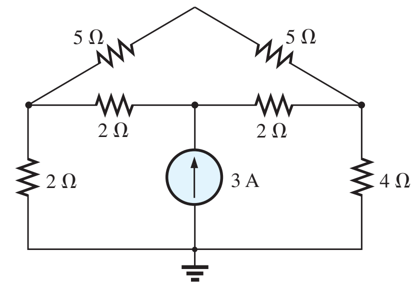


FIGURA 8.57
Ejemplo 8.25.

Solución 1: La referencia y los cuatro niveles de voltaje con subíndice fueron seleccionados como se muestra en la figura 8.58. Un momento de análisis revelará que para cualquier diferencia de potencial entre V_1 y V_3, la corriente y la caída de potencial en cada resistor de 5 Ω serán iguales. Por tanto, V_4 será simplemente la mitad del voltaje entre V_1 y V_3 y será conocido si V_1 y V_3 están disponibles. Por tanto, no se incluirá en un voltaje nodal y volverá a trazarse la red como se muestra en la figura 8.59. Sin embargo, debe entenderse que V_4 puede incluirse si se desea, aunque se obtendrán cuatro voltajes nodales en lugar de los tres que se obtendrán en la solución de este problema.

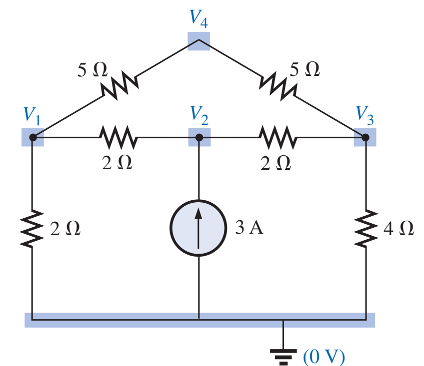


FIGURA 8.58
Definición de los nodos para la red de la figura 8.57.

$$V_1: \quad \left(\frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega}\right)V_1 - \left(\frac{1}{2\,\Omega}\right)V_2 - \left(\frac{1}{10\,\Omega}\right)V_3 = 0$$

$$V_2: \quad \left(\frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{2\,\Omega}\right)V_2 - \left(\frac{1}{2\,\Omega}\right)V_1 - \left(\frac{1}{2\,\Omega}\right)V_3 = 3\text{ A}$$

$$V_3: \quad \left(\frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{4\,\Omega}\right)V_3 - \left(\frac{1}{2\,\Omega}\right)V_2 - \left(\frac{1}{10\,\Omega}\right)V_1 = 0$$

lo cual se reescribe como:

$$\begin{aligned} 1.1V_1 - 0.5V_2 - 0.1V_3 &= 0 \\ V_2 - 0.5V_1 - 0.5V_3 &= 3 \\ 0.85V_3 - 0.5V_2 - 0.1V_1 &= 0 \end{aligned}$$

Para los determinantes,

$$\begin{aligned} 1.1V_1 - 0.5V_2 - 0.1V_3 &= 0 \\ -0.5V_1 + 1V_2 - 0.5V_3 &= 3 \\ -0.1V_1 - 0.5V_2 + 0.85V_3 &= 0 \end{aligned}$$

(diagonales marcadas: c, b, a; b; a)

Antes de continuar, observe el lector la simetría con respecto a la diagonal mayor en la ecuación anterior. Recuerde un resultado similar en el análisis de mallas. Los ejemplos 8.23 y 8.24 también presentan esta propiedad en las ecuaciones resultantes. Esto debe tenerse presente como verificación para futuras aplicaciones del análisis de nodos.

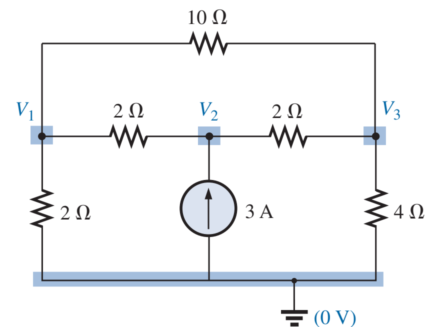
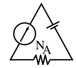


FIGURA 8.59
Reducción del número de nodos para la red de la figura 8.57 mediante la combinación de los dos resistores de 5 Ω.

$$V_3 = V_{4\Omega} = \frac{\begin{vmatrix} 1.1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & +1 & 3 \\ -0.1 & -0.5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.1 & -0.5 & -0.1 \\ -0.5 & +1 & -0.5 \\ -0.1 & -0.5 & +0.85 \end{vmatrix}} = \mathbf{4.645\ V}$$

Solución con Mathcad: A estas alturas la secuencia de pasos necesarios para resolver una serie de ecuaciones utilizando Mathcad deberá ser familiar y menos intimidante que en la primera ocasión. Para este ejemplo, se capturaron todos los parámetros existentes en las tres ecuaciones simultáneas, evitando la necesidad de definir cada parámetro de la red. Simplemente debe proporcionarse una estimación **Guess** a los tres voltajes nodales, aplicando la palabra



Given, e ingresar las tres ecuaciones de forma adecuada como se muestra en la figura 8.60. Toma cierta práctica asegurar que el corchete se ubique en el lugar adecuado antes de realizar la captura, pero esto simplemente es parte de las reglas establecidas para mantener el control de las operaciones que se realizarán. Por último, se solicita el voltaje nodal deseado utilizando el formato correcto. Los resultados numéricos se mostrarán, confirmando nuevamente nuestras soluciones teóricas.

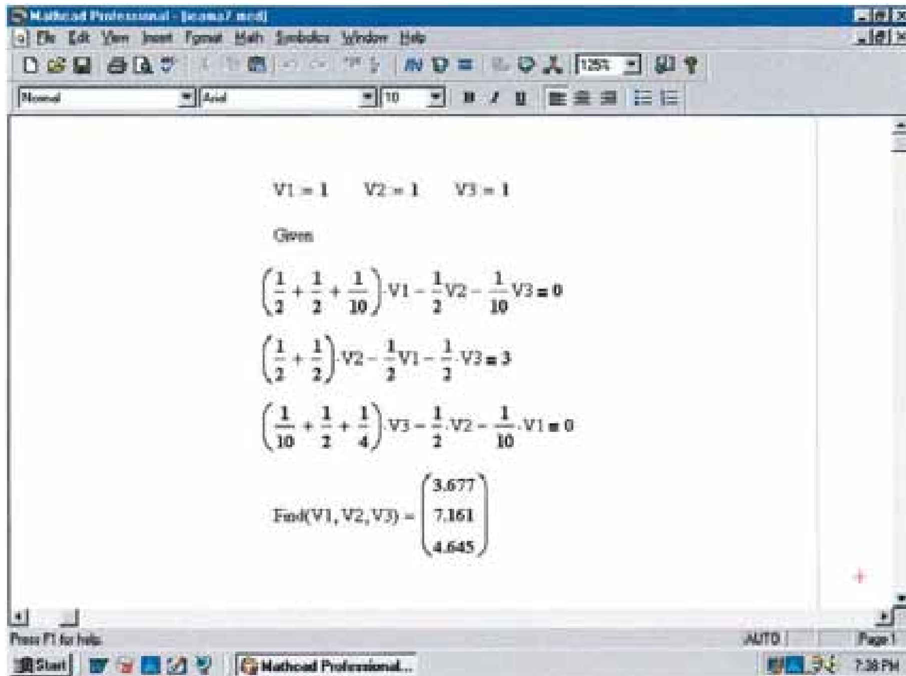


FIGURA 8.60
Utilización de Mathcad para verificar los cálculos matemáticos del ejemplo 8.25.

El siguiente ejemplo sólo cuenta con una fuente aplicada a la red escalera.

EJEMPLO 8.26 Escriba las ecuaciones nodales y encuentre el voltaje en el resistor de 2 Ω para la red de la figura 8.61.

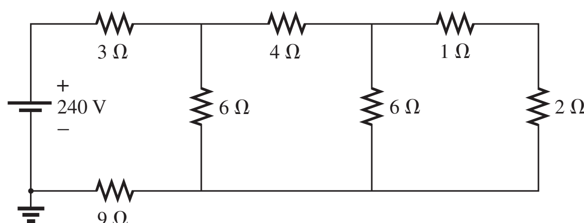


FIGURA 8.61
Ejemplo 8.26.



Solución: Los voltajes nodales se seleccionaron como se muestra en la figura 8.62.

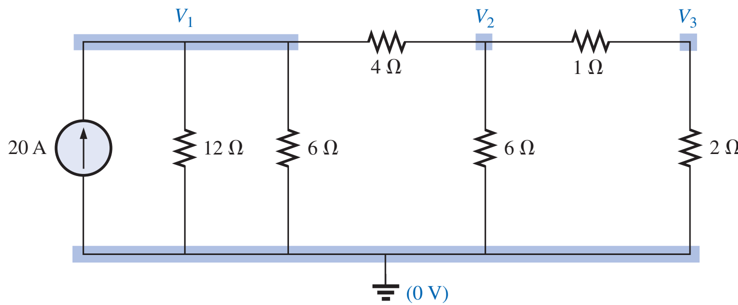


FIGURA 8.62
Conversión de la fuente de voltaje a una fuente de corriente y definición de los nodos para la red de la figura 8.61.

$$V_1: \quad \left(\frac{1}{12\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{4\,\Omega}\right)V_1 - \left(\frac{1}{4\,\Omega}\right)V_2 + \quad 0 \quad = 20\text{ V}$$

$$V_2: \quad \left(\frac{1}{4\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{1\,\Omega}\right)V_2 - \left(\frac{1}{4\,\Omega}\right)V_1 - \left(\frac{1}{1\,\Omega}\right)V_3 = 0$$

$$V_3: \quad \left(\frac{1}{1\,\Omega} + \frac{1}{2\,\Omega}\right)V_3 - \left(\frac{1}{1\,\Omega}\right)V_2 + \quad 0 \quad = 0$$

y

$$0.5V_1 - 0.25V_2 + 0 \quad = 20$$

$$-0.25V_1 + \frac{17}{12}V_2 \quad - 1V_3 \quad = 0$$

$$0 \; - 1V_2 \quad + 1.5V_3 = 0$$

Observe la simetría presente sobre el eje principal. La aplicación de los determinantes muestra que:

$$V_3 = V_{2\Omega} = \mathbf{10.667\ V}$$

8.11 REDES PUENTE

Esta sección presenta las **redes puente**, una configuración que tiene múltiples aplicaciones. En los capítulos siguientes, las redes puente serán utilizadas tanto en medidores de ca como de cd. En los cursos de electrónica se les encontrará en los primeros análisis de los circuitos rectificadores utilizados en la conversión de una señal con variación a una de naturaleza estable (como la de cd). Diversas áreas de aplicación requieren también algún conocimiento de las redes de ca; esas áreas se analizarán después.

La red puente puede presentarse en cualquiera de las tres formas que se indican en la figura 8.63. La red de la figura 8.63(c) también se denomina *red en celosía simétrica* si $R_2 = R_3$ y $R_1 = R_4$. La figura 8.63(c) es un excelente ejemplo de cómo una red planar puede parecer no planar. Con propósitos de investigación, se analizará la red de la figura 8.64 utilizando el análisis de mallas y el de nodos.



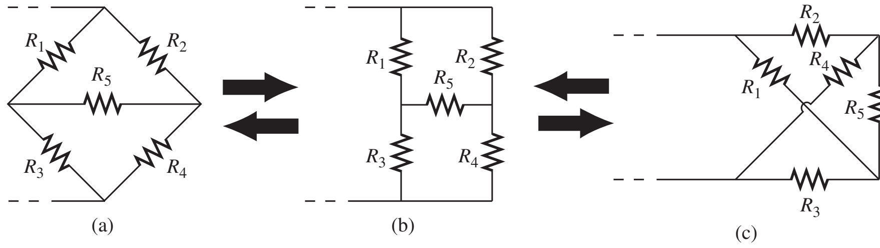


FIGURA 8.63
Distintos formatos de una red puente.

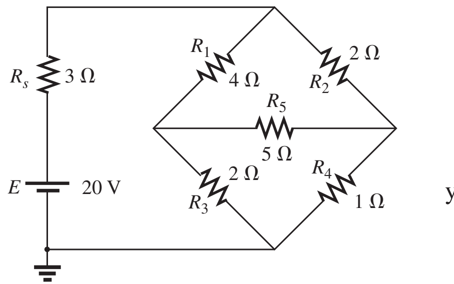


FIGURA 8.64
Configuración de puente estándar.

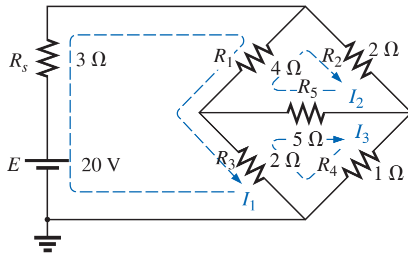


FIGURA 8.65
Asignación de las corrientes de malla a la red de la figura 8.64.

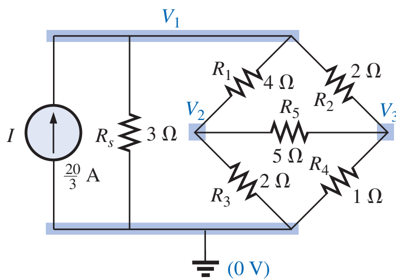


FIGURA 8.66
Definición de los voltajes nodales para la red de la figura 8.64.

El análisis de mallas (Figura 8.65) genera:

$$(3\ \Omega + 4\ \Omega + 2\ \Omega)I_1 - (4\ \Omega)I_2 - (2\ \Omega)I_3 = 20\text{ V}$$
$$(4\ \Omega + 5\ \Omega + 2\ \Omega)I_2 - (4\ \Omega)I_1 - (5\ \Omega)I_3 = 0$$
$$(2\ \Omega + 5\ \Omega + 1\ \Omega)I_3 - (2\ \Omega)I_1 - (5\ \Omega)I_2 = 0$$

y

$$9I_1 - 4I_2 - 2I_3 = 20$$
$$-4I_1 + 11I_2 - 5I_3 = 0$$
$$-2I_1 - 5I_2 + 8I_3 = 0$$

con el resultado de que:

$$I_1 = \mathbf{4\ A}$$
$$I_2 = \mathbf{2.667\ A}$$
$$I_3 = \mathbf{2.667\ A}$$

La corriente neta a través del resistor de 5 Ω será:

$$I_{5\Omega} = I_2 - I_3 = \mathbf{2.667\ A - 2.667\ A = 0\ A}$$

El análisis de nodos (Figura 8.66) genera:

$$\left(\frac{1}{3\ \Omega} + \frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega}\right)V_1 - \left(\frac{1}{4\ \Omega}\right)V_2 - \left(\frac{1}{2\ \Omega}\right)V_3 = \frac{20}{3}\text{ A}$$
$$\left(\frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{5\ \Omega}\right)V_2 - \left(\frac{1}{4\ \Omega}\right)V_1 - \left(\frac{1}{5\ \Omega}\right)V_3 = 0$$
$$\left(\frac{1}{5\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{1\ \Omega}\right)V_3 - \left(\frac{1}{2\ \Omega}\right)V_1 - \left(\frac{1}{5\ \Omega}\right)V_2 = 0$$

y

$$\left(\frac{1}{3\ \Omega} + \frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega}\right)V_1 - \left(\frac{1}{4\ \Omega}\right)V_2 - \left(\frac{1}{2\ \Omega}\right)V_3 = \frac{20}{3}\text{ A}$$
$$-\left(\frac{1}{4\ \Omega}\right)V_1 + \left(\frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{5\ \Omega}\right)V_2 - \left(\frac{1}{5\ \Omega}\right)V_3 = 0$$
$$-\left(\frac{1}{2\ \Omega}\right)V_1 - \left(\frac{1}{5\ \Omega}\right)V_2 + \left(\frac{1}{5\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{1\ \Omega}\right)V_3 = 0$$

Observe la simetría de la solución.

Con la calculadora TI-86, la parte superior del determinante se calcula mediante la siguiente operación (tómese nota de los cálculos dentro de los paréntesis):

det[[20/3,−1/4,−1/2][0,(1/4+1/2+1/5),−1/5][0,−1/5,(1/5+1/2+1/1)]] (ENTER)	10.5

CÁLCULO 8.4



siendo la parte inferior del determinante calculada mediante:

det[[(1/3+1/4+1/2),−1/4,−1/2][−1/4,(1/4+1/2+1/5),−1/5][−1/2,−1/5,(1/5+1/2+1/1)]] (ENTER)	1.312

CÁLCULO 8.5

Por último,

10.5/1.312 (ENTER)	8

CÁLCULO 8.6

y $\quad V_1 = \mathbf{8\ V}$

De manera similar, $\quad V_2 = \mathbf{2.667\ V} \quad$ y $\quad V_3 = \mathbf{2.667\ V}$

y el voltaje en el resistor de 5 Ω es:

$$V_{5\Omega} = V_2 - V_3 = \mathbf{2.667\ V - 2.667\ V = 0\ V}$$

Dado que $V_{5\Omega}$ = 0 V, es posible insertar un corto en el lugar del brazo del puente sin afectar el comportamiento de la red. (Ciertamente, $V = IR = I \cdot (0) = 0$ V.) En la figura 8.67 se reemplazó con un corto circuito al resistor R_5, y se determinará el voltaje en R_4. La red se vuelve a trazar en la figura 8.68, y

$$V_{1\Omega} = \frac{(2\ \Omega \parallel 1\ \Omega)20\ \text{V}}{(2\ \Omega \parallel 1\ \Omega) + (4\ \Omega \parallel 2\ \Omega) + 3\ \Omega} \quad \text{(regla del divisor de voltaje)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(20\ \text{V})}{\quad} = \frac{\frac{2}{3}(20\ \text{V})}{\quad}$$

$$= \frac{2(20\ \text{V})}{2 + 4 + 9} = \frac{40\ \text{V}}{15} = \mathbf{2.667\ V}$$

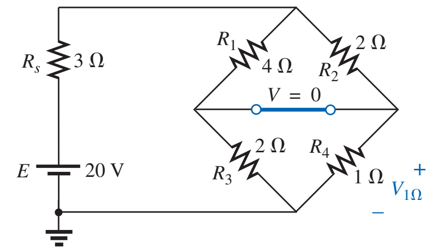


FIGURA 8.67
Sustitución del equivalente de corto circuito para el brazo de balance del puente balanceado.

como se obtuvo anteriormente.

Mediante el análisis de mallas se encontró que $I_{5\Omega}$ = 0 A, lo cual tiene su equivalente de circuito abierto como se muestra en la figura 8.69(a). (Ciertamente $I = V/R = 0/(\infty\ \Omega) = 0$ A.) El voltaje en el resistor R_4 será nuevamente determinado y comparado con el resultado anterior.

La red se vuelve a trazar después de combinar los elementos en serie, como se muestra en la figura 8.69(b), y

$$V_{3\Omega} = \frac{(6\ \Omega \parallel 3\ \Omega)(20\ \text{V})}{6\ \Omega \parallel 3\ \Omega + 3\ \Omega} = \frac{2\ \Omega(20\ \text{V})}{2\ \Omega + 3\ \Omega} = 8\ \text{V}$$

y $\quad V_{1\Omega} = \frac{1\ \Omega(8\ \text{V})}{1\ \Omega + 2\ \Omega} = \frac{8\ \text{V}}{3} = \mathbf{2.667\ V}$

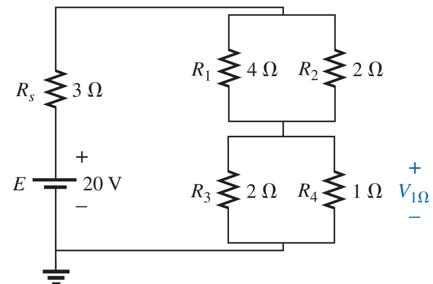


FIGURA 8.68
Red de la figura 8.67 trazada de nuevo.

como resultó líneas arriba.

La condición $V_{5\Omega}$ = 0 V o $I_{5\Omega}$ = 0 A se presenta sólo para una relación particular entre los resistores de la red. Ahora se derivará esta relación utilizando la red de la figura 8.70, en la que se indica que I = 0 A y V = 0 V. Observe que el resistor R_s de la red de la figura 8.69 no aparece en el siguiente análisis.

Se dice que la red puente se encuentra *balanceada* cuando se presenta la condición I = 0 A o V = 0 V.

Si V = 0 V (corto circuito entre *a* y *b*), entonces:

$$V_1 = V_2$$



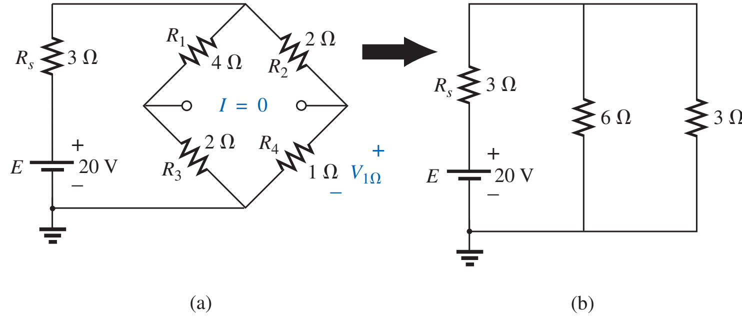


FIGURA 8.69
Sustitución del equivalente de circuito abierto para el brazo de balance de un puente balanceado.

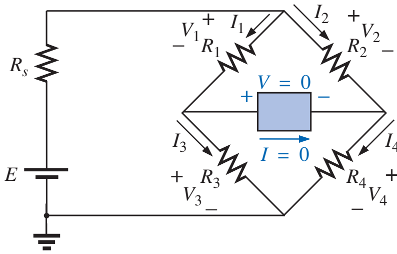


FIGURA 8.70
Establecimiento del criterio de balance para una red puente.

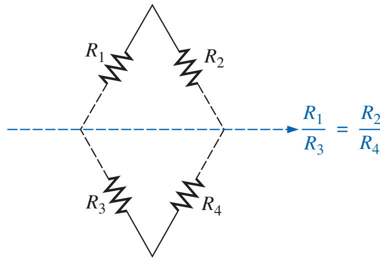


FIGURA 8.71
Método visual para recordar la condición de balance.

e

$$I_1R_1 = I_2R_2$$

o bien:

$$I_1 = \frac{I_2R_2}{R_1}$$

Además, cuando $V = 0$ V,

$$V_3 = V_4$$

e

$$I_3R_3 = I_4R_4$$

Si se establece $I = 0$ A, entonces $I_3 = I_1$ e $I_4 = I_2$, ocasionando que la ecuación anterior se convierta en:

$$I_1R_3 = I_2R_4$$

Al sustituir I_1 en la ecuación anterior resulta:

$$\left(\frac{I_2R_2}{R_1}\right)R_3 = I_2R_4$$

o, reagrupando, se tiene:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \qquad \textbf{(8.4)}$$

Esta conclusión establece que si la razón de R_1 a R_3 es igual a la de R_2 a R_4, el puente estará balanceado, e $I = 0$ A o $V = 0$ V. En la figura 8.71 se presenta un método para memorizar esto.

Para el ejemplo anterior, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 1\ \Omega$, y

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \rightarrow \frac{4\ \Omega}{2\ \Omega} = \frac{2\ \Omega}{1\ \Omega} = 2$$

El énfasis en esta sección se ha puesto en la situación balanceada. Debe comprenderse que si la proporción no se satisface, existirá una caída de potencial en el brazo de balance y una corriente a través de él. Los métodos que se acaban de presentar (el análisis de mallas y el análisis de nodos) generarán todos los potenciales o corrientes deseados, de la misma forma que lo hicieron para la situación balanceada.

8.12 CONVERSIONES Y-Δ (T-π) Y Δ-Y (π-T)

Con frecuencia se encuentran configuraciones de circuito en las que los resistores no parecen estar en serie o en paralelo. Bajo estas condiciones, podría ser necesario convertir el circuito de una forma a otra para resolver algunas canti-

dades desconocidas si no se aplica el análisis de nodos o de mallas. Dos configuraciones de circuito que, por lo general, presentan estas dificultades son las **configuraciones "ye" (Y) y delta (Δ)**, ilustradas en la figura 8.72(a). También se denominan como configuración en "**te**" (**T**) y **pi** (**π**), respectivamente, como se indica en la figura 8.72(b). Observe que la configuración pi es en realidad una delta invertida.

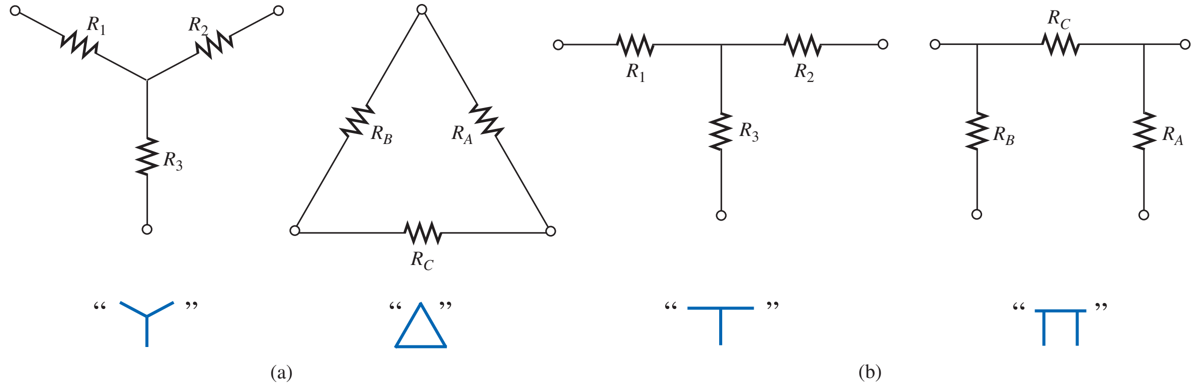


FIGURA 8.72
Las configuraciones Y (T) y Δ (π).

El propósito de esta sección es desarrollar las ecuaciones para convertir de la configuración Δ a Y, o viceversa. Este tipo de conversión llevará normalmente a una red que puede resolverse utilizando técnicas como las descritas en el capítulo 7. En otras palabras, en la figura 8.73, con las terminales *a*, *b* y *c* mantenidas, si se deseara la configuración en Y *en lugar de* la configuración de delta invertida (Δ), sólo sería necesario una aplicación directa de las ecuaciones que se obtendrán. La frase *en lugar de* se enfatiza para asegurar la comprensión de que sólo una de estas configuraciones se presentará a la vez entre las terminales indicadas.

El propósito aquí es (en referencia a la figura 8.73) encontrar alguna expresión para R_1, R_2 y R_3 en términos de R_A, R_B y R_C, y viceversa, por la cual sea seguro que la resistencia entre dos terminales cualquiera de la configuración en Y será la misma que la de la configuración en Δ que se inserte en lugar de la configuración en Y (y viceversa). Si los dos circuitos serán equivalentes, la resistencia total entre dos terminales cualesquiera deberá ser la misma. Considérense las terminales *a-c* en las configuraciones Δ-Y de la figura 8.74.

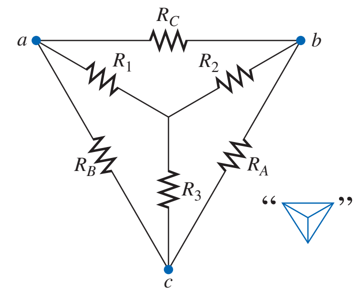


FIGURA 8.73
Introducción del concepto de conversiones Δ-Y o Y-Δ.

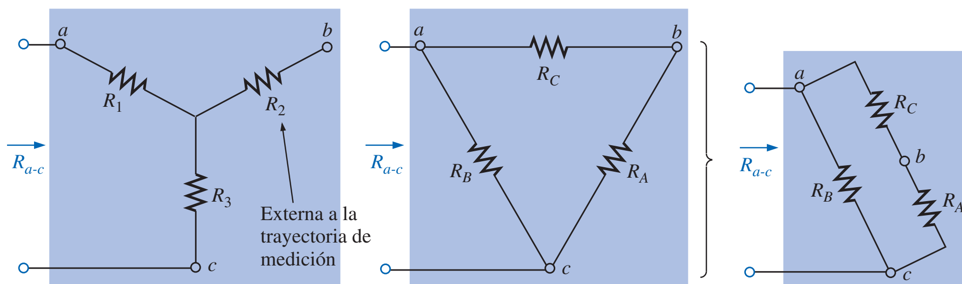


FIGURA 8.74
Descubrimiento de la resistencia $R_{a\text{-}c}$ para las configuraciones Y y Δ.



Primero se supone que se desea convertir la configuración Δ (R_A, R_B, R_C) a la Y (R_1, R_2, R_3). Esto requiere tener una relación para R_1, R_2 y R_3 en términos de R_A, R_B y R_C. Si la resistencia deberá ser la misma entre las terminales *a-c* para ambas configuraciones (Δ e Y), deberá cumplirse lo siguiente:

$$R_{a\text{-}c}\,(\text{Y}) = R_{a\text{-}c}\,(\Delta)$$

de manera que

$$R_{a\text{-}c} = R_1 + R_3 = \frac{R_B(R_A + R_C)}{R_B + (R_A + R_C)} \qquad \textbf{(8.5a)}$$

Utilizando el mismo método para *a-b* y *b-c*, se obtienen las siguientes relaciones:

$$R_{a\text{-}b} = R_1 + R_2 = \frac{R_C(R_A + R_B)}{R_C + (R_A + R_B)} \qquad \textbf{(8.5b)}$$

y

$$R_{b\text{-}c} = R_2 + R_3 = \frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + (R_B + R_C)} \qquad \textbf{(8.5c)}$$

Restando la ecuación (8.5a) de la ecuación (8.5b) resulta:

$$(R_1 + R_2) - (R_1 + R_3) = \left(\frac{R_C R_B + R_C R_A}{R_A + R_B + R_C}\right) - \left(\frac{R_B R_A + R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}\right)$$

de manera que:

$$R_2 - R_3 = \frac{R_A R_C - R_B R_A}{R_A + R_B + R_C} \qquad \textbf{(8.5d)}$$

Restando la ecuación (8.5d) de la ecuación (8.5c) resulta:

$$(R_2 + R_3) - (R_2 - R_3) = \left(\frac{R_A R_B + R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}\right) - \left(\frac{R_A R_C - R_B R_A}{R_A + R_B + R_C}\right)$$

de manera que:

$$2R_3 = \frac{2R_B R_A}{R_A + R_B + R_C}$$

dando por resultado la siguiente expresión para R_3 en términos de R_A, R_B y R_C:

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} \qquad \textbf{(8.6a)}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para R_1 y R_2, se tiene:

$$R_1 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \qquad \textbf{(8.6b)}$$

y

$$R_2 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} \qquad \textbf{(8.6c)}$$

Observe que cada resistor de la configuración Y es igual al producto de los resistores en las dos ramas más cercanas de la configuración Δ dividido entre la suma de los resistores en la Δ.



Para obtener las relaciones necesarias y convertir de una Y a una Δ, primero se divide la ecuación (8.6a) entre la ecuación (8.6b):

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{(R_A R_B)/(R_A + R_B + R_C)}{(R_B R_C)/(R_A + R_B + R_C)} = \frac{R_A}{R_C}$$

o bien:
$$R_A = \frac{R_C R_3}{R_1}$$

Luego se divide la ecuación (8.6a) entre la ecuación (8.6c):

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{(R_A R_B)/(R_A + R_B + R_C)}{(R_A R_C)/(R_A + R_B + R_C)} = \frac{R_B}{R_C}$$

o bien:
$$R_B = \frac{R_3 R_C}{R_2}$$

Al sustituir R_A y R_B en la ecuación (8.6c) resulta:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{(R_C R_3/R_1)R_C}{(R_3 R_C/R_2) + (R_C R_3/R_1) + R_C} \\ &= \frac{(R_3/R_1)R_C}{(R_3/R_2) + (R_3/R_1) + 1} \end{aligned}$$

Al ajustarlos sobre un denominador común se obtiene:

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{(R_3 R_C/R_1)}{(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)/(R_1R_2)} \\ &= \frac{R_2 R_3 R_C}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \end{aligned}$$

y
$$R_C = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3} \qquad \textbf{(8.7a)}$$

Se sigue el mismo procedimiento para R_B y R_A:

$$R_A = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1} \qquad \textbf{(8.7b)}$$

y
$$R_B = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2} \qquad \textbf{(8.7c)}$$

Observe que el valor de cada resistor de la Δ es igual a la suma de las posibles combinaciones de productos de las resistencias de la Y dividida entre la resistencia de la Y más alejada del resistor a ser determinado.

Ahora se considerará lo que ocurriría si todos los valores de una Δ o una Y fueran iguales. Si $R_A = R_B = R_C$, la ecuación (8.6a) se convertiría (utilizando únicamente R_A) en lo siguiente:

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} = \frac{R_A R_A}{R_A + R_A + R_A} = \frac{R_A^2}{3R_A} = \frac{R_A}{3}$$

y, siguiendo el mismo procedimiento,

$$R_1 = \frac{R_A}{3} \qquad R_2 = \frac{R_A}{3}$$



Por tanto, en general,

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \quad \textbf{(8.8a)}$$

o bien:

$$R_\Delta = 3R_Y \quad \textbf{(8.8b)}$$

lo cual indica que *para una* Y *con tres resistores iguales, el valor de cada resistor de la* Δ *es igual a tres veces el valor de cualquier resistor de la* Y. Si sólo dos elementos de una Y o una Δ son iguales, la correspondiente Δ o Y tendrá también dos elementos iguales. La conversión de las ecuaciones se deja como un ejercicio para el lector.

La Y y la Δ con frecuencia aparecen como se muestra en la figura 8.75. Por eso se denominan como redes en "**te**" (**T**) y **pi** (**π**), respectivamente. Las ecuaciones utilizadas para convertir de una forma a otra son exactamente las mismas que las desarrolladas para la transformación de Y y Δ.

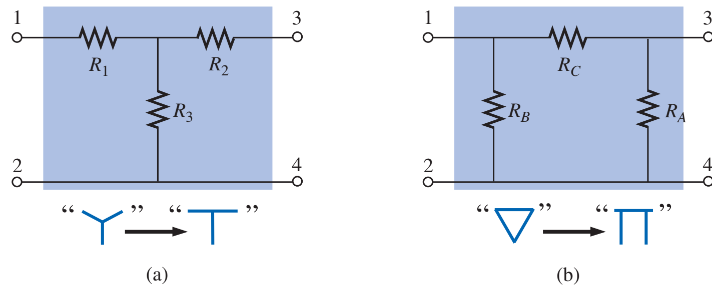


FIGURA 8.75
La relación entre las configuraciones Y y T, y las configuraciones Δ y π.

EJEMPLO 8.27 Convierta la Δ de la figura 8.76 a una Y.

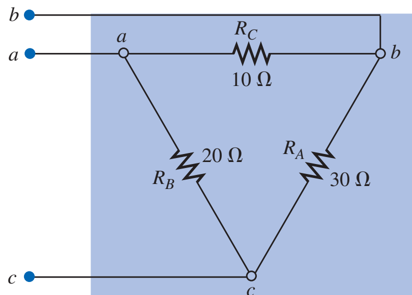


FIGURA 8.76
Ejemplo 8.27.

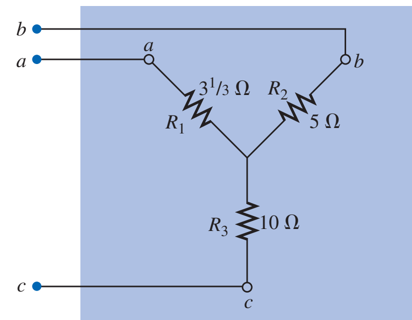


FIGURA 8.77
El equivalente Y para la Δ de la figura 8.76.



Solución:

$$R_1 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(20\ \Omega)(10\ \Omega)}{30\ \Omega + 20\ \Omega + 10\ \Omega} = \frac{200\ \Omega}{60} = \mathbf{3\tfrac{1}{3}\ \Omega}$$

$$R_2 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(30\ \Omega)(10\ \Omega)}{60\ \Omega} = \frac{300\ \Omega}{60} = \mathbf{5\ \Omega}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(20\ \Omega)(30\ \Omega)}{60\ \Omega} = \frac{600\ \Omega}{60} = \mathbf{10\ \Omega}$$

La red equivalente se muestra en la figura 8.77 (página 298).

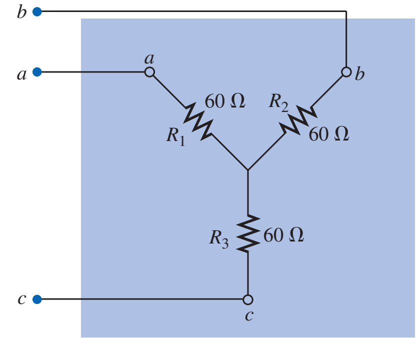


FIGURA 8.78
Ejemplo 8.28.

EJEMPLO 8.28 Convierta la Y de la figura 8.78 a una Δ.

Solución:

$$R_A = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}$$

$$= \frac{(60\ \Omega)(60\ \Omega) + (60\ \Omega)(60\ \Omega) + (60\ \Omega)(60\ \Omega)}{60\ \Omega}$$

$$= \frac{3600\ \Omega + 3600\ \Omega + 3600\ \Omega}{60} = \frac{10{,}800\ \Omega}{60}$$

$$R_A = \mathbf{180\ \Omega}$$

Sin embargo, los tres resistores de la Y son iguales, lo que permite el uso de la ecuación (8.8) y resulta en:

$$R_\Delta = 3R_Y = 3(60\ \Omega) = 180\ \Omega$$

y

$$R_B = R_C = \mathbf{180\ \Omega}$$

La red equivalente se muestra en la figura 8.79.

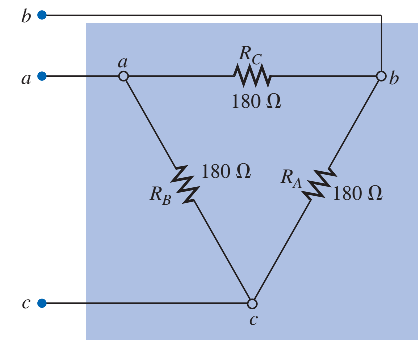


FIGURA 8.79
El equivalente Δ para la Y de la figura 8.78.

EJEMPLO 8.29 Encuentre la resistencia total de la red de la figura 8.80, donde $R_A = 3\ \Omega$, $R_B = 3\ \Omega$ y $R_C = 6\ \Omega$.

Solución:

Dos resistores de la Δ eran iguales; por tanto, dos resistores de la Y serán iguales

$$R_1 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(3\ \Omega)(6\ \Omega)}{3\ \Omega + 3\ \Omega + 6\ \Omega} = \frac{18\ \Omega}{12} = \mathbf{1.5\ \Omega}$$

$$R_2 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(3\ \Omega)(6\ \Omega)}{12\ \Omega} = \frac{18\ \Omega}{12} = \mathbf{1.5\ \Omega}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C} = \frac{(3\ \Omega)(3\ \Omega)}{12\ \Omega} = \frac{9\ \Omega}{12} = \mathbf{0.75\ \Omega}$$

Al reemplazar la Δ por la Y, como se muestra en la figura 8.81, se tiene:

$$R_T = 0.75\ \Omega + \frac{(4\ \Omega + 1.5\ \Omega)(2\ \Omega + 1.5\ \Omega)}{(4\ \Omega + 1.5\ \Omega) + (2\ \Omega + 1.5\ \Omega)}$$

$$= 0.75\ \Omega + \frac{(5.5\ \Omega)(3.5\ \Omega)}{5.5\ \Omega + 3.5\ \Omega}$$

$$= 0.75\ \Omega + 2.139\ \Omega$$

$$R_T = \mathbf{2.889\ \Omega}$$

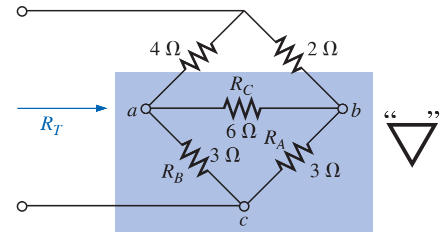


FIGURA 8.80
Ejemplo 8.29.

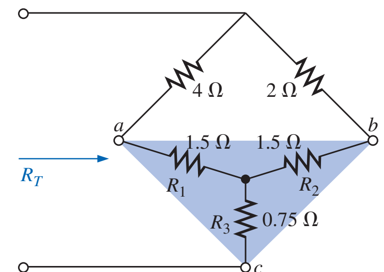


FIGURA 8.81
Sustitución del equivalente Y para la Δ inferior de la figura 8.80.



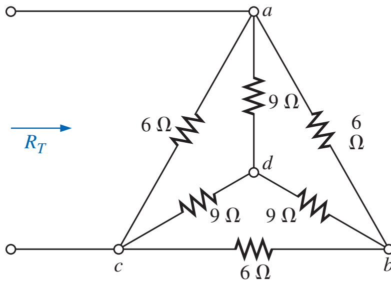


FIGURA 8.82
Ejemplo 8.30.

EJEMPLO 8.30 Encuentre la resistencia total para la red de la figura 8.82.

Soluciones: Dado que todos los resistores de la Δ y de la Y son iguales, se pueden utilizar las ecuaciones (8.8a) y (8.8b) para convertir de una forma a la otra.

a. *Conversión de la Δ a Y*. Observe: Cuando esto se realice, la d' resultante de la nueva Y será la misma que el punto d mostrado en la figura original, debido sólo a que ambos sistemas se encuentran "balanceados". Es decir, la resistencia en cada rama de cada sistema tiene el mismo valor:

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} = \frac{6\ \Omega}{3} = 2\ \Omega \qquad \text{(Figura 8.83)}$$

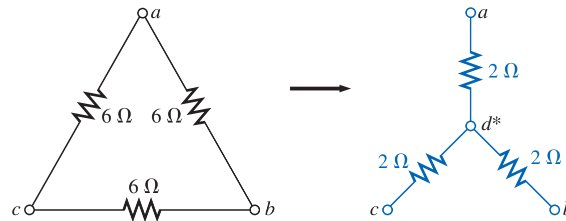


FIGURA 8.83
Conversión de la configuración Δ de la figura 8.82 a una configuración Y.

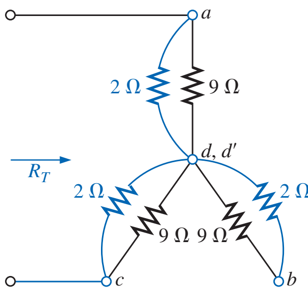


FIGURA 8.84
Sustitución de la configuración Δ convertida en Y en la red de la figura 8.82.

Entonces la red se presentará como la mostrada en la figura 8.84.

$$R_T = 2\left[\frac{(2\ \Omega)(9\ \Omega)}{2\ \Omega + 9\ \Omega}\right] = \mathbf{3.2727\ \Omega}$$

b. *Conversión de la Y a una Δ*:

$$R_\Delta = 3R_Y = (3)(9\ \Omega) = 27\ \Omega \qquad \text{(Figura 8.85)}$$

$$R'_T = \frac{(6\ \Omega)(27\ \Omega)}{6\ \Omega + 27\ \Omega} = \frac{162\ \Omega}{33} = 4.9091\ \Omega$$

$$R_T = \frac{R'_T\,(R'_T + R'_T)}{R'_T + (R'_T + R'_T)} = \frac{R'_T 2R'_T}{3R'_T} = \frac{2R'_T}{3}$$

$$= \frac{2(4.9091\ \Omega)}{3} = \mathbf{3.2727\ \Omega}$$

lo cual concuerda con la solución anterior.

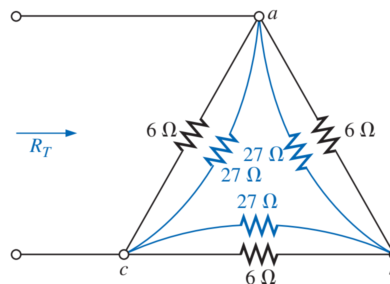


FIGURA 8.85
Sustitución de la configuración Y convertida en la red de la figura 8.82.



8.13 APLICACIONES

La sección de aplicaciones de este capítulo analizará la característica de corriente constante en el diseño de sistemas de seguridad, el circuito puente en un detector de humo común residencial, y los voltajes nodales de una punta de prueba lógica digital.

Sistemas de alarma de corriente constante

En la figura 8.86 se presentan los componentes básicos de un sistema de alarma que utiliza una fuente de corriente constante. Éste es un diseño mejorado a partir del que se presentó en el capítulo 5 en el sentido de que es menos sensible a cambios en la resistencia debido a la temperatura, humedad, cambios en la longitud de la línea a los sensores, etc. El reóstato de 1.5 kΩ (resistencia total entre los puntos *a* y *b*) se encuentra ajustado para asegurar una corriente de 5 mA a través del circuito de seguridad en serie. El reóstato ajustable es necesario para compensar las variaciones en la resistencia total del circuito introducidas por la resistencia del cable, de los sensores, del relevador sensor y del miliamperímetro. El miliamperímetro se incorpora para ajustar el reóstato y asegurar una corriente de 5 mA.

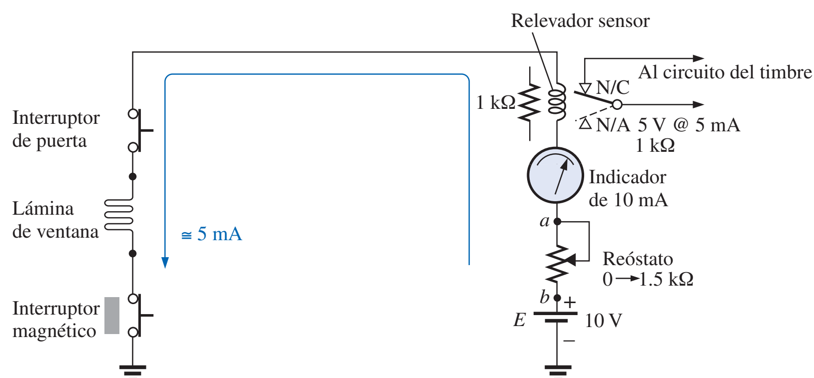


FIGURA 8.86
Sistema de alarma de corriente constante.

Si alguno de los sensores se abriera, la corriente a través de todo el circuito caería a cero, la bobina del relevador liberará el émbolo y se efectuará el contacto con la posición de N/C (Normalmente Cerrado) del relevador. Esta acción cerrará el circuito del timbre, y la alarma sonará. Para el futuro, debe tenerse presente que las posiciones del interruptor para un relevador siempre se muestran sin energía hacia la red, dando por resultado la posición N/C de la figura 8.86. Cuando se aplica energía, el interruptor tendrá la posición indicada por la línea punteada. Es decir, distintos factores como un cambio en la resistencia de cualquiera de los elementos debido al calor, humedad, etc., pueden ocasionar que el voltaje aplicado se redistribuya y se cree una situación sensible. Con 5 mA ajustados, la carga puede cambiar, pero la corriente siempre será de 5 mA y la posibilidad de variaciones se reduce. Tómese nota de que el relevador está clasificado como de 5 V a 5 mA, lo cual indica que en el estado de encendido el voltaje en el relevador será de 5 V y la corriente de 5 mA. Su resistencia interna será, por tanto, de 5 V/5 mA = 1 kΩ en este estado.

En la figura 8.87 se presenta un sistema de alarma más avanzado que utiliza corriente constante. En este caso, un sistema electrónico que utiliza un transistor, resistores de polarización y una batería de cd, establece una corriente de 4 mA a través de un circuito sensor en serie conectado al lado positivo de un



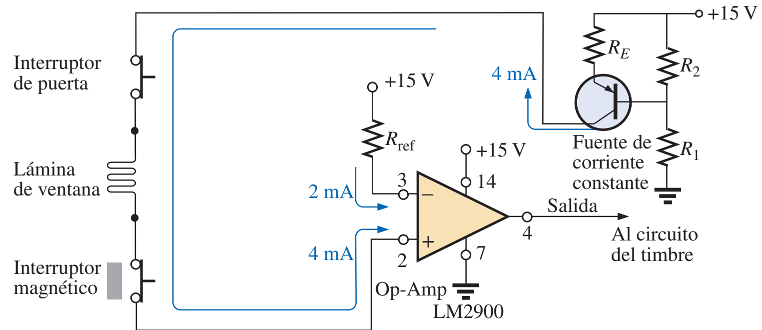
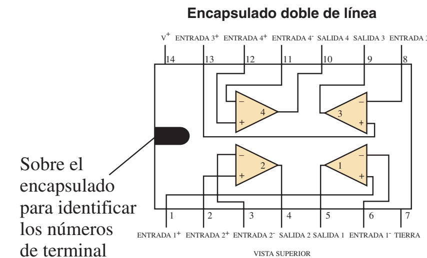
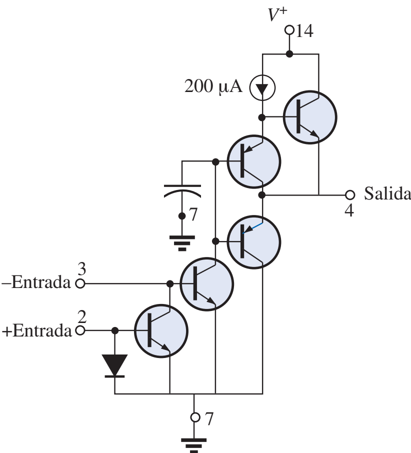


FIGURA 8.87

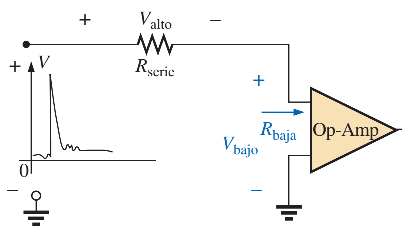
Sistema de alarma de corriente constante con componentes electrónicos.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 8.88

Amplificador operacional LM2900: (a) encapsulado doble en línea (DIP, Dual-inline package); (b) componentes; (c) impacto de una impedancia baja de entrada.

amplificador operacional (op-amp). A pesar de que los dispositivos transistor y op-amp puedan parecerle desconocidos al lector, serán analizados a fondo en sus cursos de electrónica —ahora no es necesario que conozca los detalles de su operación—. Por el momento es suficiente con decir que en esta aplicación el transistor no se utiliza como un amplificador sino como parte de un diseño para establecer una corriente constante a través del circuito. El op-amp es un componente muy útil en distintos sistemas electrónicos, y posee importantes características terminales establecidas por una variedad de componentes internos de su diseño. El amplificador operacional LM2900 de la figura 8.87 es uno de los cuatro amplificadores presentes en el encapsulado de circuito integrado doble en línea que aparece en la figura 8.88(a). Las terminales 2, 3, 4, 7 y 14 se utilizaron para el diseño de la figura 8.87. Observe en la figura 8.88(b) el número de elementos requeridos para establecer las características terminales deseadas —cuyos detalles analizará el lector en sus cursos de electrónica.

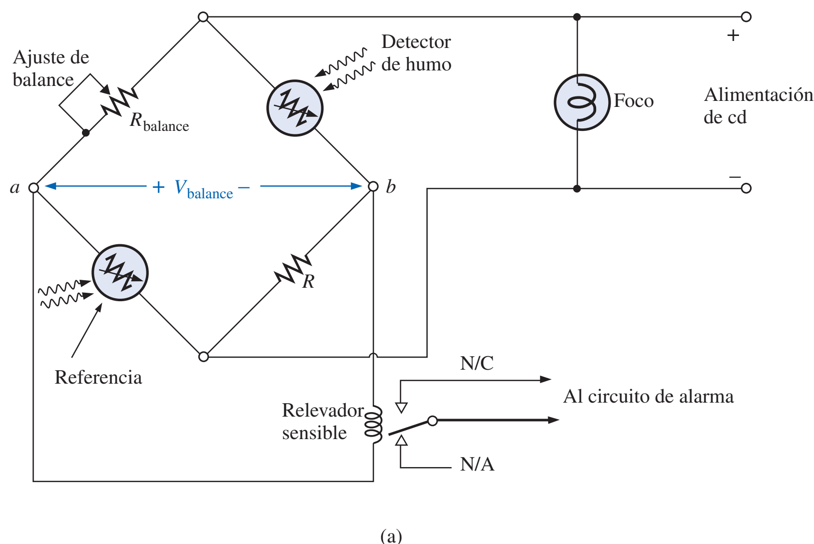
En la figura 8.87, la fuente de 15 V de cd, los resistores de polarización, así como el transistor de la esquina superior derecha del diagrama, establecen una corriente constante de 4 mA a través del circuito. Se denomina *fuente de corriente constante* debido a que la corriente permanecerá relativamente constante en 4 mA aunque existan variaciones moderadas en la resistencia total del circuito sensor en serie conectado al transistor. Al seguir los 4 mA a través del circuito, se advierte que ingresan por la terminal 2 (lado positivo de la entrada) del op-amp. Una segunda corriente de 2 mA, denominada *corriente de referencia*, es establecida por la fuente de 15 V y la resistencia R_{ref}, e ingresa por la terminal 3 (lado negativo de la entrada) del op-amp. La corriente de referencia de 2 mA es necesaria para establecer una corriente contra la que se compare la corriente de red de 4 mA. Mientras la corriente de 4 mA se encuentre presente, el amplificador operacional proporcionará un voltaje de salida "alto" que excede los 13.5 V, con un valor típico de 14.2 V (según la hoja de especificaciones del op-amp). Sin embargo, si la corriente de sensor cae desde 4 mA hasta un nivel por debajo del nivel de referencia de 2 mA, el op-amp responderá con un voltaje de salida "bajo" que, por lo general, será de 0.1 V. La salida del amplificador operacional indicará entonces al circuito de alarma la perturbación. Observe de lo anterior que no es necesario que la corriente de sensor caiga a 0 mA para que se dispare el circuito de alarma —basta sólo una variación inusual alrededor del nivel de referencia.

Una característica muy importante de este op-amp en particular es que su impedancia de entrada es relativamente baja. Esta característica es importante ya que no es deseable que el circuito de alarma reaccione ante cualquier pico de voltaje o turbulencia que ingrese a la línea debido a una acción externa de conmutación o a fuerzas ambientales como los relámpagos. Por ejemplo, en la figura 8.88(c), si en la entrada de la configuración en serie se presentara un vol-

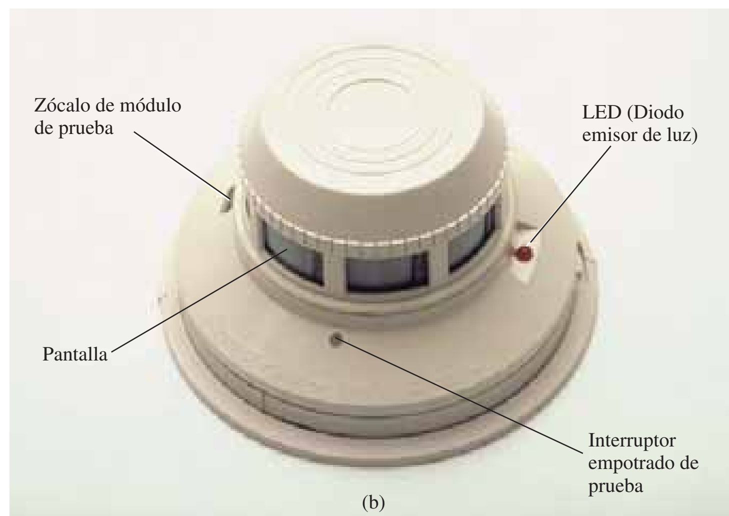
taje alto, la mayor parte será absorbido por la resistencia en serie del circuito sensor en lugar de que recorra las terminales de entrada del amplificador operacional —evitando de esta forma una salida falsa y una activación de la alarma.

Detector de humo de puente Wheatstone

El puente Wheatstone es una configuración popular de red utilizada donde se requiere la detección de pequeños cambios en una cantidad. En la figura 8.89(a), la configuración de puente de cd utiliza un dispositivo fotoeléctrico para detectar la presencia de humo y hacer sonar la alarma. En la figura 8.89(b) aparece una fotografía del detector fotoeléctrico real de humo, y la construcción interna de la unidad se muestra en la figura 8.89(c). Observe primero que se presentan rejillas de aire para permitir que el humo entre a la cámara que se encuentra por debajo del plástico transparente. El plástico transparente evitará que el humo entre a la cámara superior, pero permitirá que la luz del foco en la cámara superior rebote del reflector inferior al sensor de luz de semiconductor



(a)



(b)

FIGURA 8.89(a) y (b)
Detector de puente Wheatstone: (a) configuración de puente de cd; (b) apariencia externa.

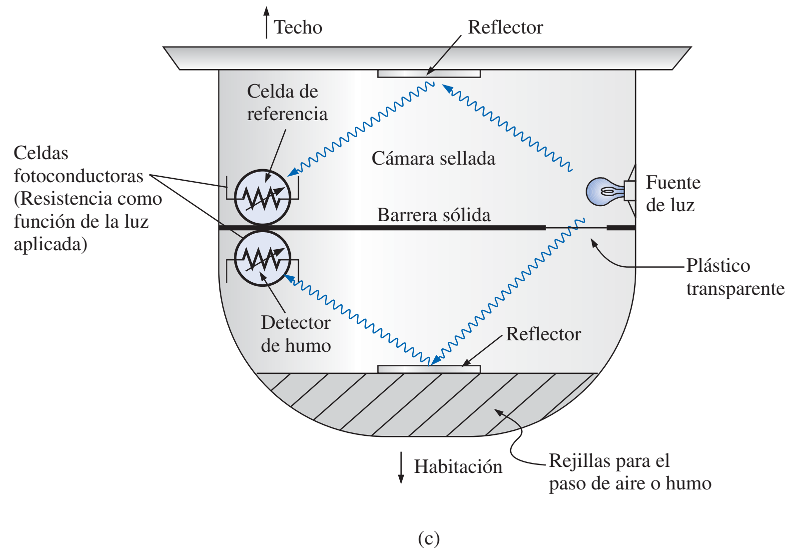


FIGURA 8.89(c)
Detector de humo de puente Wheatstone: (c) construcción interna.

(una fotocelda de cadmio) situado en el extremo izquierdo de la cámara. La separación del plástico transparente asegurará que la luz que llega al sensor de luz en la cámara superior no se vea afectada por el humo que entre, y establecerá un nivel de referencia contra el que se comparará la cámara con el humo entrante. Si no hay humo presente, la diferencia de respuesta entre las celdas sensoras será registrada como la situación normal. Por supuesto, si ambas celdas fueran exactamente idénticas y si el plástico transparente no trasluciera la luz, ambos sensores establecerían el mismo nivel de referencia, y su diferencia sería entonces igual a cero. Sin embargo, rara vez será este el caso, por lo que se reconoce un nivel de referencia como señal de que no hay humo presente. No obstante, una vez que el humo se presente, existirá una marcada diferencia en la reacción del sensor con respecto a la norma, y la alarma se disparará.

En la figura 8.89(a) se ve que los dos sensores están ubicados en brazos opuestos del puente. Cuando no haya humo presente, el reóstato de ajuste de balance se utilizará para asegurar que el voltaje V entre los puntos a y b sea de cero volts y la corriente resultante a través del primario del relevador sensible sea de cero ampere. Al observar el relevador, se advierte que la ausencia de un voltaje de a a b dejará inactiva a la bobina del relevador y al interruptor en la posición N/A (recuerde el lector que la posición de un interruptor de relevador siempre se traza en el estado no activado). Una situación fuera de balance ocasionará un voltaje en la bobina y una activación del relevador, con lo que el interruptor se moverá a la posición de N/C para cerrar el circuito de alarma y activarla. Los relevadores con dos contactos y un brazo móvil se denominan relevadores de *un polo y doble tiro* (SPDT, *single-pole-double-throw*). Se requiere la alimentación de cd para establecer la situación de balance, activar el foco en paralelo para saber que el sistema se encuentra encendido, y proporcionar el voltaje de a a b al desarrollarse la situación fuera de balance.

Podría cuestionarse el porqué no se utiliza sólo un sensor dado que su resistencia sería sensible a la presencia del humo. La respuesta reside en el hecho de que el detector de humo podría generar una lectura falsa si el voltaje de alimentación o la intensidad de la luz del foco variaran. Los detectores de humo del tipo recién descrito deberán poder usarse en estaciones de servicio, cocinas, consultorios de dentistas, etc., donde la gama de vapores de gases presentes podrían activar un detector de humo de tipo ionizante.



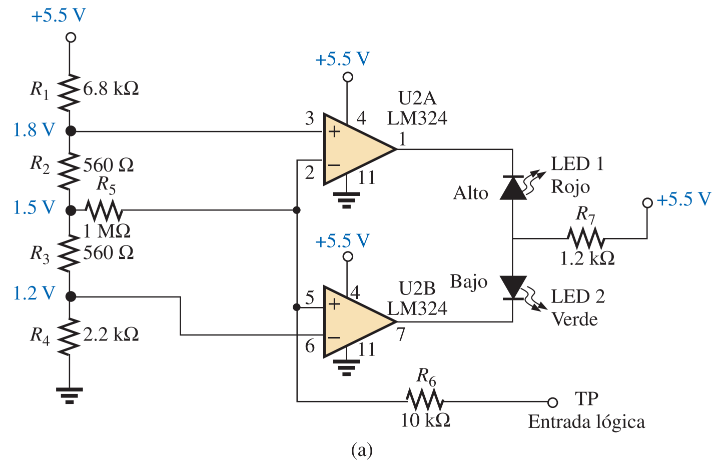
Diagrama con voltajes nodales

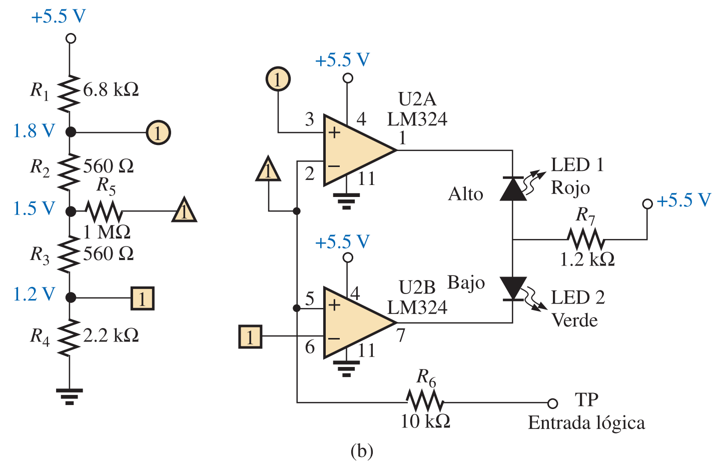
Cuando un especialista se topa con un sistema inhabilitado o que no funciona adecuadamente, una de sus primeras opciones para restablecerlo es verificar los voltajes del sistema especificados en el diagrama. Estos niveles de voltaje especificados son en realidad los voltajes nodales determinados en este capítulo. El *voltaje nodal* es simplemente un término especial utilizado para denominar un voltaje medido desde un nodo hasta tierra. El especialista conectará la punta negativa o de bajo potencial a la tierra de la red (generalmente el chasis) y luego colocará la punta positiva o de alto potencial sobre los puntos específicos de la red para verificar los voltajes nodales. Si éstos coinciden, será probable que esa sección del sistema se encuentre operando adecuadamente. Si uno o más voltajes no coinciden con los valores dados, será posible identificar el área del problema. Esté consciente de que una lectura de –15.87 V es significativamente diferente de una lectura esperada de +16 V si las puntas se encuentran bien conectadas. Aunque los números se parezcan, la diferencia en realidad es superior a 30 V. Es posible esperar cierta desviación sobre el valor dado, pero siempre debe estarse alerta del signo resultante de la lectura.

El diagrama de la figura 8.90(a) incluye los voltajes nodales de una punta de prueba lógica utilizada para medir los estados de entrada y salida de circuitos integrados lógicos. En otras palabras, la punta de prueba lógica determina si el voltaje medido se encuentra en uno de dos estados: alto o bajo (por lo general denominados como “encendido” o “apagado”, o 1 o 0). Si la terminal de LOGIC IN (entrada lógica) de la punta de prueba lógica se coloca sobre un circuito integrado en una ubicación donde el voltaje se encuentre entre 0 y 1.2 V, el voltaje se considerará de nivel bajo, y el LED verde se encenderá. (Los LED son diodos semiconductores que emiten luz cuando una corriente pasa a través de ellos.) Si el voltaje medido está entre 1.8 V y 5 V, la lectura se considera alta, y el LED rojo se encenderá. Cualquier voltaje entre 1.2 V y 1.8 V se considerará un “nivel flotante” y será señal de que el sistema bajo medición no opera de forma adecuada. Observe que los niveles de referencia mencionados se establecen mediante la red de divisor de voltaje a la izquierda en el diagrama. Los op-amp utilizados cuentan con una muy alta impedancia de entrada como para que su carga sobre la red de divisor de voltaje pueda ignorarse y la red de divisor de voltaje se considere en sí misma una red. Aunque se indican tres voltajes de alimentación de cd de 5.5 V en el diagrama, debe tenerse presente que los tres puntos están conectados a la misma fuente. Los otros voltajes proporcionados (los voltajes nodales) son los niveles de voltaje que deberán encontrarse presentes desde ese punto hasta tierra si el sistema está funcionando adecuadamente.

Los op-amp se utilizan para medir la diferencia entre la referencia en los puntos 3 y 6 y el voltaje medido en LOGIC IN. Cualquier diferencia ocasionará una salida que encenderá el LED verde o el rojo. Téngase presente, debido a la conexión directa, que el voltaje en el punto 3 será el mismo que el mostrado por el voltaje nodal de la izquierda, o 1.8 V. De la misma forma, el voltaje en el punto 6 será de 1.2 V para compararse con los voltajes en los puntos 5 y 2, los cuales reflejan el voltaje medido. Si el voltaje de entrada resultara ser de 1.0 V, la diferencia entre los voltajes en los puntos 5 y 6 será de 0.2 V, el cual de forma ideal aparecería en el punto 7. Este bajo potencial en el punto 7 daría por resultado una corriente que fluiría desde la fuente con un mayor potencial de 5.5 V en el LED verde, ocasionando que se encienda e indique una condición de nivel bajo. A propósito, los LED, como los diodos, permiten la corriente a través de ellos sólo en la dirección de la flecha en el símbolo. También observe que el voltaje en el punto 6 deberá ser mayor que el del punto 5 para que la salida encienda al LED. Lo mismo sucede para el punto 2 sobre el punto 3, lo cual muestra la razón por la que el LED rojo no se enciende cuando se mide un nivel de 1.0 V.







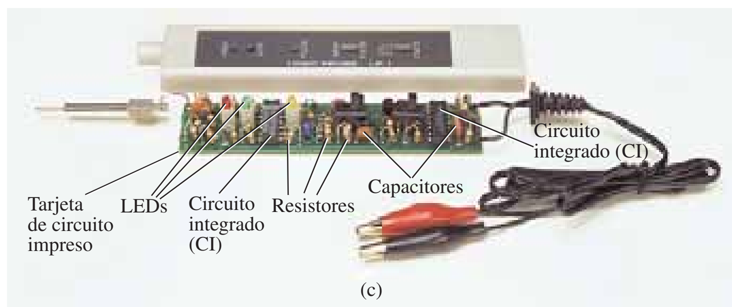


FIGURA 8.90

Punta de prueba lógica: (a) diagrama con voltajes nodales; (b) red con conexiones globales; (c) fotografía de una unidad disponible comercialmente.

En ocasiones no es práctico trazar la red completa como se muestra en la figura 8.90(b) debido a limitaciones de espacio o porque la misma red de divisor de voltaje se utiliza para alimentar otras partes del sistema. En tales casos se debe reconocer que los puntos que tienen la misma forma se encuentran conectados, y el número en la figura revela cuántas conexiones se hacen a ese punto.

En la figura 8.90(c) se proporciona una fotografía del exterior y el interior de una punta de prueba lógica disponible comercialmente. Observe la mayor complejidad del sistema como resultado de la variedad de funciones que la punta de prueba lógica puede realizar.

8.14 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Ahora se analizará la red puente de la figura 8.70 utilizando PSpice para asegurar que se encuentra en el estado de balance. El único componente que no se ha presentado en capítulos anteriores es la fuente de corriente de cd, la cual puede obtenerse seleccionando primero la opción **Place a part**, colocar una parte, y luego la biblioteca de **SOURCE**, fuente. Al recorrer la lista de partes **Part List** se localizará la opción **ICD**. Con un clic izquierdo sobre **ICD** seguido por **OK** se obtendrá una fuente de corriente de cd cuya dirección será hacia la parte inferior de la pantalla. Con un clic izquierdo del ratón (para volverlo rojo o activo) seguido de un clic derecho se obtendrá un listado en el que aparecerá la opción **Mirror Vertically**, reflejar de forma vertical. Al seleccionar esta opción se volteará la fuente y tendrá la dirección de la figura 8.70.

Las partes restantes del análisis de PSpice son directas, obteniéndose los resultados de la figura 8.91 que coinciden con los obtenidos en el análisis de la figura 8.70. El voltaje en la fuente de corriente será de 8 V positivo con respecto a tierra, y el voltaje en cualquier extremo del brazo del puente será de 2.667 V. El voltaje en R_5 será obviamente de 0 V para el nivel de precisión presentado, y la corriente será de una magnitud tan pequeña comparada con los otros niveles de corriente de la red que básicamente puede considerarse de 0 A. También observe para el puente balanceado que la corriente a través de R_1 es igual a la de R_3, y que la corriente a través de R_2 es igual a la de R_4.

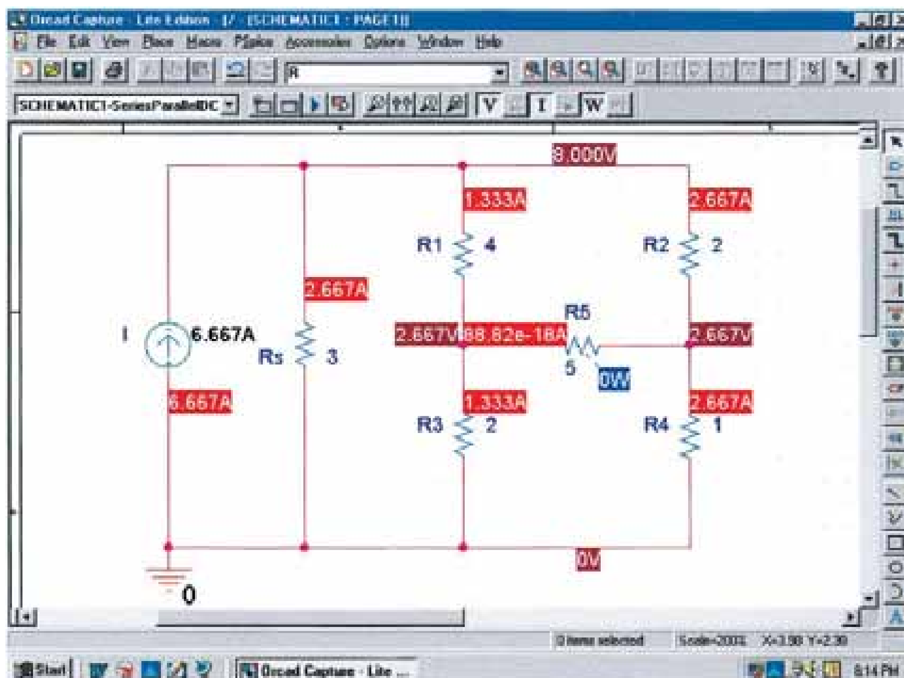


FIGURA 8.91
Aplicación de PSpice a la red puente de la figura 8.70.

Electronics Workbench

Ahora se utilizará Electronics Workbench para verificar los resultados del ejemplo 8.18. Todos los elementos para crear el diagrama de la figura 8.92 ya han sido presentados en capítulos anteriores, por lo que no serán repetidos aquí para demostrar la breve documentación que ahora se requiere para recorrer una red compleja.

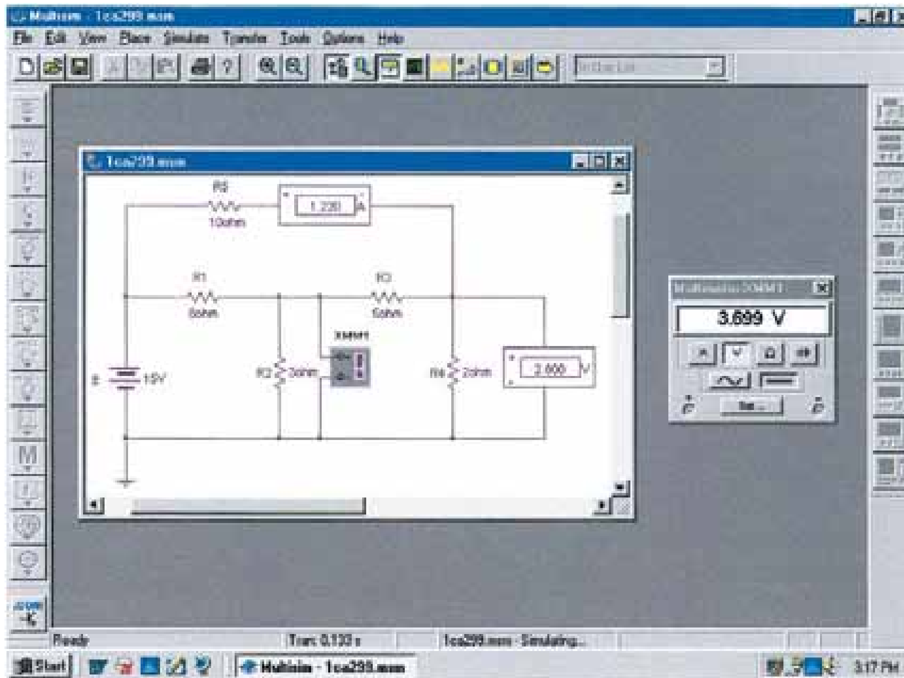


FIGURA 8.92
Utilización de Electronics Workbench para verificar los resultados del ejemplo 8.18.

En este análisis, se utilizarán dos indicadores y un medidor para desplegar los resultados deseados. Un indicador **A** en la posición **H** se utiliza para la corriente a través de R_5, y un indicador **V** en la posición **V** se utiliza para el voltaje en R_2. Se establece un multímetro en el modo de voltímetro para leer el voltaje en R_4. El amperímetro toma lectura de la corriente de malla o lazo para esa rama, y los dos voltímetros despliegan los voltajes nodales de la red.

Después de la simulación, los resultados presentados coinciden exactamente con los del ejemplo 8.18.



PROBLEMAS

SECCIÓN 8.2 Fuentes de corriente

1. Encuentre el voltaje V_{ab} (con polaridad) en la fuente de corriente ideal de la figura 8.93.

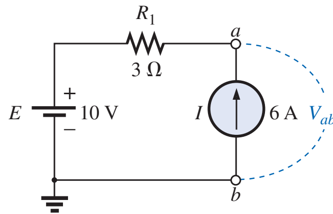


FIGURA 8.93
Problema 1.

2. **a.** Determine V para la fuente de corriente de la figura 8.94(a) con resistencia interna de 10 kΩ.
   b. La fuente del inciso (a) se aproxima por una fuente de corriente ideal en la figura 8.94(b) dado que la resistencia de fuente es mucho mayor que la carga aplicada. Determine el voltaje resultante V para la figura 8.94(b) y compárelo con el obtenido en el inciso (a). ¿El uso de una fuente de corriente ideal es una buena aproximación?

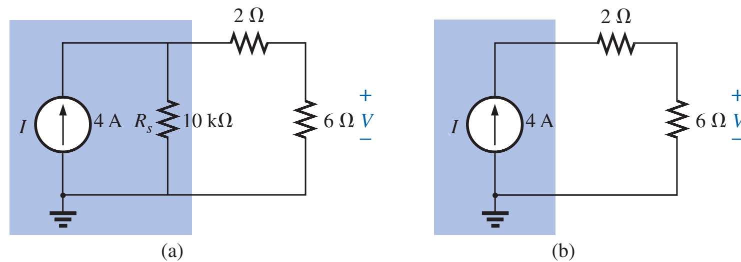


FIGURA 8.94
Problema 2.

3. Para la red de la figura 8.95:
   a. Encuentre las corrientes I_1 e I_s.
   b. Encuentre los voltajes V_s y V_3.

4. Encuentre el voltaje V_3 y la corriente I_2 para la red de la figura 8.96.

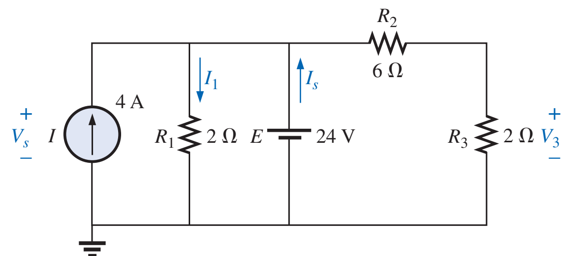


FIGURA 8.95
Problema 3.

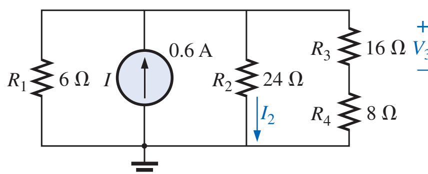


FIGURA 8.96
Problema 4.



SECCIÓN 8.3 Conversiones de fuentes

5. Convierta las fuentes de voltaje de la figura 8.97 a fuentes de corriente.

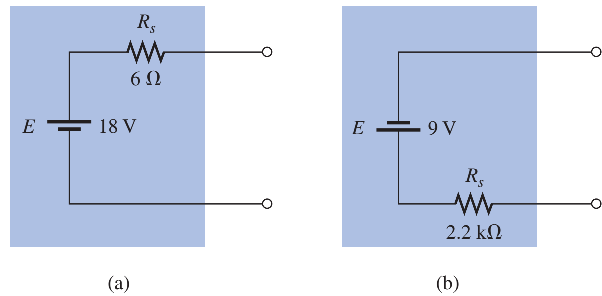


FIGURA 8.97
Problema 5.

6. Convierta las fuentes de corriente de la figura 8.98 a fuentes de voltaje.

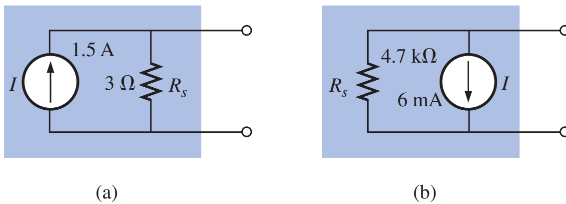


FIGURA 8.98
Problema 6.

7. Para la red de la figura 8.99:
   a. Encuentre la corriente a través del resistor de 2 Ω.
   b. Convierta la fuente de corriente y el resistor de 4 Ω a una fuente de voltaje, y nuevamente resuelva para la corriente en el resistor de 2 Ω. Compare los resultados.

8. Para la configuración de la figura 8.100:
   a. Convierta la fuente de corriente y el resistor de 6.8 Ω a una fuente de voltaje.
   b. Encuentre la magnitud y la dirección de la corriente I_1.
   c. Encuentre el voltaje V_{ab} y la polaridad de los puntos *a* y *b*.

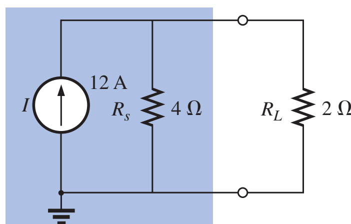


FIGURA 8.99
Problema 7.

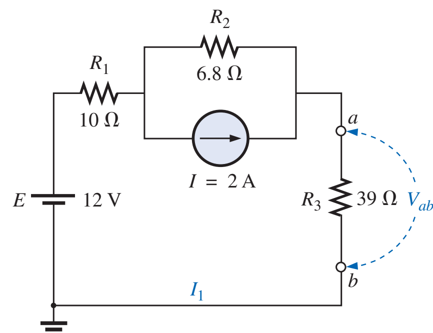


FIGURA 8.100
Problema 8.



SECCIÓN 8.4 Fuentes de corriente en paralelo

9. Encuentre el voltaje V_2 y la corriente I_1 para la red de la figura 8.101.

10. a. Convierta las fuentes de voltaje de la figura 8.102 a fuentes de corriente.

b. Encuentre el voltaje V_{ab} y la polaridad de los puntos *a* y *b*.

c. Encuentre la magnitud y la dirección de la corriente *I*.

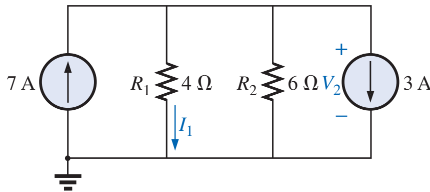


FIGURA 8.101
Problema 9.

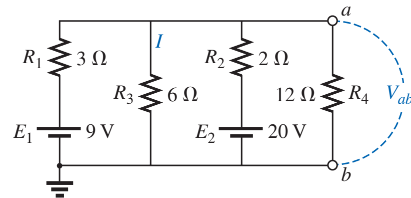


FIGURA 8.102
Problema 10.

11. Para la red de la figura 8.103:

a. Convierta la fuente de voltaje a una fuente de corriente.

b. Reduzca la red a una fuente de corriente, y determine el voltaje V_1.

c. Utilizando los resultados del inciso (b), determine V_2.

d. Calcule la corriente I_2.

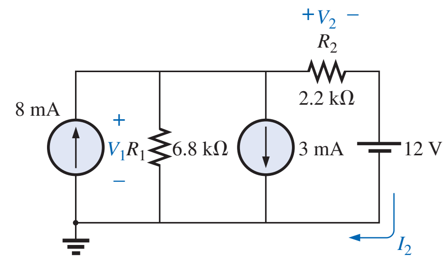
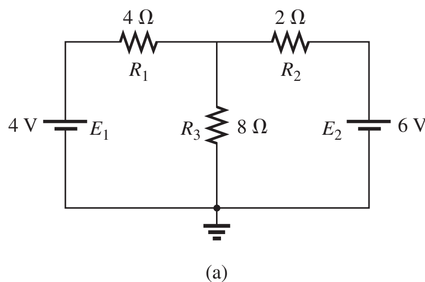


FIGURA 8.103
Problema 11.

SECCIÓN 8.6 Análisis de corriente de rama

12. Utilizando el análisis de corriente de rama, encuentre la magnitud y la dirección de la corriente a través de cada resistor para las redes de la figura 8.104.



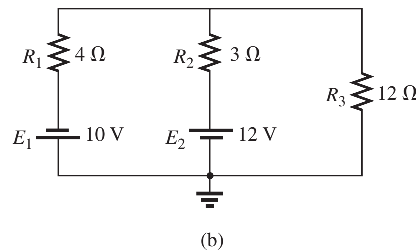


FIGURA 8.104
Problemas 12, 17, 25 y 54.



***13.** Utilice el análisis de corriente de rama y encuentre la corriente a través de cada resistor para las redes de la figura 8.105. Los resistores tienen valores estándar.

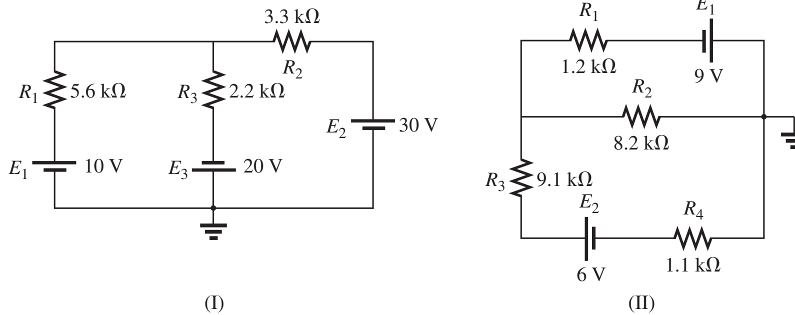


FIGURA 8.105
Problemas 13, 18 y 26.

***14.** Para las redes de la figura 8.106, determine la corriente I_2 utilizando análisis de corriente de rama, y luego encuentre el voltaje V_{ab}.

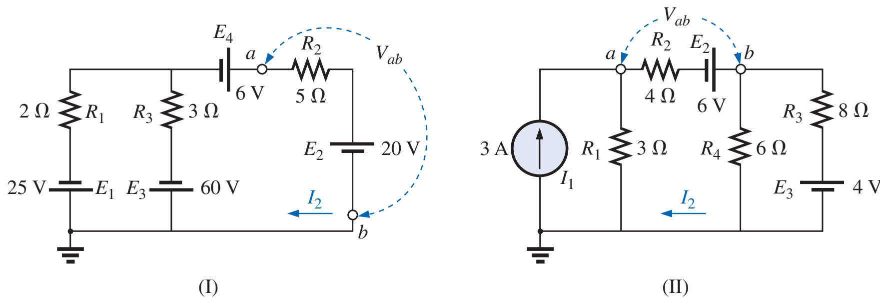


FIGURA 8.106
Problemas 14, 19 y 27.

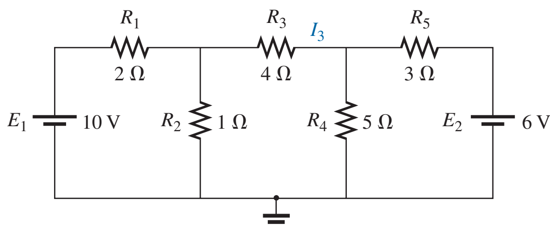


FIGURA 8.107
Problemas 15, 20 y 28.

***15.** Para la red de la figura 8.107:

a. Escriba las ecuaciones necesarias para resolver las corrientes de rama.

b. Mediante sustitución de la ley de corriente de Kirchhoff, reduzca el conjunto a tres ecuaciones.

c. Vuelva a escribir las ecuaciones en un formato que permita resolverlas utilizando determinantes de tercer orden.

d. Resuelva para la corriente de rama a través del resistor R_3.



***16.** Para la configuración de transistor de la figura 8.108:

a. Resuelva para las corrientes I_B, I_C e I_E utilizando el hecho de que $V_{BE} = 0.7$ V y $V_{CE} = 8$ V.

b. Encuentre los voltajes V_B, V_C y V_E con respecto a tierra.

c. ¿Cuál es la razón de la corriente de salida I_C a la corriente de entrada I_B? [*Nota:* en el análisis de transistores esta razón se denomina *beta de cd* del transistor (β_{cd}).]

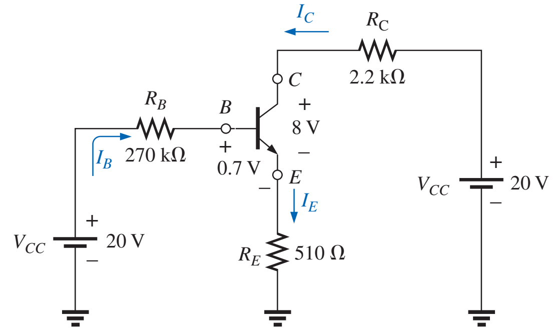


FIGURA 8.108
Problema 16.

SECCIÓN 8.7 Análisis de mallas (método general)

17. Encuentre la corriente a través de cada resistor para las redes de la figura 8.104.

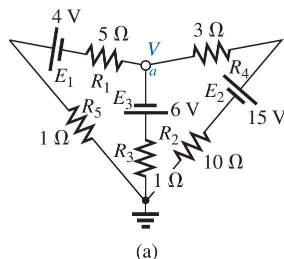
18. Encuentre la corriente a través de cada resistor para las redes de la figura 8.105.

19. Encuentre las corrientes de malla y el voltaje V_{ab} para cada red de la figura 8.106. Utilice corrientes de malla en el sentido de las manecillas del reloj.

20. a. Encuentre la corriente I_3 para la red de la figura 8.107 utilizando análisis de mallas.

b. Con base en los resultados del inciso (a), ¿cómo puede compararse la aplicación del análisis de mallas con el método de corriente de rama?

***21.** Utilizando análisis de mallas, determine la corriente a través del resistor de 5 Ω para cada red de la figura 8.109. Luego determine el voltaje V_a.



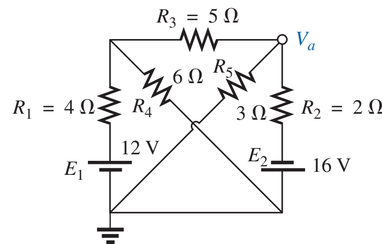
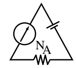


FIGURA 8.109
Problemas 21 y 29.



***22.** Escriba las ecuaciones de malla para cada una de las redes de la figura 8.110, y, utilizando determinantes, resuelva para las corrientes de lazo en cada red. Utilice corrientes de malla en el sentido de las manecillas del reloj.

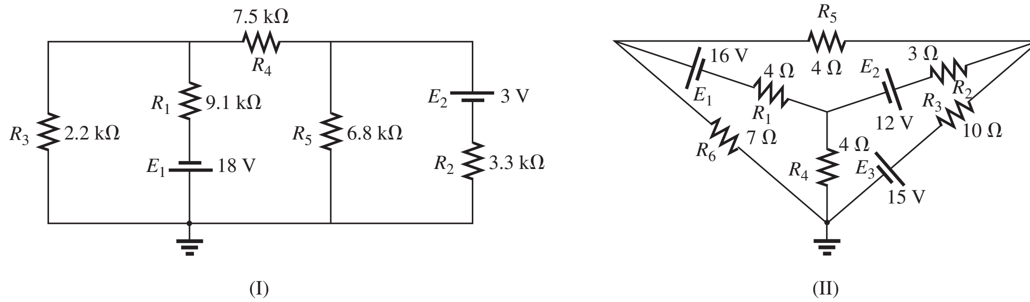


FIGURA 8.110
Problemas 22, 30 y 34.

***23.** Escriba las ecuaciones de malla para cada una de las redes de la figura 8.111, y, utilizando determinantes, resuelva para las corrientes de lazo en cada red.

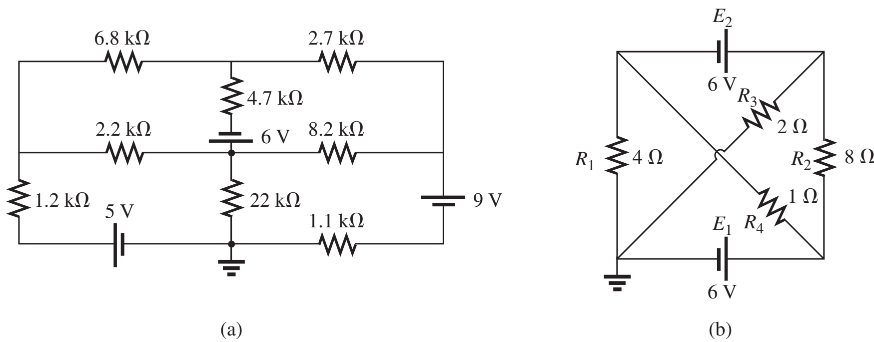


FIGURA 8.111
Problemas 23, 31 y 55.

***24.** Utilizando el método de supermalla, encuentre la corriente a través de cada elemento de las redes de la figura 8.112.

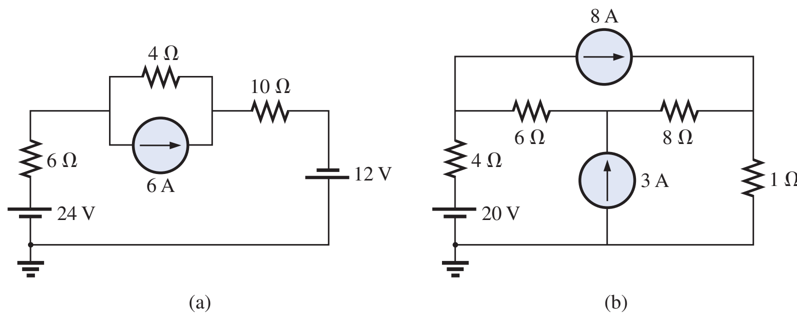


FIGURA 8.112
Problema 24.

SECCIÓN 8.8 Análisis de mallas (método de formato)

25. Utilice el método de formato y escriba las ecuaciones de malla para las redes de la figura 8.104. ¿Existe simetría? Utilizando determinantes, resuelva para las corrientes de malla.

26. **a.** Utilice el método de formato y escriba las ecuaciones de malla para las redes de la figura 8.105.
b. Por medio de determinantes resuelva para las corrientes de malla.
c. Determine la magnitud y la dirección de la corriente a través de cada resistor.

27. **a.** Utilice el método de formato y escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 8.106.
b. Resuelva para las corrientes de malla utilizando determinantes.
c. Determine la magnitud y la dirección de la corriente a través de cada resistor.

28. Utilizando el análisis de mallas, determine la corriente I_3 para la red de la figura 8.107, y compare su respuesta con la solución del problema 15.

29. Mediante el análisis de mallas, determine $I_{5\Omega}$ y V_a para la red de la figura 8.109(b).

30. Utilice el análisis de mallas y determine las corrientes de malla para las redes de la figura 8.110.

31. Utilizando el análisis de mallas, determine las corrientes de malla para las redes de la figura 8.111.

SECCIÓN 8.9 Análisis de nodos (método general)

32. Escriba las ecuaciones nodales para las redes de la figura 8.113, y, utilizando determinantes, resuelva para los voltajes nodales. ¿Existe simetría?

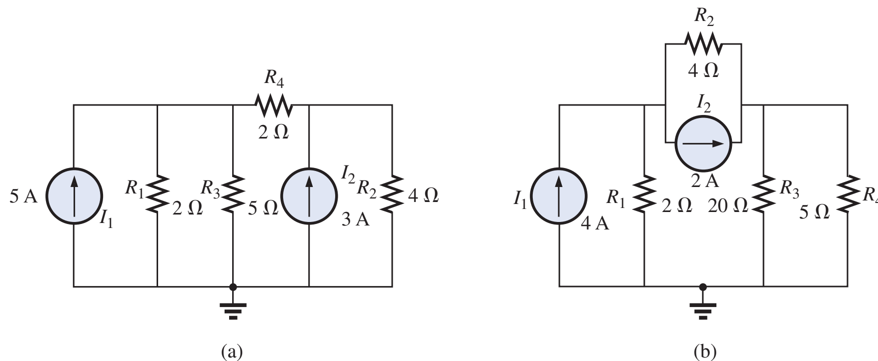
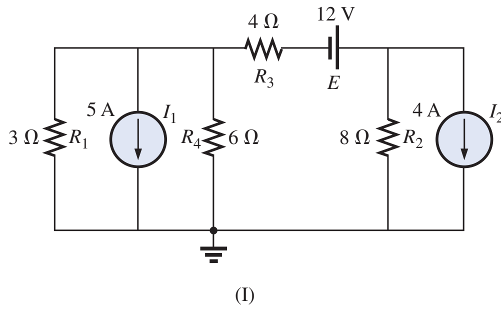


FIGURA 8.113
Problemas 32 y 38.



33. **a.** Escriba las ecuaciones nodales para las redes de la figura 8.114.
b. Utilizando determinantes, resuelva para los voltajes nodales.
c. Determine la magnitud y la polaridad del voltaje en cada resistor.



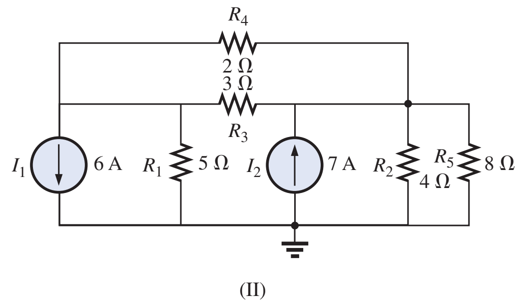
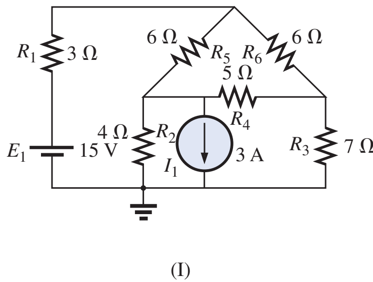


FIGURA 8.114
Problemas 33 y 39.



34. **a.** Escriba las ecuaciones nodales para las redes de la figura 8.110.
b. Utilizando determinantes, resuelva para los voltajes nodales.
c. Determine la magnitud y la polaridad del voltaje en cada resistor.

***35.** Para las redes de la figura 8.115, escriba las ecuaciones nodales y resuelva para los voltajes nodales.

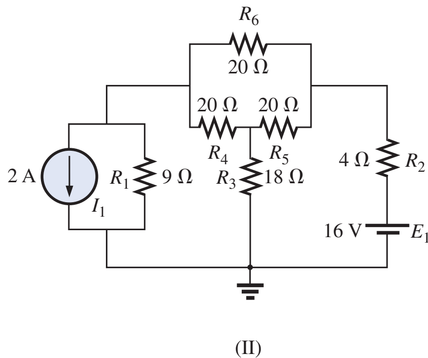
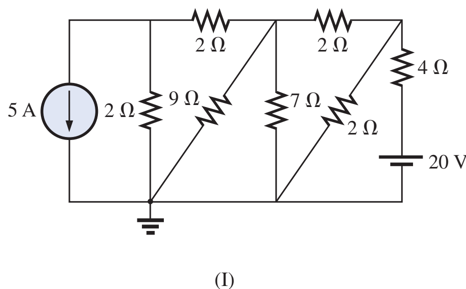


FIGURA 8.115
Problemas 35 y 40.

36. **a.** Determine los voltajes nodales para las redes de la figura 8.116.
b. Encuentre el voltaje en cada fuente de corriente.



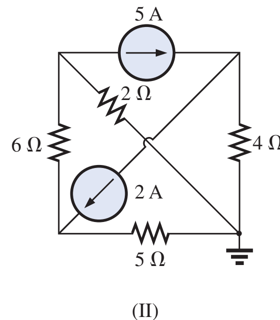


FIGURA 8.116
Problemas 36 y 41.



***37.** Utilice el método de supernodo y determine los voltajes nodales para las redes de la figura 8.117.

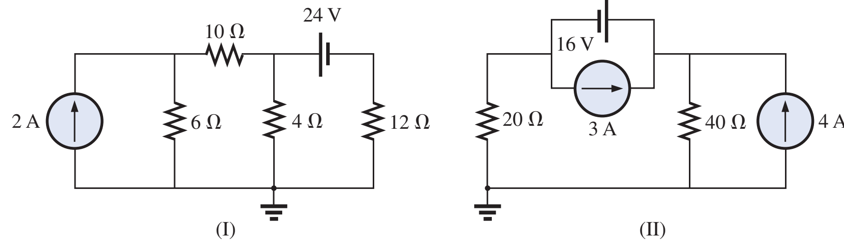


FIGURA 8.117
Problemas 37 y 56.

SECCIÓN 8.10 Análisis de nodos (método de formato)

38. Utilizando el método de formato, escriba las ecuaciones nodales para las redes de la figura 8.113. ¿Existe simetría? Utilice determinantes y resuelva para los voltajes nodales.

39. **a.** Escriba las ecuaciones nodales para las redes de la figura 8.114.
b. Resuelva para los voltajes nodales.
c. Encuentre la magnitud y la polaridad del voltaje en cada resistor.

40. **a.** Escriba las ecuaciones nodales para las redes de la figura 8.115.
b. Resuelva para los voltajes nodales.
c. Encuentre la magnitud y la polaridad del voltaje en cada resistor.

41. Determine los voltajes nodales para las redes de la figura 8.116. Luego determine el voltaje en cada fuente de corriente.

SECCIÓN 8.11 Redes puente

42. Para la red puente de la figura 8.118:
a. Escriba las ecuaciones de malla utilizando el método de formato.
b. Determine la corriente a través de R_5.
c. ¿El puente se encuentra balanceado?
d. ¿Se satisface la ecuación (8.4)?

43. Para la red de la figura 8.118:
a. Escriba las ecuaciones nodales utilizando el método de formato.
b. Determine el voltaje en R_5.
c. ¿El puente se encuentra balanceado?
d. ¿Se satisface la ecuación (8.4)?

44. Para el puente de la figura 8.119:
a. Escriba las ecuaciones de malla utilizando el método de formato.
b. Determine la corriente a través de R_5.
c. ¿El puente se encuentra balanceado?
d. ¿Se satisface la ecuación (8.4)?

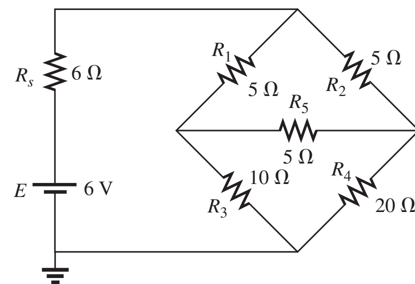


FIGURA 8.118
Problemas 42 y 43.

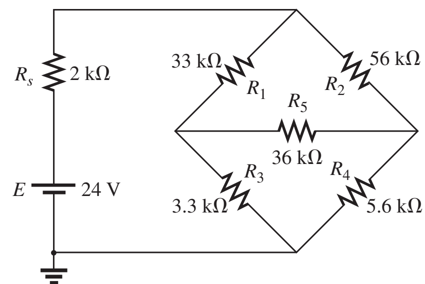


FIGURA 8.119
Problemas 44 y 45.



45. Para la red puente de la figura 8.119:
   a. Escriba las ecuaciones nodales utilizando el método de formato.
   b. Determine la corriente a través de R_5.
   c. ¿El puente se encuentra balanceado?
   d. ¿Se satisface la ecuación (8.4)?

46. Escriba las ecuaciones nodales para la configuración de puente de la figura 8.120. Utilice el método de formato.

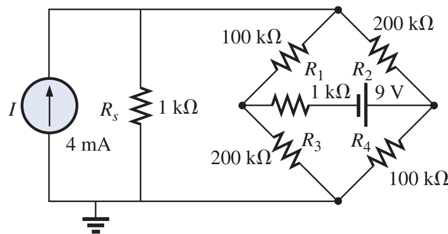


FIGURA 8.120
Problema 46.

*47. Determine la corriente a través del resistor de fuente R_s de cada red de la figura 8.121 utilizando el análisis de mallas o el análisis de nodos. Argumente porqué eligió un método por encima del otro.

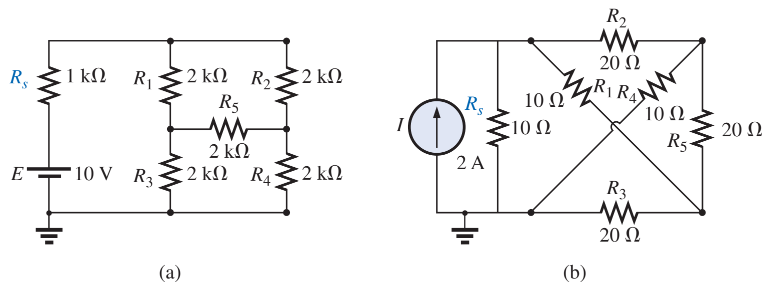


FIGURA 8.121
Problema 47.

SECCIÓN 8.12 Conversiones Y-Δ (T-π) y Δ-Y (π-T)

48. Utilizando una conversión Δ-Y o Y-Δ, encuentre la corriente *I* en cada una de las redes de la figura 8.122.

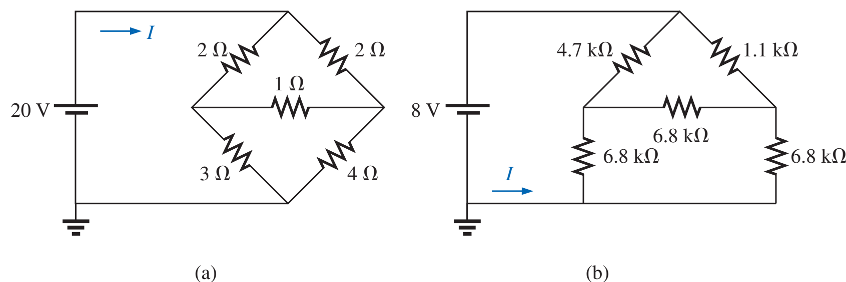


FIGURA 8.122
Problema 48.



***49.** Repita el problema 48 para las redes de la figura 8.123.

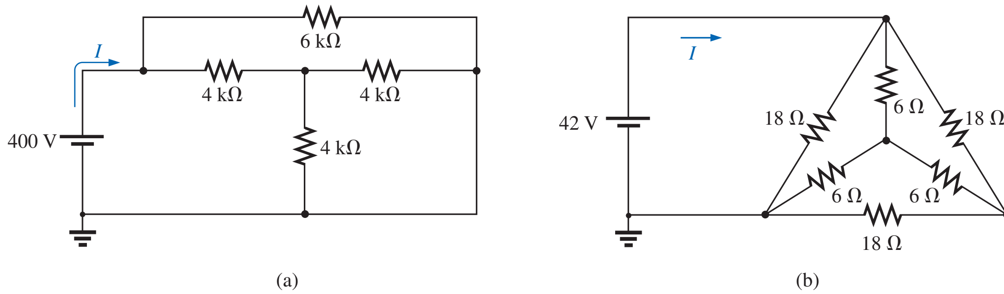


FIGURA 8.123
Problema 49.

***50.** Determine la corriente *I* para la red de la figura 8.124.

***51. a.** Reemplace la configuración T de la figura 8.125 (compuesta por resistores de 6 kΩ) con una configuración π.

b. Resuelva para la corriente de fuente I_{s_1}.

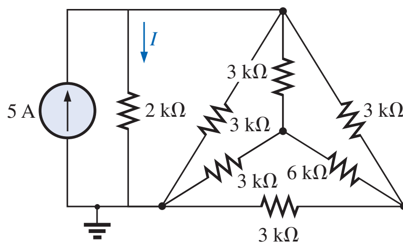


FIGURA 8.124
Problema 50.

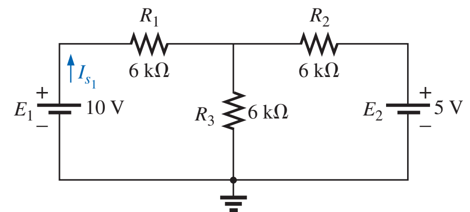


FIGURA 8.125
Problema 51.

***52. a.** Reemplace la configuración π de la figura 8.126 (compuesta por resistores de 3 kΩ) con una configuración T.

b. Resuelva para la corriente de fuente I_s.

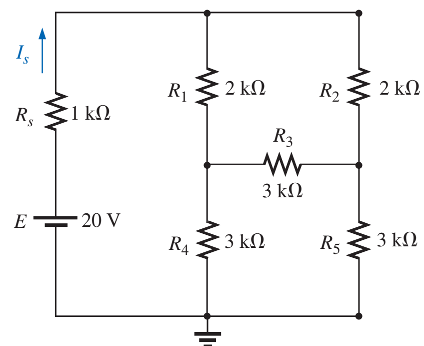


FIGURA 8.126
Problema 52.



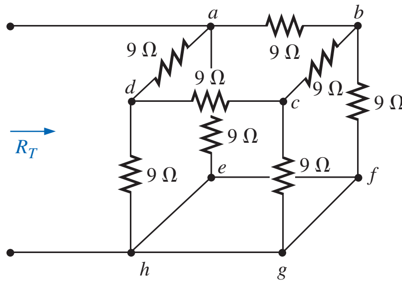


FIGURA 8.127
Problema 53.

***53.** Utilizando conversiones Y-Δ o Δ-Y, determine la resistencia total de la red de la figura 8.127.

SECCIÓN 8.14 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

54. Mediante esquematización, encuentre la corriente a través de cada elemento de la figura 8.104.

***55.** Mediante esquematización, encuentre las corrientes de malla para la red de la figura 8.111(a).

***56.** Mediante esquematización, determine los voltajes nodales para la red de la figura 8.117(II).

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

57. Dadas dos ecuaciones simultáneas, escriba un programa para resolver las variables desconocidas.

***58.** Utilizando análisis de mallas y determinantes, escriba un programa para resolver ambas corrientes de malla de la red de la figura 8.26 (para cualquier valor de componente).

***59.** Utilizando análisis de nodos y determinantes, escriba un programa para resolver los voltajes nodales de la red de la figura 8.44 (para cualquier valor de componente).

GLOSARIO

Análisis de mallas Técnica para determinar las corrientes de malla (lazo) de una red y da por resultado un conjunto reducido de ecuaciones en comparación con el método de corriente de rama.

Análisis de nodos Técnica para determinar los voltajes nodales de una red.

Configuración delta "te" (T) y pi (π) Estructura de red que consta de tres ramas y tiene la apariencia de las letras griegas delta (Δ) o pi (π).

Configuraciones "ye" (Y) y delta (Δ) Estructura de red que consta de tres ramas y tiene la apariencia de las letras Y o T mayúsculas.

Corriente de malla (lazo) Corriente etiquetada asignada a cada lazo cerrado distinto en una red y que puede, de forma individual o en combinación con otras corrientes de malla, definir todas las ramas de corriente de una red.

Fuentes de corriente Fuentes que suministran una corriente fija a una red y tienen un voltaje dependiente de la red sobre la que se apliquen.

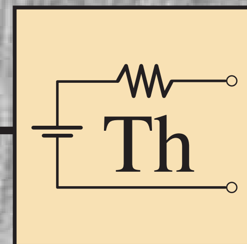
Método de análisis de corriente de rama Técnica para determinar las corrientes de rama de una red multilazos.

Método de determinantes Técnica matemática para encontrar las variables desconocidas de dos o más ecuaciones lineales simultáneas.

Nodo Unión de dos o más ramas dentro de una red.

Redes puente Configuración de red que típicamente tiene una apariencia de diamante en la que no hay dos elementos en serie o en paralelo.

9



Teoremas de redes

9.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo presentará los importantes teoremas fundamentales del análisis de redes. Se incluyen **los teoremas de superposición**, **de Thévenin**, **de Norton**, **de máxima transferencia de potencia**, **de sustitución**, **de Millman** y **de reciprocidad**; considerándose varias áreas de aplicación de cada uno. Un entendimiento pleno de cada uno de los teoremas es importante porque varios de éstos serán aplicados repetidamente en el material que sigue.

9.2 TEOREMA DE SUPERPOSICIÓN

El **teorema de superposición**, como los métodos del capítulo anterior, puede usarse para encontrar la solución a redes con dos o más fuentes que no están en serie o en paralelo. La más obvia ventaja de este método es que no requiere el uso de una técnica matemática como los determinantes para encontrar los voltajes o las corrientes requeridas. En vez de eso, cada fuente es tratada independientemente, y la suma algebraica se encuentra para determinar una cantidad particular desconocida de la red.

El teorema de superposición establece lo siguiente:

La corriente o el voltaje de un elemento en una red lineal bilateral es igual a la suma algebraica de las corrientes o voltajes producidos independientemente por cada fuente.

Cuando se aplica el teorema, es posible considerar los efectos de dos fuentes al mismo tiempo y reducir el número de redes que se tienen por analizar, pero, en general,

Número de redes por analizar	=	Número de fuentes independientes

(9.1)

Para considerar los efectos de cada fuente independientemente se requiere que las fuentes sean removidas y reemplazadas sin afectar el resultado final.

Para remover una fuente de voltaje al aplicar este teorema, la diferencia en potencial entre las terminales de la fuente de voltaje debe hacerse igual a cero (corto circuito); remover una fuente de corriente requiere que sus terminales sean abiertas (circuito abierto). Cualquier resistencia o conductancia interna asociada con las fuentes desplazadas no es eliminada pero, no obstante, debe ser considerada.

En la figura 9.1 se examinan las distintas sustituciones requeridas al remover una fuente ideal, y en la figura 9.2 se analizan las sustituciones con fuentes prácticas que tienen cierta resistencia interna.

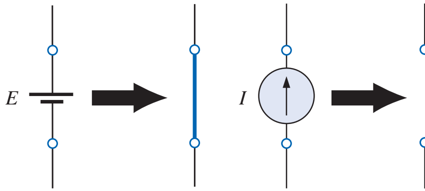


FIGURA 9.1
Remoción de los efectos de fuentes ideales.

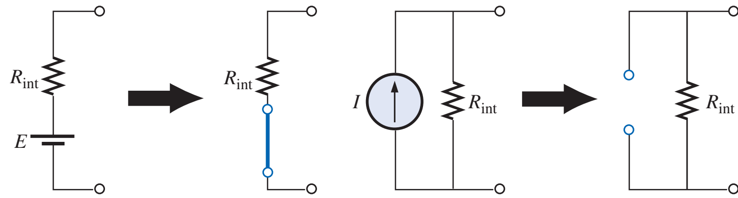


FIGURA 9.2
Remoción de los efectos de fuentes prácticas.

La corriente total a través de cualquier porción de la red es igual a la suma algebraica de las corrientes producidas independientemente por cada fuente. Esto es, para una red de dos fuentes, si la corriente producida por una fuente es en una dirección, mientras que la producida por la otra es en la dirección opuesta a través del mismo resistor, *la corriente resultante es la diferencia de las dos y tiene la dirección de la mayor*. Si las corrientes individuales van en la misma dirección, *la corriente resultante es la suma de las dos en la dirección de cada corriente*. Esta regla se cumple para el voltaje en una porción de una red determinada por polaridades, y su aplicación puede extenderse a redes con cualquier número de fuentes.

El principio de superposición no es aplicable para el cálculo de la potencia ya que la pérdida de potencia en un resistor varía con el cuadrado (no lineal) de la corriente o del voltaje. Por ejemplo, la corriente a través del resistor R de la figura 9.3(a) es I_1 debido a una fuente de una red de dos fuentes. La corriente por el mismo resistor debido a la otra fuente es I_2 como se muestra en la figura 9.3(b). Aplicando el teorema de superposición, la corriente total por el resistor debido a ambas fuentes es I_T, como se muestra en la figura 9.3(c) con:

$$I_T = I_1 + I_2$$

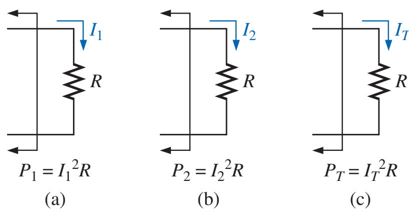


FIGURA 9.3
Demostración de que la superposición no es aplicable para cálculos de potencia.

La potencia entregada al resistor en la figura 9.3(a) es:

$$P_1 = I_1^2 R$$

mientras que la potencia entregada al mismo resistor en la figura 9.3(b) es:

$$P_2 = I_2^2 R$$

Al suponer que la potencia total entregada en la figura 9.3(c) puede obtenerse sumando simplemente la potencia entregada debida a cada fuente, se encontrará que:

$$P_T = P_1 + P_2 = I_1^2 R + I_2^2 R = I_T^2 R$$

o bien: $$I_T^2 = I_1^2 + I_2^2$$

Sin embargo, esta relación final entre niveles de corriente es incorrecta, como puede demostrarse tomando la corriente total determinada por el teorema de superposición y elevándola al cuadrado como sigue:

$$I_T^2 = (I_1 + I_2)^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2$$

lo cual es diferente a la expresión obtenida a partir de la suma de niveles de potencia.

En general, por tanto,

la potencia total entregada a un elemento resistivo debe ser determinada usando la corriente total o el voltaje total en el elemento y no puede ser determinada por una simple suma de los niveles de potencia establecidos por cada fuente.

EJEMPLO 9.1 Determine I_1 para la red de la figura 9.4.

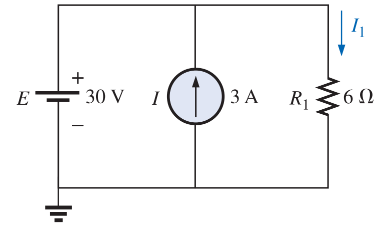


FIGURA 9.4
Ejemplo 9.1.

Solución: Haciendo $E = 0$ V para la red de la figura 9.4 se obtiene la red de la figura 9.5(a), donde un corto circuito equivalente ha reemplazado la fuente de 30 V.

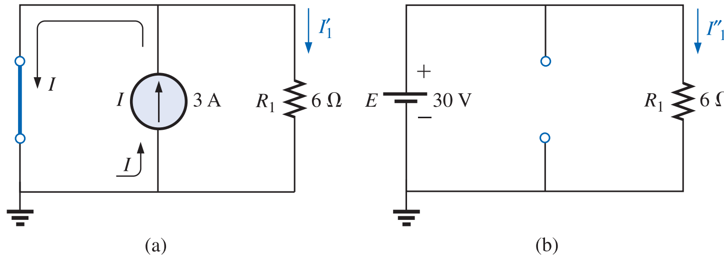


FIGURA 9.5
(a) Contribución de I a I_1; (b) contribución de E a I_1.

Como se muestra en la figura 9.5(a), la fuente de corriente escogerá la trayectoria de corto circuito, e $I'_1 = 0$ A. Al aplicar la regla del divisor de corriente,

$$I'_1 = \frac{R_{sc}I}{R_{sc} + R_1} = \frac{(0\ \Omega)I}{0\ \Omega + 6\ \Omega} = 0\text{ A}$$

Al establecer I en cero ampere resultará la red de la figura 9.5(b), con la fuente de corriente reemplazada por un circuito abierto. Aplicando la ley de Ohm,

$$I''_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{30\text{ V}}{6\ \Omega} = 5\text{ A}$$

Como I'_1 e I''_1 tienen la misma dirección definida en las figuras 9.5(a) y (b), la corriente I_1 es la suma de las dos, y

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 0\text{ A} + 5\text{ A} = \mathbf{5\ A}$$

Observe en este caso que la fuente de corriente no tiene efecto sobre la corriente a través del resistor de 6 Ω. El voltaje en el resistor debe fijarse en 30 V porque los elementos son paralelos.

EJEMPLO 9.2 Usando la superposición, determine la corriente a través del resistor de 4 Ω de la figura 9.6. Observe que ésta es una red de dos fuentes del tipo considerado en el capítulo 8.

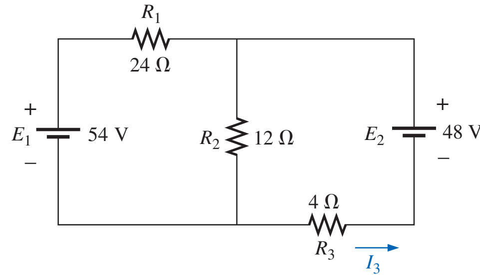


FIGURA 9.6
Ejemplo 9.2.

Solución: *Considerando los efectos de la fuente de 54 V (Figura 9.7):*

$$R_T = R_1 + R_2 \parallel R_3 = 24\ \Omega + 12\ \Omega \parallel 4\ \Omega = 24\ \Omega + 3\ \Omega = 27\ \Omega$$

$$I = \frac{E_1}{R_T} = \frac{54\text{ V}}{27\ \Omega} = 2\text{ A}$$

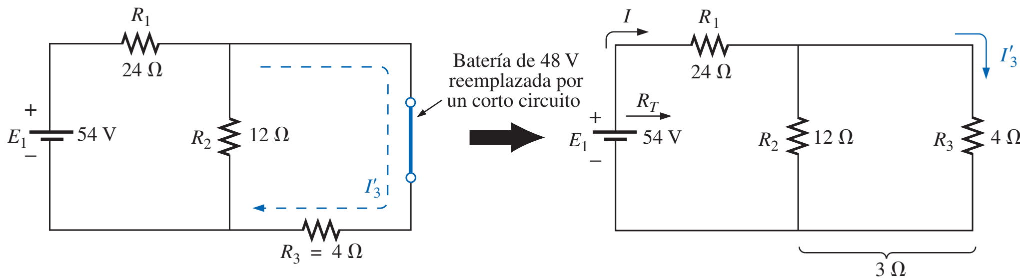


FIGURA 9.7
Efecto de E_1 sobre la corriente I_3.

Usando la regla del divisor de corriente,

$$I'_3 = \frac{R_2 I}{R_2 + R_3} = \frac{(12\ \Omega)(2\text{ A})}{12\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{24\text{ A}}{16} = 1.5\text{ A}$$

Considerando los efectos de la fuente de 48 V (Figura 9.8):

$$R_T = R_3 + R_1 \parallel R_2 = 4\ \Omega + 24\ \Omega \parallel 12\ \Omega = 4\ \Omega + 8\ \Omega = 12\ \Omega$$

$$I''_3 = \frac{E_2}{R_T} = \frac{48\text{ V}}{12\ \Omega} = 4\text{ A}$$

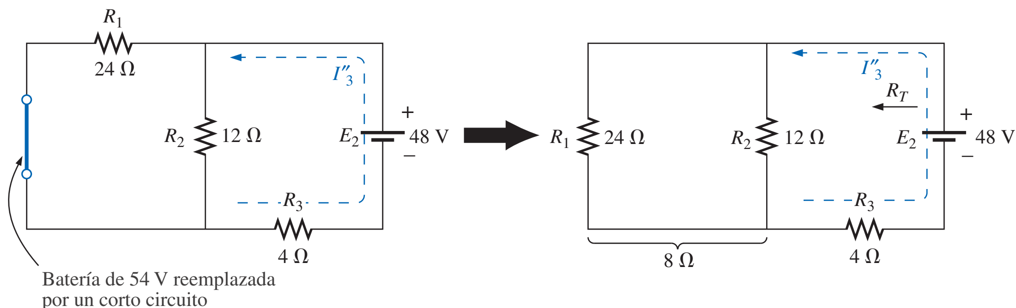


FIGURA 9.8
Efecto de E_2 sobre la corriente I_3.

La corriente total a través del resistor de 4 Ω (Figura 9.9) es:

$$I_3 = I''_3 - I'_3 = 4\text{ A} - 1.5\text{ A} = \mathbf{2.5\text{ A}} \qquad (\text{dirección de } I''_3)$$

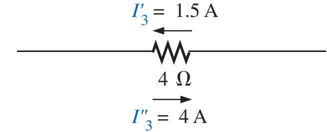


FIGURA 9.9
Corriente resultante para I_3.

EJEMPLO 9.3

a. Usando la superposición, encuentre la corriente a través del resistor de 6 Ω de la red de la figura 9.10.

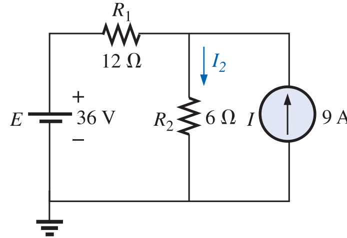


FIGURA 9.10
Ejemplo 9.3.

b. Demuestre que la superposición no es aplicable a los niveles de potencia.

Soluciones:

a. *Considerando el efecto de la fuente de 36 V (Figura 9.11):*

$$I'_2 = \frac{E}{R_T} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{36\text{ V}}{12\ \Omega + 6\ \Omega} = 2\text{ A}$$

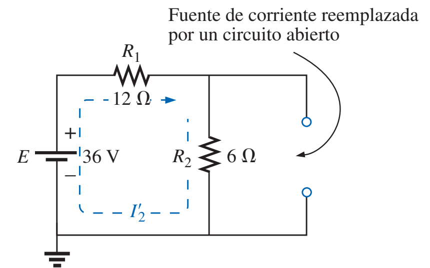


FIGURA 9.11
Contribución de E a I_2.

Considerando el efecto de la fuente de 9 A (Figura 9.12):
Aplicando la regla del divisor de corriente,

$$I''_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = \frac{(12\ \Omega)(9\text{ A})}{12\ \Omega + 6\ \Omega} = \frac{108\text{ A}}{18} = 6\text{ A}$$

La corriente total a través del resistor de 6 Ω (Figura 9.13) es:

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = 2\text{ A} + 6\text{ A} = \mathbf{8\text{ A}}$$

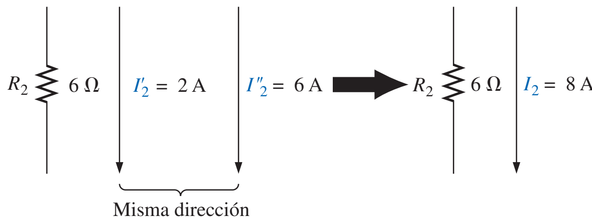


FIGURA 9.13
Corriente resultante para I_2.

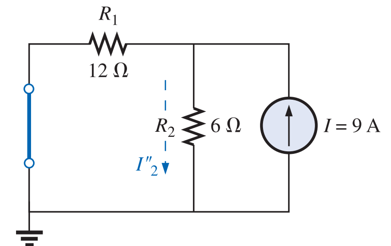


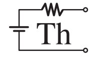
FIGURA 9.12
Contribución de I a I_2.

b. La potencia para el resistor de 6 Ω es:

$$\text{Potencia} = I^2R = (8\text{ A})^2(6\ \Omega) = \mathbf{384\text{ W}}$$

La potencia calculada para el resistor de 6 Ω debida a cada fuente, *malusando* el principio de superposición, es:

$$P_1 = (I'_2)^2R = (2\text{ A})^2(6\ \Omega) = 24\text{ W}$$
$$P_2 = (I''_2)^2R = (6\text{ A})^2(6\ \Omega) = 216\text{ W}$$
$$P_1 + P_2 = 240\text{ W} \neq 384\text{ W}$$



Esto resulta porque 2 A + 6 A = 8 A, pero:

$$(2\text{ A})^2 + (6\text{ A})^2 \neq (8\text{ A})^2$$

Como se mencionó, el principio de superposición no es aplicable para los cálculos de la potencia ya que la potencia es proporcional al cuadrado de la corriente o del voltaje (I^2R o V^2/R).

La figura 9.14 es una gráfica de la potencia entregada al resistor de 6 Ω en función de la corriente.

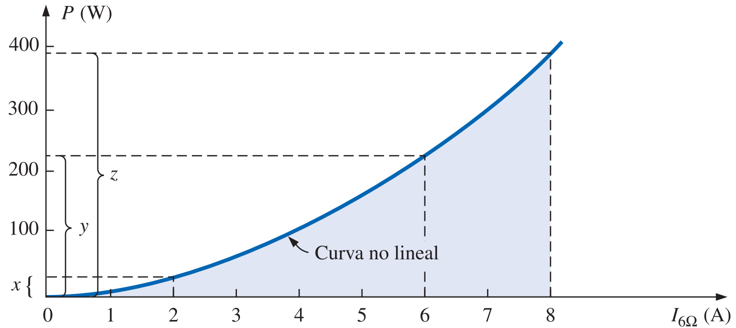


FIGURA 9.14
Trazado de la potencia entregada al resistor de 6 Ω en función de la corriente a través del resistor.

Obviamente, $x + y \neq z$, o 24 W + 216 W ≠ 384 W, y la superposición no se cumple. Sin embargo, para una relación lineal, como entre el voltaje y la corriente del resistor tipo fijo de 6 Ω, la superposición puede ser aplicada, como se demuestra mediante la gráfica de la figura 9.15, donde $a + b = c$, o 2 A + 6 A = 8 A.

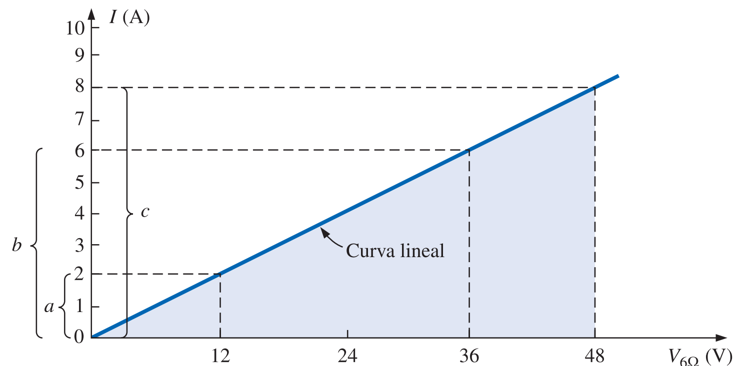


FIGURA 9.15
Trazado de I en función de V para el resistor de 6 Ω.

EJEMPLO 9.4 Usando el principio de superposición, encuentre la corriente I_2 a través del resistor de 12 kΩ de la figura 9.16.

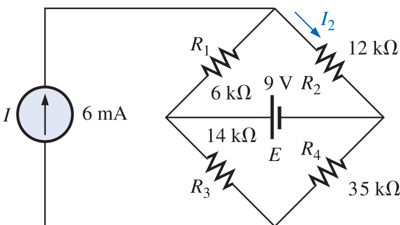


FIGURA 9.16
Ejemplo 9.4.

Solución: *Considerando el efecto de la fuente de corriente de 6 mA (Figura 9.17):*

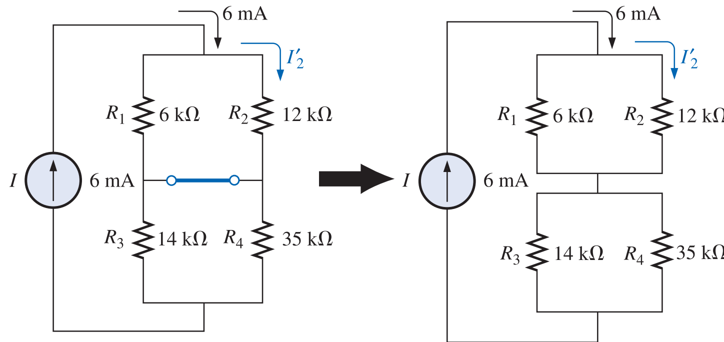


FIGURA 9.17
Efecto de la fuente de corriente I sobre la corriente I_2.

Regla del divisor de corriente:

$$I'_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = \frac{(6\ \text{k}\Omega)(6\ \text{mA})}{6\ \text{k}\Omega + 12\ \text{k}\Omega} = 2\ \text{mA}$$

Considerando el efecto de la fuente de voltaje de 9 V (Figura 9.18):

$$I''_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{9\ \text{V}}{6\ \text{k}\Omega + 12\ \text{k}\Omega} = 0.5\ \text{mA}$$

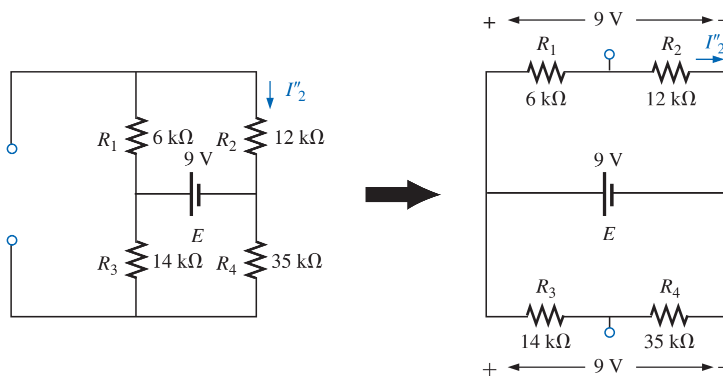


FIGURA 9.18
Efecto de la fuente de voltaje E sobre la corriente I_2.

Como I'_2 e I''_2 tienen la misma dirección a través de R_2, la corriente deseada es la suma de las dos:

$$\begin{aligned} I_2 &= I'_2 + I''_2 \\ &= 2\ \text{mA} + 0.5\ \text{mA} \\ &= \mathbf{2.5\ mA} \end{aligned}$$

EJEMPLO 9.5 Encuentre la corriente a través del resistor de 2 Ω de la red de la figura 9.19. La presencia de tres fuentes resultará en tres diferentes redes a ser analizadas.

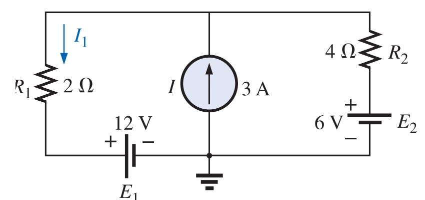
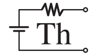


FIGURA 9.19
Ejemplo 9.5.



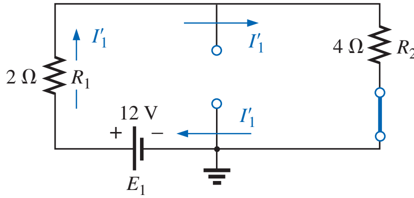


FIGURA 9.20
Efecto de E_1 sobre la corriente I.

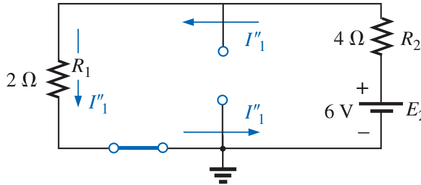


FIGURA 9.21
Efecto de E_2 sobre la corriente I_1.

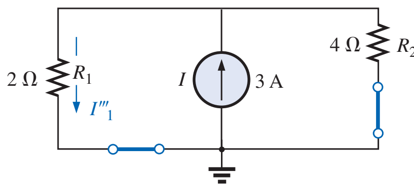


FIGURA 9.22
Efecto de I sobre la corriente I_1.

Solución: *Considerando el efecto de la fuente de 12 V (Figura 9.20):*

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{12\text{ V}}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{12\text{ V}}{6\ \Omega} = 2\text{ A}$$

Considerando el efecto de la fuente de 6 V (Figura 9.21):

$$I''_1 = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = \frac{6\text{ V}}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{6\text{ V}}{6\ \Omega} = 1\text{ A}$$

Considerando el efecto de la fuente de 3 A (Figura 9.22):
Aplicando la regla del divisor de corriente,

$$I'''_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2} = \frac{(4\ \Omega)(3\text{ A})}{2\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{12\text{ A}}{6} = 2\text{ A}$$

La corriente total a través del resistor de 2 Ω aparece en la figura 9.23, y

Misma dirección que I_1 en la figura 9.19

Dirección opuesta a I_1 en la figura 9.19

$$I_1 = \overbrace{I''_1 + I'''_1}\ - I'_1$$
$$= 1\text{A} + 2\text{A} - 2\text{A} = 1\textbf{A}$$

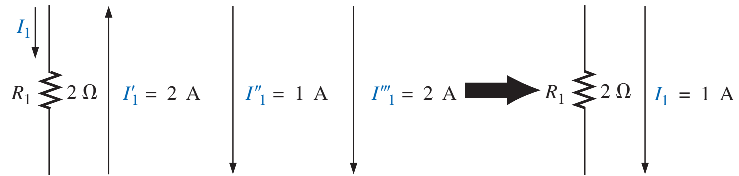


FIGURA 9.23
La corriente resultante I_1.

9.3 TEOREMA DE THÉVENIN

El **teorema de Thévenin** establece lo siguiente:

Cualquier red de corriente directa lineal bilateral de dos terminales puede ser reemplazada por un circuito equivalente que conste de una fuente de voltaje y un resistor en serie, como se muestra en la figura 9.24.

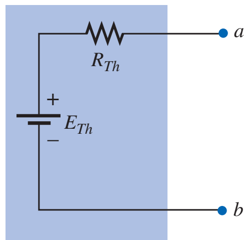


FIGURA 9.24
Circuito equivalente de Thévenin.

Por ejemplo, en la figura 9.25(a), la red dentro del recipiente tiene sólo dos terminales disponibles hacia el mundo exterior, rotuladas *a* y *b*. Es posible usar el teorema de Thévenin para reemplazar todo lo que hay en el recipiente con una fuente y un resistor, como se muestra en la figura 9.25(b), y mantener las mismas características en las terminales *a* y *b*. Esto es, de cualquier carga conectada a las terminales *a* y *b*, no se sabrá si está enganchada a la red de la figura 9.25(a) o a la de la figura 9.25(b). La carga recibirá la misma cantidad de corriente, voltaje y potencia desde cualquier configuración de la figura 9.25. Sin embargo, en todo el análisis que sigue, recuerde que:

el circuito equivalente de Thévenin proporciona una equivalencia sólo en las terminales —la construcción interna y las características de la red original y la equivalente Thévenin son usualmente muy diferentes.



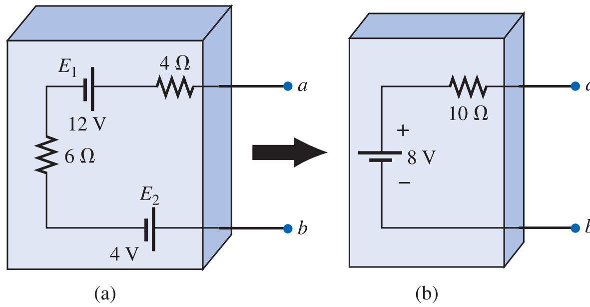


FIGURA 9.25
Efecto de aplicar el teorema de Thévenin.

Para la red de la figura 9.25(a), el circuito equivalente de Thévenin puede encontrarse directamente por la simple combinación de las baterías y los resistores en serie. Observe la exacta similitud de la red de la figura 9.25(b) con la configuración Thévenin de la figura 9.24. El método descrito en seguida permitirá extender el procedimiento recién aplicado a configuraciones más complejas e incluso terminar con la relativamente sencilla red de la figura 9.24.

En la mayoría de los casos, otros elementos estarán conectados a la derecha de las terminales *a* y *b* en la figura 9.25. Sin embargo, para aplicar el teorema, la red por ser reducida a la forma Thévenin equivalente debe ser aislada como se muestra en la figura 9.25, e identificar las dos terminales "sostenidas". Una vez determinado el apropiado circuito equivalente de Thévenin, el voltaje, la corriente, o las lecturas de resistencia entre las dos terminales "sostenidas" serán los mismos si el original o el circuito equivalente de Thévenin están conectados a la izquierda de las terminales *a* y *b* en la figura 9.25. Cualquier carga conectada a la derecha de las terminales *a* y *b* de la figura 9.25 recibirá el mismo voltaje o corriente con cualquier red.

Este teorema logra dos importantes objetivos. Primero, como fue cierto para todos los métodos descritos previamente, permite encontrar cualquier voltaje o corriente particular en una red lineal con una, dos o cualquier otro número de fuentes. Segundo, es posible concentrarse sobre una porción específica de una red reemplazando la red restante con un circuito equivalente. Por ejemplo, en la figura 9.26, al encontrar el circuito equivalente de Thévenin para la red que está en el área sombreada, es posible calcular rápidamente el cambio en corriente o voltaje en el resistor variable R_L por los diversos valores que puede tomar. Esto es demostrado en el ejemplo 9.6.

Francés
(Meaux, París)
(1857-1927)
Ingeniero telegrafista
Comandante y educador
École Polytechnique and École Supérieure de Télégraphie



Cortesía de la Bibliotèque École Polytechnique, París, Francia

Aunque activo en el estudio y diseño de sistemas telegráficos (inclusive transmisión subterránea), condensadores cilíndricos (capacitores), y electromagnetismo, Thévenin es más conocido por un teorema presentado primero en el *Journal of Physics —Theory and Applications* francés en 1883. Aparecido bajo el encabezado "Sur un nouveau théorème d'électricité dynamique" ("Sobre un nuevo teorema de electricidad dinámica"), originalmente se le denominó *teorema del generador equivalente.* Existe cierta evidencia de que un teorema similar fue presentado por Hermann von Helmholtz en 1853. Sin embargo, el profesor Helmholtz aplicó el teorema a la fisiología animal y no a sistemas de comunicación o generadores, y por tanto no recibió el crédito que merecía en este campo. En los primeros años de la década de 1920, AT&T llevó a cabo trabajos pioneros usando el circuito equivalente y pudo haber iniciado la referencia al teorema como simplemente el teorema de Thévenin. Edward L. Norton, en ese entonces un ingeniero en AT&T, introdujo una fuente de corriente equivalente del equivalente de Thévenin llamado comúnmente circuito equivalente de Norton. Aparte, el comandante Thévenin era un esquiador entusiasta y, de hecho, fue comisionado en una competencia internacional de esquí en Chamonix, Francia, en 1912.

Leon-Charles Thévenin.

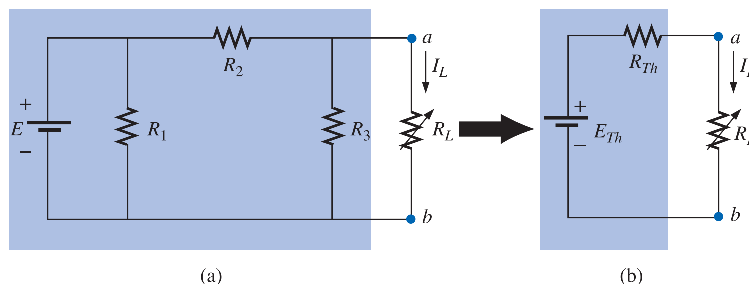
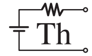


FIGURA 9.26
Sustitución del circuito de Thévenin equivalente para una red compleja.



Antes de examinar los pasos implicados en la aplicación de este teorema, es importante agregar algunas palabras a lo ya mencionado con el propósito de asegurar que las implicaciones del circuito equivalente de Thévenin queden claras. En la figura 9.26, toda la red, excepto R_L, va a ser reemplazada por un solo resistor y una batería en serie, como se muestra en la figura 9.24. Los valores de esos dos elementos del circuito equivalente de Thévenin deben ser seleccionados para asegurar que el resistor R_L reaccione a la red de la figura 9.26(a) de la misma manera que a la red de la figura 9.26(b). En otras palabras, la corriente o el voltaje en R_L deben ser los mismos en cualquier red para cualquier valor de R_L.

La siguiente secuencia de pasos conducirá al valor apropiado de R_{Th} y E_{Th}.

Preliminares:

1. ***Retire aquella porción de la red a través de la cual el circuito equivalente de Thévenin va a ser encontrado. En la figura 9.26(a), esto requiere que el resistor de carga R_L sea temporalmente retirado de la red.***
2. ***Marque las terminales de la restante red de dos terminales. (La importancia de este paso resultará obvia conforme se progrese hasta redes más complejas.)***

R_{Th}:

3. ***Calcule R_{Th} estableciendo primero todas las fuentes en cero (las fuentes de voltaje son reemplazadas por corto circuitos, y las fuentes de corriente por circuitos abiertos) y encontrando luego la resistencia resultante entre las dos terminales marcadas. (Si la resistencia interna de las fuentes de voltaje y/o corriente es incluida en la red original, debe permanecer cuando las fuentes son puestas en cero.)***

E_{Th}:

4. ***Calcule E_{Th} devolviendo primero todas las fuentes a sus posiciones originales y encontrando el voltaje de circuito abierto entre las terminales marcadas. (Este paso es el que invariablemente conducirá a los mayores errores y confusión. En todos los casos, recuerde que es el potencial de circuito abierto entre las dos terminales marcadas en el paso 2.)***

Conclusión:

5. ***Trace el circuito equivalente de Thévenin con la porción del circuito previamente retirado reemplazado entre las terminales del circuito equivalente. Este paso está indicado por la colocación del resistor R_L entre las terminales del circuito Thévenin equivalente, como se muestra en la figura 9.26(b).***

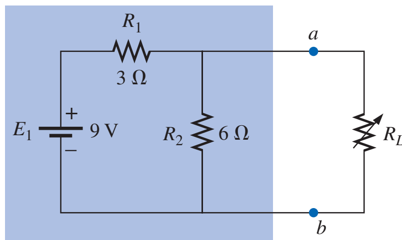


FIGURA 9.27
Ejemplo 9.6.

EJEMPLO 9.6 Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red ubicada en el área sombreada de la red de la figura 9.27. Luego encuentre la corriente a través de R_L para valores de 2 Ω, 10 Ω y 100 Ω.

Solución:

Los *pasos 1 y 2* producen la red de la figura 9.28. Observe que el resistor de carga R_L ha sido retirado y las dos terminales "sostenidas" han sido definidas como *a* y *b*.

Paso 3: Reemplazando la fuente de voltaje E_1 con un corto circuito equivalente se obtiene la red de la figura 9.29(a), donde:

$$R_{Th} = R_1 \parallel R_2 = \frac{(3\ \Omega)(6\ \Omega)}{3\ \Omega + 6\ \Omega} = \mathbf{2\ \Omega}$$

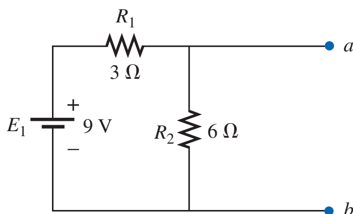


FIGURA 9.28
Identificación de las terminales de particular importancia al aplicar el teorema de Thévenin.



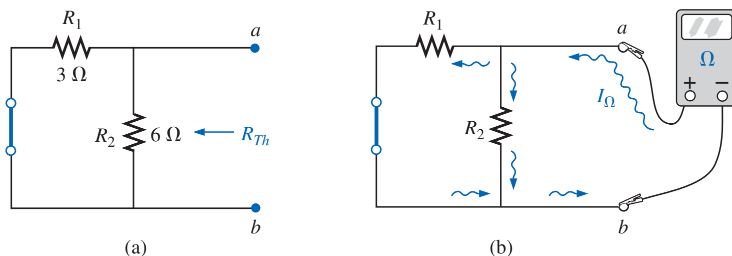


FIGURA 9.29
Determinación de R_{Th} para la red de la figura 9.28.

La importancia de las dos terminales marcadas comienza a ser más clara. Son las dos terminales a través de las cuales se mide la resistencia de Thévenin. Ya no es la resistencia total como es vista por la fuente, tal como se determinó en la mayoría de los problemas del capítulo 7. Si aparece alguna dificultad al determinar R_{Th} con respecto a si los elementos resistivos están en serie o en paralelo, recuerde que el ohmímetro envía una corriente pequeña a una combinación resistiva y percibe el nivel del voltaje resultante para establecer el nivel de resistencia medida. En la figura 9.29(b), la pequeña corriente del ohmímetro se aproxima a la red por la terminal *a*, y cuando llega a la unión de R_1 y R_2, se divide como se muestra. El hecho de que la corriente pequeña se divida y luego se recombine en el nodo inferior revela que los resistores están en paralelo por lo que a la lectura del ohmímetro corresponde. En esencia, la trayectoria de la corriente sensora del ohmímetro ha revelado cómo los resistores son conectados a las dos terminales de interés y cómo debe ser determinada la resistencia de Thévenin. Recuérdese lo anterior al estudiar los ejemplos de esta sección.

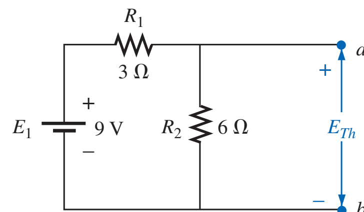


FIGURA 9.30
Determinación de E_{Th} para la red de la figura 9.28.

Paso 4: Reemplace la fuente de voltaje (Figura 9.30). Para este caso, el voltaje de circuito abierto E_{Th} es el mismo que la caída de voltaje en el resistor de 6 Ω. Aplicando la regla del divisor de voltaje,

$$E_{Th} = \frac{R_2 E_1}{R_2 + R_1} = \frac{(6\ \Omega)(9\ \text{V})}{6\ \Omega + 3\ \Omega} = \frac{54\ \text{V}}{9} = \mathbf{6\ V}$$

Es particularmente importante reconocer que E_{Th} es el potencial de circuito abierto entre los puntos *a* y *b*. Recuérdese que un circuito abierto puede tener cualquier voltaje en él, pero la corriente debe ser cero. De hecho, la corriente a través de cualquier elemento en serie con el circuito abierto debe ser también cero. El uso de un voltímetro para medir E_{Th} se aprecia en la figura 9.31. Observe que está colocado directamente en el resistor R_2 ya que E_{Th} y V_{R2} están en paralelo.

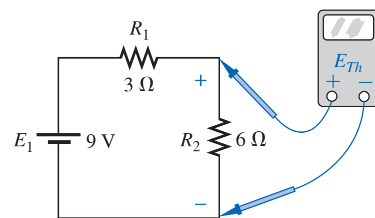


FIGURA 9.31
Medición de E_{Th} para la red de la figura 9.28.

Paso 5 (Figura 9.32):

$$I_L = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L}$$

$$R_L = 2\ \Omega: \quad I_L = \frac{6\ \text{V}}{2\ \Omega + 2\ \Omega} = \mathbf{1.5\ A}$$

$$R_L = 10\ \Omega: \quad I_L = \frac{6\ \text{V}}{2\ \Omega + 10\ \Omega} = \mathbf{0.5\ A}$$

$$R_L = 100\ \Omega: \quad I_L = \frac{6\ \text{V}}{2\ \Omega + 100\ \Omega} = \mathbf{0.059\ A}$$

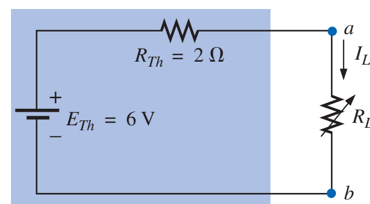


FIGURA 9.32
Sustitución del circuito equivalente de Thévenin para la red externa a R_L en la figura 9.27.

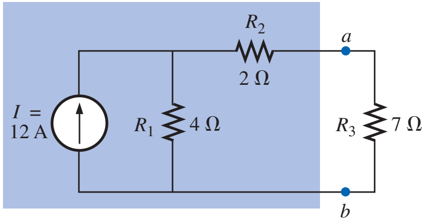


FIGURA 9.33
Ejemplo 9.7.

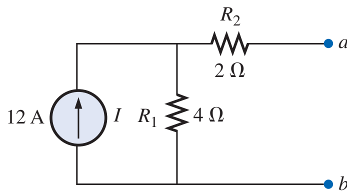


FIGURA 9.34
Establecimiento de las terminales de particular interés para la red de la figura 9.33.

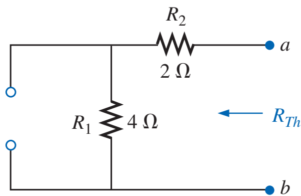


FIGURA 9.35
Determinación de R_{Th} para la red de la figura 9.34.

Si no se contase con el teorema de Thévenin, cada cambio en R_L requeriría que toda la red de la figura 9.27 fuese reexaminada para encontrar el nuevo valor de R_L.

EJEMPLO 9.7 Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red situada en el área sombreada de la red de la figura 9.33.

Solución:

Pasos 1 y 2 se muestran en la figura 9.34.

Paso 3 se muestra en la figura 9.35. La fuente de corriente ha sido reemplazada por un circuito abierto equivalente, y la resistencia determinada entre las terminales *a* y *b*.

En este caso, un ohmímetro conectado entre las terminales *a* y *b* enviaría una corriente sensora que fluiría directamente a través de R_1 y R_2 (al mismo nivel). El resultado es que R_1 y R_2 están en serie y la resistencia de Thévenin es la suma de las dos.

$$R_{Th} = R_1 + R_2 = 4\ \Omega + 2\ \Omega = \mathbf{6\ \Omega}$$

Paso 4 (Figura 9.36): En este caso, como existe un circuito abierto entre los dos terminales marcadas, la corriente es cero entre esas terminales y a través del resistor de 2 Ω. La caída de voltaje en R_2 es, por tanto,

$$V_2 = I_2R_2 = (0)R_2 = 0\ \text{V}$$

y $$E_{Th} = V_1 = I_1R_1 = IR_1 = (12\ \text{A})(4\ \Omega) = \mathbf{48\ V}$$

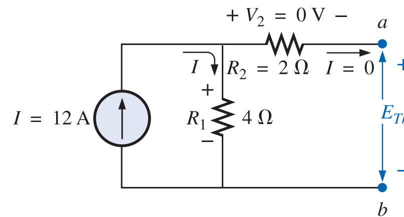


FIGURA 9.36
Determinación de E_{Th} para la red de la figura 9.34.

Paso 5 se muestra en la figura 9.37.

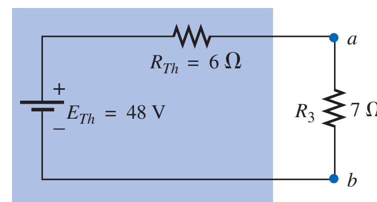


FIGURA 9.37
Sustitución del circuito equivalente de Thévenin en la red externa al resistor R_3 de la figura 9.33.

EJEMPLO 9.8 Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red ubicada en el área sombreada de la red de la figura 9.38. Observe en este ejemplo

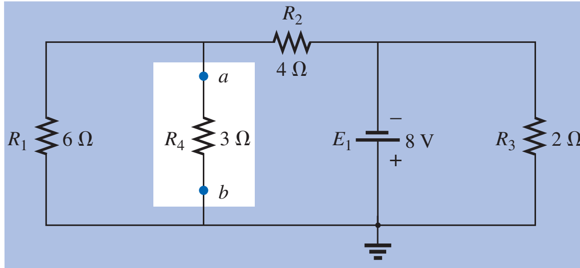


FIGURA 9.38
Ejemplo 9.8.

que no es necesario conservar la sección de la red en el "extremo" de la configuración.

Solución:

Pasos 1 y 2: Vea la figura 9.39.

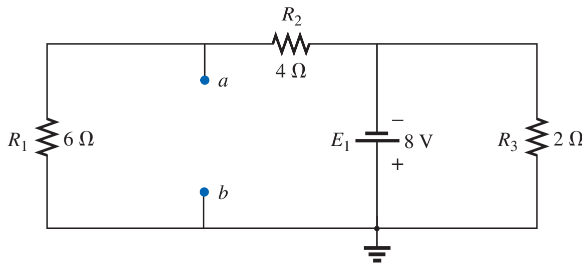


FIGURA 9.39
Identificación de las terminales de interés particular para la red de la figura 9.38.

Paso 3: Vea la figura 9.40. Los pasos 1 y 2 son relativamente fáciles de aplicar, pero ahora se debe ser cuidadoso para "sostenerse" sobre las terminales *a* y *b* cuando la resistencia y el voltaje Thévenin son determinados. En la figura 9.40, todos los elementos restantes resultan estar en paralelo, y la red puede trazarse de nuevo como se muestra.

$$R_{Th} = R_1 \parallel R_2 = \frac{(6\ \Omega)(4\ \Omega)}{6\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{24\ \Omega}{10} = \mathbf{2.4\ \Omega}$$

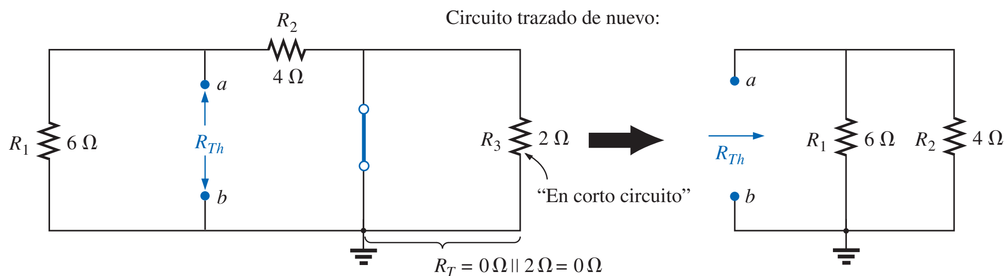
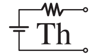


FIGURA 9.40
Determinación de R_{Th} para la red de la figura 9.39.



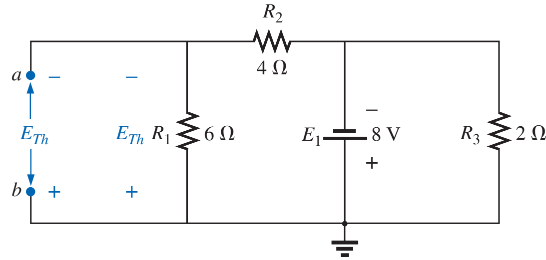


FIGURA 9.41
Determinación de E_{Th} para la red de la figura 9.39.

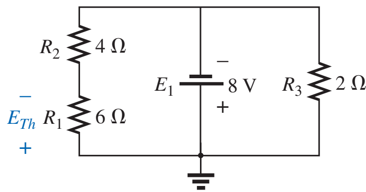


FIGURA 9.42
Red de la figura 9.41 trazada de nuevo.

Paso 4: Vea la figura 9.41. En este caso, la red se puede trazar de nuevo como se muestra en la figura 9.42, y como el voltaje es el mismo en los elementos que están en paralelo, el voltaje en los resistores en serie R_1 y R_2 es E_1, u 8 V. Aplicando la regla del divisor del voltaje,

$$E_{Th} = \frac{R_1E_1}{R_1 + R_2} = \frac{(6\ \Omega)(8\ \text{V})}{6\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{48\ \text{V}}{10} = \mathbf{4.8\ V}$$

Paso 5: Vea la figura 9.43.

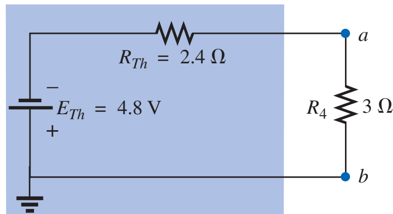


FIGURA 9.43
Sustitución del circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor R_4 de la figura 9.38.

La importancia de marcar las terminales debe ser obvia a partir del ejemplo 9.8. Observe que no hay un requisito acerca de que el voltaje de Thévenin tenga la misma polaridad que el circuito equivalente introducido originalmente.

EJEMPLO 9.9 Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red situada en el área sombreada de la red puente de la figura 9.44.

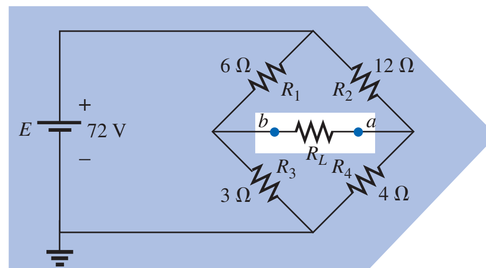


FIGURA 9.44
Ejemplo 9.9.

Solución:

Pasos 1 y 2 se muestran en la figura 9.45.

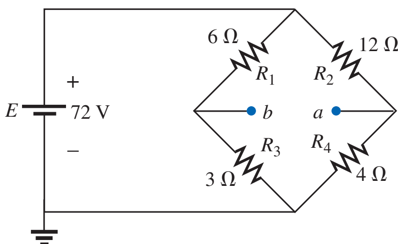
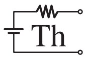


FIGURA 9.45
Identificación de las terminales de interés particular para la red de la figura 9.44.

Paso 3: Vea la figura 9.46. En este caso, el reemplazo del corto circuito de la fuente de voltaje E proporciona una conexión directa entre c y c' en la figura 9.46(a), permitiendo un "plegado" de la red alrededor de la línea horizontal de a-b para producir la configuración de la figura 9.46(b).

$$\begin{aligned} R_{Th} = R_{a\text{-}b} &= R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4 \\ &= 6\ \Omega \parallel 3\ \Omega + 4\ \Omega \parallel 12\ \Omega \\ &= 2\ \Omega + 3\ \Omega = \mathbf{5\ \Omega} \end{aligned}$$



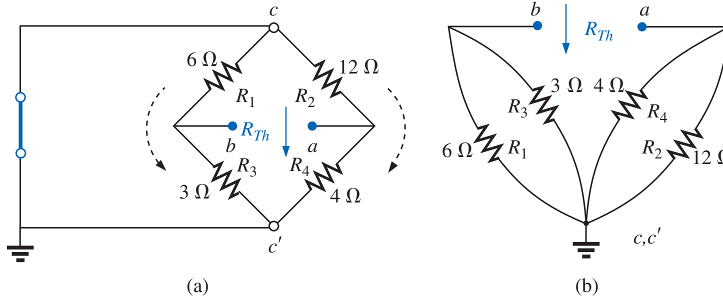


FIGURA 9.46
Resolución de R_{Th} para la red de la figura 9.45.

Paso 4: El circuito está trazado de nuevo en la figura 9.47. La ausencia de una conexión directa entre *a* y *b* resulta en una red con tres ramas paralelas. Los voltajes V_1 y V_2 pueden, por tanto, ser determinados usando la regla del divisor de voltaje:

$$V_1 = \frac{R_1 E}{R_1 + R_3} = \frac{(6\ \Omega)(72\ \text{V})}{6\ \Omega + 3\ \Omega} = \frac{432\ \text{V}}{9} = 48\ \text{V}$$

$$V_2 = \frac{R_2 E}{R_2 + R_4} = \frac{(12\ \Omega)(72\ \text{V})}{12\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{864\ \text{V}}{16} = 54\ \text{V}$$

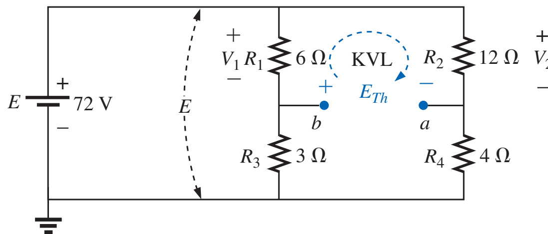


FIGURA 9.47
Determinación de E_{Th} para la red de la figura 9.45.

Asumir la polaridad mostrada para E_{Th} y aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff al lado superior en el sentido de las manecillas del reloj resultará en:

$$\Sigma_{\circlearrowright} V = +E_{Th} + V_1 - V_2 = 0$$

y
$$E_{Th} = V_2 - V_1 = 54\ \text{V} - 48\ \text{V} = \mathbf{6\ V}$$

Paso 5 se muestra en la figura 9.48.

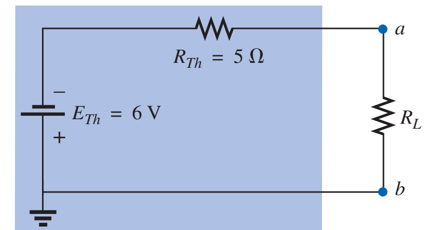


FIGURA 9.48
Sustitución del circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor R_L de la figura 9.44.

El teorema de Thévenin no está restringido a un solo elemento pasivo, como se mostró en los ejemplos anteriores, sino que puede ser aplicado a través de fuentes, ramas enteras, porciones de redes o cualquier configuración de circuito, como se muestra en el ejemplo siguiente. También es posible que uno de los métodos descritos previamente, como el análisis de mallas o el de superposición, tenga que ser usado para encontrar el circuito equivalente de Thévenin.

EJEMPLO 9.10 (Dos fuentes.) Encuentre el circuito Thévenin para la red ubicada dentro del área sombreada de la figura 9.49.

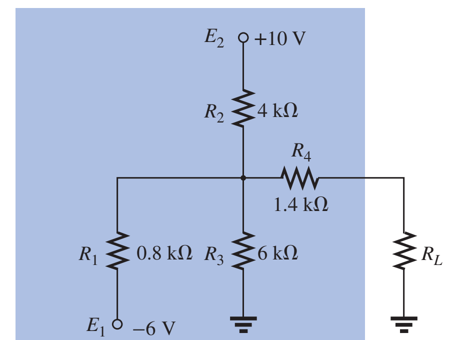
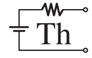


FIGURA 9.49
Ejemplo 9.10.



Solución: La red se traza nuevamente y los *pasos 1 y 2* se aplican como se muestra en la figura 9.50.

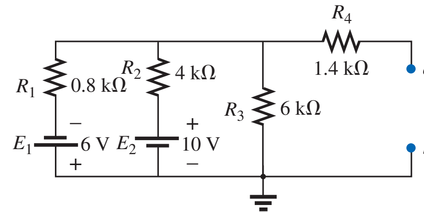


FIGURA 9.50
Identificación de las terminales de particular interés para la red de la figura 9.49.

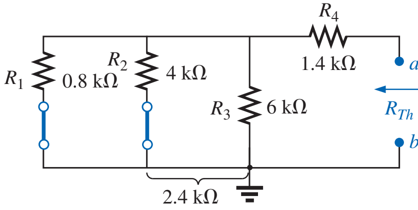


FIGURA 9.51
Determinación de R_{Th} para la red de la figura 9.50.

Paso 3: Vea la figura 9.51.

$$
\begin{aligned}
R_{Th} &= R_4 + R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 \\
&= 1.4\ \text{k}\Omega + 0.8\ \text{k}\Omega \parallel 4\ \text{k}\Omega \parallel 6\ \text{k}\Omega \\
&= 1.4\ \text{k}\Omega + 0.8\ \text{k}\Omega \parallel 2.4\ \text{k}\Omega \\
&= 1.4\ \text{k}\Omega + 0.6\ \text{k}\Omega \\
&= \mathbf{2\ k\Omega}
\end{aligned}
$$

Paso 4: Aplicando la superposición, primero se consideran los efectos de la fuente de voltaje E_1. Observe la figura 9.52. El circuito abierto requiere que $V_4 = I_4R_4 = (0)R_4 = 0$ V, y:

$$E'_{Th} = V_3$$

$$R'_T = R_2 \parallel R_3 = 4\ \text{k}\Omega \parallel 6\ \text{k}\Omega = 2.4\ \text{k}\Omega$$

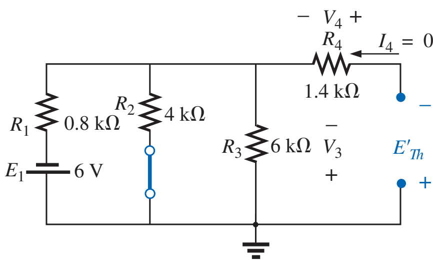


FIGURA 9.52
Determinación de la contribución a E_{Th} de la fuente E_1 para la red de la figura 9.50.

Aplicando la regla del divisor de voltaje,

$$V_3 = \frac{R'_T E_1}{R'_T + R_1} = \frac{(2.4\ \text{k}\Omega)(6\ \text{V})}{2.4\ \text{k}\Omega + 0.8\ \text{k}\Omega} = \frac{14.4\ \text{V}}{3.2} = 4.5\ \text{V}$$

$$E'_{Th} = V_3 = 4.5\ \text{V}$$

Para la fuente E_2, resultará la red de la figura 9.53. De nuevo, $V_4 = I_4R_4 = (0)R_4 = 0$ V, y:

$$E''_{Th} = V_3$$

$$R'_T = R_1 \parallel R_3 = 0.8\ \text{k}\Omega \parallel 6\ \text{k}\Omega = 0.706\ \text{k}\Omega$$

y $$V_3 = \frac{R'_T E_2}{R'_T + R_2} = \frac{(0.706\ \text{k}\Omega)(10\ \text{V})}{0.706\ \text{k}\Omega + 4\ \text{k}\Omega} = \frac{7.06\ \text{V}}{4.706} = 1.5\ \text{V}$$

$$E''_{Th} = V_3 = 1.5\ \text{V}$$

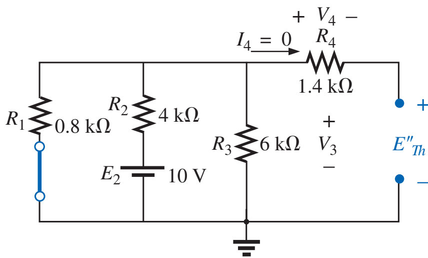


FIGURA 9.53
Determinación de la contribución a E_{Th} de la fuente E_2 para la red de la figura 9.50.

Como E'_{Th} y E''_{Th} tienen polaridades opuestas,

$$
\begin{aligned}
E_{Th} &= E'_{Th} - E''_{Th} \\
&= 4.5\ \text{V} - 1.5\ \text{V} \\
&= \mathbf{3\ V} \qquad (\text{polaridad de } E'_{Th})
\end{aligned}
$$

Paso 5: Vea la figura 9.54.

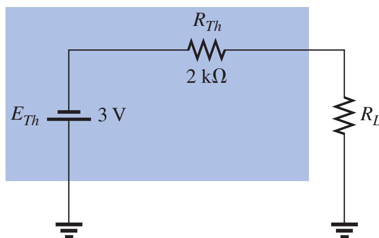


FIGURA 9.54
Sustitución del circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor R_L de la figura 9.49.

Procedimientos experimentales

Hay dos procedimientos experimentales populares para determinar los parámetros de una red Thévenin equivalente. El procedimiento para medir el voltaje Thévenin es el mismo para ambos, pero el enfoque para determinar la resistencia de Thévenin es por completo diferente en cada uno.

Medición directa de E_{Th} y R_{Th} Para cualquier red física, el valor de E_{Th} puede ser determinado experimentalmente midiendo el voltaje de circuito abierto en las terminales de carga, como se muestra en la figura 9.55; $E_{Th} = V_{oc} = V_{ab}$. El valor de R_{Th} puede entonces ser determinado completando la red con una R_L variable tal como el potenciómetro de la figura 9.56(b). R_L puede variarse entonces hasta que el voltaje que aparece en la carga es la mitad del valor del circuito abierto, o $V_L = E_{Th}/2$. Para el circuito en serie de la figura 9.56(a), cuando el voltaje de la carga es reducido a la mitad del nivel del circuito abierto, el voltaje en R_{Th} y R_L debe ser el mismo. Si leemos el valor de R_L [como se muestra en la figura 9.56(c)] que se obtuvo en los cálculos anteriores, tendremos también el valor de R_{Th}, ya que $R_L = R_{Th}$ si V_L es igual al voltaje en R_{Th}.

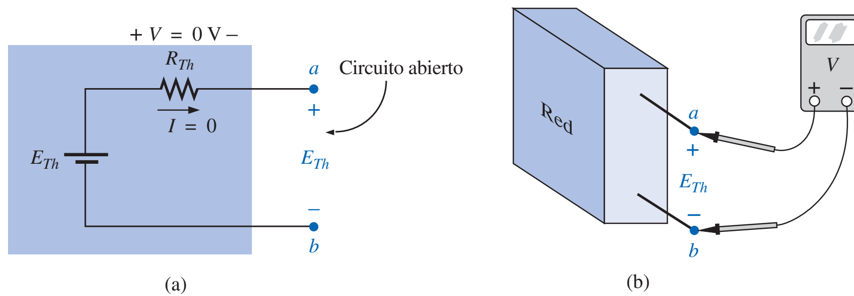


FIGURA 9.55
Determinación experimental de E_{Th}.

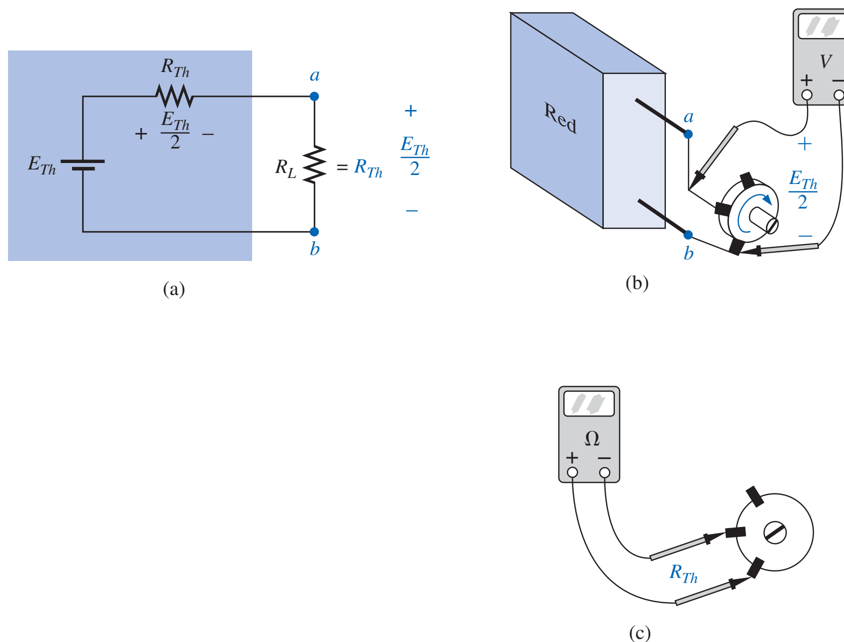
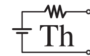


FIGURA 9.56
Determinación experimental de R_{Th}.

Medición de V_{oc} e I_{sc} El voltaje Thévenin es de nuevo determinado midiendo el voltaje de circuito abierto a través de las terminales de interés; esto es,



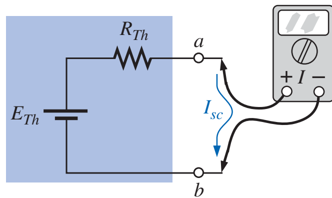


FIGURA 9.57
Medición de I_{sc}.

Estadounidense (Rockland, Maine; Summit, New Jersey)
(1898-1983)
Ingeniero electricista, científico, inventor y jefe de departamento de los Laboratorios Bell
Miembro: de la Acoustical Society y del Institute of Radio Engineers



Cortesía de los archivos de AT&T

Aunque interesado principalmente en la teoría de circuitos de comunicaciones y la transmisión de datos a altas velocidades sobre líneas telefónicas, Edward L. Norton es más recordado por el desarrollo del circuito dual del Thévenin equivalente, llamado *circuito equivalente de Norton*. En efecto, Norton y sus asociados en AT&T, a principios de la década de 1920 fueron reconocidos como algunos de los primeros en efectuar trabajos pioneros aplicando el circuito equivalente de Thévenin y quienes se refirieron a este concepto simplemente como teorema de Thévenin. En 1926 Norton propuso el circuito equivalente usando una fuente de corriente y un resistor paralelo como ayuda en el diseño de instrumentación grabadora que era impulsada principalmente por corriente. Él comenzó su carrera en teléfonos en 1922 en el Departamento de Ingeniería de la Western Electric Company, que luego se convirtió en los Laboratorios Bell. Sus áreas de investigación activa incluyeron teoría de redes, sistemas acústicos, aparatos electromagnéticos y transmisión de datos. Graduado en el MIT y en la Universidad Columbia, Norton obtuvo 19 patentes sobre sus trabajos.

Edward L. Norton.

$E_{Th} = V_{oc}$. Para determinar R_{Th}, se establece una condición de corto circuito a través de las terminales de interés, como se muestra en la figura 9.57, y la corriente que pasa por el corto circuito se mide con un amperímetro. Usando la ley de Ohm, se encuentra que la corriente en el corto circuito es determinada por:

$$I_{sc} = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}$$

y la resistencia de Thévenin por:

$$R_{Th} = \frac{E_{Th}}{I_{sc}}$$

Sin embargo, $E_{Th} = V_{oc}$ resultando la siguiente ecuación para R_{Th}:

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} \qquad \textbf{(9.2)}$$

9.4 TEOREMA DE NORTON

Fue demostrado en la sección 8.3 que toda fuente de voltaje con resistencia interna en serie tiene una fuente de corriente equivalente. La fuente de corriente equivalente de la red Thévenin (la cual, notará el lector, satisface las condiciones anteriores), como se muestra en la figura 9.58, puede ser determinada con el **teorema de Norton**. También puede encontrarse por medio de las conversiones de la sección 8.3.

El teorema establece lo siguiente:

Cualquier red de cd lineal bilateral de dos terminales puede ser reemplazada por un circuito equivalente que consista de una fuente de corriente y un resistor en paralelo, como se muestra en la figura 9.58.

El análisis del teorema de Thévenin con respecto al circuito equivalente puede también ser aplicado al circuito equivalente de Norton. Los pasos que conducen a los valores apropiados de I_N y R_N se dan a continuación.

Preliminares:

1. ***Retire aquella porción de la red a través de la cual se encuentra el circuito equivalente de Norton.***
2. ***Marque las terminales de la red de dos terminales restante.***

R_N:

3. ***Calcule R_N estableciendo primero todas las fuentes en cero (las fuentes de voltaje son reemplazadas por corto circuitos, y las fuentes de corriente por circuitos abiertos) y encontrando entonces la resistencia resultante entre las dos terminales marcadas. (Si la resistencia interna de las fuentes de voltaje y/o corriente se incluye en la red original, debe permanecer cuando las fuentes se establecen en cero.) Como $R_N = R_{Th}$, el procedimiento y el valor obtenido usando el enfoque descrito por el teorema de Thévenin determinará el valor apropiado de R_N.***

I_N:

4. ***Calcule I_N devolviendo primero todas las fuentes a su posición original y encontrando entonces la corriente en corto circuito entre las terminales marcadas. Es la misma corriente que sería medida por un amperímetro colocado entre las terminales marcadas.***

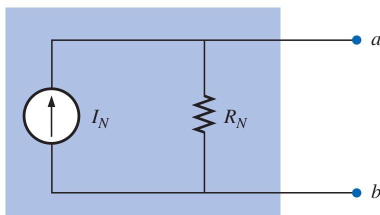


FIGURA 9.58
Circuito equivalente de Norton.



Conclusión:

5. Trace el circuito equivalente de Norton con la porción del circuito previamente retirado, reemplazada entre las terminales del circuito equivalente.

Los circuitos Norton y Thévenin equivalentes también pueden encontrarse uno a partir del otro usando la transformación de fuente examinada antes en este capítulo y reproducida en la figura 9.59.

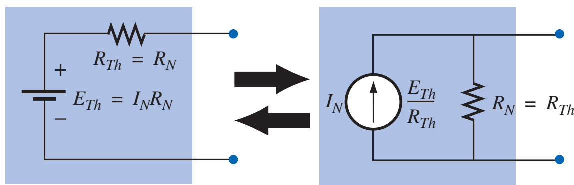


FIGURA 9.59
Conversión entre los circuitos Thévenin y Norton equivalentes.

EJEMPLO 9.11 Encuentre el circuito equivalente de Norton para la red ubicada en el área sombreada de la figura 9.60.

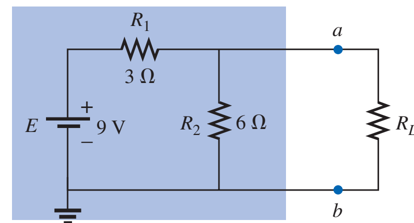


FIGURA 9.60
Ejemplo 9.11.

Solución:

Pasos 1 y 2 se muestran en la figura 9.61.

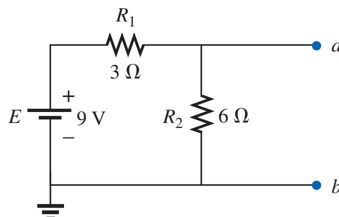


FIGURA 9.61
Identificación de las terminales de interés particular para la red de la figura 9.60.

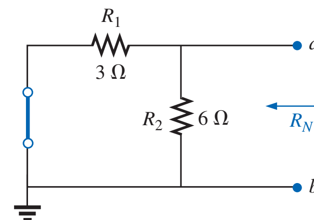


FIGURA 9.62
Determinación de R_N para la red de la figura 9.61.

Paso 3 se muestra en la figura 9.62, y:

$$R_N = R_1 \parallel R_2 = 3\ \Omega \parallel 6\ \Omega = \frac{(3\ \Omega)(6\ \Omega)}{3\ \Omega + 6\ \Omega} = \frac{18\ \Omega}{9} = \mathbf{2\ \Omega}$$

Paso 4 se muestra en la figura 9.63, indicando claramente que la conexión en corto circuito entre las terminales *a* y *b* está en paralelo con R_2 y elimina su efecto. I_N es, por tanto, la misma que a través de R_1, y el voltaje en pleno de la batería aparece en R_1 ya que:

$$V_2 = I_2 R_2 = (0)6\ \Omega = 0\ \text{V}$$

Por tanto,

$$I_N = \frac{E}{R_1} = \frac{9\ \text{V}}{3\ \Omega} = \mathbf{3\ A}$$

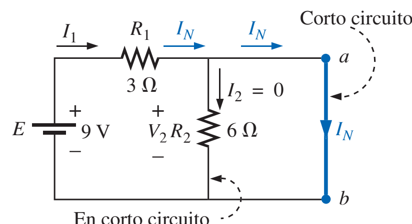


FIGURA 9.63
Determinación de I_N para la red de la figura 9.61.

Paso 5: Vea la figura 9.64. Este circuito es el mismo que el considerado primero en el desarrollo del teorema de Thévenin. Una simple conversión indica que los circuitos Thévenin son, de hecho, los mismos (Figura 9.65).

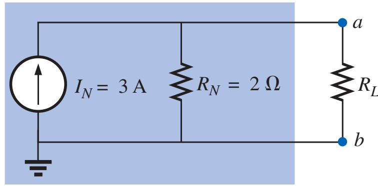


FIGURA 9.64
Sustitución del circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor R_L de la figura 9.60.

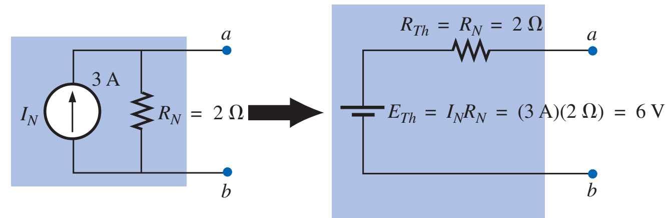


FIGURA 9.65
Conversión del circuito equivalente de Norton de la figura 9.64 a un circuito equivalente de Thévenin.

EJEMPLO 9.12 Encuentre el circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor de 9 Ω en la figura 9.66.

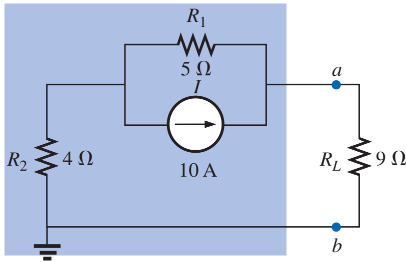


FIGURA 9.66
Ejemplo 9.12.

Solución:

Pasos 1 y 2: Vea la figura 9.67.

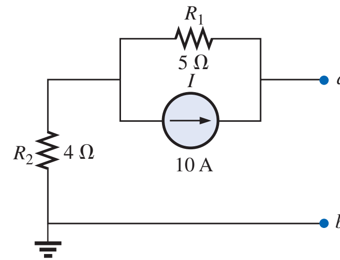


FIGURA 9.67
Identificación de las terminales de particular interés para la red de la figura 9.66.

Paso 3: Vea la figura 9.68, y:

$$R_N = R_1 + R_2 = 5\ \Omega + 4\ \Omega = \mathbf{9\ \Omega}$$

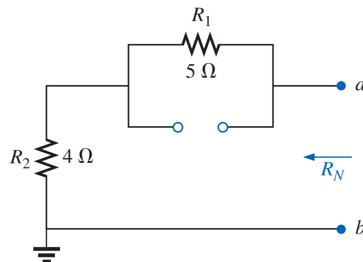


FIGURA 9.68
Determinación de R_N para la red de la figura 9.67.

Paso 4: Como se muestra en la figura 9.69, la corriente Norton es la misma que la corriente a través del resistor de 4 Ω. Aplicando la regla del divisor de corriente,

$$I_N = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = \frac{(5\ \Omega)(10\text{ A})}{5\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{50\text{ A}}{9} = \mathbf{5.556\text{ A}}$$

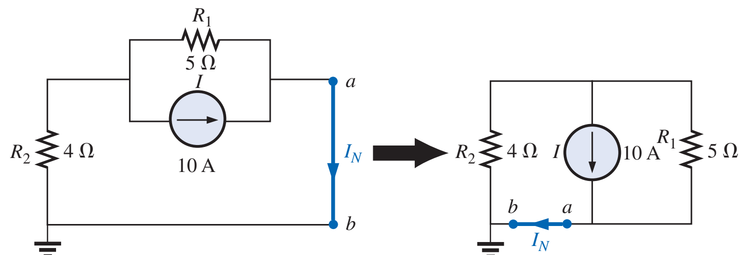
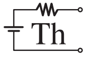


FIGURA 9.69
Determinación de I_N para la red de la figura 9.67.



Paso 5: Vea la figura 9.70.

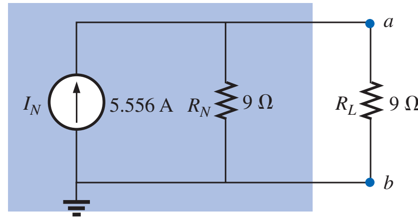


FIGURA 9.70
Sustitución del circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor R_L de la figura 9.66.

EJEMPLO 9.13 (Dos fuentes.) Encuentre el circuito equivalente de Norton para la porción de la red situada a la izquierda de *a-b* en la figura 9.71.

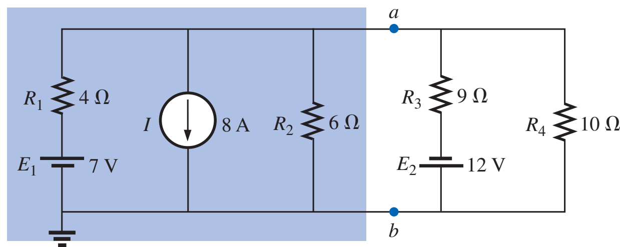


FIGURA 9.71
Ejemplo 9.13.

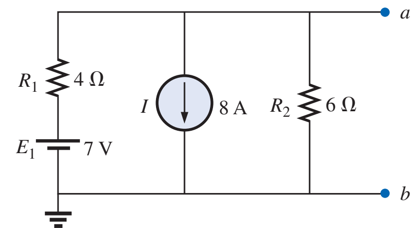


FIGURA 9.72
Identificación de las terminales de particular interés para la red de la figura 9.71.

Solución:

Pasos 1 y 2: Vea la figura 9.72.

Pasos 3 se muestra en la figura 9.73, y:

$$R_N = R_1 \parallel R_2 = 4\ \Omega \parallel 6\ \Omega = \frac{(4\ \Omega)(6\ \Omega)}{4\ \Omega + 6\ \Omega} = \frac{24\ \Omega}{10} = \mathbf{2.4\ \Omega}$$

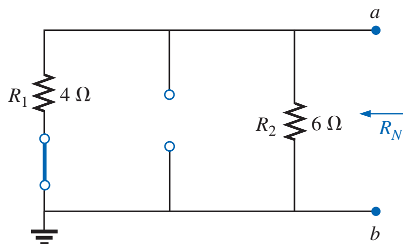


FIGURA 9.73
Determinación de R_N para la red de la figura 9.72.

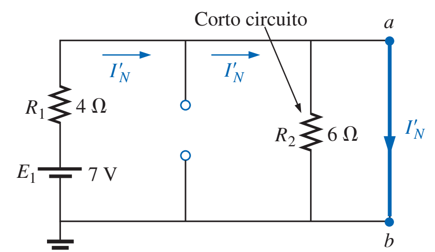
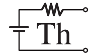


FIGURA 9.74
Determinación de la contribución a I_N por la fuente de voltaje E_1.

Paso 4: (Usando superposición.) Para la batería de 7 V (Figura 9.74),



$$I'_N = \frac{E_1}{R_1} = \frac{7\text{ V}}{4\ \Omega} = 1.75\text{ A}$$

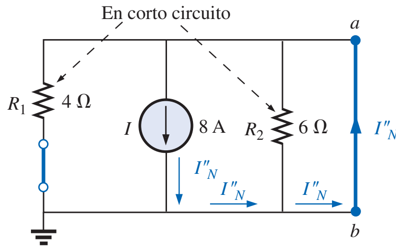


FIGURA 9.75
Determinación de la contribución a I_N de la fuente corriente I.

Para la fuente de 8 A (Figura 9.75), se encuentra que R_1 y R_2 han sido puestas en "corto circuito" mediante la conexión directa entre *a* y *b,* y:

$$I''_N = I = 8\text{ A}$$

El resultado es:

$$I_N = I''_N - I'_N = 8\text{ A} - 1.75\text{ A} = \mathbf{6.25\text{ A}}$$

Paso 5: Vea la figura 9.76.

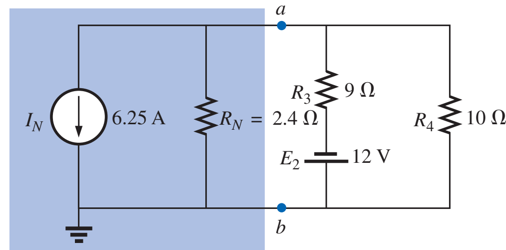


FIGURA 9.76
Sustitución del circuito equivalente de Norton para la red a la izquierda de las terminales a-b en la figura 9.71.

Procedimiento experimental

La corriente Norton se mide en la misma forma que la corriente en corto circuito de la red Thévenin. Como las resistencias Norton y Thévenin son las mismas, pueden emplearse procedimientos iguales a los descritos para la red Thévenin.

9.5 TEOREMA DE LA MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

El **teorema de la máxima transferencia de potencia** establece lo siguiente:

Una carga recibirá potencia máxima de una red de cd lineal bilateral cuando su valor resistivo total sea exactamente igual a la resistencia de Thévenin de la red como es "vista" por la carga.

Para la red de la figura 9.77, la potencia máxima será entregada a la carga cuando:

$$R_L = R_{Th} \tag{9.3}$$

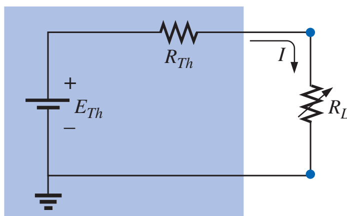


FIGURA 9.77
Definición de las condiciones para potencia máxima hacia una carga usando el circuito equivalente de Thévenin.

De los análisis anteriores, es posible darse cuenta de que un circuito equivalente de Thévenin puede ser encontrado a través de cualquier elemento o grupo de elementos en una red de cd lineal bilateral. Por tanto, al considerar el caso del circuito equivalente de Thévenin con respecto al teorema de la máxima transferencia de potencia, se estarán, en esencia, considerando los efectos *totales* de cualquier red a través de un resistor R_L, tal como en la figura 9.77.

Para el circuito equivalente de Norton de la figura 9.78, la potencia máxima será entregada a la carga cuando:

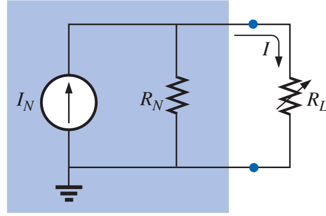


FIGURA 9.78
Definición de las condiciones para potencia máxima hacia una carga usando el circuito equivalente de Norton.

$$R_L = R_N \tag{9.4}$$

Este resultado [Ecuación (9.4)] será aprovechado al máximo en el análisis de redes de transistores, donde el modelo del transistor más frecuentemente aplicado emplea una fuente de corriente en vez de una fuente de voltaje.

Para la red de la figura 9.77,

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L}$$

y
$$P_L = I^2 R_L = \left(\frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L}\right)^2 R_L$$

de manera que:
$$P_L = \frac{E_{Th}^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2}$$

Ahora se considerará un ejemplo donde $E_{Th} = 60$ V y $R_{Th} = 9\ \Omega$, como se muestra en la figura 9.79.

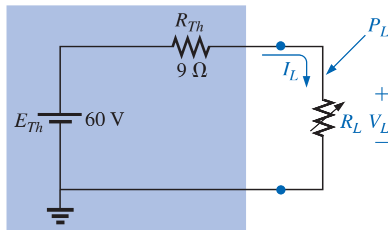


FIGURA 9.79
Red Thévenin equivalente usada para validar el teorema de transferencia de potencia máxima.

La potencia a la carga es determinada por:

$$P_L = \frac{E_{Th}^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2} = \frac{3600 R_L}{(9\ \Omega + R_L)^2}$$

con:
$$I_L = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{60\text{ V}}{9\ \Omega + R_L}$$

y
$$V_L = \frac{R_L(60\text{ V})}{R_{Th} + R_L} = \frac{R_L(60\text{ V})}{9\ \Omega + R_L}$$

Una tabulación de P_L para un intervalo de valores de R_L resulta en la tabla 9.1. Una gráfica de P_L contra R_L usando los datos de la tabla 9.1 dará la gráfica de la figura 9.80 para el intervalo $R_L = 0.1\ \Omega$ a $30\ \Omega$.



TABLA 9.1

R_L (Ω)	P_L (W)		I_L (A)		V_L (V)	
0.1	4.35		6.59		0.66	
0.2	8.51		6.52		1.30	
0.5	19.94		6.32		3.16	
1	36.00		6.00		6.00	
2	59.50		5.46		10.91	
3	75.00		5.00		15.00	
4	85.21		4.62		18.46	
5	91.84	Incremento	4.29	Disminución	21.43	Incremento
6	96.00		4.00		24.00	
7	98.44		3.75		26.25	
8	99.65 ↓		3.53 ↓		28.23 ↓	
9 (R_{Th})	**100.00 (Máximo)**		**3.33 ($I_{máx}/2$)**		**30.00 ($E_{Th}/2$)**	
10	99.72		3.16		31.58	
11	99.00		3.00		33.00	
12	97.96		2.86		34.29	
13	96.69		2.73		35.46	
14	95.27		2.61		36.52	
15	93.75		2.50		37.50	
16	92.16		2.40		38.40	
17	90.53	Disminución	2.31	Disminución	39.23	Incremento
18	88.89		2.22		40.00	
19	87.24		2.14		40.71	
20	85.61		2.07		41.38	
25	77.86		1.77		44.12	
30	71.00		1.54		46.15	
40	59.98		1.22		48.98	
100	30.30		0.55		55.05	
500	6.95		0.12		58.94	
1000	3.54 ↓		0.06 ↓		59.47 ↓	

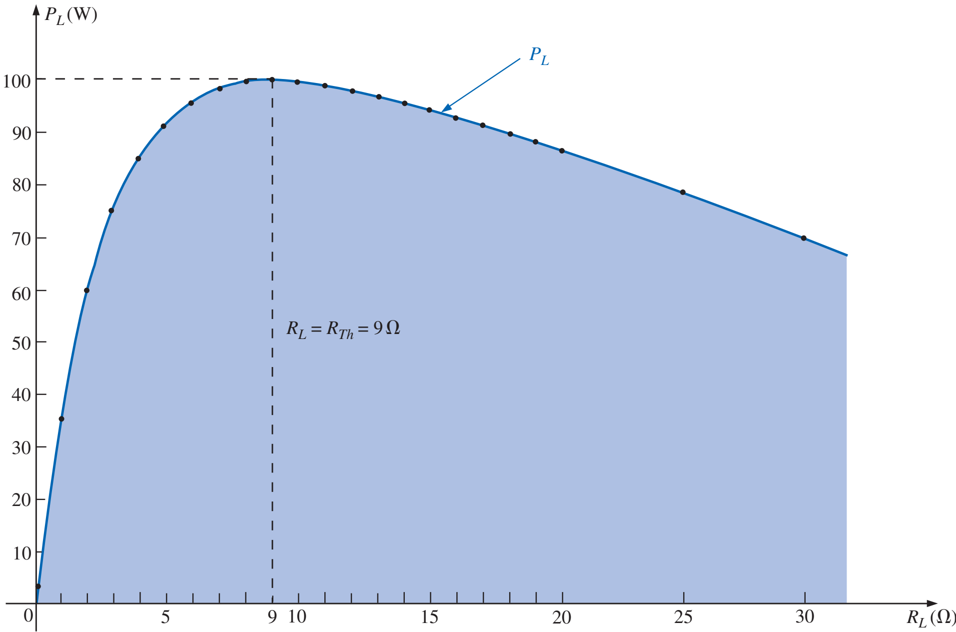


FIGURA 9.80
P_L en función de R_L para la red de la figura 9.79.

Observe, en particular, que P_L es, de hecho, un máximo cuando $R_L = R_{Th} = 9\ \Omega$. La curva de potencia crece más rápidamente hacia su valor máximo que lo que disminuye después de su punto máximo, revelando claramente que un pequeño cambio en la resistencia de la carga para valores de R_L por debajo de R_{Th} tendrá un efecto más considerable sobre la potencia entregada que cambios similares en R_L por arriba del valor R_{Th}.

Al trazar V_L e I_L en función de la misma escala de resistencia (Figura 9.81), se encuentra que ambos cambian no linealmente, con el voltaje terminal creciendo con un incremento en la resistencia de la carga conforme la corriente disminuye. Observe de nuevo que los cambios más considerables en V_L e I_L ocurren para valores de R_L menores que R_{Th}. Como se indica en la gráfica, cuando $R_L = R_{Th}$, $V_L = E_{Th}/2$ e $I_L = I_{máx}/2$, con $I_{máx} = E_{Th}/R_{Th}$.

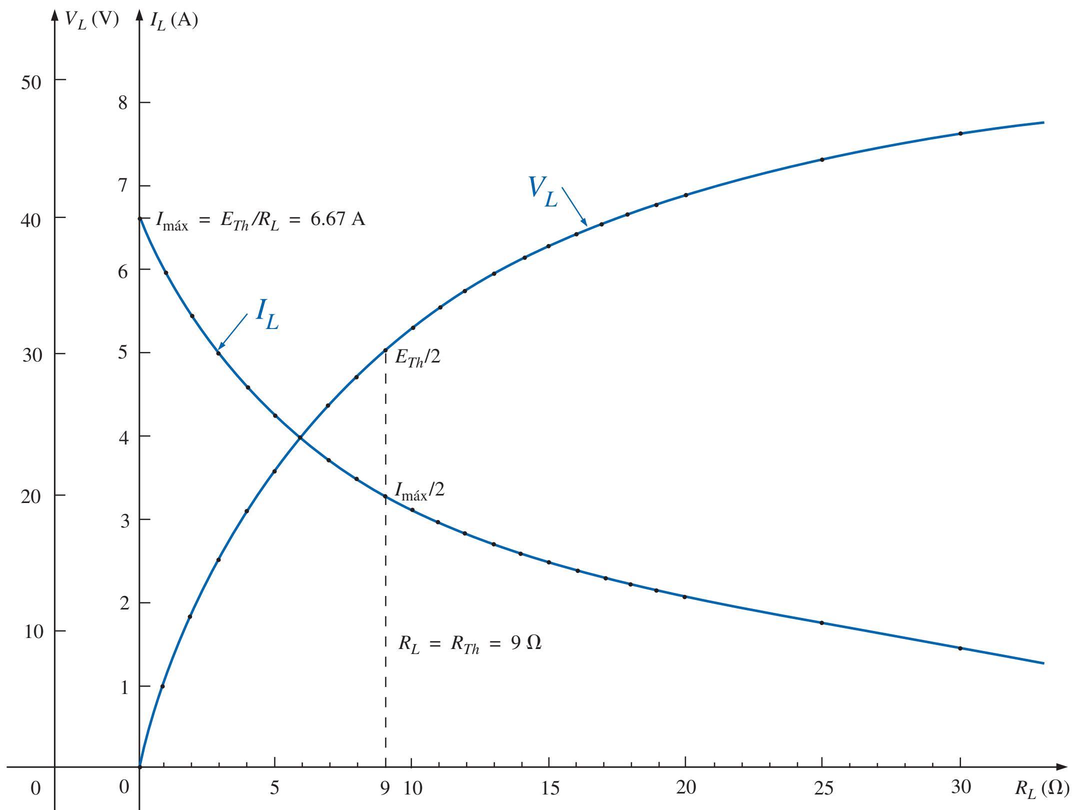


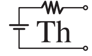
FIGURA 9.81
V_L e I_L en función de R_L para la red de la figura 9.79.

La eficiencia operativa en cd de un sistema está definida por la razón de la potencia entregada a la carga a la potencia suministrada por la fuente; esto es,

$$\eta\% = \frac{P_L}{P_s} \times 100\% \tag{9.5}$$

Para la situación definida por la figura 9.77,

$$\eta\% = \frac{P_L}{P_s} \times 100\% = \frac{I_L^2 R_L}{I_L^2 R_T} \times 100\%$$



y
$$\eta\% = \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} \times 100\%$$

Para una R_L que es pequeña comparada con R_{Th}, $R_{Th} \gg R_L$ y $R_{Th} + R_L \cong R_{Th}$, con:

$$\eta\% \cong \frac{R_L}{R_{Th}} \times 100\% = \underbrace{\left(\frac{1}{R_{Th}}\right)}_{\text{Constante}} R_L \times 100\% = kR_L \times 100\%$$

Por tanto, la eficiencia porcentual resultante será relativamente baja (ya que k es pequeña) y crecerá casi linealmente cuando R_L aumente.

Para situaciones donde la resistencia de la carga R_L es mucho mayor que R_{Th}, $R_L \gg R_{Th}$ y $R_{Th} + R_L \cong R_L$.

$$\eta\% = \frac{R_L}{R_L} \times 100\% = 100\%$$

Por tanto, la eficiencia crece lineal y considerablemente para niveles pequeños de R_L y luego comienza a nivelarse al acercarse al nivel de 100% para valores muy grandes de R_L, como se muestra en la figura 9.82. Sin embargo, recuerde que el criterio de la eficiencia es sensible sólo a la razón de P_L a P_s y no a sus niveles reales. A niveles de eficiencia cercanos al 100%, la potencia entregada a la carga puede ser tan pequeña que tenga poco valor práctico. Observe el bajo nivel de potencia a la carga en la tabla 9.1 cuando $R_L = 1000\ \Omega$, aun cuando el nivel de eficiencia será:

$$\eta\% = \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} \times 100\% = \frac{1000}{1009} \times 100\% = 99.11\%$$

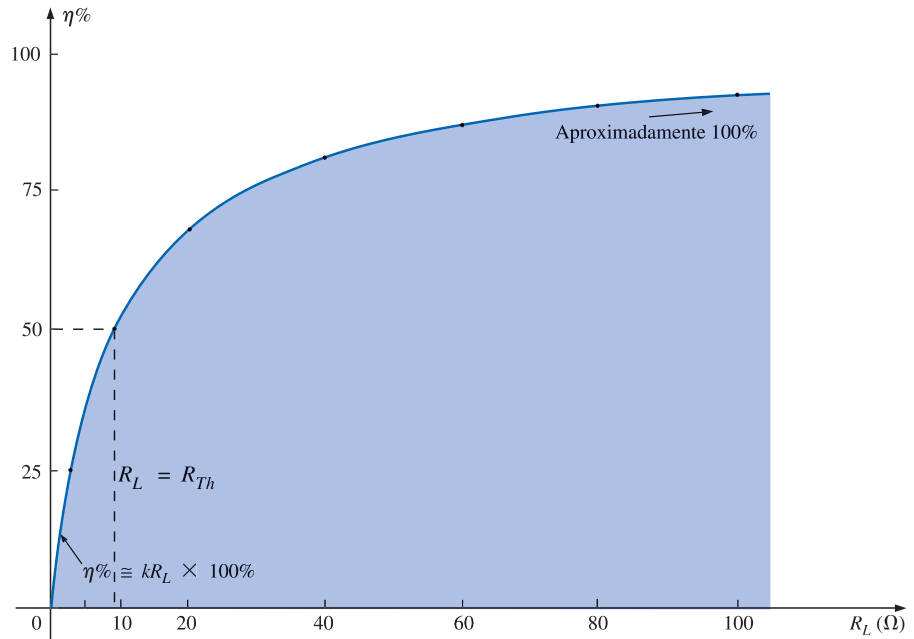


FIGURA 9.82
Eficiencia de operación en función de valores crecientes de R_L.

Cuando $R_L = R_{Th}$,

$$\eta\% = \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} \times 100\% = \frac{R_L}{2R_L} \times 100\% = \mathbf{50\%}$$

Por tanto, bajo condiciones de máxima transferencia de potencia, P_L es un máximo, pero la eficiencia en cd es de sólo 50%; esto es, sólo la mitad de la potencia entregada por la fuente está llegando a la carga.

Una eficiencia relativamente baja de 50% puede ser tolerada en situaciones donde los niveles de potencia son bajos, como en una amplia variedad de sistemas electrónicos. Sin embargo, cuando están implicados grandes niveles de potencia, como en estaciones generadoras, eficiencias de 50% no serán aceptables. De hecho, una gran cantidad de dinero e investigación se dedican a elevar la eficiencia de generación y transmisión unos cuantos puntos porcentuales. Elevar el nivel de eficiencia de una planta de energía de 10 mega kW de 94 a 95% (un incremento de 1%) puede ahorrar 0.1 mega kW, o 100 millones de watts, de potencia —¡un ahorro enorme!

Considérese un cambio en niveles de carga de 9 Ω a 20 Ω. En la figura 9.80, el nivel de potencia ha caído de 100 W a 85.61 W (una caída del 14.4%), pero la eficiencia ha crecido sustancialmente a 69% (un incremento del 38%), como se muestra en la figura 9.82. Por tanto, para cada aplicación, un punto de equilibrio debe identificarse donde la eficiencia es suficientemente alta sin reducir la potencia a la carga a niveles insignificantes.

La figura 9.83 es una gráfica semilogarítmica de P_L y la potencia entregada por la fuente $P_s = E_{Th}I_L$ en función de R_L para $E_{Th} = 60$ V y $R_{Th} = 9$ Ω. A Una gráfica semilogarítmica emplea una escala logarítmica y una escala lineal, como queda implicado por el prefijo *semi*, que significa *mitad*. Las escalas logarítmicas son analizadas con todo detalle en el capítulo 23. Por ahora, observe el amplio intervalo de R_L permitido usando la escala logarítmica comparado con las figuras 9.80 a la 9.82.

Es bastante claro ahora que la curva P_L tiene sólo un máximo (en $R_L = R_{Th}$), mientras P_s disminuye para todo aumento en R_L. Observe, en particular, que para niveles bajos de R_L, sólo una pequeña porción de la potencia entregada por la fuente llega a la carga. De hecho, aun cuando $R_L = R_{Th}$, la fuente está generando el doble de la potencia absorbida por la carga. Para valores de R_L mayores que R_{Th}, las dos curvas se acercan entre sí hasta que eventualmente forman, en esencia, una sola a niveles altos de R_L. Para el intervalo $R_L = R_{Th} = 9$ Ω a $R_L = 100$ Ω, P_L y P_s son relativamente cercanas en magnitud, lo cual sugiere que éste sería un intervalo apropiado de operación, ya que la mayoría de la potencia entregada por la fuente está llegando a la carga y los niveles de potencia son aún importantes.

La potencia entregada a R_L bajo condiciones de potencia máxima ($R_L = R_{Th}$) es:

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{E_{Th}}{2R_{Th}}$$

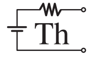
$$P_L = I^2R_L = \left(\frac{E_{Th}}{2R_{Th}}\right)^2 R_{Th} = \frac{E_{Th}^2 R_{Th}}{4R_{Th}^2}$$

y

$$\boxed{P_{L_{\text{máx}}} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}}} \quad \text{(watts, W)} \qquad \mathbf{(9.6)}$$

Para el circuito Norton de la figura 9.78,

$$\boxed{P_{L_{\text{máx}}} = \frac{I_N^2 R_N}{4}} \quad \text{(W)} \qquad \mathbf{(9.7)}$$



P (W)

400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10

$P_s = E_{Th} I_L$

$P_s = 2P_{L_{\text{máx}}}$
(en $R_L = R_{Th}$)

$R_L = R_{Th} = 9\ \Omega$

$P_{L_{\text{máx}}}$

P_L

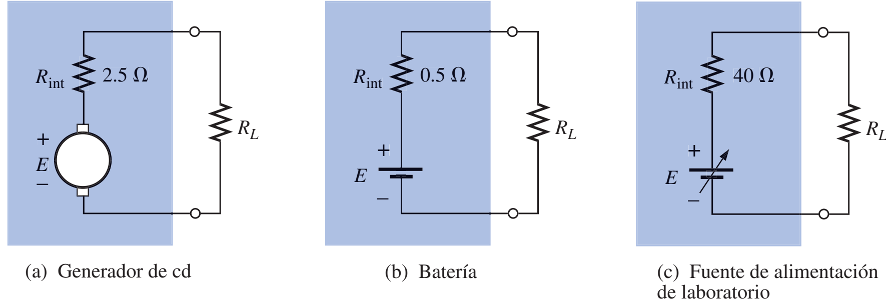
0.1 0.2 0.5 1 2 3 4 5 6 7 8 10 20 30 40 100 1000 $R_L(\Omega)$

$R_L = R_{Th} = 9\ \Omega$

FIGURA 9.83

P_s y P_L en función de R_L para la red de la figura 9.79.

EJEMPLO 9.14 Un generador de cd, una batería y una fuente de alimentación de laboratorio son conectados a una carga resistiva R_L en la figura 9.84(a), (b) y (c), respectivamente.



(a) Generador de cd (b) Batería (c) Fuente de alimentación de laboratorio

FIGURA 9.84
Ejemplo 9.14.

a. Para cada uno, determine el valor de R_L para la máxima transferencia de potencia a R_L.
b. Determine R_L para una eficiencia de 75%.

Soluciones:

a. Para el generador de cd,

$$R_L = R_{Th} = R_{int} = \mathbf{2.5\ \Omega}$$

Para la batería,

$$R_L = R_{Th} = R_{int} = \mathbf{0.5\ \Omega}$$

Para la fuente de alimentación de laboratorio,

$$R_L = R_{Th} = R_{int} = \mathbf{40\ \Omega}$$

b. Para el generador de cd,

$$\eta = \frac{P_o}{P_s} \qquad (\eta \text{ en forma decimal})$$

$$\eta = \frac{R_L}{R_{Th} + R_L}$$

$$\eta(R_{Th} + R_L) = R_L$$

$$\eta R_{Th} + \eta R_L = R_L$$

$$R_L(1 - \eta) = \eta R_{Th}$$

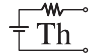
y

$$\boxed{R_L = \frac{\eta R_{Th}}{1 - \eta}} \qquad \mathbf{(9.8)}$$

$$R_L = \frac{0.75(2.5\ \Omega)}{1 - 0.75} = \mathbf{7.5\ \Omega}$$

Para la batería,

$$R_L = \frac{0.75(0.5\ \Omega)}{1 - 0.75} = \mathbf{1.5\ \Omega}$$



Para la fuente de alimentación de laboratorio,

$$R_L = \frac{0.75(40\ \Omega)}{1 - 0.75} = \mathbf{120\ \Omega}$$

Los resultados del ejemplo 9.14 revelan que la siguiente forma modificada del **teorema de la máxima transferencia de potencia** es válida:

Para cargas conectadas directamente a un suministro de voltaje de cd, la potencia máxima será entregada a la carga cuando la resistencia de la carga sea igual a la resistencia interna de la fuente; esto es, cuando:

$$R_L = R_{int} \tag{9.9}$$

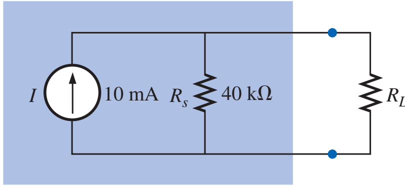


FIGURA 9.85
Ejemplo 9.15.

EJEMPLO 9.15 El análisis de una red con un transistor resultó en la configuración reducida de la figura 9.85. Determine la R_L necesaria para transferir la potencia máxima a R_L bajo esas condiciones.

Solución: Ecuación (9.4):

$$R_L = R_s = \mathbf{40\ k\Omega}$$

Ecuación (9.7):

$$P_{L_{máx}} = \frac{I_N^2 R_N}{4} = \frac{(10\ \text{mA})^2(40\ \text{k}\Omega)}{4} = \mathbf{1\ W}$$

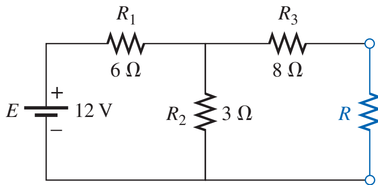


FIGURA 9.86
Ejemplo 9.16.

EJEMPLO 9.16 Para la red de la figura 9.86, determine el valor de R para la potencia máxima a R, y calcule la potencia entregada bajo esas condiciones.

Solución: Vea la figura 9.87.

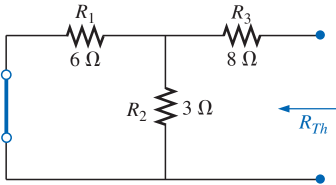


FIGURA 9.87
Determinación de R_{Th} para la red externa al resistor R de la figura 9.86.

$$R_{Th} = R_3 + R_1 \parallel R_2 = 8\ \Omega + \frac{(6\ \Omega)(3\ \Omega)}{6\ \Omega + 3\ \Omega} = 8\ \Omega + 2\ \Omega$$

y
$$R = R_{Th} = \mathbf{10\ \Omega}$$

Vea la figura 9.88.

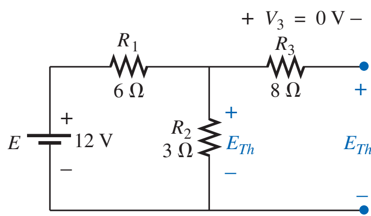


FIGURA 9.88
Determinación de E_{Th} para la red externa al resistor R de la figura 9.86.

$$E_{Th} = \frac{R_2 E}{R_2 + R_1} = \frac{(3\ \Omega)(12\ \text{V})}{3\ \Omega + 6\ \Omega} = \frac{36\ \text{V}}{9} = \mathbf{4\ V}$$

y, por la ecuación (9.6),

$$P_{L_{máx}} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{(4\ \text{V})^2}{4(10\ \Omega)} = \mathbf{0.4\ W}$$

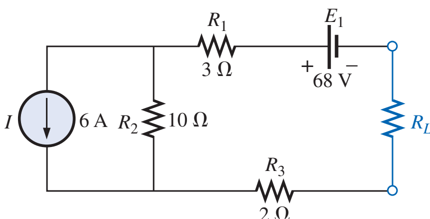


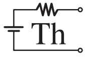
FIGURA 9.89
Ejemplo 9.17.

EJEMPLO 9.17 Encuentre el valor de R_L en la figura 9.89 para la potencia máxima a R_L, y determine la potencia máxima.

Solución: Vea la figura 9.90.

$$R_{Th} = R_1 + R_2 + R_3 = 3\ \Omega + 10\ \Omega + 2\ \Omega = 15\ \Omega$$

y
$$R_L = R_{Th} = \mathbf{15\ \Omega}$$



Observe la figura 9.91, donde:

$$V_1 = V_3 = 0\text{ V}$$

y $$V_2 = I_2R_2 = IR_2 = (6\text{ A})(10\ \Omega) = 60\text{ V}$$

Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff,

$$\Sigma_{\circlearrowleft} V = -V_2 - E_1 + E_{Th} = 0$$

y $$E_{Th} = V_2 + E_1 = 60\text{ V} + 68\text{ V} = 128\text{ V}$$

Entonces, $$P_{L_{\text{máx}}} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{(128\text{ V})^2}{4(15\ \Omega)} = \mathbf{273.07\ W}$$

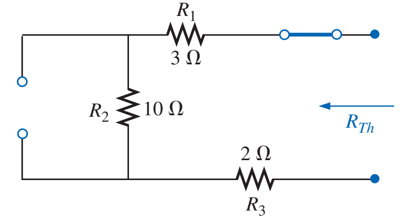


FIGURA 9.90
Determinación de R_{Th} para la red externa al resistor R_L de la figura 9.89.

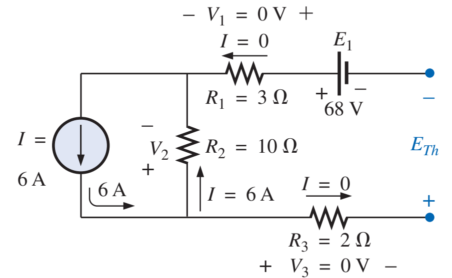


FIGURA 9.91
Determinación de E_{Th} para la red externa al resistor R_L de la figura 9.89.

9.6 TEOREMA DE MILLMAN

Por medio de la aplicación del **teorema de Millman**, cualquier número de fuentes de voltaje en paralelo puede ser reducido a una fuente. Por ejemplo, en la figura 9.92, las tres fuentes de voltaje pueden ser reducidas a una fuente. Esto permitiría encontrar la corriente o el voltaje en R_L sin tener que aplicar un método tal como el análisis de mallas, el análisis de nodos, la superposición, etc. El teorema puede ser descrito aplicándolo a la red de la figura 9.92. Básicamente, son tres pasos los incluidos en su aplicación.

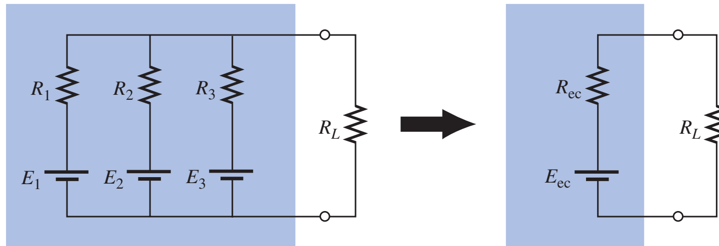


FIGURA 9.92
Demostración del efecto de aplicar el teorema de Millman.

Paso 1: Convierta todas las fuentes de voltaje a fuentes de corriente como se delineó en la sección 8.3. Esto se hace en la figura 9.93 para la red de la figura 9.92.

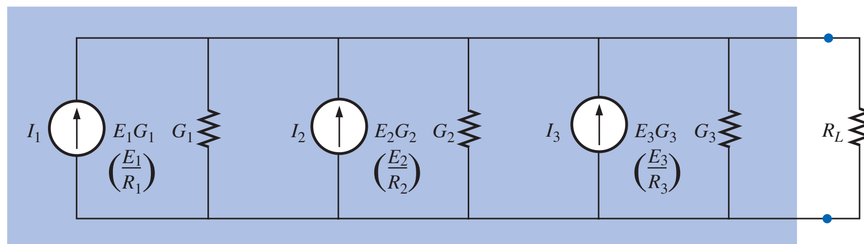
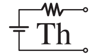


FIGURA 9.93
Conversión de todas las fuentes de la figura 9.92 a fuentes de corriente.



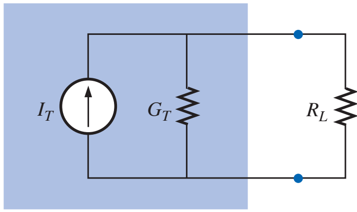


FIGURA 9.94
Reducción de todas las fuentes de corriente de la figura 9.93 a una sola fuente de corriente.

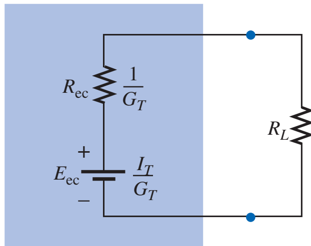


FIGURA 9.95
Conversión de la fuente de corriente de la figura 9.94 a una fuente de voltaje.

Paso 2: Combine las fuentes de corriente en paralelo como se describió en la sección 8.4. La red resultante se muestra en la figura 9.94, donde:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{y} \quad G_T = G_1 + G_2 + G_3$$

Paso 3: Convierta la fuente de corriente resultante a una fuente de voltaje, y se obtendrá la red deseada de una sola fuente, como se muestra en la figura 9.95.

En general, el teorema de Millman establece que para cualquier número de fuentes de voltaje en paralelo,

$$E_{ec} = \frac{I_T}{G_T} = \frac{\pm I_1 \pm I_2 \pm I_3 \pm \cdots \pm I_N}{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N}$$

o bien:

$$E_{ec} = \frac{\pm E_1G_1 \pm E_2G_2 \pm E_3G_3 \pm \cdots \pm E_NG_N}{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N} \qquad \textbf{(9.10)}$$

Los signos más y menos aparecen en la ecuación (9.10) para incluir aquellos casos donde las fuentes pueden no estar suministrando energía en la misma dirección. (Observe el ejemplo 9.18.)

La resistencia equivalente es:

$$R_{ec} = \frac{1}{G_T} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N} \qquad \textbf{(9.11)}$$

En términos de los valores de resistencia,

$$E_{ec} = \frac{\pm \frac{E_1}{R_1} \pm \frac{E_2}{R_2} \pm \frac{E_3}{R_3} \pm \cdots \pm \frac{E_N}{R_N}}{\quad} \qquad \textbf{(9.12)}$$

y

$$R_{ec} = \frac{1}{\quad} \qquad \textbf{(9.13)}$$

Los relativamente pocos pasos directos requeridos pueden resultar en la aplicación por el estudiante de cada paso en vez de memorizar y emplear las ecuaciones de la (9.10) a la (9.13).

EJEMPLO 9.18 Usando el teorema de Millman, encuentre la corriente y el voltaje en el resistor R_L de la figura 9.96.

Solución: Por la ecuación (9.12),

$$E_{ec} = \frac{+\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\quad}$$

El signo menos se usa para E_2/R_2 porque ese suministro tiene la polaridad opuesta de las otras dos fuentes. La dirección de referencia seleccionada es,

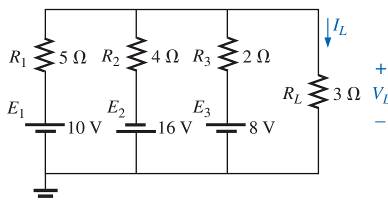
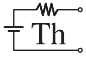


FIGURA 9.96
Ejemplo 9.18.



por tanto, la de E_1 y E_3. La conductancia total no es afectada por la dirección, y

$$E_{ec} = \frac{+\dfrac{10\text{ V}}{5\,\Omega} - \dfrac{16\text{ V}}{4\,\Omega} + \dfrac{8\text{ V}}{2\,\Omega}}{} = \frac{2\text{ A} - 4\text{ A} + 4\text{ A}}{0.2\text{ S} + 0.25\text{ S} + 0.5\text{ S}}$$

$$= \frac{2\text{ A}}{0.95\text{ S}} = \mathbf{2.105\ V}$$

con: $$R_{ec} = \frac{1}{\dfrac{1}{5\,\Omega} + \dfrac{1}{4\,\Omega} + \dfrac{1}{2\,\Omega}} = \frac{1}{0.95\text{ S}} = \mathbf{1.053\ \Omega}$$

La fuente resultante se muestra en la figura 9.97, y

$$I_L = \frac{2.105\text{ V}}{1.053\,\Omega + 3\,\Omega} = \frac{2.105\text{ V}}{4.053\,\Omega} = \mathbf{0.519\ A}$$

con: $$V_L = I_L R_L = (0.519\text{ A})(3\,\Omega) = \mathbf{1.557\ V}$$

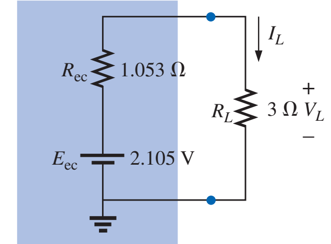


FIGURA 9.97
Resultado de aplicar el teorema de Millman a la red de la figura 9.96.

EJEMPLO 9.19 Ahora se considerará el tipo de problema encontrado en la introducción a los análisis de mallas y de nodos en el capítulo 8. El análisis de mallas fue aplicado a la red de la figura 9.98 (Ejemplo 8.12). Aquí se aplica el teorema de Millman para encontrar la corriente a través del resistor de 2 Ω y se compararán los resultados.

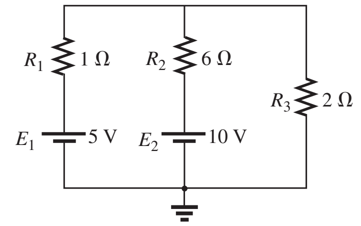


FIGURA 9.98
Ejemplo 9.19.

Soluciones:

a. Se aplica primero cada paso y, en la solución (b), la ecuación (9.12). Convirtiendo las fuentes se obtiene la figura 9.99. Combinando fuentes y ramas de conductancia en paralelo (Figura 9.100) resulta:

$$I_T = I_1 + I_2 = 5\text{ A} + \frac{5}{3}\text{ A} = \frac{15}{3}\text{ A} + \frac{5}{3}\text{ A} = \frac{20}{3}\text{ A}$$

$$G_T = G_1 + G_2 = 1\text{ S} + \frac{1}{6}\text{ S} = \frac{6}{6}\text{ S} + \frac{1}{6}\text{ S} = \frac{7}{6}\text{ S}$$

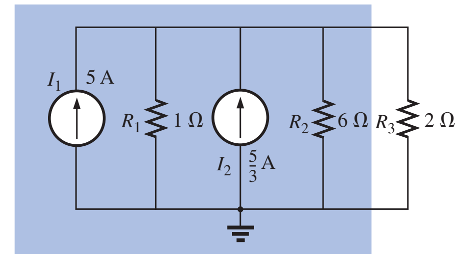


FIGURA 9.99
Conversión de las fuentes de la figura 9.98 a fuentes de corriente.

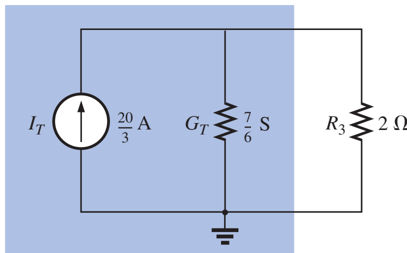


FIGURA 9.100
Reducción de las fuentes de corriente de la figura 9.99 a una sola fuente.

Convirtiendo la fuente de corriente a una fuente de voltaje (Figura 9.101) se obtiene:

$$E_{ec} = \frac{I_T}{G_T} = \frac{\dfrac{20}{3}\text{ A}}{} = \frac{(6)(20)}{(3)(7)}\text{ V} = \mathbf{\frac{40}{7}\ V}$$

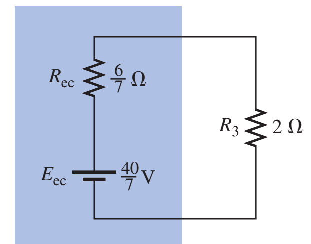


FIGURA 9.101
Conversión de la fuente de corriente de la figura 9.100 a una fuente de voltaje.

y
$$R_{ec} = \frac{1}{G_T} = \frac{1}{\frac{7}{6}\,\text{S}} = \mathbf{\frac{6}{7}\,\Omega}$$

de manera que:

$$I_{2\Omega} = \frac{E_{ec}}{R_{ec} + R_3} = \frac{\frac{40}{7}\,\text{V}}{\frac{6}{7}\,\Omega + 2\,\Omega} = \frac{\frac{40}{7}\,\text{V}}{\frac{6\,\Omega}{7} + \frac{14\,\Omega}{7}} = \frac{40\,\text{V}}{20\,\Omega} = \mathbf{2\,A}$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido en el ejemplo 8.18.

b. Ahora simplemente se aplica la ecuación apropiada, ecuación (9.12):

$$E_{ec} = \frac{+\frac{5\,\text{V}}{1\,\Omega} + \frac{10\,\text{V}}{6\,\Omega}}{\frac{1}{1\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega}} = \frac{\frac{30\,\text{V}}{6\,\Omega} + \frac{10\,\text{V}}{6\,\Omega}}{\frac{6}{6\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega}} = \mathbf{\frac{40}{7}\,V}$$

y

$$R_{ec} = \frac{1}{\frac{1}{1\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega}} = \frac{1}{\frac{6}{6\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega}} = \frac{1}{\frac{7}{6}\,\text{S}} = \mathbf{\frac{6}{7}\,\Omega}$$

que son los mismos valores obtenidos líneas arriba.

El dual del teorema de Millman (Figura 9.92) aparece en la figura 9.102. Puede demostrarse que I_{ec} y R_{ec}, como en la figura 9.102, están dadas por:

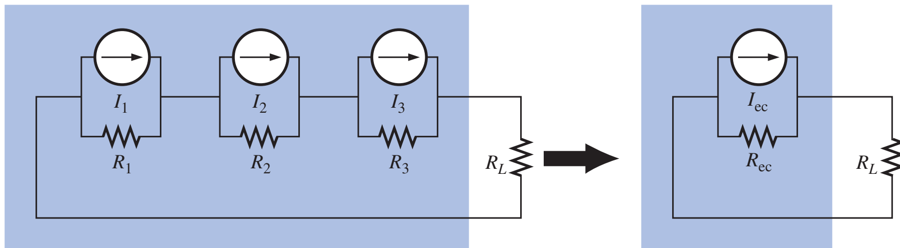


FIGURA 9.102
El efecto dual del teorema de Millman.

$$I_{ec} = \frac{\pm I_1R_1 \pm I_2R_2 \pm I_3R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad \textbf{(9.14)}$$

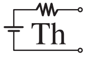
y
$$R_{ec} = R_1 + R_2 + R_3 \qquad \textbf{(9.15)}$$

La deducción aparecerá como un problema al final de este capítulo.

9.7 TEOREMA DE SUSTITUCIÓN

El **teorema de sustitución** establece lo siguiente:

Si el voltaje y la corriente a través de cualquier rama de una red de cd bilateral son conocidos, esta rama puede ser reemplazada por cualquier



combinación de elementos que mantendrá el mismo voltaje y la misma corriente a través de la rama escogida.

De manera más simple, el teorema establece que para la equivalencia de rama, el voltaje y la corriente en las terminales deben ser los mismos. Considere el circuito de la figura 9.103, en donde el voltaje y la corriente a través de la rama *a-b* están determinados. En la figura 9.104 se muestran varias ramas equivalentes *a-a′* obtenidas gracias al uso del teorema de sustitución.

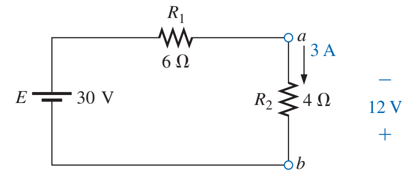


FIGURA 9.103
Demostración del efecto del teorma de sustitución.

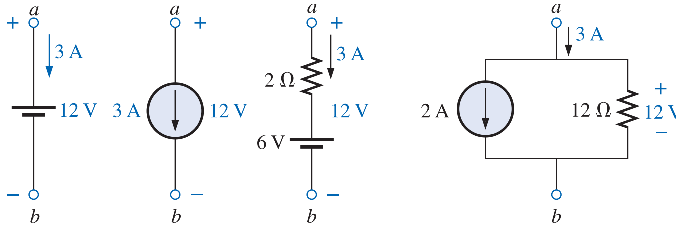


FIGURA 9.104
Ramas equivalentes para la rama a-b de la figura 9.103.

Observe que para cada rama equivalente, el voltaje en las terminales y la corriente son los mismos. También considere que la respuesta del resto del circuito de la figura 9.103 no cambia al sustituir cualquiera de las ramas equivalentes. Como se demostró para las ramas equivalentes de una sola fuente de la figura 9.104, *una diferencia de potencial y una de corriente conocidas en una red pueden ser reemplazadas por una fuente de voltaje y una fuente de corriente ideales, respectivamente*.

Debe comprenderse que este teorema no puede ser usado para *resolver* redes con dos o más fuentes que no estén en serie o en paralelo. Para aplicarlo, un valor de diferencia de potencial o de corriente debe ser conocido o encontrado usando una de las técnicas vistas antes. Una aplicación del teorema de sustitución se muestra en la figura 9.105. Observe que en la figura la diferencia de potencial conocida *V* fue reemplazada por una fuente de voltaje, permitiendo aislar la porción de red que incluye R_3, R_4 y R_5. Recuérdese que fue éste el enfoque empleado básicamente en el análisis de la red escalera al trabajar hacia atrás la resistencia terminal R_5.

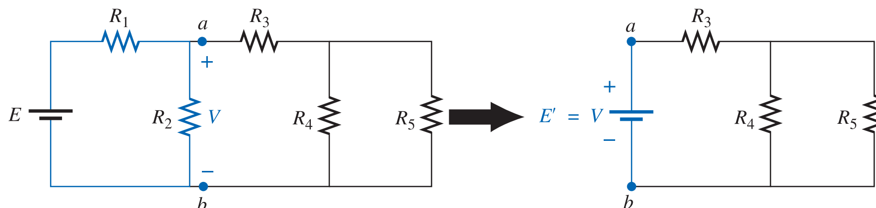
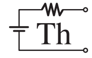


FIGURA 9.105
Demostración del efecto de conocer un voltaje en algún punto en una red compleja.

La equivalencia de la fuente de corriente de la red anterior se muestra en la figura 9.106, donde una corriente conocida es reemplazada por una fuente ideal de corriente, permitiendo aislar R_4 y R_5.



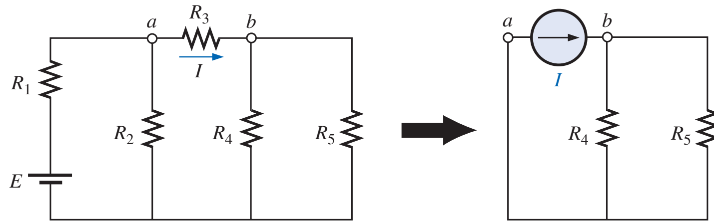


FIGURA 9.106
Demostración del efecto de conocer una corriente en algún punto en una red compleja.

El lector recordará también del análisis de las redes puente que $V = 0$ e $I = 0$ fueron reemplazados por un corto circuito y un circuito abierto, respectivamente. Esta sustitución es una aplicación muy específica del teorema de sustitución.

9.8 TEOREMA DE RECIPROCIDAD

El **teorema de reciprocidad** es aplicable sólo a redes de una sola fuente. No es, por tanto, un teorema empleado en el análisis de las redes multifuente descritas hasta ahora. El teorema establece lo siguiente:

La corriente I en cualquier rama de una red, debida a una sola fuente de voltaje E en cualquier otra parte de la red, será igual a la corriente a través de la rama en que la fuente estaba originalmente localizada si la fuente es colocada en la rama en que la corriente I se midió en un principio.

En otras palabras, la ubicación de la fuente de voltaje y la corriente resultante pueden ser intercambiadas sin que se registre un cambio en corriente. El teorema requiere que la polaridad de la fuente de voltaje tenga la misma correspondencia con la dirección de la corriente de rama en cada posición.

En la red representativa de la figura 9.107(a), la corriente I debida al voltaje fuente E fue determinada. Si la posición de cada fuente es intercambiada como se muestra en la figura 9.107(b), la corriente I tendrá el mismo valor como se indica. Para demostrar la validez de este enunciado y el teorema, considere la red de la figura 9.108, en donde se han asignado valores para los elementos de la figura 9.107(a).

La resistencia total es:

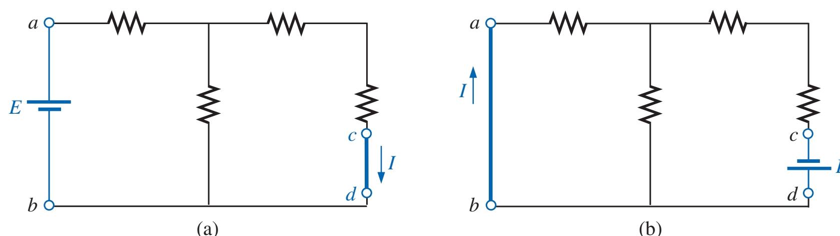


FIGURA 9.107
Demostración del impacto del teorema de reciprocidad.

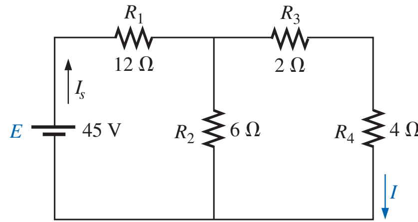


FIGURA 9.108
Determinación de la corriente I debida a una fuente E.

$$R_T = R_1 + R_2 \parallel (R_3 + R_4) = 12\ \Omega + 6\ \Omega \parallel (2\ \Omega + 4\ \Omega)$$
$$= 12\ \Omega + 6\ \Omega \parallel 6\ \Omega = 12\ \Omega + 3\ \Omega = 15\ \Omega$$

e
$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{45\ \text{V}}{15\ \Omega} = 3\ \text{A}$$

con:
$$I = \frac{3\ \text{A}}{2} = \mathbf{1.5\ A}$$

Para la red de la figura 9.109, que corresponde a la de la figura 9.107(b), se encuentra:

$$R_T = R_4 + R_3 + R_1 \parallel R_2$$
$$= 4\ \Omega + 2\ \Omega + 12\ \Omega \parallel 6\ \Omega = 10\ \Omega$$

e
$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{45\ \text{V}}{10\ \Omega} = 4.5\ \text{A}$$

de manera que:
$$I = \frac{(6\ \Omega)(4.5\ \text{A})}{12\ \Omega + 6\ \Omega} = \frac{4.5\ \text{A}}{3} = \mathbf{1.5\ A}$$

lo cual concuerda con lo anterior.

La singularidad y fuerza de un teorema tal pueden ser demostradas considerando una red compleja de una sola fuente como la que aparece en la figura 9.110.

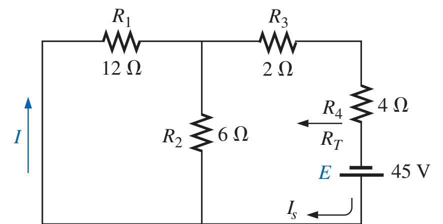


FIGURA 9.109
Intercambio de la ubicación de E e I de la figura 9.108 para demostrar la validez del teorema de reciprocidad.

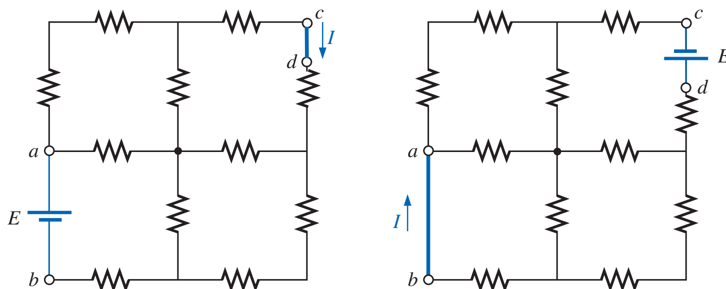
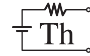


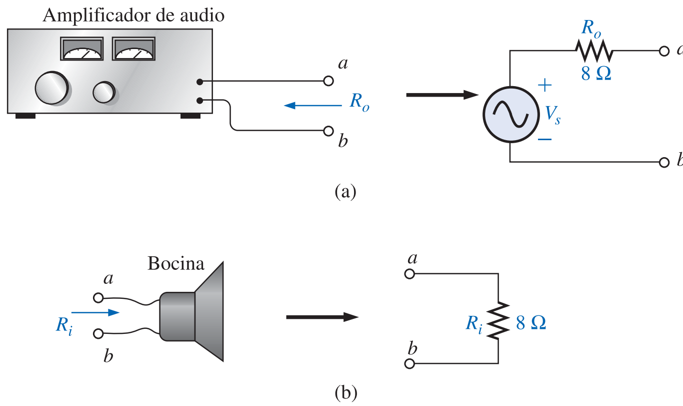
FIGURA 9.110
Demostración de la fuerza y la singularidad del teorema de reciprocidad.

9.9 APLICACIÓN

Sistema de bocinas

Una de las aplicaciones más comunes del teorema de máxima transferencia de potencia presentado en este capítulo es en sistemas de bocinas. Un amplificador de audio (amplificador con una gama de frecuencia concordante con la





Altavoz para graves de 4" de 8 Ω
5 W (rms)
10 W (máx)

(c)

FIGURA 9.111
Componentes de un sistema de bocina: (a) amplificador; (b) bocina; (c) unidad disponible comercialmente.

gama típica del oído humano) cuya impedancia de salida es de 8 Ω se muestra en la figura 9.111(a). La *impedancia* es un término aplicado a la oposición en redes de ca —por ahora debe considerarse como un valor de resistencia—. La impedancia puede conceptualizarse también como la resistencia interna de la fuente que normalmente se muestra en serie con el voltaje fuente, como se muestra en la misma figura. Cada bocina tiene una resistencia interna que puede ser representada como se muestra en la figura 9.111(b) para una bocina estándar de 8 Ω. La figura 9.111(c) es una fotografía de un altavoz de 8 Ω para graves (frecuencias muy bajas) comercialmente disponible. El propósito principal de la siguiente argumentación es arrojar luz sobre cómo puede ser distribuida la potencia de audio y cuál enfoque sería el más efectivo.

Como el teorema de potencia máxima establece que la impedancia de la carga debe equiparar la impedancia de la fuente para tener una transferencia de potencia máxima, se considerará primero el caso de una sola bocina de 8 Ω como se muestra en la figura 9.112(a) con un voltaje amplificado aplicado de 12 V. Como el voltaje aplicado se divide en forma equitativa, el voltaje de la bocina es de 6 V, y la potencia a la bocina es un valor máximo de $P = V^2/R = (6\text{ V})^2/8\ \Omega = 4.5$ W.

Si se tienen dos bocinas de 8 Ω que se desea conectar, existe la opción de conectarlas en serie o en paralelo. Para la configuración en serie de la figura 9.112(b), la corriente resultante sería $I = E/R = 12\text{ V}/24\ \Omega = 500$ mA, y la potencia a cada bocina sería $P = I^2R = (500\text{ mA})^2(8\ \Omega) = 2$ W, que es una caída de más de 50% desde el nivel de salida máxima de 4.5 W. Si las bocinas están conectadas en paralelo como se muestra en la figura 9.112(c), la resistencia total de la combinación en paralelo es de 4 Ω, y el voltaje en cada bocina, según la regla del divisor de voltaje, será de 4 V. La potencia a cada bocina es $P = V^2/R = (4\text{ V})^2/8\ \Omega = 2$ W que, resulta bastante interesante, es la misma potencia entregada a cada bocina ya sea que esté en serie o en paralelo. Sin embargo, normalmente se elige el arreglo en paralelo por varias razones. Primero, cuando las bocinas están conectadas en paralelo, si un alambre se desconecta de una de las bocinas debido simplemente a la vibración causada por el sonido emitido, las otras bocinas continuarán operando, tal vez no a máxima eficiencia, pero estarán operando. Si están en serie, todas dejarán de operar. Una segunda razón se relaciona con el procedimiento general de cableado. Cuando todas las bocinas están en paralelo, desde distintos puntos en una habitación, todos los alambres rojos pueden ser conectados juntos y todos los

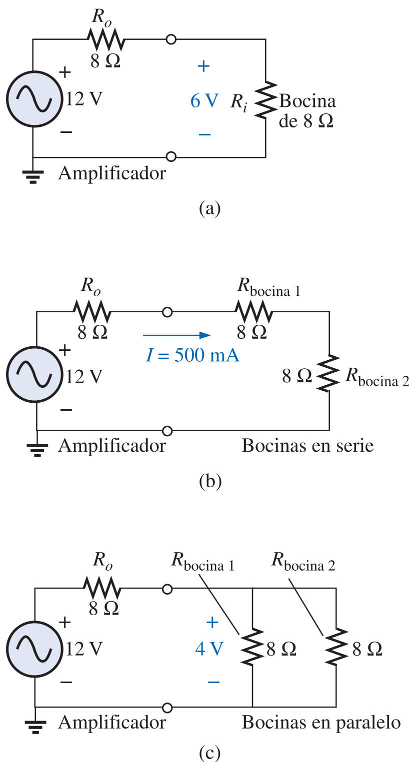


FIGURA 9.112
Conexiones de una bocina: (a) unidad simple; (b) en serie; (c) en paralelo.

alambres negros también. Si las bocinas están en serie, y si se tiene un grupo de alambres rojos y negros en el sótano, primero habrá que determinar cuáles alambres van con qué bocinas.

Las bocinas están disponibles también con impedancias de entrada de 4 Ω y 16 Ω. Si se sabe que la impedancia de salida es de 8 Ω, la compra de cualesquiera dos bocinas de 4 Ω o de dos bocinas de 16 Ω resultará en potencia máxima a las bocinas como se muestra en la figura 9.113. Las bocinas de 16 Ω se conectarían en paralelo y las bocinas de 4 Ω en serie para establecer una impedancia total de la carga de 8 Ω.

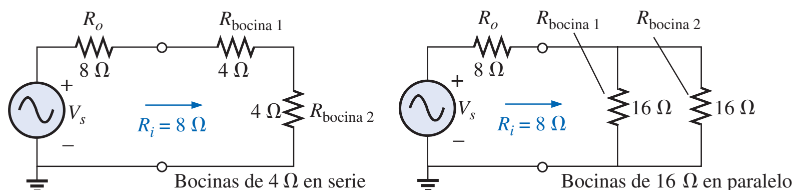


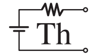
FIGURA 9.113
Aplicación de bocinas de 4 Ω y 16 Ω a un amplificador con impedancia de salida de 8 Ω.

En todo caso, siempre debe tratarse de equiparar la resistencia total de la carga de la bocina a la resistencia de salida de la fuente que la alimenta. Sí, una bocina de 4 Ω puede colocarse en serie con una combinación en paralelo de bocinas de 8 Ω para una máxima transferencia de potencia desde la fuente que las alimenta ya que la resistencia total será de 8 Ω. Sin embargo, la distribución de potencia no será igual, con la bocina de 4 Ω recibiendo 2.25 W y las bocinas de 8 Ω recibiendo cada una 1.125 W para un total de 4.5 W. La bocina de 4 Ω está entonces recibiendo el doble de potencia de audio que las bocinas de 8 Ω, y esta diferencia puede causar distorsión o desequilibrio en el área de audición.

Todas las bocinas tienen niveles máximos y mínimos. Una bocina de 50 W está clasificada para una potencia máxima de salida de 50 W y proporcionará ese nivel sobre demanda. Sin embargo, para que funcione apropiadamente, es probable que necesite operar por lo menos al nivel de 1 a 5 W. Una bocina de 100 W necesita, por lo regular, entre 5 y 10 W de potencia para operar apropiadamente. También es importante darse cuenta de que niveles de potencia menores que el valor nominal (como 40 W para la bocina de 50 W) no resultarán en un incremento de la distorsión, sino simplemente en una pérdida de volumen. Sin embargo, se tendrá distorsión si se excede el nivel de potencia nominal. Por ejemplo, si se aplican 2.5 W a una bocina de 2 W, definitivamente habrá distorsión. Sin embargo, la aplicación de 1.5 W resultará en un menor volumen. Una regla empírica relativa a niveles de audio establece que el oído humano puede percibir cambios en un nivel de audio sólo si se duplica la potencia aplicada [un incremento de 3 dB; los decibeles (dB) se estudiarán en el capítulo 23]. El efecto de duplicación es siempre con respecto al nivel inicial. Por ejemplo, si el nivel original es de 2 W, el lector tendría que ir a 4 W para notar el cambio. Si comenzase en 10 W, se tendría que ir a 20 W para apreciar el incremento en volumen. Una excepción a lo anterior ocurre a niveles muy bajos o muy altos de potencia. Por ejemplo, un cambio de 1 a 1.5 W puede ser discernible, justo como un cambio de 50 a 80 W puede ser notable.

9.10 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

Una vez que se entiende la mecánica de cómo aplicar un paquete o lenguaje de software, se presenta la oportunidad de ser creativo e innovador. A través de



años de experiencias de ensayo y error, los programadores desarrollaron un catálogo de técnicas innovadoras que no sólo son funcionales sino también muy interesantes y de naturaleza verdaderamente artística. Ahora que algunas de las operaciones básicas asociadas con PSpice han sido presentadas, en los ejemplos que siguen se realizarán unas cuantas maniobras innovadoras.

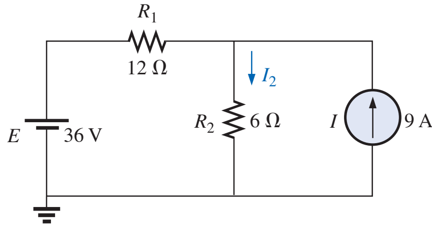


FIGURA 9.114
Aplicación de PSpice para determinar la corriente I_2 usando superposición.

PSpice

Superposición Se aplicará ahora el método de superposición a la red de la figura 9.114, que apareció antes como figura 9.10 en el ejemplo 9.3, para permitir una comparación de soluciones resultantes. La corriente a través de R_2 va a ser determinada. Usando los métodos descritos en capítulos previos para la aplicación de PSpice, resultará la red de la figura 9.115 para determinar el efecto de la fuente de voltaje de 36 V. Observe que **VDC** e **IDC** (invertidos verticalmente) aparecen en la red. Sin embargo, la fuente de corriente fue establecida a cero seleccionando la fuente y cambiando su valor a 0 A en el cuadro de diálogo **Display Properties**.

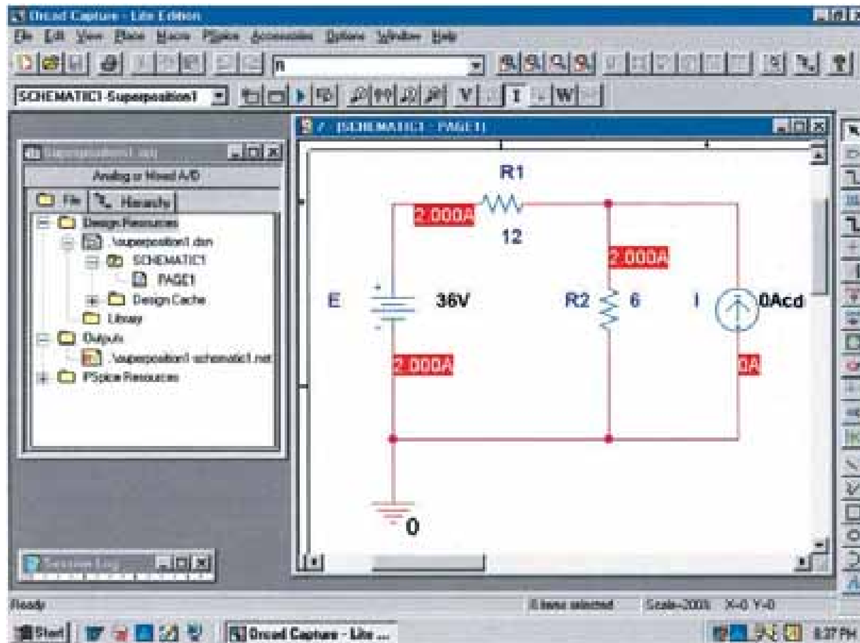


FIGURA 9.115
Uso de PSpice para determinar la contribución de la fuente de voltaje de 36 V a la corriente a través de R_2.

Siguiendo la simulación, aparecerán los resultados que se muestran en la figura 9.115. La corriente a través del resistor de 6 Ω es de 2 A debido solamente a la fuente de voltaje de 36 V. Aunque la dirección no está indicada, es bastante obvia en este caso. Para aquellos casos en que la dirección no es obvia, los niveles de voltaje pueden ser mostrados, y la dirección sería desde el punto de mayor potencial hasta el punto de menor potencial.

Para los efectos de la fuente de corriente, la fuente de voltaje se establece en 0 V, como se muestra en la figura 9.116. La corriente resultante es entonces de 6 A a través de R_2, con la misma dirección que la contribución debida a la fuente de voltaje.

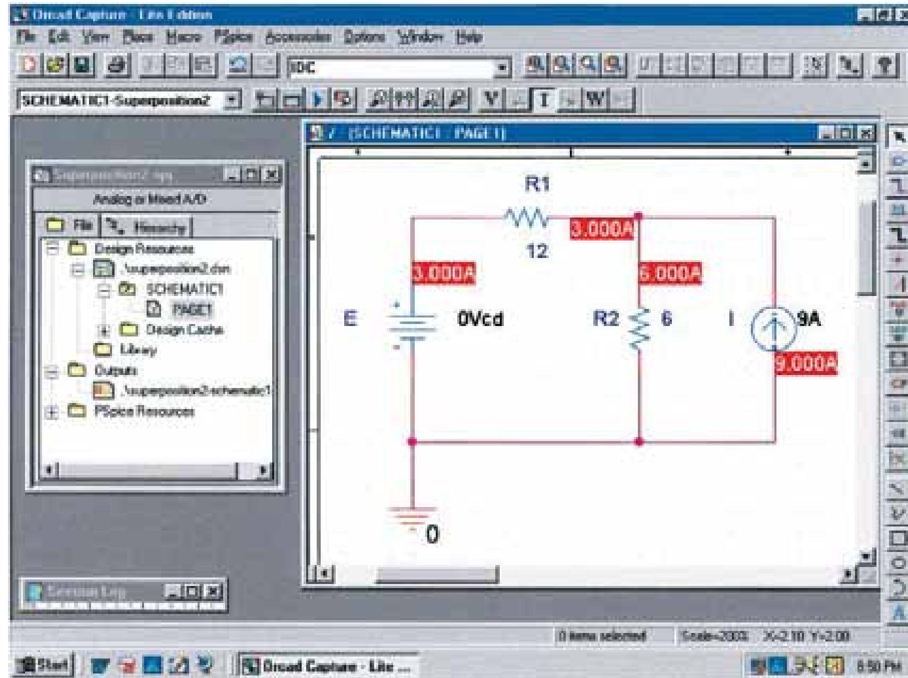


FIGURA 9.116
Uso de PSpice para determinar la contribución de la fuente de corriente de 9A a la corriente a través de R_2.

La corriente resultante para el resistor R_2 es la suma de las dos corrientes: $I_T = 2\text{ A} + 6\text{ A} = 8\text{ A}$, como se determinó en el ejemplo 9.3.

Teorema de Thévenin La aplicación del teorema de Thévenin requiere una interesante maniobra para determinar la resistencia de Thévenin. Sin embargo, es una maniobra que tiene aplicación más allá del teorema de Thévenin siempre que se requiere un valor de resistencia. La red por ser analizada se muestra en la figura 9.117 y es la misma que se analizó en el ejemplo 9.10 (Figura 9.49).

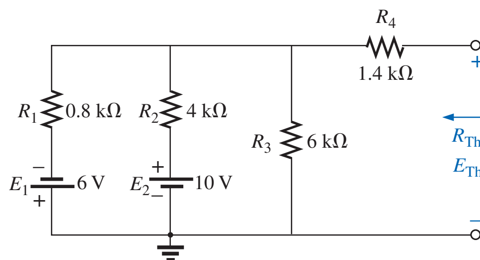


FIGURA 9.117
Red a la que debe aplicarse PSpice para determinar E_{Th} y R_{Th}.

Como PSpice no se establece para medir valores de resistencia directamente, una fuente de corriente de 1 A puede ser aplicada como se muestra en la figura

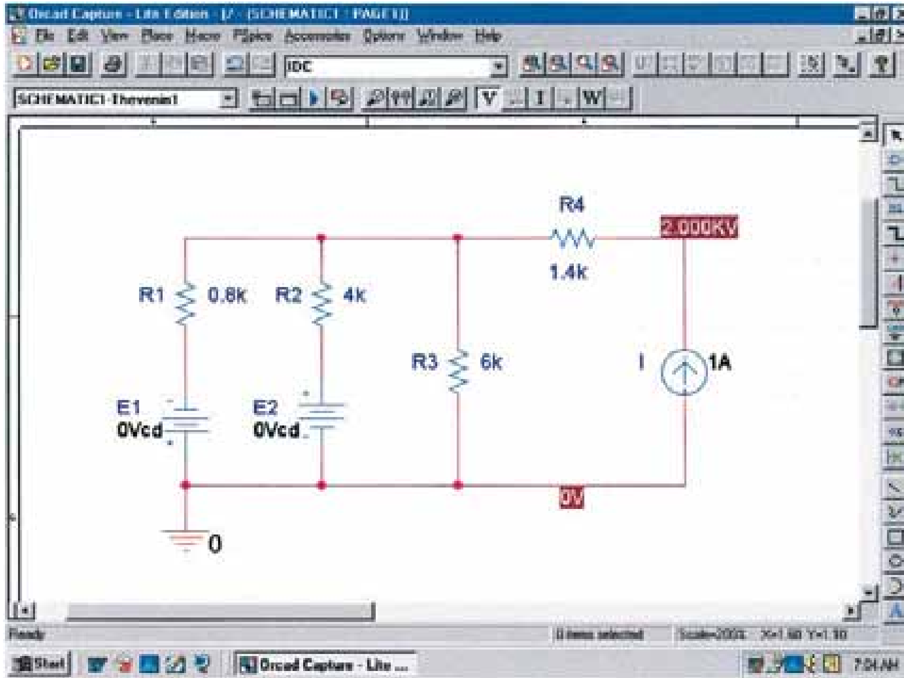


FIGURA 9.118
Uso de PSpice para determinar la resistencia de Thévenin de una red por medio de la aplicación de una fuente de corriente de 1 A.

9.118, y la ley de Ohm puede usarse para determinar la magnitud de la resistencia de Thévenin de la siguiente manera:

$$|R_{Th}| = \left|\frac{V_s}{I_s}\right| = \left|\frac{V_s}{1\text{ A}}\right| = |V_s|$$

En la ecuación (9.16), como $I_s = 1$ A, la magnitud de R_{Th} en ohms es la misma que la magnitud del voltaje V_s (en volts) a través de la fuente de corriente. El resultado es que cuando se muestra el voltaje en la fuente de corriente, puede ser leído en ohms en vez de en volts.

Cuando se aplica PSpice, la red se verá como se muestra en la figura 9.118. La fuente de voltaje E_1 y la fuente de corriente son invertidas haciendo clic derecho sobre la fuente y usando la opción **Mirror Vertically**. Ambas fuentes de voltaje se establecen en cero por medio del cuadro de diálogo **Display Properties** obtenido mediante un doble clic sobre el símbolo fuente. El resultado de la simulación **Bias Point** es de 2 kV a través de la fuente de corriente. La resistencia de Thévenin es, por tanto, de 2 kΩ entre las dos terminales de la red a la izquierda de la fuente de corriente (para equiparar los resultados del ejemplo 9.10). En total, estableciendo las fuentes de voltaje en 0 V, se ha dispuesto que el voltaje sea el mismo en ambos extremos de la fuente de voltaje, reproduciendo el efecto de una conexión de corto circuito entre los dos puntos.

Para el voltaje Thévenin de circuito abierto entre las terminales de interés, la red debe construirse como se muestra en la figura 9.119. La resistencia de 1 T (= 1 millón de MΩ) se considera lo suficientemente grande como para representar un circuito abierto que permita un análisis de la red usando PSpice. PSpice no reconoce nodos flotantes y generaría una señal de error si una conexión no se hiciese desde el nodo derecho superior a tierra. Ambas fuentes de voltaje están establecidas ahora sobre sus valores prescritos, y una simulación

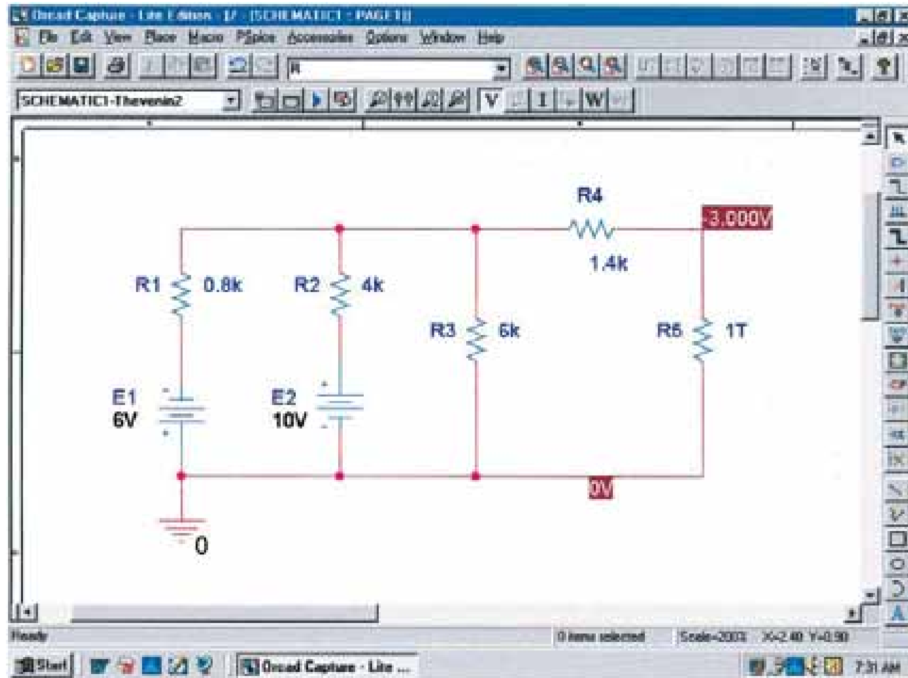


FIGURA 9.119

Uso de PSpice para determinar el voltaje Thévenin para una red usando un valor muy grande de la resistencia para representar la condición de circuito abierto entre las terminales de interés.

resultará en 3 V en el resistor de 1 T. El voltaje Thévenin de circuito abierto es, por tanto, de 3 V, y concuerda con la solución del ejemplo 9.10.

Máxima transferencia de potencia El procedimiento para trazar una cantidad en función de un parámetro de la red se presenta en seguida. En este caso será la potencia de salida en función de los valores de la resistencia de carga para verificar el hecho de que la potencia máxima será entregada a la carga cuando su valor iguale a la resistencia en serie de Thévenin. Algunos pasos nuevos serán introducidos, pero recuérdese que el método tiene una amplia aplicación más allá del teorema de Thévenin por lo que vale la pena aprenderlo.

El circuito por analizar se muestra en la figura 9.120. El circuito está construido exactamente de la misma manera como se describió antes, excepto por el valor de la resistencia de carga. El proceso se inicia con un **New Project** llamado **MaxPower**, y se construye el circuito de la figura 9.120. Por ahora es preciso abstenerse de establecer el valor de la resistencia de carga.

El primer paso será establecer el valor de la resistencia de carga como una variable ya que no le será asignado un valor fijo. Se da un doble clic sobre el valor de **RL** para obtener el cuadro de diálogo **Display Properties**. Para **Value**, escriba **{Rval}** y haga clic en su lugar. Los corchetes (**no** paréntesis) son requeridos, pero la variable no tiene que ser llamada **Rval** —ello es una alternativa para el usuario—. Luego se selecciona la tecla **Place part** para obtener el cuadro de diálogo **Place Part**. Si en la lista de **Libraries** aún no está alguna del usuario elija **Add Library** y agregue **SPECIAL** a la lista. Se selecciona la biblioteca **SPECIAL** y se recorre **Part List** hasta que aparezca **PARAM**; se selecciona esta opción y entonces se da clic en **OK** para obtener un marco rectangular próximo al cursor sobre la pantalla. Elija un punto cerca de **Rval** y

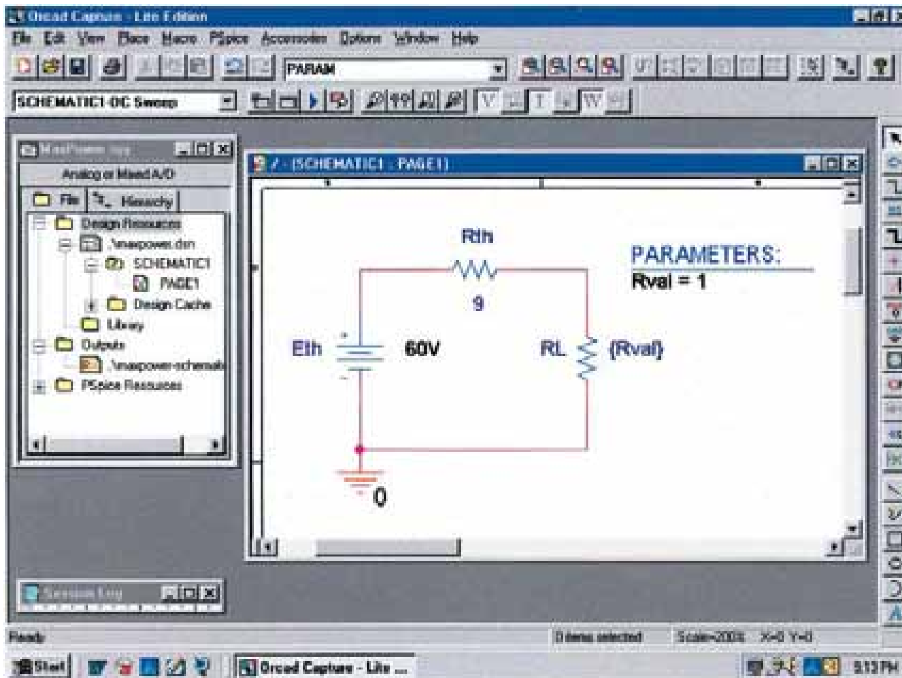


FIGURA 9.120

Uso de PSpice para trazar la potencia de R_L para un intervalo de valores de R_L.

deposite el marco rectangular. El resultado es **PARAMETERS:** como se muestra en la figura 9.120.

Luego se dan dos clic sobre **PARAMETERS:** para obtener el cuadro de diálogo **Property Editor** que debe tener **SCHEMATIC1:PAGE1** en la segunda columna desde la izquierda. Ahora se selecciona la opción **New Column** desde la lista superior de opciones para obtener el cuadro de diálogo **Add New Column**. Se introduce **Name:Rval** y **Value:1** seguidos por un **OK** para salir del cuadro de diálogo. El resultado es un retorno al cuadro de diálogo **Property Editor** pero con **Rval** y su valor (debajo de **Rval**) añadido a la lista horizontal. Ahora se selecciona **Rval/1** haciendo clic sobre **Rval** para rodear **Rval** con una línea punteada y agregar un fondo negro alrededor del **1**. Elija **Display** para producir el cuadro de diálogo **Display Properties**, y seleccione **Name and Value** seguido por **OK**. Luego salga del cuadro de diálogo **Property Editor** (**X**) para obtener la pantalla de la figura 9.120. Observe que ahora se muestra el primer valor (1 Ω) de **Rval**.

En este punto ya es posible establecer el proceso de simulación. Se selecciona la tecla **New Simulation Profile** para obtener el cuadro de diálogo **New Simulation**. Se introduce **DC Sweep** bajo **Name** seguido por **Create**. Aparecerá el cuadro de diálogo **Simulation Settings-DC Sweep**. Después de seleccionar **Analysis**, se elige **DC Sweep** bajo el encabezado **Analysis type**. Luego se deja **Primary Sweep** bajo el encabezado **Options**, y se selecciona **Global parameter** bajo **Sweep variable.** El **Parameter name** debe entonces introducirse como **Rval**. Para el **Sweep type** el **Start value** debe ser de 1 Ω; pero si se usa 1 Ω, la curva generada comenzará en 1 Ω, dejando un blanco de 0 a 1 Ω. La curva se verá incompleta. Para resolver este problema, se seleccionan 0.001 Ω como el **Start value** (muy cercano a 0 Ω) y el **End value** de 30.001 Ω con un **Increment** de 1 Ω. Los valores de **RL** serán, por tanto, 0.001 Ω, 1.001 Ω, 2.001 Ω, etc., aunque la gráfica se verá como si los valores fuesen 0 Ω, 1 Ω, 2 Ω,

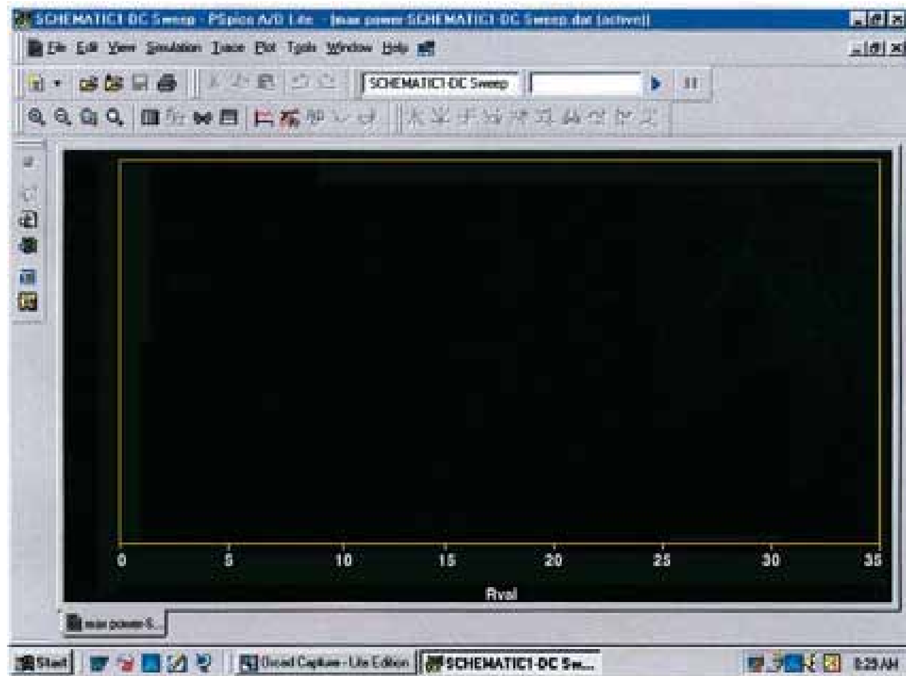


FIGURA 9.121
Trazado resultante del barrido de cd de R_L para la red de la figura 9.120 antes de definir los parámetros a ser exhibidos.

etc. Se da clic en **OK**, y se selecciona la tecla **Run PSpice** para obtener el despliegue de la figura 9.121.

Observe primero que no hay trazos sobre la gráfica y que ésta se extiende 35 Ω en vez de 30 Ω como se desea. La gráfica no respondió con un trazo de potencia en función de **RL** porque no se ha definido el trazo de interés para la computadora. Esto se hace seleccionando la tecla **Add Trace** (la tecla en la parte media de la barra de herramientas inferior que se ve como una forma de onda de diente de sierra rojo) o **Trace-Add Trace** de la barra del menú superior. Cualquier selección de las dos teclas resultará en el cuadro de diálogo **Add Traces**. La región más importante de este cuadro de diálogo es el listado **Trace Expression** ubicado al fondo. El trazo deseado puede ser tecleado directamente, o las cantidades de interés pueden ser escogidas de la lista de **Simulation Output Variables** y depositadas en el listado **Trace Expression**. Como el interés de este ejercicio radica en la potencia a **RL** para el intervalo de valores escogidos para **RL**, se selecciona **W(RL)** en el listado; aparecerá entonces como **Trace Expression**. Se da clic en **OK** y aparecerá el trazo de la figura 9.122. Originalmente, el trazo se extendió de 0 Ω hasta 35 Ω. El intervalo fue reducido de 0 Ω a 30 Ω seleccionando **Plot-Axis Settings-X Axis-User Defined 0 to 30-OK**.

Seleccione la tecla **Toggle cursor** (que se ve como una curva roja que pasa por el origen de una gráfica), y luego haga clic izquierdo con el ratón. Aparecerán una línea vertical y una línea horizontal, con la línea vertical controlada por la posición del cursor. Moviendo el cursor al valor pico resultará en **A1** = 9.0010 como el valor *x* y 100.000 W como el valor *y* como se muestra en el cuadro **Probe Cursor** a la derecha de la pantalla. Un segundo cursor puede ser generado por un clic derecho del ratón, el cual se estableció en **RL** = 30.001 Ω para resultar en una potencia de 71.005 W. Observe también que la gráfica



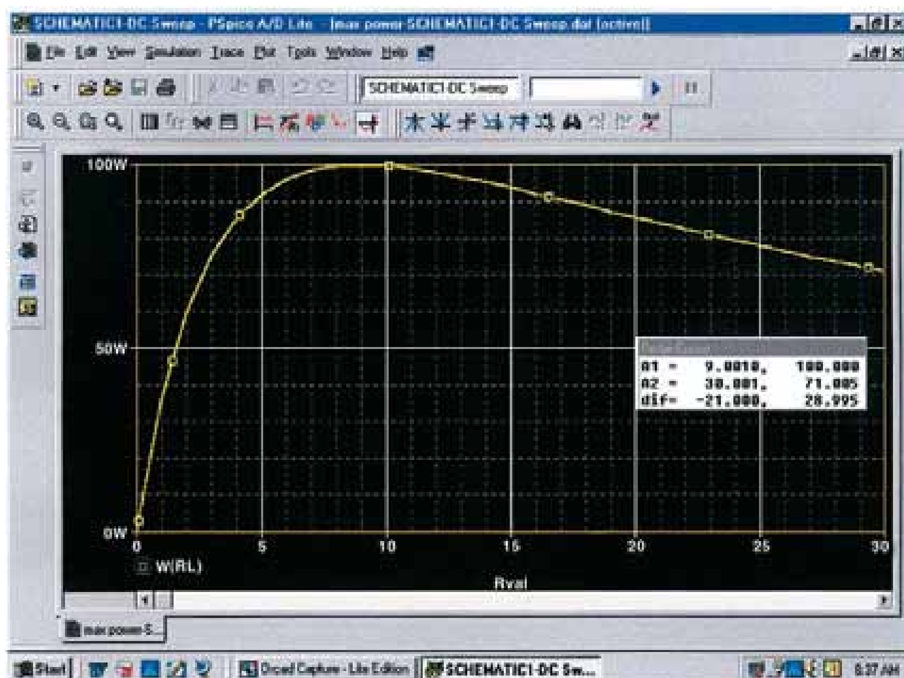


FIGURA 9.122
Gráfica de la potencia entregada a R_L en la figura 9.120 para un intervalo de valores de R_L que va desde 0 Ω hasta 30 Ω.

generada aparece como un listado en la parte inferior izquierda de la pantalla como **W(RL)**.

Antes de dejar el tema, se debe mencionar que la potencia a **RL** puede ser determinada en más modos que el ofrecido por el cuadro de diálogo **Add Traces**. Por ejemplo, se introduce primero un signo menos debido a la dirección resultante de la corriente a través del resistor, y luego se selecciona **V2(RL)** seguido por la multiplicación de **I(RL)**. La siguiente expresión aparecerá en el cuadro **Trace Expression: V2(RL)*I(RL)**, la cual es una expresión con el formato básico de potencia de $P = V*I$. Se da clic en **OK**, y aparecerá la misma curva de potencia de la figura 9.122. Otras cantidades, como el voltaje en la carga y la corriente a través de la carga, pueden ser trazadas contra **RL** mediante el simple seguimiento de la secuencia **Trace-Delete All Traces-Trace-Add Trace-V1(RL)** o **I(RL)**.

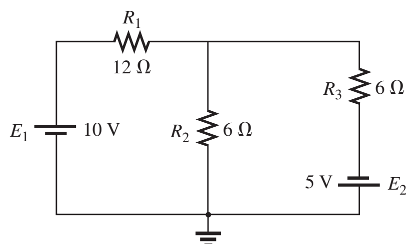


FIGURA 9.123
Problema 1.

PROBLEMAS

SECCIÓN 9.2 Teorema de superposición

1. a. Usando superposición, encuentre la corriente a través de cada resistor de la red de la figura 9.123.
   b. Encuentre la potencia entregada a R_1 por cada fuente.
   c. Encuentre la potencia entregada a R_1 usando la corriente total a través de R_1.
   d. ¿Es aplicable la superposición para calcular la potencia? Explique su respuesta.

2. Usando superposición, encuentre la corriente I a través del resistor de 10 Ω para cada una de las redes de la figura 9.124.

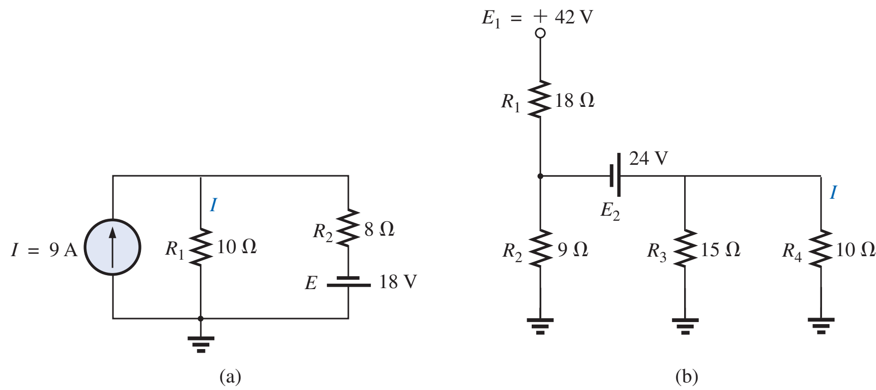


FIGURA 9.124
Problemas 2 y 41.

***3.** Usando superposición, encuentre la corriente a través de R_1 para cada red de la figura 9.125.

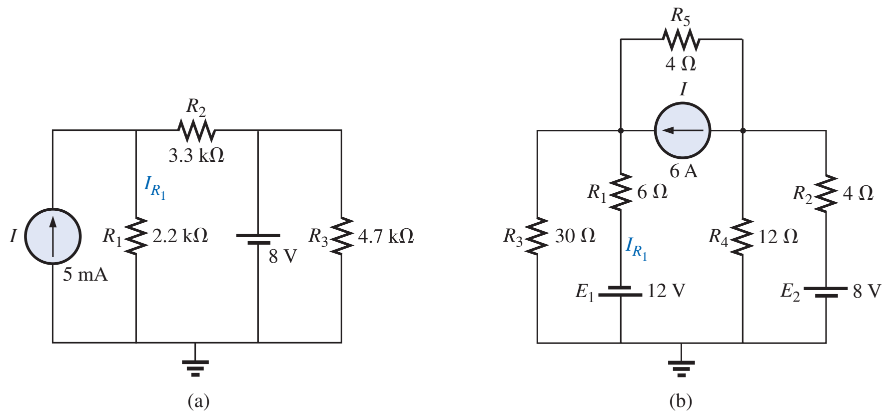


FIGURA 9.125
Problema 3.

4. Usando superposición, encuentre el voltaje V_2 para la red de la figura 9.126.

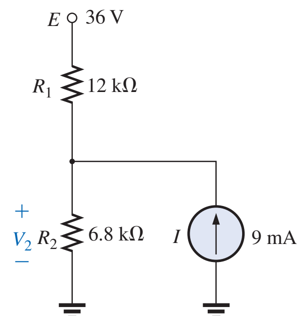


FIGURA 9.126
Problemas 4 y 37.

SECCIÓN 9.3 Teorema de Thévenin

5. **a.** Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor *R* de la figura 9.127.
b. Encuentre la corriente a través de *R* cuando *R* es de 2 Ω, 30 Ω y 100 Ω.

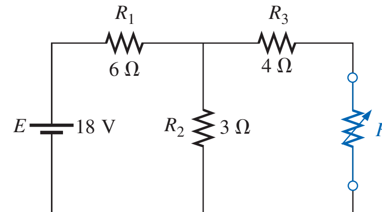


FIGURA 9.127
Problema 5.

6. **a.** Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor *R* en cada una de las redes de la figura 9.128.
b. Encuentre la potencia entregada a *R* cuando *R* es de 2 Ω y 100 Ω.

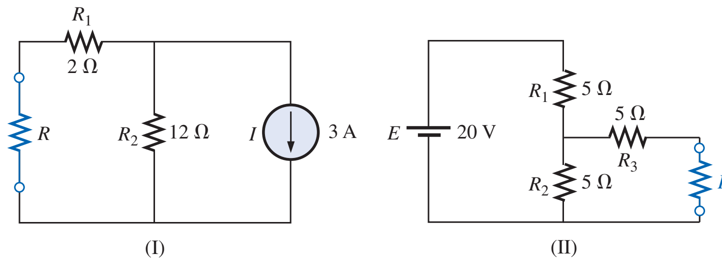


FIGURA 9.128
Problemas 6, 13 y 19.

7. Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor *R* en cada una de las redes de la figura 9.129.

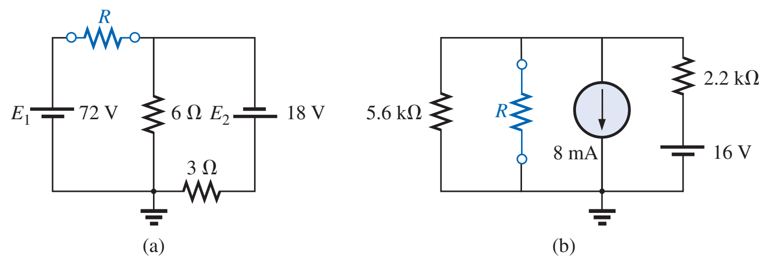


FIGURA 9.129
Problemas 7, 14 y 20.

***8.** Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor R en cada una de las redes de la figura 9.130.

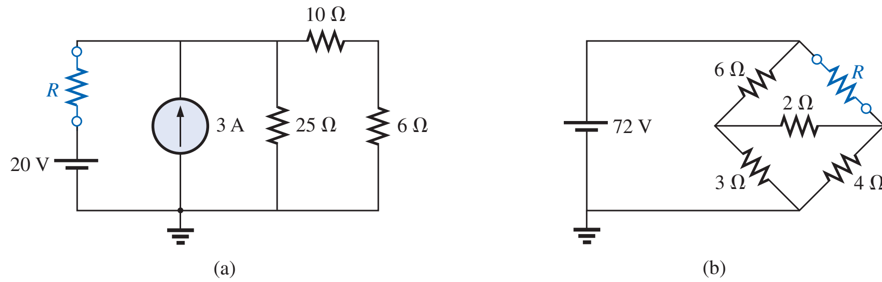


FIGURA 9.130
Problemas 8, 15, 21, 38, 39 y 42.

***9.** Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para las porciones de las redes de la figura 9.131 externas a los puntos a y b.

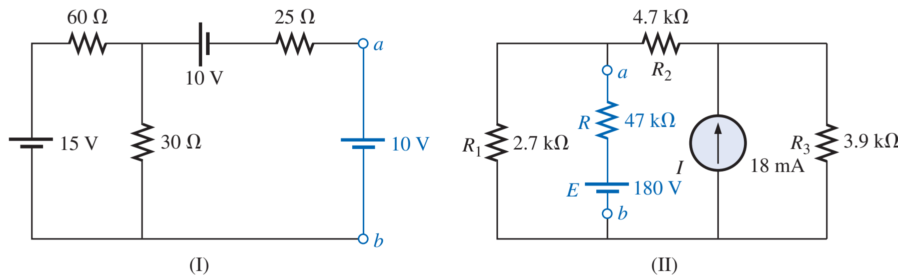


FIGURA 9.131
Problemas 9 y 16.

***10.** Determine el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor R en ambas redes de la figura 9.132.

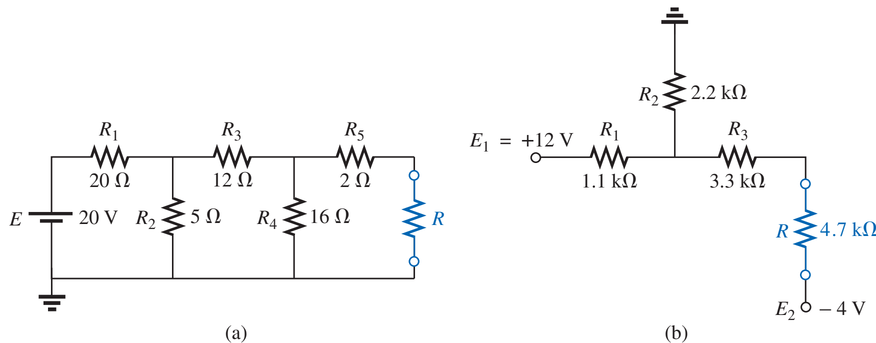
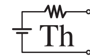


FIGURA 9.132
Problemas 10 y 17.



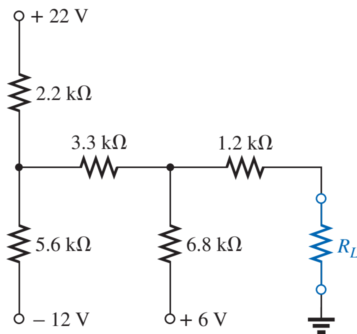


FIGURA 9.133
Problema 11.

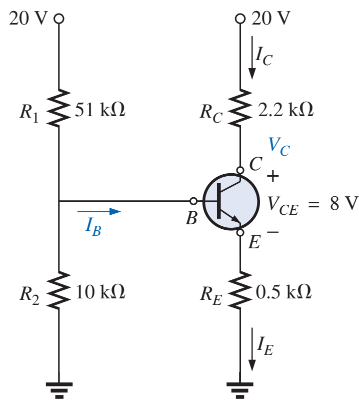


FIGURA 9.134
Problema 12.

***11.** Para la red de la figura 9.133, encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor de carga R_L.

***12.** Para la red de transistor de la figura 9.134:
- **a.** Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la porción de la red a la izquierda de la terminal de base (*B*).
- **b.** Usando el hecho de que $I_C = I_E$ y $V_{CE} = 8$ V, determine la magnitud de I_E.
- **c.** Usando los resultados de las partes (a) y (b), calcule la corriente de base I_B si $V_{BE} = 0.7$ V.
- **d.** ¿Cuál es el voltaje V_C?

SECCIÓN 9.4 Teorema de Norton

13. Encuentre el circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor *R* en cada red de la figura 9.128.

14. **a.** Encuentre el circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor *R* para cada red de la figura 9.129.
- **b.** Convierta al circuito equivalente de Thévenin, y compare su solución para E_{Th} y R_{Th} con las soluciones que resultaron para el problema 7.

15. Encuentre el circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor *R* para cada red de la figura 9.130.

16. **a.** Encuentre el circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor *R* para cada red de la figura 9.131.
- **b.** Convierta al circuito equivalente de Thévenin, y compare su solución para E_{Th} y R_{Th} con las soluciones que resultaron para el problema 9.

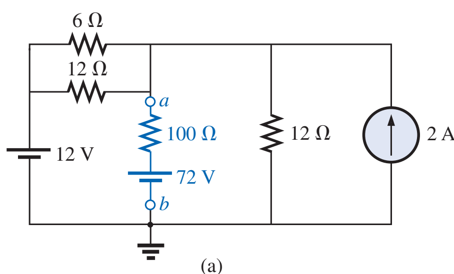
17. Encuentre el circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor *R* para cada red de la figura 9.132.

18. Encuentre el circuito equivalente de Norton para las porciones de las redes de la figura 9.135 externas a la rama *a-b*.

SECCIÓN 9.5 Teorema de la máxima transferencia de potencia

19. **a.** Para cada red de la figura 9.128, encuentre el valor de *R* para la potencia máxima hacia *R*.
- **b.** Determine la potencia máxima a *R* para cada red.

20. **a.** Para cada red de la figura 9.129, encuentre el valor de *R* para la potencia máxima a *R*.
- **b.** Determine la potencia máxima a *R* para cada red.



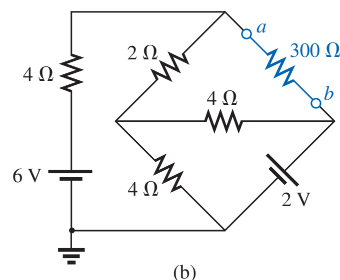


FIGURA 9.135
Problemas 18 y 40.



21. Para cada red de la figura 9.130, encuentre el valor de R para la potencia máxima hacia R, y determine la potencia máxima a R para cada red.

22. **a.** Para la red de la figura 9.136, determine el valor de R para la potencia máxima hacia R.
b. Determine la potencia máxima hacia R.
c. Trace una curva de potencia a R en función de R para R igual a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$ y 2 veces el valor obtenido en la parte (a).

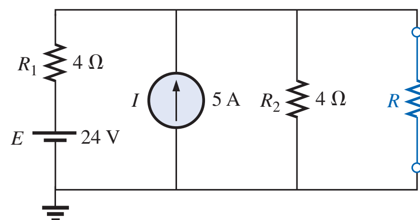


FIGURA 9.136
Problemas 22 y 43.

***23.** Encuentre la resistencia R_1 de la figura 9.137 tal que el resistor R_4 reciba la potencia máxima. ¡Piense!

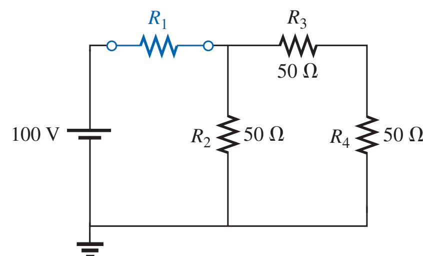


FIGURA 9.137
Problema 23.

***24.** **a.** Para la red de la figura 9.138, determine el valor de R_2 para la potencia máxima hacia R_4.
b. ¿Puede hacerse un planteamiento general acerca de las situaciones presentadas aquí y en el problema 23?

***25.** Para la red de la figura 9.139, determine el valor de R que asegurará la potencia máxima al resistor de 100 Ω.

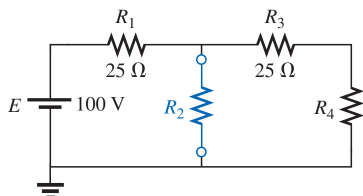


FIGURA 9.138
Problema 24.

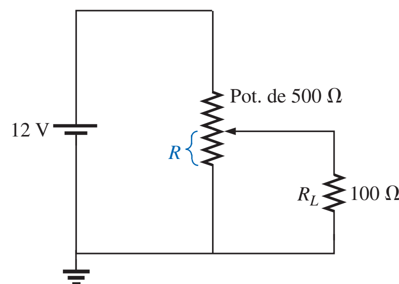


FIGURA 9.139
Problema 25.

SECCIÓN 9.6 Teorema de Millman

26. Usando el teorema de Millman, encuentre la corriente y el voltaje en el resistor R_L de la figura 9.140.

27. Resuelva el problema 26 para la red de la figura 9.141.

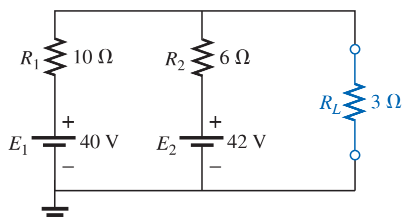


FIGURA 9.140
Problema 26.

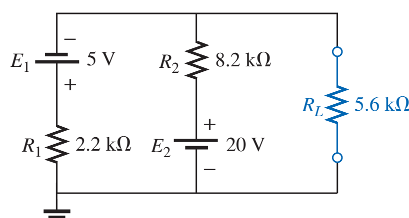
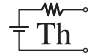


FIGURA 9.141
Problema 27.



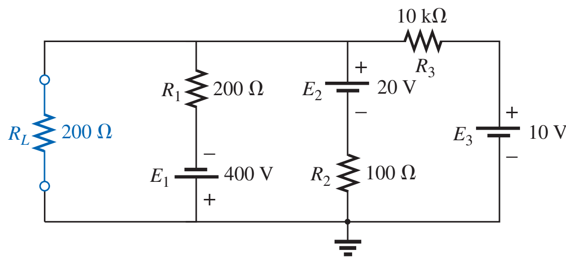


FIGURA 9.142
Problema 28.

28. Resuelva el problema 26 para la red de la figura 9.142.

29. Usando el teorema dual de Millman, encuentre la corriente y el voltaje en el resistor R_L de la figura 9.143.

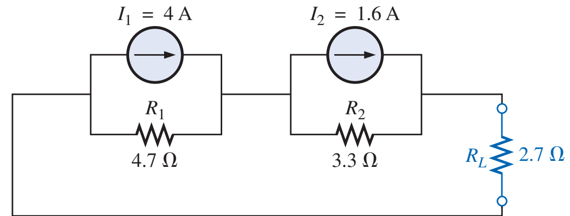


FIGURA 9.143
Problema 29.

*30. Resuelva el problema 29 para la red de la figura 9.144.

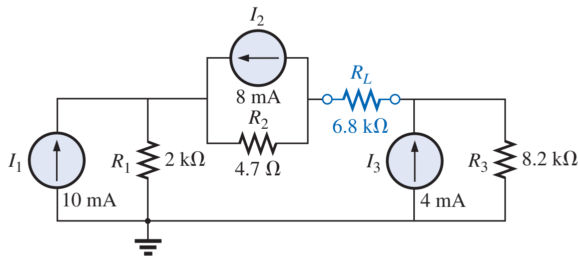


FIGURA 9.144
Problema 30.

SECCIÓN 9.7 Teorema de sustitución

31. Usando el teorema de sustitución, dibuje tres ramas equivalentes para la rama *a-b* de la red de la figura 9.145.

32. Resuelva el problema 31 para la red de la figura 9.146.

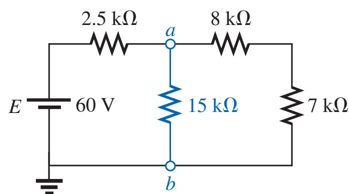


FIGURA 9.145
Problema 31.

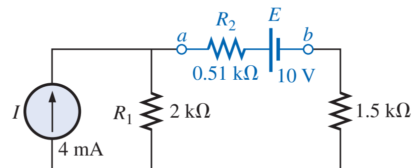


FIGURA 9.146
Problema 32.

*33. Resuelva el problema 31 para la red de la figura 9.147. ¡Tenga cuidado!

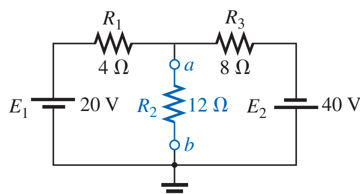


FIGURA 9.147
Problema 33.

SECCIÓN 9.8 Teorema de reciprocidad

34. **a.** Para la red de la figura 9.148(a), determine la corriente *I*.
b. Resuelva la parte (a) para la red de la figura 9.148(b).
c. ¿Se cumple el teorema de reciprocidad?

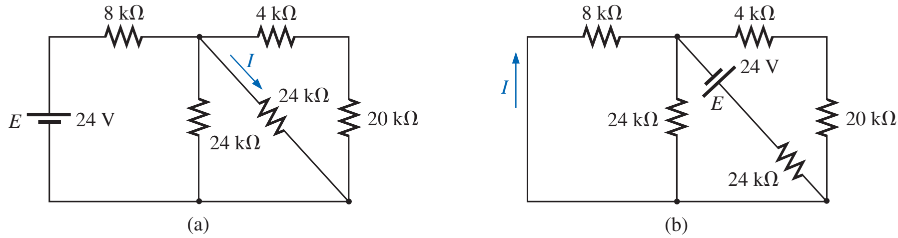


FIGURA 9.148
Problema 34.

35. Resuelva el problema 34 para las redes de la figura 9.149.

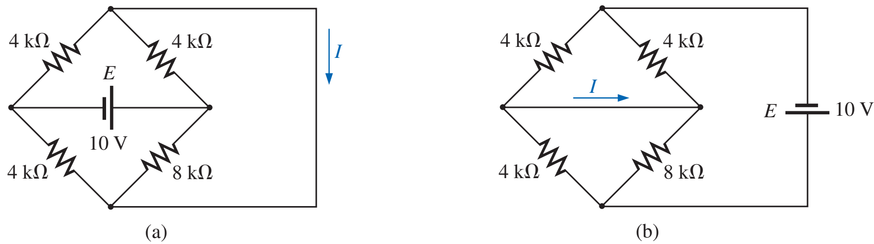


FIGURA 9.149
Problema 35.

36. **a.** Determine el voltaje *V* para la red de la figura 9.150(a).
b. Resuelva la parte (a) para la red de la figura 9.150(b).
c. ¿Se satisface el dual del teorema de reciprocidad?

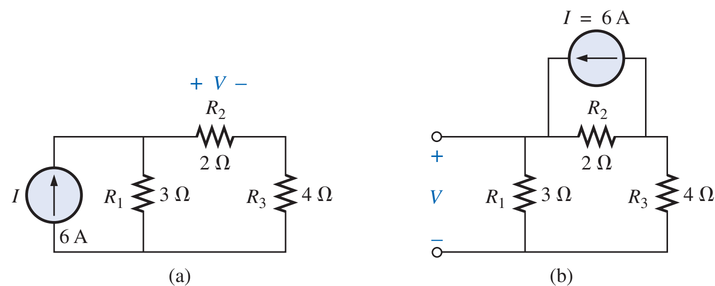


FIGURA 9.150
Problema 36.

SECCIÓN 9.10 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

37. Utilice la captura esquemática y determine el voltaje en V_2 y sus componentes para la red de la figura 9.126.



38. Utilice la captura esquemática y determine el circuito equivalente de Thévenin para la red de la figura 9.130(b).

***39.** **a.** Utilice la captura esquemática para trazar la gráfica de la potencia entregada al resistor *R* de la figura 9.130(a) para valores de *R* desde 1 Ω hasta 50 Ω.

b. A partir de la gráfica trazada en la parte (a), determine el valor de *R* que da la potencia máxima a *R* y la potencia máxima a *R*.

c. Compare los resultados de la parte (a) con la solución numérica.

d. Trace la gráfica de V_R e I_R en función de *R*, y encuentre el valor de cada uno bajo condiciones de potencia máxima.

***40.** Cambie el resistor de 300 Ω de la figura 9.135(b) a un resistor variable, y trace la gráfica de la potencia entregada al resistor en función de los valores del resistor. Determine el intervalo de valores de resistencia mediante ensayo y error en vez de efectuar primero un cálculo a mano. Determine el circuito equivalente de Norton a partir de los resultados. La corriente Norton puede ser determinada a partir del nivel de potencia máxima.

Programación de lenguaje **(C++, QBASIC, Pascal, etc.)**

41. Escriba un programa para determinar la corriente a través del resistor de 10 Ω de la figura 9.124(a) (para cualesquiera valores de las componentes) usando superposición.

42. Escriba un programa para efectuar el análisis requerido para el problema 8, figura 9.130(b), para cualesquiera valores de los componentes.

***43.** Escriba un programa para efectuar el análisis del problema 22, y tabule la potencia hacia *R* para los valores dados en la parte (c).

GLOSARIO

Teorema de la máxima transferencia de potencia Teorema usado para determinar la resistencia de la carga necesaria para asegurar una máxima transferencia de potencia hacia la carga.

Teorema de Millman Método que emplea conversiones de fuente que permitirán la determinación de variables desconocidas en una red de lazos múltiples.

Teorema de Norton Teorema que permite la reducción de cualquier red de cd lineal de dos terminales a otra con una sola fuente de corriente y un resistor en paralelo.

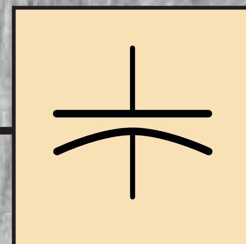
Teorema de reciprocidad Este teorema establece que para redes de una sola fuente, la corriente en cada rama de una red, debida a una sola fuente de voltaje en la red, será igual a la corriente a través de la rama en que la fuente estaba originalmente localizada si la fuente es colocada en la rama donde la corriente fue originalmente medida.

Teorema de superposición Teorema de redes que permite considerar los efectos de cada fuente independientemente. La corriente y/o el voltaje resultantes es la suma algebraica de las corrientes y/o los voltajes desarrollados por cada fuente independientemente.

Teorema de sustitución Este teorema establece que si el voltaje y la corriente a través de cualquier rama de una red de cd bilateral son conocidos, la rama puede ser reemplazada por cualquier combinación de elementos que mantenga el mismo voltaje y la misma corriente a través de la rama elegida.

Teorema de Thévenin Teorema que permite la reducción de cualquier red de cd lineal de dos terminales a otra con una sola fuente de voltaje y un resistor en serie.

10



Capacitores

10.1 INTRODUCCIÓN

Hasta ahora, el único dispositivo pasivo que ha aparecido en el texto es el resistor. En este capítulo se considerarán dos dispositivos pasivos adicionales llamados uno **capacitor** y el otro *inductor* (el inductor se analiza con todo detalle en el capítulo 12), los cuales son muy diferentes al resistor en su propósito, operación y construcción.

A diferencia del resistor, el capacitor y el inductor despliegan sus características totales sólo cuando se realiza un cambio en el voltaje o la corriente dentro del circuito en el que están presentes. Además, si se considera la situación *ideal*, estos dispositivos no disipan energía como lo hace el resistor, sino que la almacenan en una forma que puede ser reingresada al circuito cuando lo requiera el diseño del circuito.

El tratamiento adecuado de cada uno requiere que se dedique este capítulo por completo al capacitor y, como se mencionó, en el capítulo 12 se estudiará al inductor. Dado que los efectos electromagnéticos son de primordial consideración en el diseño de inductores, este tópico será cubierto en el capítulo 11.

10.2 EL CAMPO ELÉCTRICO

Recuérdese del capítulo 2 que existe una fuerza de repulsión o de atracción entre dos cuerpos cargados. Ahora se analizará este fenómeno con mayor detalle al considerar el campo eléctrico que se presenta en la región que rodea cualquier cuerpo cargado. Este campo eléctrico se representa por **líneas de flujo eléctrico**, las cuales se trazan para indicar la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto alrededor del cuerpo cargado; es decir, mientras más densas sean las líneas del flujo, más fuerte será el campo eléctrico. En la figura 10.1, la fuerza del campo eléctrico es mayor en la posición *a* que en la posición *b* ya que las líneas de flujo son más densas en *a* que en *b*. El símbolo para el flujo eléctrico es la letra griega ψ (psi). El flujo por unidad de área (densidad de flujo) se representa por la letra mayúscula *D* y está determinado por:

$$D = \frac{\psi}{A} \quad \text{(flujo/unidad de área)} \tag{10.1}$$



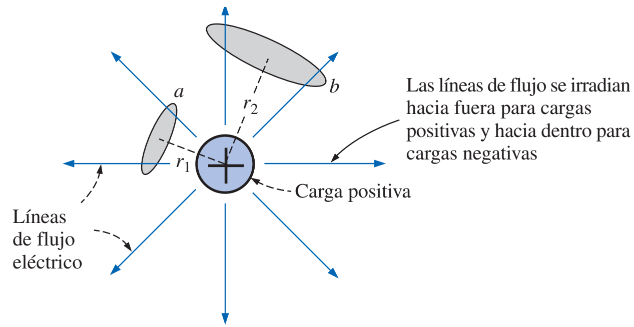


FIGURA 10.1
Distribución de flujo de una carga positiva aislada.

Mientras mayor sea la carga Q en coulombs, mayor será el número de líneas de flujo que se extiendan o finalicen por unidad de área, independientemente del medio circundante. Dos veces la carga producirá dos veces el flujo por unidad de área. Por tanto, las dos cantidades pueden considerarse equivalentes:

$$\psi \equiv Q \qquad \text{(coulombs, C)} \qquad \textbf{(10.2)}$$

Por definición, la **intensidad del campo eléctrico** en un punto es la fuerza que actúa sobre una carga positiva unitaria en ese punto; es decir,

$$\mathscr{E} = \frac{F}{Q} \qquad \text{(newton/coulomb, N/C)} \qquad \textbf{(10.3)}$$

La fuerza aplicada sobre una carga positiva unitaria ($Q_2 = 1$ C), mediante una carga Q_1, a r metros de distancia, según lo determina la **ley de Coulomb** es:

$$F = \frac{kQ_1Q_2}{r^2} = \frac{kQ_1(1)}{r^2} = \frac{kQ_1}{r^2} \qquad (k = 9 \times 10^9\ \text{N·m}^2/\text{C}^2)$$

Al sustituir esta fuerza F en la ecuación (10.3) se tiene:

$$\mathscr{E} = \frac{F}{Q_2} = \frac{kQ_1/r^2}{1}$$

$$\mathscr{E} = \frac{kQ_1}{r^2} \qquad \text{(N/C)} \qquad \textbf{(10.4)}$$

Por tanto, es posible concluir que la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto a una distancia r de una carga puntual de Q coulombs será directamente proporcional a la magnitud de la carga e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la carga. El término cuadrático en el denominador ocasionará una rápida disminución en la intensidad del campo eléctrico con la distancia a la carga puntual. En la figura 10.1, al sustituir las distancias r_1 y r_2 en la ecuación (10.4) se verificará la conclusión anterior de que la intensidad del campo eléctrico es mayor en a que en b.

Las líneas de flujo eléctrico siempre se extienden desde un cuerpo con carga positiva hacia un cuerpo cargado negativamente, siempre se extienden o finalizan de forma perpendicular a las superficies cargadas, y nunca se intersectan.

Para dos cargas con polaridades opuestas y similares, la distribución de flujo sería como se muestra en la figura 10.2.

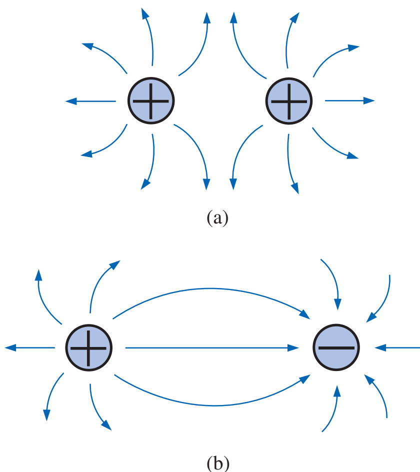


FIGURA 10.2
Distribución del flujo eléctrico: (a) cargas similares; (b) cargas opuestas.



Ahora se puede explicar la atracción y repulsión entre cargas en términos del campo eléctrico y sus líneas de flujo. En la figura 10.2(a), las líneas de flujo no están entrelazadas sino que tienden a actuar como un amortiguador, que evita la atracción y ocasiona repulsión. Dado que la intensidad del campo eléctrico es mayor (las líneas de flujo son más densas) para cada carga mientras más cercanas se encuentren a otra, a medida que se intente acercar las dos cargas, más fuerte será la fuerza de repulsión entre ellas. En la figura 10.2(b), las líneas de flujo que se extienden desde la carga positiva finalizan en la carga negativa. Una ley básica de física establece que las líneas de flujo eléctrico siempre tienden a ser lo más cortas posible. Por tanto, las dos cargas se atraerán una a otra. Nuevamente, mientras más cercanas se encuentren las dos cargas, más fuerte será la atracción entre ellas debido a las mayores intensidades de campo.

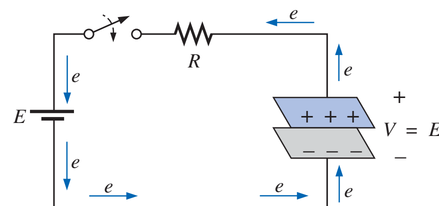


FIGURA 10.3
Red fundamental de carga.

10.3 CAPACITANCIA

Hasta este momento únicamente se han considerado cargas esféricas positivas o negativas aisladas, sin embargo, el análisis puede extenderse a superficies cargadas de cualquier forma y tamaño. En la figura 10.3, por ejemplo, se conectaron dos placas paralelas de un material conductor, separadas por un espacio de aire, mediante un interruptor y un resistor a una batería. Si inicialmente las placas paralelas no están cargadas y el interruptor se encuentra abierto, no existirá carga neta positiva o negativa en ninguna placa. Sin embargo, en el momento que el interruptor se cierra se atraen los electrones de la placa superior a través del resistor hacia la terminal positiva de la batería. Al principio se presentará un pico de corriente, limitado en magnitud por la resistencia presente. El nivel de flujo disminuirá entonces, como se demostrará en las secciones siguientes. Esta acción creará una carga positiva neta sobre la placa superior. Los electrones serán repelidos por la terminal negativa a través del conductor inferior hacia la placa inferior con el mismo ritmo que son atraídos a la terminal positiva. Esta transferencia de electrones continuará hasta que la diferencia de potencial en las placas paralelas sea exactamente igual al voltaje de la batería. El resultado final será una carga neta positiva sobre la placa superior y una carga negativa sobre la placa inferior, muy similar en muchos aspectos a las dos cargas aisladas de la figura 10.2(b).

Este elemento, construido de forma simple mediante dos placas conductoras paralelas separadas por un material aislante (en este caso, aire), se denomina **capacitor**. La **capacitancia** es una medida de la habilidad del capacitor para almacenar carga sobre sus placas —en otras palabras, su capacidad de almacenamiento.

Un capacitor tendrá una capacitancia de 1 farad si 1 coulomb de carga se deposita sobre las placas mediante una diferencia de potencial de 1 volt en las placas.

El farad recibió su denominación en honor a Michael Faraday (Figura 10.4), un químico y físico inglés del siglo XIX. Sin embargo, el farad es, por lo general, una medida de capacitancia demasiado grande para la mayoría de las aplicaciones prácticas, por lo que con frecuencia se utilizan más el microfarad (10^{-6}) o el picofarad (10^{-12}). Expresada como ecuación, la capacitancia está determinada por:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \begin{aligned} C &= \text{farads (F)} \\ Q &= \text{coulombs (C)} \\ V &= \text{volts (V)} \end{aligned} \qquad \textbf{(10.5)}$$

Distintos capacitores para un mismo voltaje en sus placas adquirirán mayores o menores cantidades de carga sobre sus placas; por ello, los capacitores poseen una mayor o menor capacitancia, respectivamente.

Inglés
(Londres)
(1791-1867)
Realizó experimentos químicos y eléctricos
Doctorado honorario, Universidad de Oxford, 1832



Cortesía de Smithsonian Institution Fotografía núm. 51,147

Realizó experimentos sin una educación formal, comenzó su carrera de investigador en el Royal Institute en Londres como asistente de laboratorio. Intrigado por la interacción entre los efectos eléctricos y magnéticos, descubrió la *inducción electromagnética*, demostrando que es posible generar efectos eléctricos a partir de un campo magnético (el nacimiento del generador como lo conocemos actualmente). También descubrió las *corrientes autoinducidas* y presentó el concepto de *líneas y campos de fuerza magnética*. Habiendo recibido cerca de cien reconocimientos científicos y académicos, se hizo miembro de la Royal Society en 1824 a la corta edad de 32 años.

FIGURA 10.4
Michael Faraday.

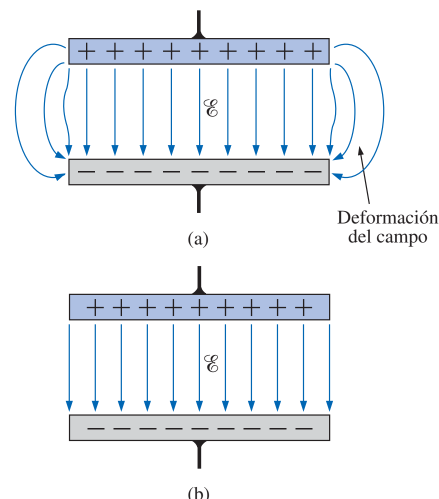
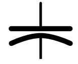


FIGURA 10.5
Distribución de flujo eléctrico entre las placas de un capacitor: (a) incluyendo deformación del campo; (b) ideal.



En la figura 10.5(a) se muestra una vista transversal de las placas paralelas junto con la distribución de la líneas de flujo eléctrico. El número de líneas de flujo por unidad de área (D) entre las dos placas es bastante uniforme. En los extremos, las líneas de flujo se extienden hacia fuera del área superficial común a las placas, generando un efecto conocido como **deformación del campo**. Este efecto, que reduce un tanto la capacitancia, puede ser ignorado en la mayoría de las aplicaciones prácticas. Para el análisis siguiente, se asumirá que todas las líneas de flujo que abandonan la placa positiva pasarán directamente a la placa negativa dentro del área superficial común de las placas [Figura 10.5(b)].

Si se aplica una diferencia de potencial de V volts en las dos placas separadas por una distancia d, la intensidad del campo eléctrico entre las placas estará determinada por:

$$\mathscr{E} = \frac{V}{d} \quad \text{(volts/metro, V/m)} \qquad \textbf{(10.6)}$$

La uniformidad de la distribución del flujo en la figura 10.5(b) también indica que la intensidad del campo eléctrico será la misma en cualquier punto entre las dos placas.

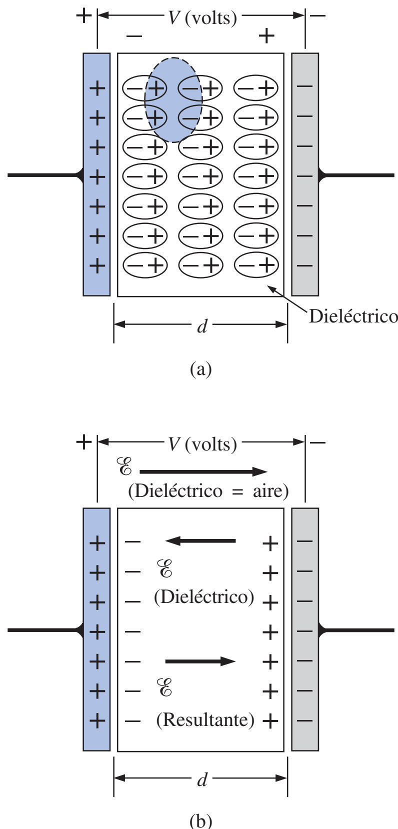


FIGURA 10.6
Efecto de un dieléctrico sobre la distribución del campo entre las placas de un capacitor: (a) alineación de los dipolos en el dieléctrico; (b) componentes del campo eléctrico entre las placas de un capacitor con un dieléctrico presente.

Es posible obtener muchos valores de capacitancia a partir del mismo juego de placas paralelas mediante la adición de ciertos materiales aislantes entre las placas. En la figura 10.6(a), se colocó un material aislante entre un juego de placas paralelas que tienen una diferencia de potencial de V volts entre ellas.

Debido a que el material es un aislante, los electrones dentro del aislante serán incapaces de abandonar el átomo padre y llegar a la placa positiva. Sin embargo [como se muestra en la figura 10.6(a)], los componentes positivos (protones) y negativos (electrones) de cada átomo se desplazarán, para formar *dipolos*.

Cuando los dipolos se alinean entre sí como se muestra en la figura 10.6(a), el material se encuentra *polarizado*. Un análisis minucioso dentro de este material polarizado indicará que los componentes positivos y negativos de dipolos colindantes neutralizan los efectos entre sí [observe el área sombreada en la figura 10.6(a)]. Sin embargo, la capa de carga positiva sobre una superficie y la carga negativa sobre la otra no se neutralizan, dando por resultado el establecimiento de un campo eléctrico dentro del aislante [$\mathscr{E}_{\text{dieléctrico}}$; figura 10.6(b)]. El campo eléctrico neto entre las placas ($\mathscr{E}_{\text{resultante}} = \mathscr{E}_{\text{aire}} - \mathscr{E}_{\text{dieléctrico}}$) se verá entonces reducido a causa de la incorporación del dieléctrico.

Por tanto, el propósito del dieléctrico será crear un campo eléctrico que se oponga al campo eléctrico establecido por las cargas libres sobre las placas paralelas. Por esta razón, el material aislante se conoce como **dieléctrico**, *di* por "opuesto" y *eléctrico* por "campo eléctrico".

En todo caso —con o sin el dieléctrico— si el potencial en las placas se mantiene constante y la distancia entre las placas está fija, el campo eléctrico neto dentro de las placas deberá permanecer igual, según lo determina la ecuación $\mathscr{E} = V/d$. Sin embargo, se acaba de confirmar que el campo eléctrico neto entre las placas disminuirá con la incorporación del dieléctrico para una cantidad fija de carga libre sobre las placas. Para compensar y mantener el campo eléctrico neto igual al valor determinado por V y d, deberá depositarse más carga sobre las placas. [Anticípese a la ecuación (10.11).] Esta carga adicional para el mismo potencial en las placas incrementa la capacitancia, según lo determina la siguiente ecuación:

$$C\uparrow = \frac{Q\uparrow}{V}$$

Para diversos materiales dieléctricos entre las mismas dos placas paralelas, distintas cantidades de carga se depositarán sobre las placas. Pero como $\psi \equiv Q$,



el dieléctrico también determinará el número de líneas de flujo entre las dos placas y, en consecuencia, la densidad del flujo ($D = \psi/A$) dado que A es un valor fijo.

La relación de la densidad de flujo a la intensidad del campo eléctrico dentro del dieléctrico se denomina **permitividad** del dieléctrico:

$$\epsilon = \frac{D}{\mathscr{E}} \qquad \text{(farads/metro, F/m)} \tag{10.7}$$

Ésta es una medida de la facilidad con la que el dieléctrico "permitirá" el establecimiento de líneas de flujo dentro del dieléctrico. Mientras mayor sea su valor, mayor será la cantidad de carga depositada sobre las placas, y, en consecuencia, mayor la densidad del flujo para un área fija.

Para el vacío, el valor de ϵ (denotado como ϵ_0) será de 8.85×10^{-12} F/m. La relación de la permitividad de cualquier dieléctrico a la del vacío se denomina **permitividad relativa**, ϵ_r; la cual simplemente compara la permitividad del dieléctrico con la del aire. En forma de ecuación,

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} \tag{10.8}$$

El valor de ϵ para cualquier material será, por tanto,

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_o$$

Observe que ϵ_r es una cantidad sin dimensiones. La permitividad relativa, o **constante dieléctrica**, como se denomina, por lo general, se proporciona en la tabla 10.1 para distintos materiales dieléctricos.

Al sustituir D y $\mathscr{E}$ en la ecuación (10.7) se tiene:

$$\epsilon = \frac{D}{\mathscr{E}} = \frac{\psi/A}{V/d} = \frac{Q/A}{V/d} = \frac{Qd}{VA}$$

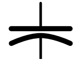
Pero: $$C = \frac{Q}{V}$$

y, por tanto, $$\epsilon = \frac{Cd}{A}$$

TABLA 10.1

Permitividad relativa (constante dieléctrica) de distintos dieléctricos.

Dieléctrico	ϵ_r (Valores promedio)
Vacío	1.0
Aire	1.0006
Teflón	2.0
Papel, parafinado	2.5
Caucho	3.0
Aceite de transformador	4.0
Mica	5.0
Porcelana	6.0
Baquelita	7.0
Vidrio	7.5
Agua destilada	80.0
Titanita de bario-estroncio (cerámica)	7500.0



y $$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad \text{(F)} \tag{10.9}$$

o bien: $$C = \epsilon_o \epsilon_r \frac{A}{d} = 8.85 \times 10^{-12} \epsilon_r \frac{A}{d} \quad \text{(F)} \tag{10.10}$$

donde A es el área de las placas en metros cuadrados, d es la distancia en metros entre las placas, y ϵ_r es la permitividad relativa. Por tanto, la capacitancia será mayor si el área de las placas se incrementa, la distancia entre las placas se disminuye, o si el dieléctrico se cambia de forma que ϵ_r se incremente.

Al resolver para la distancia d en la ecuación (10.9) se tiene:

$$d = \frac{\epsilon A}{C}$$

y al sustituir en la ecuación (10.6) resulta:

$$\mathscr{E} = \frac{V}{d} = \frac{V}{\epsilon A/C} = \frac{CV}{\epsilon A}$$

Pero como $Q = CV$, entonces:

$$\mathscr{E} = \frac{Q}{\epsilon A} \quad \text{(V/m)} \tag{10.11}$$

lo cual presenta la intensidad del campo eléctrico entre las placas en términos de la permitividad ϵ, la carga Q y el área superficial A de las placas. De esta forma, tenemos la relación:

$$\frac{C = \epsilon A/d}{C_o = \epsilon_o A/d} = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} = \epsilon_r$$

o bien: $$C = \epsilon_r C_o \tag{10.12}$$

lo cual, en otras palabras, establece que para el mismo juego de placas en paralelo, utilizando un dieléctrico (de permitividad relativa ϵ_r) la capacitancia será ϵ_r veces que la obtenida para el vacío (o el aire de forma aproximada) entre las placas. Esta relación entre ϵ_r y las capacitancias proporciona un excelente método experimental para encontrar el valor de ϵ_r para distintos dieléctricos.

EJEMPLO 10.1 Determine la capacitancia de cada capacitor localizado en el lado derecho de la figura 10.7.

Soluciones:

a. $C = 3(5\ \mu\text{F}) = \mathbf{15\ \mu F}$

b. $C = \frac{1}{2}(0.1\ \mu\text{F}) = \mathbf{0.05\ \mu F}$

c. $C = 2.5(20\ \mu\text{F}) = \mathbf{50\ \mu F}$

d. $C = (5)\frac{4}{(1/8)}(1000\ \text{pF}) = (160)(1000\ \text{pF}) = \mathbf{0.16\ \mu F}$



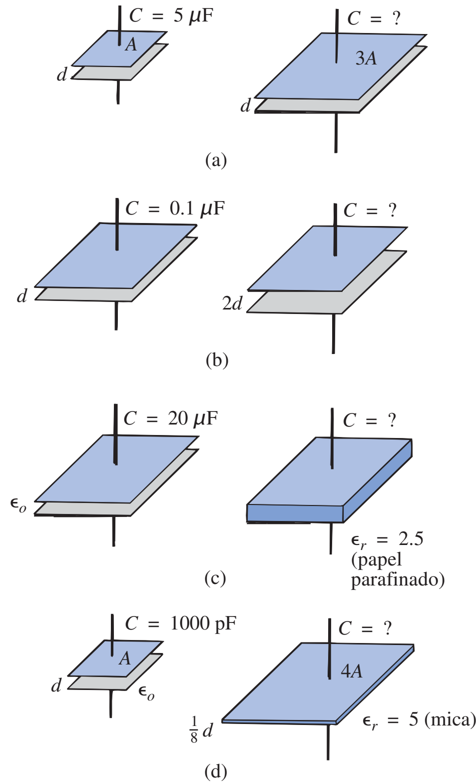


FIGURA 10.7
Ejemplo 10.1.

EJEMPLO 10.2 Para el capacitor de la figura 10.8:

a. Determine la capacitancia.
b. Determine la intensidad del campo eléctrico entre las placas si se aplican 450 V en las mismas.
c. Encuentre la carga resultante sobre cada placa.

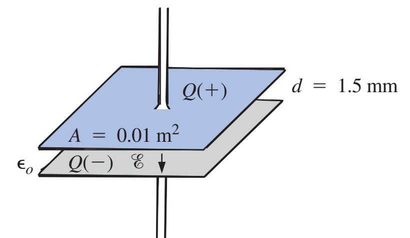


FIGURA 10.8
Ejemplo 10.2.

Soluciones:

a. $C_o = \dfrac{\epsilon_o A}{d} = \dfrac{(8.85 \times 10^{-12}\text{ F/m})(0.01\text{ m}^2)}{1.5 \times 10^{-3}\text{ m}} = 59.0 \times 10^{-12}\text{ F}$

$= \mathbf{59\ pF}$

b. $\mathscr{E} = \dfrac{V}{d} = \dfrac{450\text{ V}}{1.5 \times 10^{-3}\text{ m}}$

$\cong \mathbf{300 \times 10^3\ V/m}$

c. $C = \dfrac{Q}{V}$ o bien:

$$Q = CV = (59.0 \times 10^{-12}\text{ F})(450\text{ V})$$
$$= 26.550 \times 10^{-9}\text{ C}$$
$$= \mathbf{26.55\ nC}$$

EJEMPLO 10.3 Una hoja de mica de 1.5 mm de espesor, teniendo la misma área que las placas, se inserta entre las placas del ejemplo 10.2.

a. Encuentre la intensidad del campo eléctrico entre las placas.
b. Encuentre la carga sobre cada placa.
c. Encuentre la capacitancia.



Soluciones:

a. $\mathscr{E}$ está fijo por:

$$\mathscr{E} = \frac{V}{d} = \frac{450\ \text{V}}{1.5 \times 10^{3}\ \text{m}}$$
$$\cong \mathbf{300 \times 10^{3}\ V/m}$$

b. $\mathscr{E} = \dfrac{Q}{\epsilon A}$ o bien:

$$Q = \epsilon \mathscr{E} A = \epsilon_r \epsilon_o \mathscr{E} A$$
$$= (5)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(300 \times 10^{3}\ \text{V/m})(0.01\ \text{m}^2)$$
$$= 132.75 \times 10^{-9}\ \text{C} = \mathbf{132.75\ nC}$$

(cinco veces la cantidad que para el aire entre las placas)

c. $C = \epsilon_r C_o$

$$= (5)(59 \times 10^{-12}\ \text{F}) = \mathbf{295\ pF}$$

10.4 RIGIDEZ DIELÉCTRICA

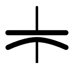
Para todo dieléctrico existe un potencial que, si se aplica en el dieléctrico, romperá los enlaces dentro de éste y ocasionará que la corriente fluya. El voltaje requerido por longitud de unidad (intensidad de campo eléctrico) para establecer la conducción dentro de un dieléctrico es una señal de su **rigidez dieléctrica** y se denomina **voltaje de ruptura**. Cuando se presenta la ruptura, el capacitor tiene características muy similares a las de un conductor. Un ejemplo típico de ruptura son los relámpagos, los cuales se presentan cuando el potencial entre las nubes y la tierra es tan alto que la carga puede pasar de uno a otro ambiente a través de la atmósfera, la cual actúa como dieléctrico.

En la tabla 10.2 se clasifica la rigidez dieléctrica promedio para distintos dieléctricos en volts/mil (1 mil = 0.001 de pulgada). La permitividad relativa aparece entre paréntesis para enfatizar la importancia de considerar ambos factores en el diseño de capacitores. Observe particularmente la titanita de bario-estroncio y la mica.

TABLA 10.2

Rigidez dieléctrica para algunos materiales dieléctricos.

Dieléctrico	Rigidez dieléctrica (Valor medio), en Volts/Mil	(ϵ_r)
Aire	75	(1.0006)
Titanita de bario-estroncio (cerámica)	75	(7500)
Porcelana	200	(6.0)
Aceite de transformador	400	(4.0)
Baquelita	400	(7.0)
Caucho	700	(3.0)
Papel, parafinado	1300	(2.5)
Teflón	1500	(2.0)
Vidrio	3000	(7.5)
Mica	5000	(5.0)



EJEMPLO 10.4 Encuentre el voltaje máximo que puede aplicarse a un capacitor de 0.2 μF que cuenta con un área de placas de 0.3 m^2. El dieléctrico es de porcelana. Asuma una relación lineal entre la rigidez dieléctrica y el espesor del dieléctrico.

Solución:

$$C = 8.85 \times 10^{-12}\epsilon_r \frac{A}{d}$$

o bien: $$d = \frac{8.85\epsilon_r A}{10^{12}C} = \frac{(8.85)(6)(0.3\text{ m}^2)}{(10^{12})(0.2 \times 10^{-6}\text{ F})} = 7.965 \times 10^{-5}\text{ m}$$

$$\cong \mathbf{79.65\ \mu m}$$

Al convertir los micrómetros a milésimos de pulgada tenemos:

$$79.65\ \mu\text{m}\left(\frac{10^{-6}\text{ m}}{\mu\text{m}}\right)\left(\frac{39.371\text{ pulg}}{\text{m}}\right)\left(\frac{1000\text{ mils}}{1\text{ pulg}}\right) = 3.136\text{ mils}$$

$$\text{Rigidez dieléctrica} = 200\text{ V/mil}$$

Por tanto, $$\left(\frac{200\text{ V}}{\text{mil}}\right)(3.136\text{ mils}) = \mathbf{627.20\ V}$$

10.5 CORRIENTE DE FUGA

Hasta este punto, se ha asumido que el flujo de electrones se presentará en un dieléctrico solamente cuando se alcance el voltaje de ruptura. Éste es el caso ideal. En realidad, existen electrones libres en todo dieléctrico debido en parte a impurezas en el dieléctrico y a fuerzas dentro del mismo material.

Cuando se aplica un voltaje en las placas de un capacitor, fluirá una **corriente de fuga** de una placa a la otra como consecuencia de los electrones libres. Sin embargo, la corriente es, por lo general, tan pequeña que puede ignorarse en la mayoría de las aplicaciones prácticas. Este efecto se representa mediante un resistor en paralelo con el capacitor, como se muestra en la figura 10.9(a), cuyo valor generalmente es mayor a 100 megaohms (MΩ). Sin embargo, algunos capacitores como el del tipo electrolítico poseen altas corrientes de fuga. Al ser cargados y luego desconectados desde el circuito de carga, estos capacitores pierden su carga en cuestión de segundos debido al flujo de carga (corriente de fuga) de una placa a la otra [Figura 10.9(b)].

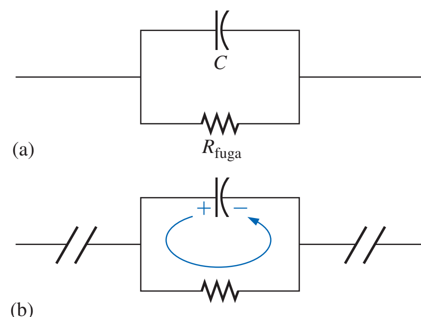


FIGURA 10.9
Demostración del efecto de la corriente de fuga.

10.6 TIPOS DE CAPACITORES

De la misma forma que los resistores, los capacitores pueden incluirse bajo una de las dos categorías: *fijos* o *variables*. El símbolo para un capacitor fijo es ⊥, y para el capacitor variable es ⊥. La línea curva representa la placa que regularmente se conecta al punto con el potencial más bajo.

Capacitores fijos

En la actualidad se encuentran disponibles muchos tipos de capacitores fijos. Algunos de los más comunes son los capacitores de mica, de cerámica, electrolítico, de tantalio y de poliéster. El *capacitor de mica* plano típico consta básicamente de hojas de mica separadas por láminas metálicas. Las placas están conectadas a dos electrodos, como se muestra en la figura 10.10. El área total será el área de una hoja multiplicada por el número de hojas dieléctricas.

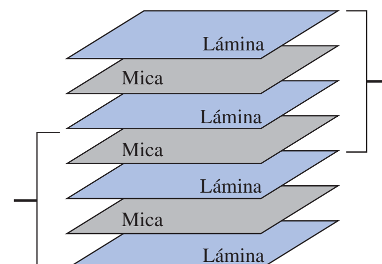


FIGURA 10.10
Estructura básica de un capacitor de mica apilado.

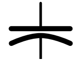




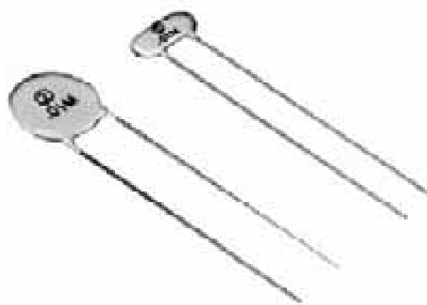
FIGURA 10.11
Capacitores de mica. (Cortesía de Custom Electronics Inc.)

El sistema completo se encapsula en un material aislante de plástico, como se muestra para las dos unidades centrales de la figura 10.11. El capacitor de mica presenta excelentes características frente a variaciones de temperatura y aplicaciones de alto voltaje (su rigidez dieléctrica es de 5000 V/mil). Además, su corriente de fuga es muy pequeña (R_{fuga} cercana a 1000 MΩ). Los capacitores de mica, por lo general, se encuentran en intervalos entre unos cuantos picofarad y 0.2 μF, con voltajes de 100 V o más.

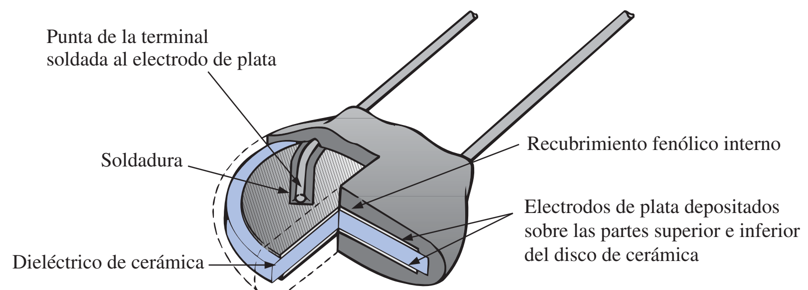
La habilidad para "enrollar" la mica y construir las formas cilíndricas de la figura 10.11 se debe a un proceso por medio del cual los contaminantes solubles de la mica natural se eliminan, dejando una estructura similar al papel y resultante de las fuerzas de cohesión existentes en la mica natural. Con frecuencia se le denomina *mica reconstituida*, aunque esta terminología no implica que sea mica "reciclada" o de "segunda mano". Para algunas de las unidades mostradas en la fotografía, se encuentran disponibles diferentes valores de capacitancia entre diferentes juegos de terminales.

El *capacitor de cerámica* se fabrica en muchas formas y tamaños, dos de los cuales se muestran en la figura 10.12. Sin embargo, la estructura básica es prácticamente la misma para cada uno, como se muestra en la figura 10.13. Una base de cerámica se recubre por ambos lados con un metal, como cobre o plata, para que actúe como las dos placas. Luego se adhieren las terminales a las placas a través de electrodos. Entonces se aplica un recubrimiento aislante de cerámica o plástico sobre las placas y el dieléctrico. Los capacitores de cerámica también tienen una corriente de fuga muy baja (R_{fuga} cercana a 1000 mΩ) y pueden utilizarse tanto en redes de cd como de ca. Pueden encontrarse con valores que van de unos cuantos picofarads a quizá 2 μF, con voltajes de trabajo muy altos como 5000 V o más.

En años recientes se ha incrementado el interés en los capacitores monolíticos (de una sola estructura) de circuito integrado, como los que aparecen en la figura 10.14(a), debido a su aplicación en circuitos híbridos [redes que utilizan componentes tanto discretos como integrados (CI)]. También existe un mayor interés en el uso de circuitos de micro bandas (línea de bandas) como el capacitor de la figura 10.14(b). Observe los pequeños circuitos integrados en esa sección recortada. La L y la H de la figura 10.14(a) indican el nivel de capacitancia. Por ejemplo, si se encuentran en tinta negra, la letra H representará 16 unidades de capacitancia (en picofarads), o 16 pF. Si se utiliza tinta azul, se aplica un multiplicador de 100, dando por resultado 1600 pF. Aunque el tamaño es similar, el tipo de material cerámico controla el valor de capacitancia.



(a)



(b)

FIGURA 10.12
Capacitores de disco de cerámica: (a) fotografía; (b) construcción.





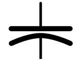
FIGURA 10.13
Capacitor de cerámica de multicapas con terminal radial.

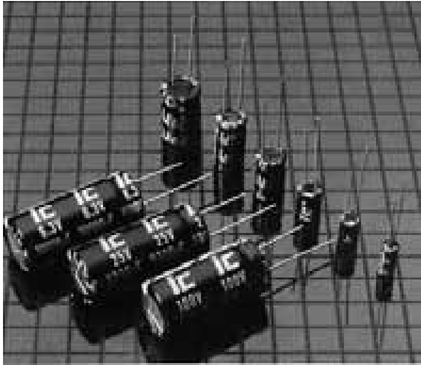
FIGURA 10.14
Capacitores monolíticos de circuito integrado. (Cortesía de Vitramon, Inc.)

El *capacitor electrolítico* se utiliza por lo común en situaciones donde se requieren capacitancias del orden de uno a varios miles de microfarads, y se encuentra diseñado principalmente para utilizarse en redes donde sólo se aplicarán voltajes de cd en el capacitor debido a que tienen características de aislamiento (alta corriente de fuga) adecuadas entre las placas en una dirección, pero asumen las características de un conductor en la otra dirección. Existen capacitores electrolíticos disponibles para utilizarse en circuitos de ca (para motores de arranque) y en casos donde la polaridad del voltaje de cd en el capacitor se invertirá por breves periodos.

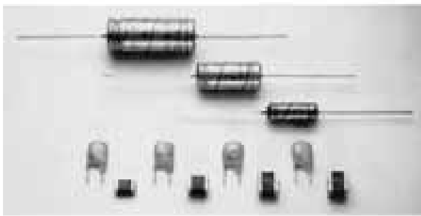
La estructura básica de un capacitor electrolítico consta de un rollo de hoja de aluminio recubierto por un lado con un óxido de aluminio, siendo el aluminio la placa positiva y el óxido el dieléctrico. Se coloca una capa de papel o gasa saturada con un electrolito encima del óxido de aluminio sobre la placa positiva. Luego se coloca otra capa de aluminio sin el recubrimiento de óxido sobre esta capa para que asuma el papel de la placa negativa. En la mayoría de los casos la placa negativa se conecta directamente al recipiente de aluminio, el cual luego actúa como la terminal negativa para las conexiones externas. A causa del tamaño del rollo de hoja de aluminio, el área total de este capacitor es grande; y debido al uso de un óxido como dieléctrico, la distancia entre las placas es extremadamente pequeña. La terminal negativa del capacitor electrolítico es, por lo regular, la que no presenta identificación visible sobre el encapsulado. La terminal positiva se indica, por lo general, mediante símbolos como $+$, $\triangle$, $\square$, etc. Debido al requerimiento de polaridad, el símbolo para un capacitor electrolítico normalmente se presentará como $\dashv\vdash^{+}$.

Asociado con cada capacitor electrolítico existe el voltaje de trabajo de cd y el voltaje pico. El **voltaje de trabajo** es el voltaje que puede aplicarse en el capacitor durante largos periodos sin que se produzcan averías. El **voltaje pico** es el voltaje de cd máximo que puede aplicarse durante un breve periodo. Los capacitores electrolíticos se caracterizan por tener bajos voltajes de ruptura y altas corrientes de fuga (R_{fuga} es cercana a 1 MΩ). En la figura 10.15 se muestran distintos tipos de capacitores electrolíticos. Éstos pueden encontrarse con valores que van desde unos cuantos microfarads hasta varios miles de microfarads, y con voltajes de trabajo tan altos como 500 V. Sin embargo, mayores niveles de voltaje normalmente están asociados con menores valores de capacitancia disponible.





(a)



(b)

FIGURA 10.15
Capacitores electrolíticos: (a) de terminal radial con valor nominal de duración extendida de 2000 h a 85°C. Intervalo de capacitancia: 0.1-15,000 μF con intervalo de voltaje de 6.3 a 250 WV de cd (Cortesía de Illinois Capacitor Inc.). (b) Los capacitores electrolíticos sólidos de aluminio se encuentran disponibles en configuraciones axiales, sumergidos en resina, y de montaje superficial para soportar difíciles condiciones ambientales (Cortesía de Philips Components, Inc.).

Básicamente existen dos tipos de *capacitores de tantalio*: el *sólido* y el *húmedo*. En ambos casos, se comprime polvo de tantalio de alta pureza en una forma cilíndrica o rectangular, como se muestra en la figura 10.16. Luego, la conexión del ánodo (+) simplemente se presiona dentro de las estructuras resultantes, como se muestra en la figura. Entonces la unidad resultante se aglutina (hornea) al vacío a temperaturas muy altas para formar un material bastante poroso. El resultado es una estructura con una muy amplia área superficial dentro de un volumen limitado. Mediante la inmersión en una solución ácida, se establece un delgado recubrimiento de dióxido de manganeso (MnO_2) sobre la amplia y porosa área superficial. Entonces se añade un electrolito para establecer contacto entre el área superficial y el cátodo, produciendo un capacitor de tantalio sólido. Si se introduce un ácido "húmedo" adecuado, la unidad se denominará capacitor de tantalio *húmedo*.

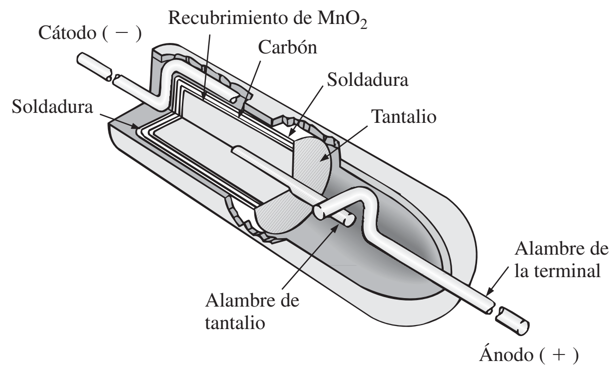


FIGURA 10.16
Capacitor de tantalio. (Cortesía de Union Carbide Corp.)

El último tipo de capacitor fijo que se presentará es el *capacitor de película de poliéster*, cuya estructura básica se muestra en la figura 10.17. Consta básicamente de dos hojas metálicas separadas por una banda de material de poliéster como el Mylar®. La capa exterior de poliéster se aplica para actuar como funda aislante. Cada hoja metálica se conecta a una terminal que se extiende de forma axial o radial desde el capacitor. La construcción enrollada resulta en una amplia área superficial, y el uso del dieléctrico de plástico da lugar a una capa muy delgada entre las superficies conductoras.

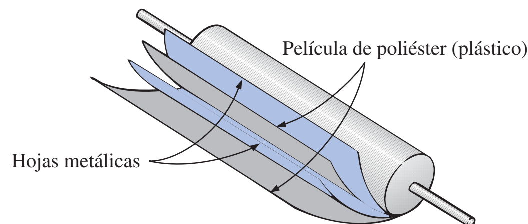
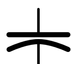
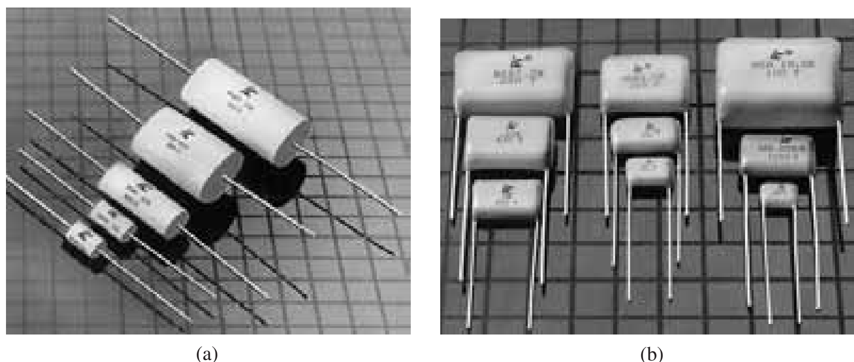


FIGURA 10.17
Capacitor de película de poliéster.

La información acerca de la capacitancia y el voltaje de trabajo se imprime sobre el empaque exterior si el capacitor de poliéster es lo suficientemente grande. En dispositivos más pequeños se utiliza un código de color (vea el Apéndice D). En ocasiones se imprime una banda (por lo general negra) cercana a la terminal que está conectada a la hoja metálica exterior. La terminal más cercana a esta banda deberá conectarse siempre al punto con el menor



potencial. Este capacitor puede utilizarse para redes tanto de cd como de ca. Su resistencia de fuga es del orden de 100 MΩ. En la figura 10.18 aparecen capacitores de película de poliéster con terminal axial y terminal radial. La variedad con terminal axial se encuentra disponible con valores de capacitancia de 0.1 μF a 18 μF, con voltajes de trabajo que se extienden hasta los 630 V. La variedad con terminal radial posee un intervalo de capacitancia de 0.01 μF a 10 μF, y voltajes de trabajo que se extienden hasta los 1000 V.

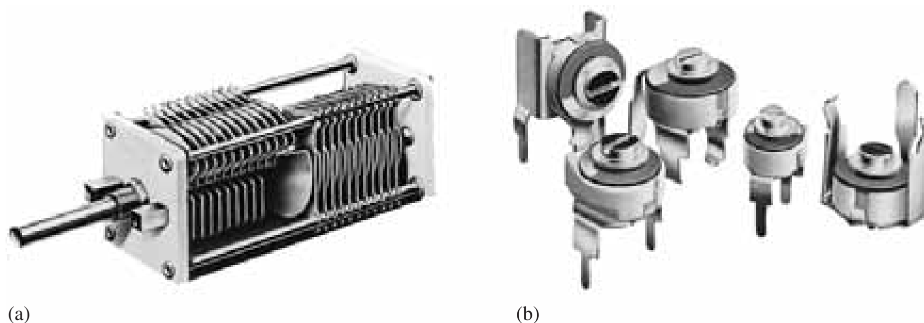


(a) (b)

FIGURA 10.18
Capacitores de película de poliéster: (a) terminal axial; (b) terminal radial. (Cortesía de Illinois Capacitor, Inc.)

Capacitores variables

Los capacitores de tipo variable más comunes se muestran en la figura 10.19. El dieléctrico en cada capacitor es el aire. La capacitancia en la figura 10.19(a) se modifica mediante el giro del eje en un extremo para variar el área común de las placas móviles y fijas. Mientras mayor sea el área común, mayor será la capacitancia, según lo determina la ecuación (10.10). La capacitancia del capacitor ajustable de la figura 10.19(b) se modifica mediante el giro del tornillo, el cual variará la distancia entre las placas (el área común es fija) y, por tanto, la capacitancia.



(a) (b)

FIGURA 10.19
Capacitores de aire variables. [*Inciso (a) cortesía de James Millen Manufacturing Co.; inciso (b) cortesía de Johnson Manufacturing Co.*]

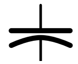




FIGURA 10.20
Medidor de capacitancia de lectura digital. (Cortesía de BK PRECISION, Maxtec International Corp.)

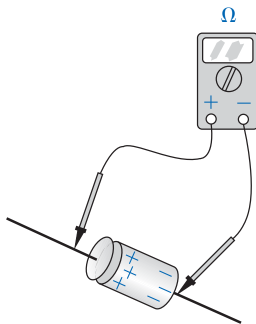


FIGURA 10.21
Verificación del dieléctrico de un capacitor electrolítico.

Medición y pruebas

En la figura 10.20 se muestra un medidor digital de capacitancia. Simplemente se coloca el capacitor entre los sujetadores presentes con la polaridad adecuada, y el medidor desplegará el nivel de capacitancia.

La mejor forma de verificar un capacitor es utilizando un medidor diseñado para realizar las pruebas necesarias. Sin embargo, un ohmímetro puede identificar aquellos capacitores donde el dieléctrico se ha deteriorado (especialmente en los capacitores de papel y electrolíticos). Cuando el dieléctrico se rompe, las cualidades aislantes disminuyen a un punto donde la resistencia entre las placas cae a un nivel relativamente bajo. Después de asegurarse que el capacitor se encuentra completamente descargado, se coloca el ohmímetro en paralelo con el capacitor, como se muestra en la figura 10.21. En un capacitor polarizado, las polaridades del medidor deberán coincidir con las del capacitor. Una lectura de baja resistencia (de cero a unos cuantos cientos de ohms) normalmente indicará un capacitor defectuoso.

Esta prueba de fuga no es general, dado que ciertos capacitores se romperán sólo cuando se apliquen altos voltajes; sin embargo, identifica aquellos capacitores que han perdido la cualidad aislante del dieléctrico entre las placas.

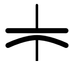
Valores estándar y factor de reconocimiento

Los valores estándar para capacitores utilizan los mismos multiplicadores numéricos encontrados para los resistores. Los más comunes cuentan con los mismos multiplicadores numéricos que la mayoría de los resistores comunes, es decir, aquellos disponibles con el intervalo completo de tolerancias (5, 10 y 20%) como se muestra en la tabla 3.8. Estos valores incluyen **0.1** μF, **0.15** μF, **0.22** μF, **0.33** μF, **0.47** μF y **0.68** μF, y luego **1** μF, **1.5** μF, **2.2** μF, **3.3** μF, **4.7** μF, etcétera.

La figura 10.22 se desarrolló para establecer un factor de reconocimiento de los distintos tipos de capacitores. En otras palabras, ayudará al lector a desarrollar sus habilidades para identificar los tipos de capacitores, su intervalo típico de valores, y algunas de las aplicaciones más comunes. La figura ciertamente no incluye todos los casos, pero ofrece un primer paso para establecer cierta sensibilidad acerca de qué esperar para distintas aplicaciones.

Esquemas de rotulado

A causa del reducido tamaño de algunos capacitores, se han adoptado distintos esquemas de rotulado para presentar el nivel de capacitancia, la tolerancia y, si es posible, el voltaje máximo de trabajo. Sin embargo, en general, el tamaño del capacitor será la primera señal de su valor. Las unidades más pequeñas se encuentran típicamente en el orden de los picofarads (pF) y las unidades más grandes en microfarads (μF). Tener presente este simple hecho proporcionará una señal inmediata del valor de capacitancia esperado. En unidades de μF más grandes, el valor puede imprimirse generalmente sobre la cubierta junto con la tolerancia y el voltaje máximo de trabajo. Sin embargo, las unidades más pequeñas requieren utilizar alguna forma abreviada como se muestra en la figura 10.23. Para unidades demasiado pequeñas como la que aparece en la figura 10.23(a), el valor se reconoce de forma inmediata en el intervalo de pF, con la K indicando un nivel de tolerancia de $\pm 10\%$. Muy a menudo la K se interpreta como un multiplicador de 10^{+3}, y la capacitancia se lee como 20,000 pF o 20 nF. En la unidad de la figura 10.23(b), hubo espacio para la letra "n" que representa un multiplicador de 10^{-9}. La presencia de la "n" minúscula en combinación con el pequeño tamaño es una señal clara de que éste es un capacitor de 200-nF. Con el propósito



Tipo: Electrolítico axial miniatura
Valores típicos: 0.1 μF a 15,000 μF
Intervalo típico de voltaje: 5 V a 450 V
Tolerancia del capacitor: ±20%
Aplicaciones: Polarizado; utilizado en fuentes de alimentación de cd, filtros de paso y bloqueo de cd.

Tipo: Electrolítico radial miniatura
Valores típicos: 0.1 μF a 15,000 μF
Intervalo típico de voltaje: 5 V a 450 V
Tolerancia del capacitor: ±20%
Aplicaciones: Polarizado; utilizado en fuentes de alimentación de cd, filtros de paso y bloqueo de cd.

Tipo: Disco de cerámica
Valores típicos: 10 pF a 0.047 μF
Intervalo típico de voltaje: 100 V a 6 kV
Tolerancia del capacitor: ±5%, ±10%
Aplicaciones: No polarizado, tipo NPO, estable para un amplio intervalo de temperaturas; utilizado en osciladores, filtros de ruido, acoplamiento de circuitos, circuitos tanque.

Tipo: Tantalio (sólido y húmedo)
Valores típicos: 0.047 μF a 470 μF
Intervalo típico de voltaje: 6.3 V a 50 V
Tolerancia del capacitor: ±10%, ±20%
Aplicaciones: Polarizado, baja corriente de fuga; utilizado en fuentes de alimentación, filtros de ruido de alta frecuencia, filtros de paso.

Tipo: Tipo de montaje superficial. (SMT Surface Mount Type)
Valores típicos: 10 pF a 10 μF
Intervalo típico de voltaje: 6.3 V a 16 V
Tolerancia del capacitor: ±10%
Aplicaciones: Polarizado y no polarizado; utilizado en todo tipo de circuitos, requiere una pequeña cantidad de la tableta de circuito impreso.

Tipo: Mica plateada
Valores típicos: 10 pF a 0.001 μF
Intervalo típico de voltaje: 50 V a 500 V
Tolerancia del capacitor: ±5%
Aplicaciones: No polarizado; utilizado en osciladores, dentro de circuitos que requieren un componente estable sobre un intervalo de temperaturas y voltajes.

Tipo: Papel Mylar
Valores típicos: 0.001 μF a 0.68 μF
Intervalo típico de voltaje: 50 V a 600 V
Tolerancia del capacitor: ±22%
Aplicaciones: No polarizado; utilizado en todo tipo de circuitos, resistente a la humedad.

Tipo: Marcha de motor ca/cd
Valores típicos: 0.25 μF a 1200 μF
Intervalo típico de voltaje: 240 V a 660 V
Tolerancia del capacitor: ±10%
Aplicaciones: No polarizado; utilizado en arranque y marcha de motores, fuentes de alimentación para iluminación de alta intensidad, filtro de ruido de ca.

Tipo: Variable ajustable
Valores típicos: 1.5 pF a 600 pF
Intervalo típico de voltaje: 5 V a 100 V
Tolerancia del capacitor: ±10%
Aplicaciones: No polarizado; utilizado en osciladores, circuitos de sintonización, filtros de ca.

Tipo: Variable de sintonización
Valores típicos: 10 pF a 600 pF
Intervalo típico de voltaje: 5 V a 100 V
Tolerancia del capacitor: ±10%
Aplicaciones: No polarizado; utilizado en osciladores y circuitos de sintonización de radio.

FIGURA 10.22
Resumen de elementos capacitivos.

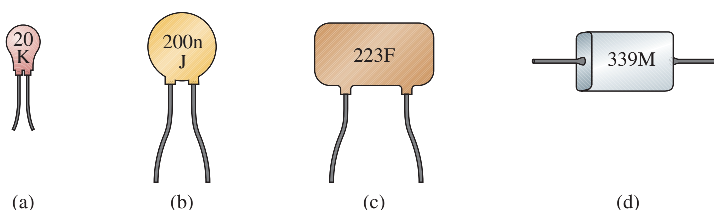
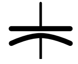


FIGURA 10.23
Distintos esquemas de rotulación para capacitores pequeños.



de evitar confusiones innecesarias, las letras utilizadas para indicar la tolerancia no incluyen la N, la U ni la P, por lo que cualquier forma de estas letras usualmente sugerirá el nivel de multiplicador. La J representa un nivel de tolerancia de ±5%. Para los capacitores como el que aparece en la figura 10.23(c), los primeros dos números son los dígitos reales del valor, mientras que el tercer número es la potencia de un multiplicador (o número de ceros que se añaden). La F representa un nivel de tolerancia de ±1%. Los multiplicadores de 0.01 utilizan un 8, mientras que el 9 se utiliza para 0.1 como se muestra para el capacitor de la figura 10.23(d), donde M representa un nivel de tolerancia de ±20%.

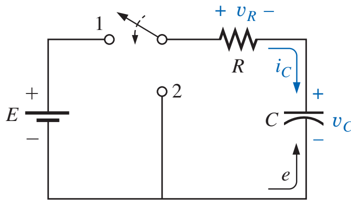


FIGURA 10.24
Red básica de carga.

10.7 TRANSITORIOS EN REDES CAPACITIVAS: FASE DE CARGA

La sección 10.3 describió la forma en que un capacitor adquiere su carga. Ahora extendamos este análisis para incluir los potenciales y la corriente desarrollada dentro de la red de la figura 10.24 luego del cierre del interruptor (a la posición 1).

El lector recordará que al instante en que el interruptor se cierra, se extraen los electrones de la placa superior y se depositan sobre la placa inferior debido a la batería, dando por resultado una carga neta positiva sobre la placa superior y una carga negativa sobre la placa inferior. La transferencia de electrones es muy rápida al principio, disminuyendo su velocidad a medida que el potencial en el capacitor se aproxima al voltaje aplicado de la batería. Cuando el voltaje en el capacitor es igual al de la batería, la transferencia de electrones cesará y las placas tendrán una carga neta determinada por $Q = CV_c = CE$.

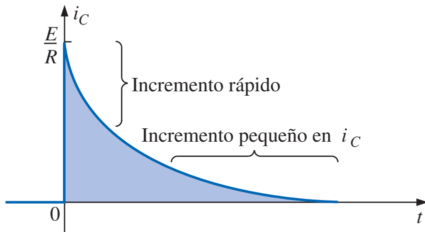


FIGURA 10.25
i_C durante la fase de carga.

En las figuras 10.25 y 10.26 se presentan gráficas del cambio en la corriente y el voltaje, respectivamente. Cuando el interruptor se cierra en $t = 0$ s, la corriente salta a un valor limitado únicamente por la resistencia de la red y luego disminuye a cero a medida que las placas se cargan. Observe el rápido declive en el nivel de corriente, el cual revela que la cantidad de carga depositada sobre las placas por unidad de tiempo también decae rápidamente. Dado que el voltaje en las placas se encuentra directamente relacionado con la carga existente en éstas mediante $v_C = q/C$, la rápida velocidad con la que la carga inicialmente se deposita sobre las placas ocasionará un rápido incremento en v_C. Obviamente, a medida que la velocidad del flujo de carga (I) disminuye, la velocidad de carga en el voltaje actuará de la misma forma. Eventualmente, el flujo de carga se detendrá, la corriente I será igual a cero, y el voltaje cesará de cambiar en magnitud —la *fase de carga* habrá concluido—. En este punto el capacitor asumirá las características de un circuito abierto: una caída de voltaje en las placas sin un flujo de carga "entre" las placas. Como se demuestra en la figura 10.27, el voltaje en el capacitor es el voltaje de la fuente debido a que $i = i_C = i_R = 0$ A y $v_R = i_R R = (0)R = 0$ V. Para todo análisis futuro:

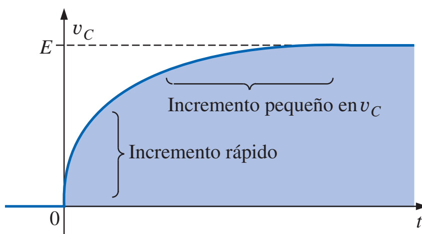


FIGURA 10.26
v_C durante la fase de carga.

Un capacitor puede reemplazarse mediante un equivalente de circuito abierto una vez que la fase de carga en una red de cd ha concluido.

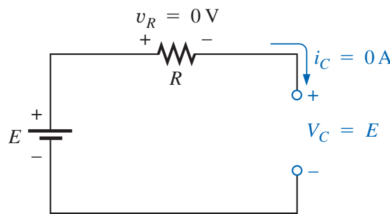


FIGURA 10.27
Equivalente de circuito abierto para un capacitor posteriormente a la fase de carga.

De regreso al instante en que el interruptor se cierra, también es posible suponer que el capacitor se comporta como un corto circuito en el momento en que el interruptor se cierra dentro de una red de carga de cd, como se muestra en la figura 10.28. La corriente $i = i_C = i_R = E/R$, y el voltaje $v_C = E - v_R = E - i_R R = E - (E/R)R = E - E = 0$ V en $t = 0$ s.

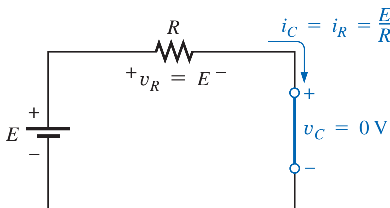
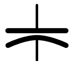


FIGURA 10.28
Equivalente de corto circuito para un capacitor (interruptor cerrado, t = 0).

Mediante la aplicación del cálculo, se puede obtener la siguiente ecuación matemática para la corriente de carga i_C:

$$i_C = \frac{E}{R} e^{-t/RC} \tag{10.13}$$



El factor $e^{-t/RC}$ es una función exponencial de la forma e^{-x}, donde $x = -t/RC$ y $e = 2.71828\ldots$. En la figura 10.29 aparece una gráfica de e^{-x} para $x \geq 0$. Los exponenciales son funciones matemáticas con las que todo estudiante de sistemas eléctricos, electrónicos o computacionales deberá estar familiarizado. Estas funciones aparecerán a lo largo del análisis siguiente en este curso, y en cursos posteriores.

En esta sección el interés en la función e^{-x} se limita a los valores de x mayores que cero, como se muestra en la curva de la figura 10.25. Todas las calculadoras científicas actuales cuentan con la función e^x. Para obtener e^{-x}, el signo de x debe cambiarse utilizando la tecla de signo antes de presionar la tecla exponencial. En la tabla 10.3 se clasifica la magnitud de e^{-x} para cierto intervalo de valores de x. Observe el rápido descenso de la magnitud de e^{-x} ante el incremento del valor de x.

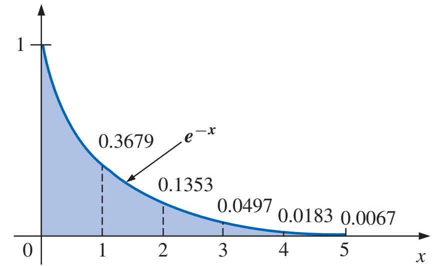


FIGURA 10.29
La función e^{-x} ($x \geq 0$).

TABLA 10.3
Valores seleccionados de e^{-x}.

$x = 0$	$e^{-x} = e^{-0} = \dfrac{1}{e^0} = \dfrac{1}{1} = 1$
$x = 1$	$e^{-1} = \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{2.71828\ldots} = 0.3679$
$x = 2$	$e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} = 0.1353$
$x = 5$	$e^{-5} = \dfrac{1}{e^5} = 0.00674$
$x = 10$	$e^{-10} = \dfrac{1}{e^{10}} = 0.0000454$
$x = 100$	$e^{-100} = \dfrac{1}{e^{100}} = 3.72 \times 10^{-44}$

El factor RC en la ecuación (10.13) se denomina *constante de tiempo* del sistema y cuenta con unidades de tiempo como sigue:

$$RC = \left(\frac{V}{I}\right)\left(\frac{Q}{V}\right) = \left(\frac{\cancel{V}}{\cancel{Q}/t}\right)\left(\frac{\cancel{Q}}{\cancel{V}}\right) = t$$

Su símbolo es la letra griega τ (tau), y su unidad de medida es el segundo. De esta forma,

$$\boxed{\tau = RC} \qquad \text{(segundos, s)} \qquad \textbf{(10.14)}$$

Si se sustituye $\tau = RC$ en la función exponencial $e^{-t/RC}$, se obtiene $e^{-t/\tau}$. En una constante de tiempo, $e^{-t/\tau} = e^{-\tau/\tau} = e^{-1} = 0.3679$, lo cual significa que la función alcanza el 36.79% de su valor máximo de 1. En $t = 2\tau$, $e^{-t/\tau} = e^{-2\tau/\tau} = e^{-2} = 0.1353$, y la función habrá disminuido a sólo 13.53% de su valor máximo.

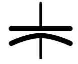
En las tablas 10.4 y 10.5 se clasifican la magnitud de $e^{-t/\tau}$ y el cambio porcentual entre constantes de tiempo, respectivamente. Observe que la corriente ha caído 63.2% (100% − 36.8%) en la primera constante de tiempo, pero sólo 0.4% entre la quinta y sexta constantes de tiempo. Por tanto, la velocidad de cambio de i_C es muy sensible a la constante de tiempo determinada por los parámetros de red R y C. Por esta razón, se presenta la gráfica de constante de tiempo universal de la figura 10.30 para permitir una estimación más precisa del valor de la función e^{-x} para intervalos de tiempo específicos en relación a la constante de tiempo. El término *universal* se utiliza debido a que los ejes no se encuentran en escala con valores específicos.

TABLA 10.4
i_C en función de τ (fase de carga).

t	Magnitud	
0	100%	
1τ	36.8%	
2τ	13.5%	
3τ	5.0%	
4τ	1.8%	
5τ	**0.67%**	← Menor al 1% del máximo
6τ	0.24%	

TABLA 10.5
Cambio en i_C entre constantes de tiempo.

$(0 \rightarrow 1)\tau$	63.2%	
$(1 \rightarrow 2)\tau$	23.3%	
$(2 \rightarrow 3)\tau$	8.6%	
$(3 \rightarrow 4)\tau$	3.0%	
$(4 \rightarrow 5)\tau$	**1.2%**	
$(5 \rightarrow 6)\tau$	0.4%	← Menor al 1%



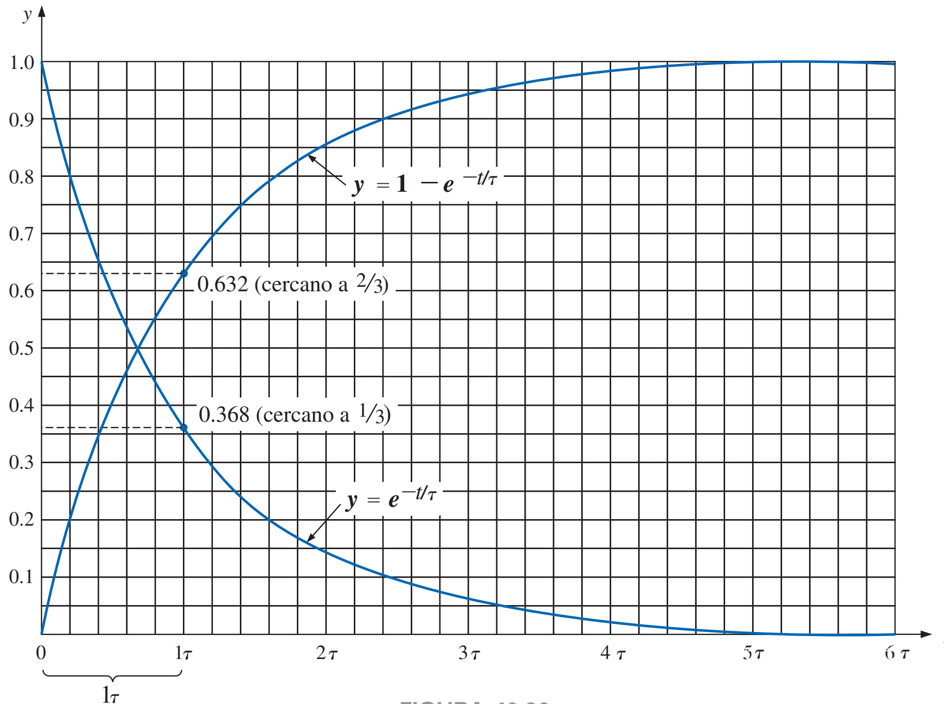


FIGURA 10.30
Gráfica de constante de tiempo universal.

De vuelta a la ecuación (10.13), se encuentra que el factor multiplicador E/R es el valor máximo que la corriente i_C puede alcanzar, como se muestra en la figura 10.25. Al sustituir $t = 0$ s en la ecuación (10.13) se tiene:

$$i_C = \frac{E}{R}e^{-t/RC} = \frac{E}{R}e^{-0} = \frac{E}{R}$$

verificando la conclusión anterior.

Para valores crecientes de t, la magnitud de $e^{-t/\tau}$, y por tanto el valor de i_C, disminuirá, según se muestra en la figura 10.31. Dado que la magnitud de i_C es menor al 1% de su máximo después de cinco constantes de tiempo, se asumirá lo siguiente para los futuros análisis:

La corriente i_C de una red capacitiva será esencialmente igual a cero después de que hayan transcurrido cinco constantes de tiempo de la fase de carga en una red de cd.

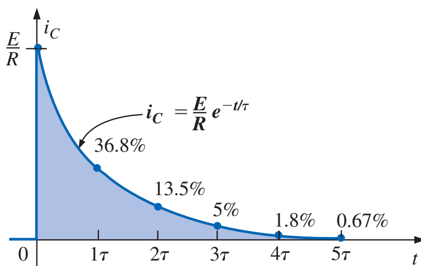


FIGURA 10.31
i_C en función de t durante la fase de carga.

Debido a que C, por lo general, se encuentra en el intervalo de los microfarads o picofarads, la constante de tiempo $\tau = RC$ nunca será mayor a unos cuantos segundos a menos que R sea muy grande.

Ahora se verá el voltaje de carga en el capacitor. Mediante un análisis matemático posterior, se puede determinar la siguiente ecuación para el voltaje en el capacitor:

$$v_C = E(1 - e^{-t/RC}) \qquad \textbf{(10.15)}$$

Observe la presencia del mismo factor $e^{-t/RC}$ y de la función $(1 - e^{-t/RC})$ que aparecen en la figura 10.30. Dado que $e^{-t/\tau}$ es una función decreciente, el factor $(1 - e^{-t/\tau})$ crecerá hasta un valor máximo de 1 con el tiempo, como se muestra en la figura 10.30. Además, como E es un factor multiplicador, podemos inferir que, para todo propósito práctico, el voltaje v_C será igual a E volts



después de cinco constantes de tiempo de la fase de carga. En la figura 10.32 se proporciona una gráfica de v_C en función de t.

Al mantener R constante y reducir C, el producto RC disminuirá, y el tiempo de elevación de cinco constantes de tiempo disminuirá. En la figura 10.33 se traza el cambio en el comportamiento transitorio del voltaje v_C para distintos valores de C. El producto RC tendrá siempre algún valor numérico, aunque puede ser muy pequeño en algunos casos. Por esta razón:

El voltaje en un capacitor no puede cambiar de forma instantánea.

De hecho, la capacitancia de una red es también una medida de cuánto se opondrá ésta a un cambio en el voltaje en la red. Mientras mayor sea la capacitancia, mayor será la constante de tiempo y mayor el tiempo que le tomará cargar hasta su valor final (curva de C_3 en la figura 10.33). Una capacitancia menor permitirá que el voltaje se acumule de forma más rápida debido a que la constante de tiempo es menor (curva de C_1 en la figura 10.33).

La velocidad con que la carga se deposita sobre las placas durante la fase de carga puede calcularse mediante la sustitución siguiente de v_C en la ecuación (10.15):

$$v_C = \frac{q}{C}$$

y

$$q = Cv_C = CE(1 - e^{-t/\tau}) \quad \textit{en carga} \qquad \textbf{(10.16)}$$

indicando que la velocidad de carga será muy alta durante pocas de las primeras constantes de tiempo y menor a 1% después de cinco constantes de tiempo.

El voltaje en el resistor está determinado por la ley de Ohm:

$$v_R = i_R R = Ri_C = R\frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

o bien:

$$v_R = Ee^{-t/\tau} \qquad \textbf{(10.17)}$$

En la figura 10.34 aparece una gráfica de v_R.

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff al circuito de la figura 10.24 se obtendrá:

$$v_C = E - v_R$$

Al sustituir la ecuación (10.17):

$$v_C = E - Ee^{-t/\tau}$$

Al factorizar se tiene $v_C = E(1 - e^{-t/\tau})$, como se obtuvo anteriormente.

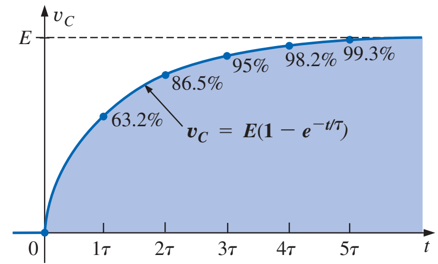


FIGURA 10.32
v_C en función de t durante la fase de carga.

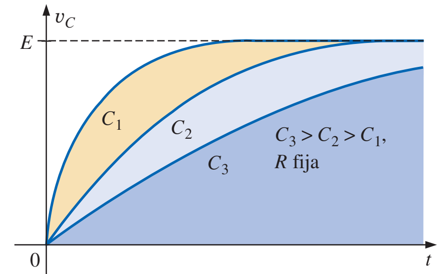


FIGURA 10.33
Efecto de C sobre la fase de carga.

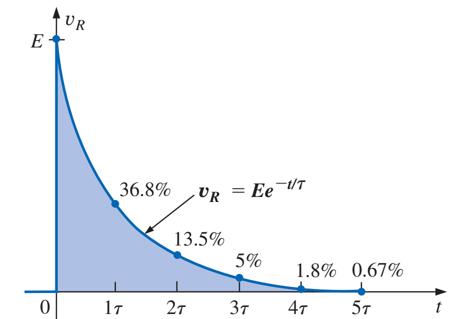


FIGURA 10.34
v_R en función de t durante la fase de carga.

EJEMPLO 10.5

a. Encuentre las expresiones matemáticas del comportamiento transitorio de v_C, i_C y v_R para el circuito de la figura 10.35 cuando el interruptor se mueve a la posición 1. Trace las curvas de v_C, i_C y v_R.

b. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que pueda asumirse, para todo propósito práctico, que $i_C \cong 0$ A y $v_C \cong E$ volts?

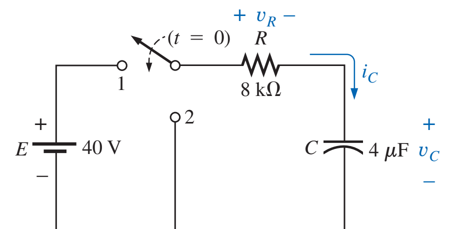


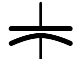
FIGURA 10.35
Ejemplo 10.5.

Soluciones:

a. $\tau = RC = (8 \times 10^3\ \Omega)(4 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 32 \times 10^{-3}\ \text{s} = \mathbf{32\ ms}$

Mediante la ecuación (10.15),

$$v_C = E(1 - e^{-t/\tau}) = \mathbf{40(1 - e^{-t/(32\times10^{-3})})}$$



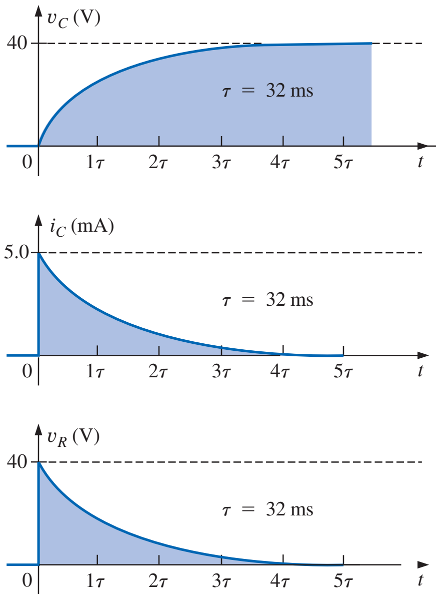


FIGURA 10.36
Formas de onda para la red de la figura 10.35.

Mediante la ecuación (10.13),

$$i_C = \frac{E}{R}e^{-t/\tau} = \frac{40\text{ V}}{8\text{ k}\Omega}e^{-t/(32\times 10^{-3})}$$
$$= \mathbf{(5 \times 10^{-3})e^{-t/(32\times 10^{-3})}}$$

Mediante la ecuación (10.17),

$$v_R = Ee^{-t/\tau} = \mathbf{40e^{-t/(32\times 10^{-3})}}$$

Las curvas aparecen en la figura 10.36.

b. $5\tau = 5(32\text{ ms}) = \mathbf{160\text{ ms}}$

Una vez que el voltaje en el capacitor alcanza el voltaje de entrada E, el capacitor estará completamente cargado y permanecerá en este estado si no se realizan modificaciones posteriores en el circuito.

Si el interruptor de la figura 10.24 se abre, como se muestra en la figura 10.37(a), el capacitor mantendrá su carga durante un periodo determinado por su corriente de fuga. Para capacitores como los de mica y cerámica, la corriente de fuga ($i_{fuga} = v_C/R_{fuga}$) es muy pequeña, lo cual permite que el capacitor mantenga su carga, y por tanto la diferencia de potencial en sus placas, por largo tiempo. Para los capacitores electrolíticos, los cuales poseen muy altas corrientes de fuga, el capacitor se descargará de forma más rápida, como se muestra en la figura 10.37(b). En cualquier caso, para asegurar que se encuentran completamente descargados, los capacitores deberán ponerse en corto mediante una punta o desarmador antes de manipularse.

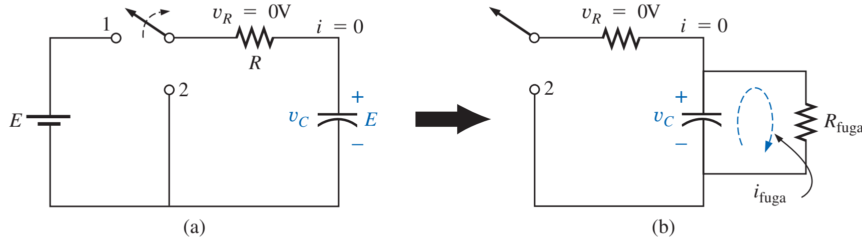


FIGURA 10.37
Efecto de la corriente de fuga sobre el comportamiento del estado estable de un capacitor.

10.8 FASE DE DESCARGA

La red de la figura 10.24 está diseñada tanto para cargar como para descargar al capacitor. Cuando el interruptor se mueve a la posición 1, el capacitor comenzará a cargarse hasta llegar al voltaje de la fuente, según se describió en la sección anterior. En cualquier punto de la fase de carga, si el interruptor se mueve a la posición 2, el capacitor comenzará a descargarse a una velocidad sensible a la misma constante de tiempo $\tau = RC$. El voltaje establecido en el capacitor creará un flujo de carga dentro de la trayectoria cerrada que eventualmente descargará al capacitor por completo. En esencia, el capacitor funciona como una batería con un voltaje en sus terminales decreciente. Observe en particular que la corriente i_C tiene dirección inversa, lo que cambia la polaridad del voltaje en R.

Si el capacitor se cargó al voltaje completo de la batería como se indica en la figura 10.38, la ecuación para el voltaje decreciente en el capacitor será la siguiente:

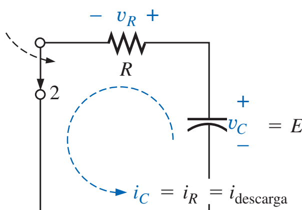
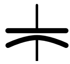


FIGURA 10.38
Demostración del comportamiento de descarga de una red capacitiva.

$$v_C = Ee^{-t/RC} \qquad \textit{en descarga} \qquad \mathbf{(10.18)}$$



la cual emplea la función e^{-x} y la misma constante de tiempo utilizada antes. La curva resultante tendrá la misma forma que la curva de i_C y v_R de la sección pasada. Durante la fase de descarga, la corriente i_C también disminuirá con el tiempo, según lo define la siguiente ecuación:

$$i_C = \frac{E}{R}e^{-t/RC} \qquad \textit{en descarga} \tag{10.19}$$

El voltaje $v_R = v_C$, y

$$v_R = Ee^{-t/RC} \qquad \textit{en descarga} \tag{10.20}$$

La descarga completa ocurrirá, para todo propósito práctico, en cinco constantes de tiempo. Si el interruptor se mueve entre las terminales 1 y 2 cada cinco constantes de tiempo, se obtendrán las formas de onda de la figura 10.39 para v_C, i_C y v_R. Para cada curva, la dirección de la corriente y las polaridades de voltaje se definen en la figura 10.24. Dado que la polaridad de v_C es la misma para ambas fases de carga y descarga, la curva completa se sitúa por encima del eje. La corriente i_C invierte su dirección durante las fases de carga y descarga, generando un pulso negativo tanto para la corriente como para el voltaje v_R. Observe que el voltaje v_C nunca cambia de magnitud de forma instantánea, pero la corriente i_C tiene la habilidad de cambiar de forma instantánea como lo demuestran sus caídas y elevaciones a niveles máximos.

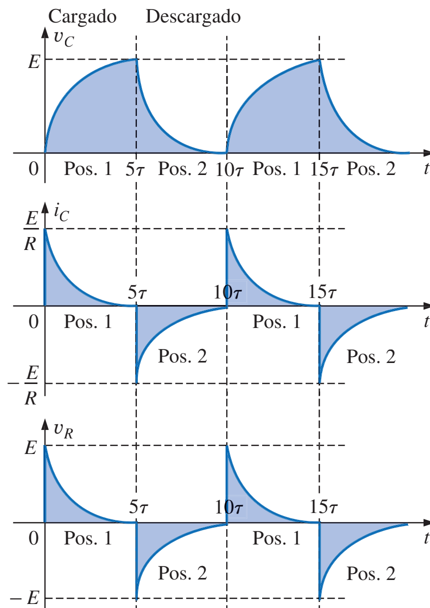


FIGURA 10.39
Ciclos de carga y de descarga para la red de la figura 10.24.

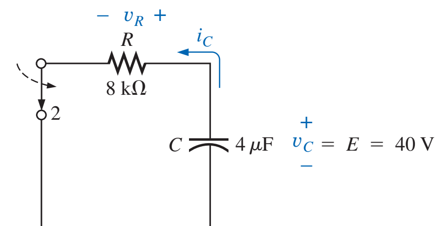
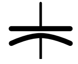


FIGURA 10.40
Ejemplo 10.6.

EJEMPLO 10.6 Una vez que v_C alcanza su valor final de 40 V en el ejemplo 10.5, el interruptor se mueve a la posición 2, como se muestra en la figura 10.40. Encuentre las expresiones matemáticas para el comportamiento transitorio de v_C,



i_C y v_R posterior al cierre del interruptor. Trace las curvas de v_C, i_C y v_R utilizando las direcciones y polaridades definidas en la figura 10.35. Asuma que $t = 0$ cuando el interruptor se mueve a la posición 2.

Solución:

$$\tau = 32 \text{ ms}$$

Mediante la ecuación (10.18),

$$v_C = Ee^{-t/\tau} = \mathbf{40}e^{-t/(32\times 10^{-3})}$$

Mediante la ecuación (10.19),

$$i_C = -\frac{E}{R}e^{-t/\tau} = -(\mathbf{5 \times 10^{-3}})e^{-t/(32\times 10^{-3})}$$

Mediante la ecuación (10.20),

$$v_R = -Ee^{-t/\tau} = -\mathbf{40}e^{-t/(32\times 10^{-3})}$$

Las curvas aparecen en la figura 10.41.

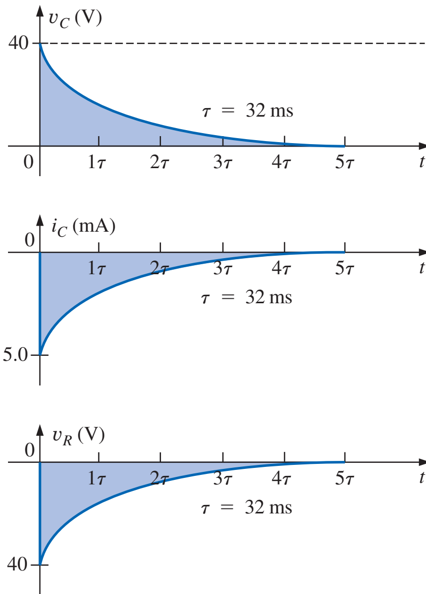


FIGURA 10.41
Formas de onda para la red de la figura 10.40.

El análisis y los ejemplos anteriores se aplican a situaciones en las que el capacitor se carga al voltaje de la batería. Si la fase de carga se interrumpe antes de alcanzar el voltaje de alimentación, el voltaje capacitivo será menor y la ecuación para el voltaje de descarga v_C asumirá la forma de:

$$v_C = V_i e^{-t/RC} \quad \textbf{(10.21)}$$

donde V_i es el voltaje inicial o de arranque para la fase de descarga. La ecuación para la corriente decreciente también se modifica mediante la simple sustitución de V_i en E; es decir,

$$i_C = \frac{V_i}{R}e^{-t/\tau} = I_i e^{-t/\tau} \quad \textbf{(10.22)}$$

La utilización de las ecuaciones anteriores se demostrará en los ejemplos 10.7 y 10.8.

EJEMPLO 10.7

a. Encuentre la expresión matemática para el comportamiento transitorio del voltaje en el capacitor de la figura 10.42 si el interruptor se mueve a la posición 1 en $t = 0$ s.
b. Repita el inciso (a) para i_C.
c. Encuentre las expresiones matemáticas para la respuesta de v_C e i_C si el interruptor se mueve a la posición 2 en 30 ms (asumiendo que la resistencia de fuga del capacitor es infinita).
d. Encuentre la expresiones matemáticas para el voltaje v_C y la corriente i_C si el interruptor se mueve a la posición 3 en $t = 48$ ms.
e. Trace las formas de onda obtenidas en los incisos (a) al (d) sobre el mismo eje de tiempo para el voltaje v_C y la corriente i_C utilizando la polaridad definida y la dirección de corriente de la figura 10.42.

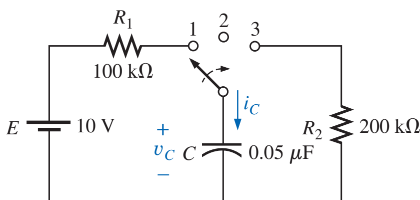


FIGURA 10.42
Ejemplo 10.7.



Soluciones:

a. *Fase de carga:*

$$v_C = E(1 - e^{-t/\tau})$$
$$\tau = R_1C = (100 \times 10^3\ \Omega)(0.05 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 5 \times 10^{-3}\ \text{s} = 5\ \text{ms}$$
$$v_C = \mathbf{10(1 - e^{-t/(5\times10^{-3})})}$$

b. $$i_C = \frac{E}{R_1}e^{-t/\tau} = \frac{10\ \text{V}}{100 \times 10^3\ \Omega}e^{-t/(5\times10^{-3})}$$
$$i_C = \mathbf{(0.1 \times 10^{-3})e^{-t/(5\times10^{-3})}}$$

c. *Fase de almacenamiento:*

$$v_C = E = \mathbf{10\ V}$$
$$i_C = \mathbf{0\ A}$$

d. *Fase de descarga* (inicia en 48 ms con $t = 0$ s para las siguientes ecuaciones):

$$v_C = Ee^{-t/\tau'}$$
$$\tau' = R_2C = (200 \times 10^3\ \Omega)(0.05 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 10 \times 10^{-3}\ \text{s} = 10\ \text{ms}$$
$$v_C = \mathbf{10e^{-t/(10\times10^{-3})}}$$
$$i_C = -\frac{E}{R_2}e^{-t/\tau'} = -\frac{10\ \text{V}}{200 \times 10^3\ \Omega}e^{-t/(10\times10^{-3})}$$
$$i_C = \mathbf{-(0.05 \times 10^{-3})e^{-t/(10\times10^{-3})}}$$

e. Vea la figura 10.43.

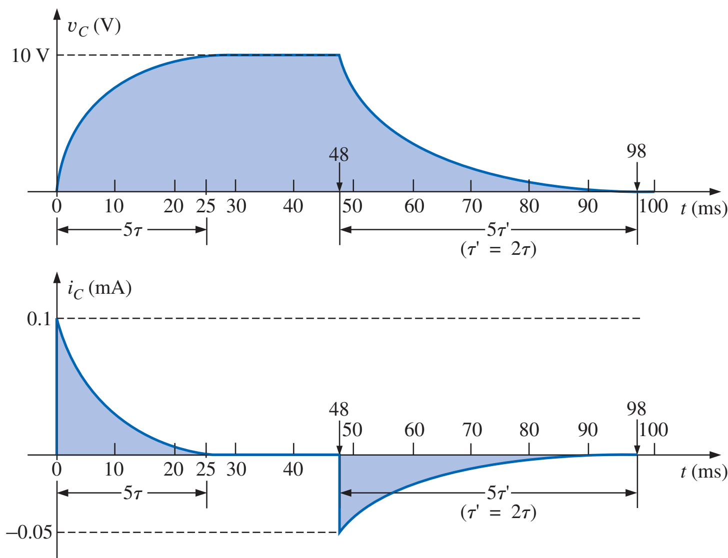
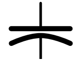


FIGURA 10.43
Formas de onda para la red de la figura 10.42.



EJEMPLO 10.8

a. Encuentre la expresión matemática para el comportamiento transitorio del voltaje en el capacitor de la figura 10.44 si el interruptor se mueve a la posición 1 en $t = 0$ s.

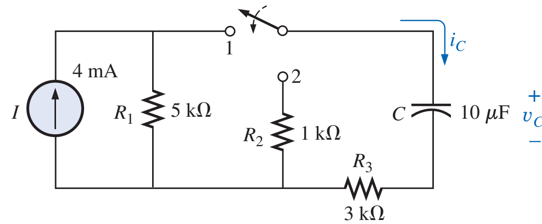


FIGURA 10.44
Ejemplo 10.8.

b. Repita el inciso (a) para i_C.
c. Encuentre la expresión matemática para la respuesta de v_C e i_C si el interruptor se mueve a la posición 2 en $t = 1\tau$ de la fase de carga.
d. Trace las formas de onda obtenidas en los incisos (a) al (c) sobre el mismo eje de tiempo para el voltaje v_C y la corriente i_C utilizando la polaridad y la dirección de corriente definidas de la figura 10.44.

Soluciones:

a. *Fase de carga:* Al convertir la fuente de corriente a una fuente de voltaje se obtendrá la red de la figura 10.45.

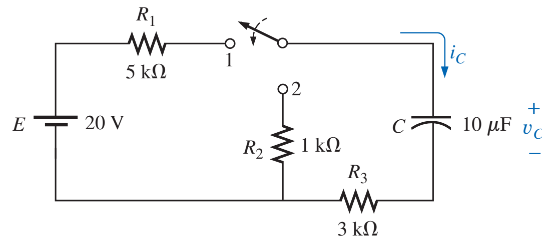


FIGURA 10.45
Fase de carga para la red de la figura 10.44.

$$v_C = E(1 - e^{-t/\tau_1})$$
$$\tau_1 = (R_1 + R_3)C = (5\text{ k}\Omega + 3\text{ k}\Omega)(10 \times 10^{-6}\text{ F})$$
$$= 80\text{ ms}$$
$$v_C = \mathbf{20(1 - e^{-t/(80\times10^{-3})})}$$

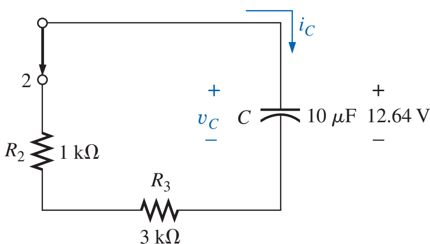


FIGURA 10.46
Red de la figura 10.45 cuando el interruptor se mueve a la posición 2 en $t = 1\tau_1$.

b. $$i_C = \frac{E}{R_1 + R_3}e^{-t/\tau_1}$$
$$= \frac{20\text{ V}}{8\text{ k}\Omega}e^{-t/(80\times10^{-3})}$$
$$i_C = \mathbf{(2.5 \times 10^{-3})e^{-t/(80\times10^{-3})}}$$

c. En $t = 1\tau_1$, $v_C = 0.632E = 0.632(20\text{ V}) = 12.64$ V, dando por resultado la red de la figura 10.46. Entonces $v_C = V_i e^{-t/\tau_2}$ con:



$$\tau_2 = (R_2 + R_3)C = (1\text{ k}\Omega + 3\text{ k}\Omega)(10 \times 10^{-6}\text{ F})$$
$$= 40\text{ ms}$$

y $$v_C = \mathbf{12.64}e^{-t/(40\times 10^{-3})}$$

En $t = 1\tau_1$, i_C cae a (0.368)(2.5 mA) = 0.92 mA. Entonces cambia a:

$$i_C = -I_i e^{-t/\tau_2}$$
$$= -\frac{V_i}{R_2 + R_3}e^{-t/\tau_2} = -\frac{12.64\text{ V}}{1\text{ k}\Omega + 3\text{ k}\Omega}e^{-t/(40\times 10^{-3})}$$
$$i_C = \mathbf{-3.16 \times 10^{-3}}e^{-t/(40\times 10^{-3})}$$

d. Vea la figura 10.47.

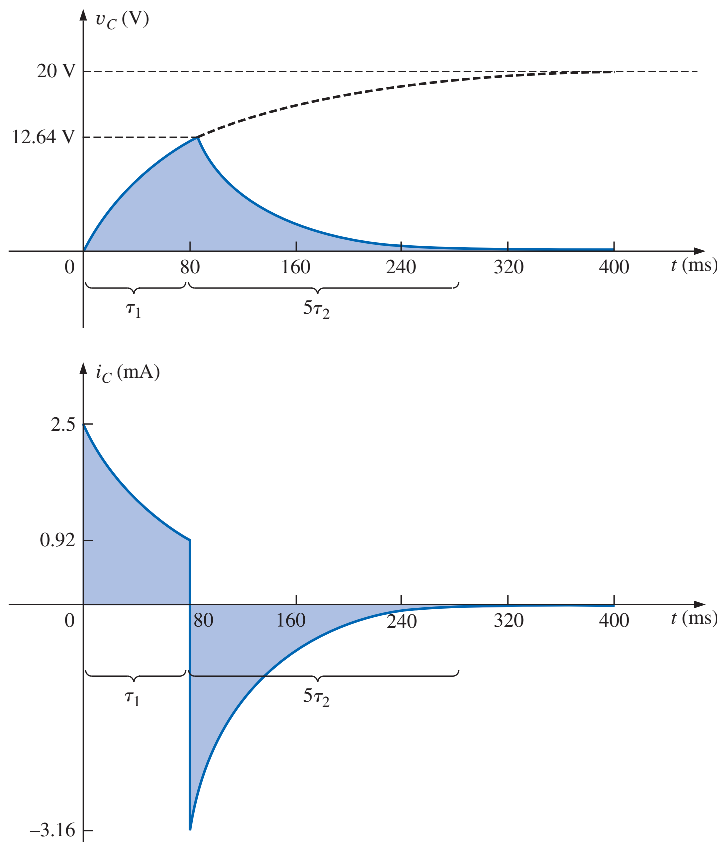


FIGURA 10.47
Formas de onda para la red de la figura 10.44.

10.9 VALORES INICIALES

En todos los ejemplos analizados en las secciones previas, el capacitor se encontraba descargado antes de que el interruptor se moviera. Ahora se analizará el efecto de una carga, y por tanto un voltaje ($V = Q/C$), sobre las placas en el instante en que la acción de conmutación ocurre. El voltaje en el capacitor en este instante se denomina valor *inicial*, como se muestra para la forma de onda general de la figura 10.48. Una vez que el interruptor se mueve, la fase



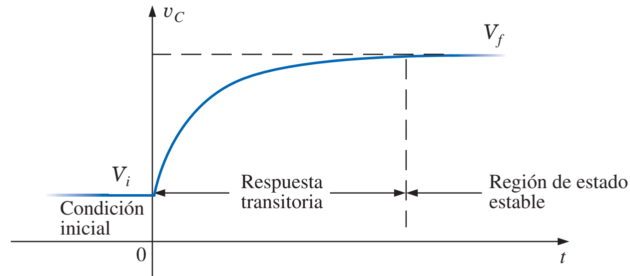


FIGURA 10.48
Definición de las regiones asociadas con una respuesta transitoria.

transitoria comenzará hasta que se estabilice después de cinco constantes de tiempo. Esta región de valor relativamente fijo que sigue a la respuesta transitoria se denomina región de *estado estable*, y el valor resultante es llamado valor de *estado estable* o valor *final*. El valor de estado de equilibrio se calcula de forma sencilla sustituyendo el equivalente de circuito abierto por el capacitor y encontrando el voltaje en las placas. Utilizando la ecuación transitoria desarrollada en la sección anterior, se puede escribir una ecuación para el voltaje v_C para el intervalo completo de tiempo de la figura 10.48; es decir,

$$v_C = V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-t/\tau})$$

Sin embargo, al multiplicar y reagrupar los términos:

$$\begin{aligned} v_C &= V_i + V_f - V_f e^{-t/\tau} - V_i + V_i e^{-t/\tau} \\ &= V_f - V_f e^{-t/\tau} + V_i e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

se encuentra:

$$v_C = V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau} \qquad \textbf{(10.23)}$$

Si al lector se le solicita trazar la forma de onda para el voltaje v_C desde su valor inicial hasta su valor final, debe comenzar por trazar una línea en los niveles inicial y de estado estable, y luego añadir la respuesta transitoria (sensible a la constante de tiempo) entre los dos niveles. El ejemplo siguiente aclarará este proceso.

EJEMPLO 10.9 El capacitor de la figura 10.49 cuenta con un voltaje inicial de 4 V.

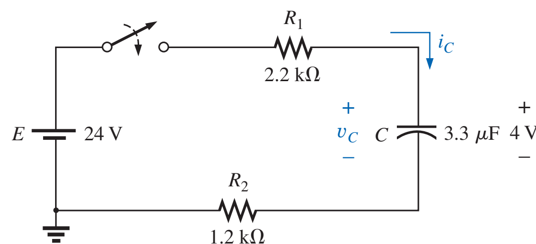
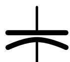


FIGURA 10.49
Ejemplo 10.9.



a. Encuentre la expresión matemática para el voltaje en el capacitor una vez que el interruptor se cierra.
b. Encuentre la expresión matemática para la corriente durante el periodo transitorio.
c. Trace la forma de onda de cada expresión desde su valor inicial hasta su valor final.

Soluciones:

a. Al sustituir el equivalente de circuito abierto por el capacitor se obtendrá un voltaje final o de estado estable v_C de 24 V.

La constante de tiempo está determinada por:

$$\tau = (R_1 + R_2)C$$
$$= (2.2\text{ k}\Omega + 1.2\text{ k}\Omega)(3.3\ \mu\text{F})$$
$$= 11.22\text{ ms}$$

con: $$5\tau = 56.1\text{ ms}$$

Al aplicar la ecuación (10.23):

$$v_C = V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau}$$
$$= 24\text{ V} + (4\text{ V} - 24\text{ V})e^{-t/11.22\text{ms}}$$

y $$v_C = \mathbf{24\ V - 20\ V}e^{-t/11.22\text{ms}}$$

b. Dado que el voltaje en el capacitor es constante en 4 V previo al cierre del interruptor, la corriente (cuyo nivel es sensible únicamente a cambios en el voltaje en el capacitor) debe tener un valor inicial de 0 mA. En el instante en que el interruptor se cierra, el voltaje en el capacitor no podrá cambiar de manera instantánea, por lo que el voltaje en los elementos resistivos en este instante será el voltaje aplicado menos el voltaje inicial en el capacitor. La corriente pico resultante es:

$$I_m = \frac{E - V_C}{R_1 + R_2} = \frac{24\text{ V} - 4\text{ V}}{2.2\text{ k}\Omega + 1.2\text{ k}\Omega} = \frac{20\text{ V}}{3.4\text{ k}\Omega} = 5.88\text{ mA}$$

La corriente disminuirá entonces (con la misma constante de tiempo que el voltaje v_C) a cero debido a que el capacitor se aproxima a su equivalencia de circuito abierto.

La ecuación para i_C es, por tanto:

$$i_C = \mathbf{5.88\ mA}e^{-t/11.22\text{ms}}$$

c. Vea la figura 10.50.

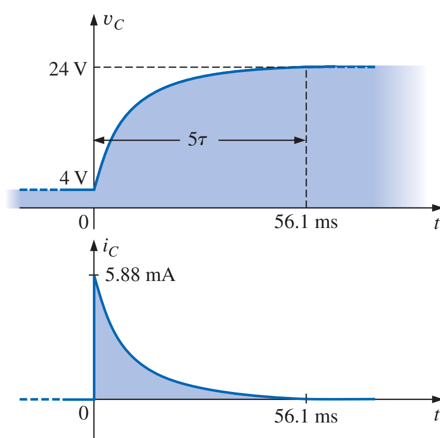
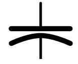


FIGURA 10.50
v_C e i_C para la red de la figura 10.49.



Los valores inicial y final del voltaje se trazaron primero y luego se incluyó la respuesta transitoria entre estos niveles. Para la corriente, la forma de onda comienza y termina en cero, presentando el valor pico un signo sensible a la dirección definida de i_C en la figura 10.49.

Ahora se verificará la validez de la ecuación de v_C sustituyendo $t = 0$ s para reflejar el instante en que se cierra el interruptor.

$$e^{-t/\tau} = e^{-0} = 1$$

y $\quad v_C = 24\text{ V} - 20\text{ V}e^{-t/\tau} = 24\text{ V} - 20\text{ V} = 4\text{ V}$

Cuando $t > 5\tau$,

$$e^{-t/\tau} \cong 0$$

y $\quad v_C = 24\text{ V} - 20\text{ V}e^{-t/\tau} = 24\text{ V} - 0\text{ V} = 24\text{ V}$

10.10 VALORES INSTANTÁNEOS

En ocasiones será necesario determinar el voltaje o la corriente en un instante particular de tiempo que no sea un múltiplo entero de τ, como en la sección anterior. Por ejemplo, si:

$$v_C = 20(1 - e^{-t/(2\times10^{-3})})$$

el voltaje v_C podría requerirse en $t = 5$ ms, el cual no corresponde con un valor particular de τ. La figura 10.30 muestra que $(1 - e^{-t/\tau})$ es aproximadamente 0.93 en $t = 5\text{ ms} = 2.5\tau$, resultando en $v_C = 20(0.93) = 18.6$ V. Es posible obtener una precisión adicional con sólo sustituir $t = 5$ ms en la ecuación y resolviendo para v_C utilizando una calculadora o tabla para determinar $e^{-2.5}$. De esta forma,

$$\begin{aligned} v_C &= 20(1 - e^{-5\text{ms}/2\text{ms}}) \\ &= 20(1 - e^{-2.5}) \\ &= 20(1 - 0.082) \\ &= 20(0.918) \\ &= \mathbf{18.36\ V} \end{aligned}$$

Los resultados son cercanos, pero la precisión más allá de las décimas se cuestiona al utilizar la figura 10.30. El procedimiento anterior también puede aplicarse a cualquier otra ecuación presentada en este capítulo para corrientes u otros voltajes.

También hay ocasiones en que se requiere el tiempo para alcanzar un voltaje o corriente particular. El proceso se complica de cierta forma debido al uso de logaritmos naturales ($\log_e$, o ln), pero las calculadoras actuales están equipadas para manejar la operación con facilidad. Existen dos formas que requieren cierto desarrollo. Primero se considerará la siguiente secuencia:

$$v_C = E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\frac{v_C}{E} = 1 - e^{-t/\tau}$$

$$1 - \frac{v_C}{E} = e^{-t/\tau}$$

$$\log_e\left(1 - \frac{v_C}{E}\right) = \log_e e^{-t/\tau}$$

$$\log_e\left(1 - \frac{v_C}{E}\right) = -\frac{t}{\tau}$$



y $$t = -\tau \log_e\left(1 - \frac{v_C}{E}\right)$$

pero: $$-\log_e \frac{x}{y} = +\log_e \frac{y}{x}$$

Por tanto, $$t = \tau \log_e\left(\frac{E}{E - v_C}\right) \tag{10.24}$$

La segunda forma es como sigue:

$$v_C = Ee^{-t/\tau}$$

$$\frac{v_C}{E} = e^{-t/\tau}$$

$$\log_e \frac{v_C}{E} = \log_e e^{-t/\tau}$$

$$\log_e \frac{v_C}{E} = -\frac{t}{\tau}$$

y $$t = -\tau \log_e \frac{v_C}{E}$$

o bien: $$t = \tau \log_e \frac{E}{v_C} \tag{10.25}$$

Para $i_C = (E/R)e^{-t/\tau}$:

$$t = \tau \log_e \frac{E}{i_C R} \tag{10.26}$$

Por ejemplo, supóngase que:

$$v_C = 20(1 - e^{-t/(2\times10^{-3})})$$

y que se requiere el tiempo para alcanzar 10 V. Al sustituir en la ecuación (10.24) se tiene:

$$\begin{aligned} t &= (2 \text{ ms})\log_e\left(\frac{20 \text{ V}}{20 \text{ V} - 10 \text{ V}}\right) \\ &= (2 \text{ ms})\log_e 2 \\ &= (2 \text{ ms})(0.693) \\ &= \mathbf{1.386\ ms} \end{aligned}$$

↑ IN tecla en la calculadora

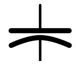
Al utilizar la figura 10.30, se encuentra en $(1 - e^{-t/\tau}) = v_C/E = 0.5$ que $t \cong 0.7\tau = 0.7(2 \text{ ms}) = 1.4$ ms, lo cual está relativamente más cercano a lo anterior.

Mathcad

Ahora es momento de ver cómo se puede aplicar Mathcad al análisis transitorio descrito en este capítulo. Para la primera ecuación presentada en la sección 10.10,

$$v_C = 20(1 - e^{-t/(2\times10^{-3})})$$

el valor de t debe definirse antes de que se escriba la expresión, o puede también simplemente insertarse en la ecuación. El primer método es, por lo general, más



adecuado debido a que el cambio del valor definido de t dará por resultado un cambio inmediato en el resultado. En otras palabras, el valor podrá utilizarse para futuros cálculos. En la figura 10.51 el valor de t se definió en 5 ms. La ecuación fue ingresada entonces utilizando la función e proveniente de la paleta de **Calculator** que se obtiene mediante la secuencia **View-Toolbars-Calculator**. Debe asegurarse el insertar un operador de multiplicación entre el 20 inicial y el paréntesis principal izquierdo. También, debe tenerse cuidado en que el paréntesis de control se encuentre en el lugar correcto antes de colocar el paréntesis derecho para cerrar la ecuación. Tomará cierta práctica asegurarse que el paréntesis de inserción se encuentra en el lugar adecuado antes de capturar un parámetro, pero con el tiempo se verá que es un procedimiento bastante directo. El **–3** se coloca utilizando el operador de shift (mayúsculas) con la tecla del número **6** en el teclado estándar estadounidense. El resultado se presentará mediante el simple tecleo nuevamente de v, seguido de un signo de igual. El resultado para t = 1 ms puede obtenerse ahora con sólo modificar el valor definido para t. El resultado de 7.869 V aparecerá de forma inmediata.

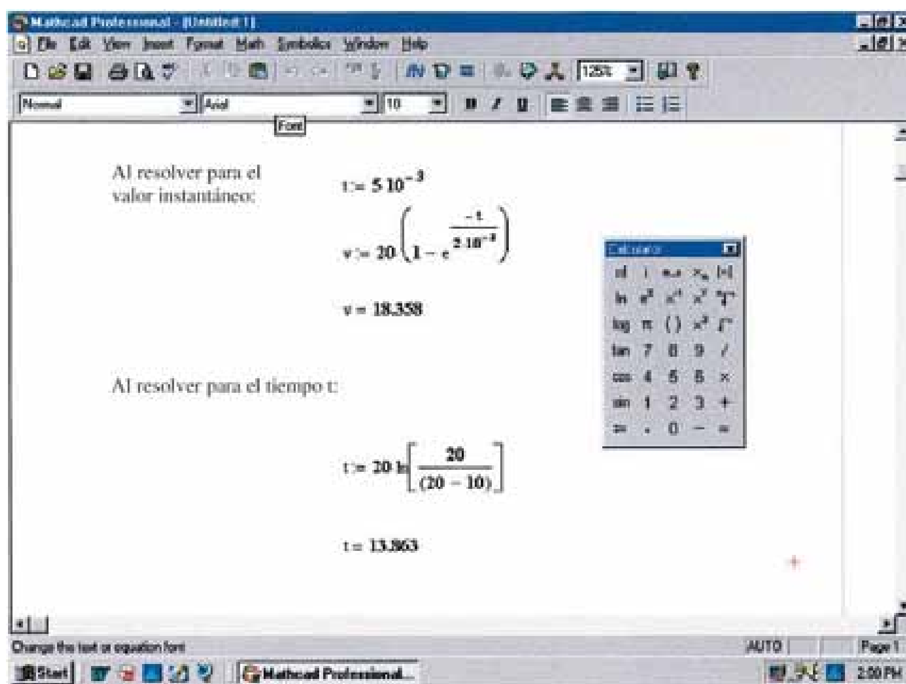


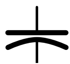
FIGURA 10.51
Aplicación de Mathcad para las ecuaciones R-C transitorias.

Para la segunda ecuación de la sección 10.10,

$$v_C = 20(1 - e^{-5\text{ms}/2\text{ms}})$$

la ecuación para t puede ingresarse de forma directa como se muestra en la parte inferior de la figura 10.51. La opción **ln** de **Calculator** es para un cálculo en base e, mientras que la opción **log** es para un cálculo en base 10. El resultado aparecerá al instante de colocar el signo de igual después de t en la línea inferior.

El texto que se observa en la pantalla para definir cada operación se obtiene al hacer clic en **Insert-Text Region** (Insertar área de texto) y tecleando luego el contenido del texto. El tipo de letra en negrita se obtiene mediante un simple clic "barrido" sobre el texto para establecer un fondo negro; luego se selecciona **B** en la barra de herramientas y aparecerá el tipo en negritas.



10.11 EQUIVALENTE DE THÉVENIN: $\tau = R_{Th}C$

Habrá ocasiones en que la red no cuente con la forma simple en serie de la figura 10.24, de manera que será necesario encontrar primero el circuito Thévenin equivalente para la red externa al elemento capacitivo. Entonces E_{Th} será la fuente de voltaje E de las ecuaciones (10.15) a la (10.20), y R_{Th} será la resistencia R. La constante de tiempo es entonces $\tau = R_{Th}C$.

EJEMPLO 10.10 Para la red de la figura 10.52:

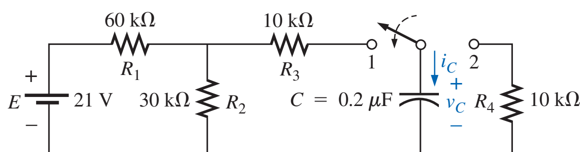


FIGURA 10.52
Ejemplo 10.10.

a. Encuentre la expresión matemática para el comportamiento transitorio del voltaje v_C y la corriente i_C posterior al cierre del interruptor (posición 1 en $t = 0$ s).
b. Encuentre la expresión matemática para el voltaje v_C y la corriente i_C en función del tiempo si el interruptor se mueve a la posición 2 en $t = 9$ ms.
c. Trace las formas de onda resultantes de los incisos (a) y (b) sobre el mismo eje de tiempo.

Soluciones:

a. Al aplicar el teorema de Thévenin al capacitor de 0.2 μF se obtiene la figura 10.53:

$$R_{Th} = R_1 \parallel R_2 + R_3 = \frac{(60\text{ k}\Omega)(30\text{ k}\Omega)}{90\text{ k}\Omega} + 10\text{ k}\Omega$$

$$= 20\text{ k}\Omega + 10\text{ k}\Omega$$

$$R_{Th} = 30\text{ k}\Omega$$

$$E_{Th} = \frac{R_2E}{R_2 + R_1} = \frac{(30\text{ k}\Omega)(21\text{ V})}{30\text{ k}\Omega + 60\text{ k}\Omega} = \frac{1}{3}(21\text{ V}) = 7\text{ V}$$

El circuito equivalente de Thévenin resultante con el capacitor reemplazado se muestra en la figura 10.54. Utilizando la ecuación (10.23) con $V_f = E_{Th}$ y $V_i = 0$ V se encuentra que:

$$v_C = V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau}$$

se convierte $\quad v_C = E_{Th} + (0\text{ V} - E_{Th})e^{-t/\tau}$

o bien $\quad v_C = E_{Th}(1 - e^{-t/\tau})$

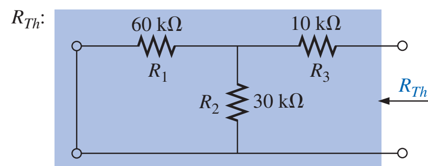
con $\quad \tau = RC = (30\text{ k}\Omega)(0.2\ \mu\text{F}) = 6\text{ ms}$

de manera que $\quad v_C = \mathbf{7(1 - e^{-t/6ms})}$

Para la corriente: $\quad i_C = \frac{E_{Th}}{R}e^{-t/RC}$

$$= \frac{7\text{ V}}{30\text{ k}\Omega}e^{-t/6\text{ms}}$$

$$i_C = \mathbf{(0.233 \times 10^{-3})e^{-t/6ms}}$$



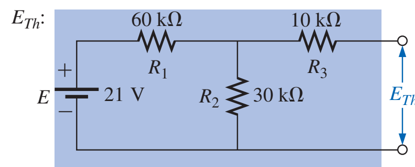


FIGURA 10.53
Aplicación del teorema de Thévenin a la red de la figura 10.52.

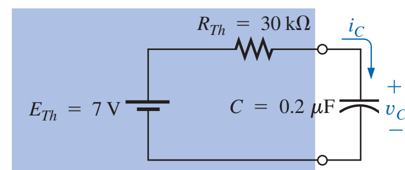
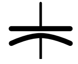


FIGURA 10.54
Sustitución del equivalente de Thévenin para la red de la figura 10.52.



b. En $t = 9$ ms,

$$v_C = E_{Th}(1 - e^{-t/\tau}) = 7(1 - e^{-(9\times10^{-3})/(6\times10^{-3})})$$
$$= 7(1 - e^{-1.5}) = 7(1 - 0.223)$$
$$v_C = 7(0.777) = 5.44 \text{ V}$$

e
$$i_C = \frac{E_{Th}}{R}e^{-t/\tau} = (0.233 \times 10^{-3})e^{-1.5}$$
$$= (0.233 \times 10^{-3})(0.223)$$
$$i_C = 0.052 \times 10^{-3} = 0.052 \text{ mA}$$

Al utilizar la ecuación (10.23) con $V_f = 0$ V y $V_i = 5.44$ V se encuentra que:

$$v_C = V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau'}$$

se convierte en: $v_C = 0 \text{ V} + (5.44 \text{ V} - 0 \text{ V})e^{-t/\tau'}$
$$= 5.44e^{-t/\tau'}$$

con: $\tau' = R_4C = (10 \text{ k}\Omega)(0.2\ \mu\text{F}) = 2 \text{ ms}$

y $v_C = \mathbf{5.44e^{-t/2ms}}$

Mediante la ecuación (10.22),

$$I_i = \frac{5.44 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} = 0.054 \text{ mA}$$

e $i_C = I_i e^{-t/\tau} = \mathbf{-(0.54 \times 10^{-3})e^{-t/2ms}}$

c. Vea la figura 10.55.

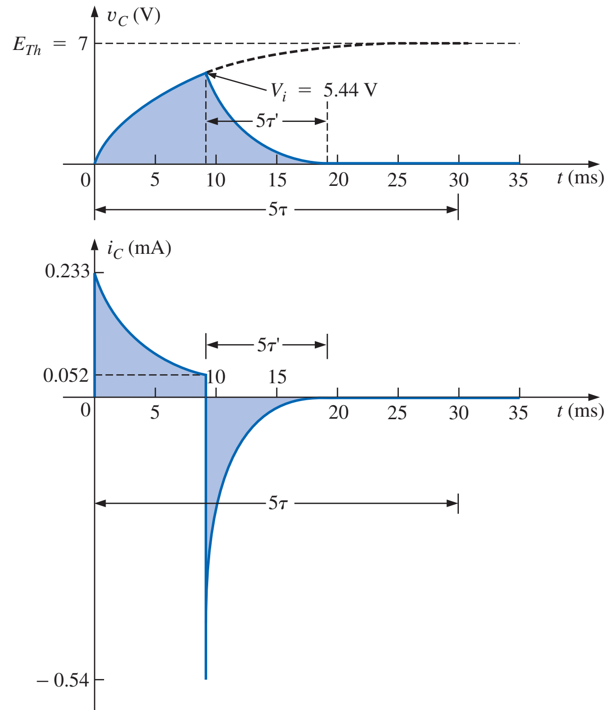


FIGURA 10.55
Formas de onda resultantes de la red de la figura 10.52.

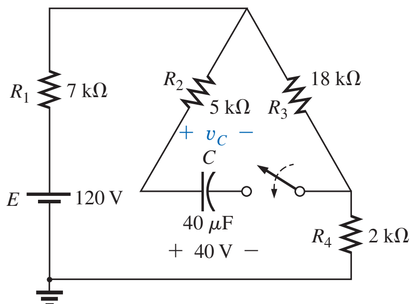


FIGURA 10.56
Ejemplo 10.11.

EJEMPLO 10.11 El capacitor de la figura 10.56 se encuentra cargado inicialmente a 40 V. Encuentre la expresión matemática para v_C una vez que se cierra el interruptor.



Solución: La red se vuelve a trazar en la figura 10.57.

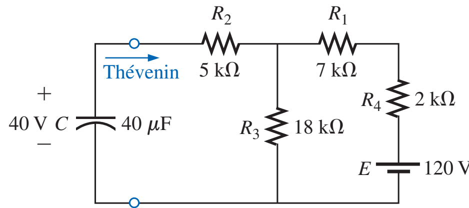


FIGURA 10.57
Red de la figura 10.56 trazada de nuevo.

E_{Th}:

$$E_{Th} = \frac{R_3E}{R_3 + R_1 + R_4} = \frac{18\ \text{k}\Omega(120\ \text{V})}{18\ \text{k}\Omega + 7\ \text{k}\Omega + 2\ \text{k}\Omega}$$
$$= 80\ \text{V}$$

R_{Th}:

$$R_{Th} = 5\ \text{k}\Omega + 18\ \text{k}\Omega \parallel (7\ \text{k}\Omega + 2\ \text{k}\Omega)$$
$$= 5\ \text{k}\Omega + 6\ \text{k}\Omega$$
$$= 11\ \text{k}\Omega$$

Por tanto, $V_i = 40\ \text{V}$ y $V_f = 80\ \text{V}$

y $\tau = R_{Th}C = (11\ \text{k}\Omega)(40\ \mu\text{F}) = 0.44\ \text{s}$

Ecuación (10.23): $v_C = V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau}$

$= 80\ \text{V} + (40\ \text{V} - 80\ \text{V})e^{-t/0.44\text{s}}$

y $v_C = \mathbf{80\ V - 40\ V}e^{-t/0.44\text{s}}$

EJEMPLO 10.12 Para la red de la figura 10.58, encuentre la expresión matemática para el voltaje v_C una vez que el interruptor se cierra (en $t = 0$).

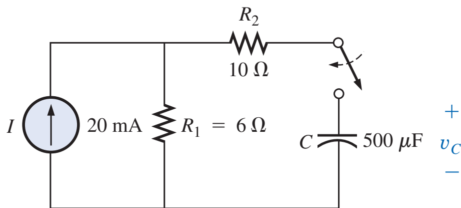


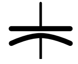
FIGURA 10.58
Ejemplo 10.12.

Solución:

$$R_{Th} = R_1 + R_2 = 6\ \Omega + 10\ \Omega = 16\ \Omega$$
$$E_{Th} = V_1 + V_2 = IR_1 + 0$$
$$= (20 \times 10^{-3}\ \text{A})(6\ \Omega) = 120 \times 10^{-3}\ \text{V} = 0.12\ \text{V}$$

y $\tau = R_{Th}C = (16\ \Omega)(500 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 8\ \text{ms}$

de manera que: $v_C = \mathbf{0.12(1 - e^{-t/8ms})}$



10.12 LA CORRIENTE i_C

La corriente i_C asociada con una capacitancia C está relacionada con el voltaje en el capacitor mediante:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \tag{10.27}$$

donde dv_C/dt es una medida del cambio en v_C en un tiempo tan pequeño que tiende a cero. La función dv_C/dt se denomina *derivada* del voltaje v_C con respecto al tiempo t.

Si el voltaje no cambia en un instante particular, entonces:

$$dv_C = 0$$

e

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

En otras palabras, si el voltaje en un capacitor no cambia con el tiempo, la corriente i_C asociada con el capacitor será igual a cero. Para llevar esto un paso más adelante, la ecuación también establece que mientras más rápido sea el cambio en el voltaje en el capacitor, mayor será la corriente resultante.

En un esfuerzo por desarrollar un entendimiento claro de la ecuación (10.27), ahora se calculará la corriente promedio asociada con un capacitor para distintos voltajes aplicados en el capacitor. La corriente promedio se define mediante la ecuación

$$i_{C\text{promedio}} = C\frac{\Delta v_C}{\Delta t} \tag{10.28}$$

donde Δ indica un cambio finito (medible) en carga, voltaje o tiempo. La corriente instantánea puede obtenerse de la ecuación (10.28) al dejar a Δt que tienda a cero; es decir,

$$i_{C\text{inst}} = \lim_{\Delta t \to 0} C\frac{\Delta v_C}{\Delta t} = C\frac{dv_C}{dt}$$

En el ejemplo siguiente, se considerará el cambio en el voltaje Δv_C para cada pendiente de la forma de onda del voltaje. Si el voltaje se incrementa con el tiempo, la corriente promedio será el cambio en el voltaje dividido entre el cambio en el tiempo, con un signo positivo. Si el voltaje disminuye con el tiempo, de nuevo la corriente promedio será el cambio en el voltaje dividido entre el cambio en el tiempo, pero con un signo negativo.

EJEMPLO 10.13 Encuentre la forma de onda para la corriente promedio si el voltaje en un capacitor de 2 μF es como el que se muestra en la figura 10.59.

Soluciones:

a. De 0 ms a 2 ms, el voltaje se incrementa linealmente a partir de 0 V hasta 4 V, el cambio en el voltaje $\Delta v = 4\text{ V} - 0 = 4\text{ V}$ (con un signo positivo dado que el voltaje se incrementa con el tiempo). El cambio en el tiempo $\Delta t = 2\text{ ms} - 0 = 2\text{ ms}$, y

$$i_{C\text{promedio}} = C\frac{\Delta v_C}{\Delta t} = (2 \times 10^{-6}\text{ F})\left(\frac{4\text{ V}}{2 \times 10^{-3}\text{ s}}\right)$$
$$= 4 \times 10^{-3}\text{ A} = 4\text{ mA}$$



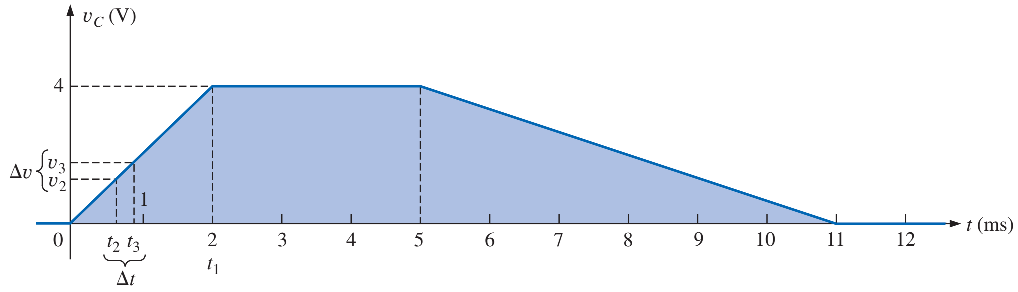


FIGURA 10.59
Ejemplo 10.13.

b. De 2 ms a 5 ms, el voltaje permanece constante en 4 V; el cambio en el voltaje $\Delta v = 0$. El cambio en el tiempo $\Delta t = 3$ ms, y

$$i_{C\text{promedio}} = C\frac{\Delta v_C}{\Delta t} = C\frac{0}{\Delta t} = 0$$

c. De 5 ms a 11 ms, el voltaje disminuye de 4 V a 0 V. El cambio en el voltaje Δv es, por tanto, 4 V – 0 = 4 V (con un signo negativo debido a que el voltaje disminuye con el tiempo). El cambio en el tiempo Δt = 11 ms – 5 ms = 6 ms, y

$$\begin{aligned} i_{C\text{promedio}} &= C\frac{\Delta v_C}{\Delta t} = -(2 \times 10^{-6}\text{ F})\left(\frac{4\text{ V}}{6 \times 10^{-3}\text{ s}}\right) \\ &= -1.33 \times 10^{-3}\text{ A} = -1.33\text{ mA} \end{aligned}$$

d. De 11 ms en adelante, el voltaje permanece constante en 0 y $\Delta v = 0$, por lo que $i_{C\text{promedio}} = 0$. La forma de onda de la corriente promedio para el voltaje aplicado se muestra en la figura 10.60.

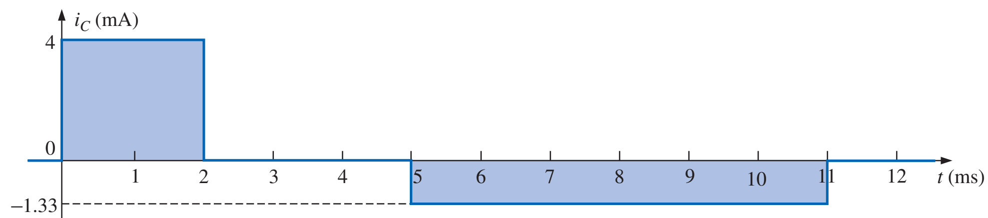
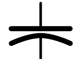


FIGURA 10.60
Corriente resultante i_C para el voltaje aplicado de la figura 10.59.

Observe en el ejemplo 10.13 que, en general, mientras más pronunciada sea la pendiente, mayor será la corriente, y cuando el voltaje deja de cambiar, la corriente es cero. Además, el valor promedio será el mismo que el valor instantáneo en cualquier punto a lo largo de la pendiente sobre la que se calculó el valor promedio. Por ejemplo, si el intervalo Δt se reduce de $0 \rightarrow t_1$ a $t_2 - t_3$, como se observa en la figura 10.59, $\Delta v/\Delta t$ seguirá siendo el mismo. De hecho, sin importar lo pequeño que sea el intervalo Δt, la pendiente será la misma y, por tanto, la corriente $i_{C\text{promedio}}$ será la misma. Si se considera el límite como $\Delta t \rightarrow 0$, la pendiente seguirá siendo la misma y, por tanto, $i_{C\text{promedio}} = i_{C\text{inst}}$ en



cualquier instante entre 0 y t_1. Lo mismo puede decirse acerca de cualquier segmento de la forma de onda de voltaje que tenga una pendiente constante.

Un punto importante que se deriva de este análisis es que no es la magnitud del voltaje en el capacitor la que determina la corriente, sino la velocidad con la que el voltaje *cambia* en el capacitor. Un voltaje aplicado de cd constante de 10,000 V no generará (de forma ideal) ningún flujo de carga (corriente), pero un cambio en voltaje de 1 V en un periodo de tiempo breve podría generar una corriente importante.

El método descrito es aplicable solamente para formas de onda con segmentos de línea rectos (lineales). Para formas de onda no lineales (curvas), deberá utilizarse un método de cálculo (diferenciación).

10.13 CAPACITORES EN SERIE Y EN PARALELO

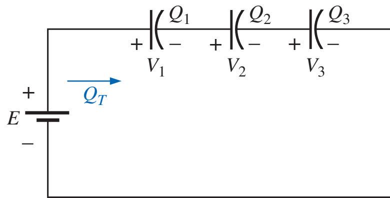


FIGURA 10.61
Capacitores en serie.

Los capacitores, de la misma forma que los resistores, pueden colocarse en serie o en paralelo. Se obtienen mayores niveles de capacitancia al colocar los capacitores en paralelo, mientras que se obtienen menores niveles al colocarlos en serie.

Para los capacitores en serie, la carga será la misma sobre cada capacitor (Figura 10.61):

$$Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_3 \tag{10.29}$$

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo cerrado se obtiene:

$$E = V_1 + V_2 + V_3$$

Sin embargo,
$$V = \frac{Q}{C}$$

de manera que:
$$\frac{Q_T}{C_T} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$

Utilizando la ecuación (10.29) y dividiendo ambos lados entre Q se obtiene:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \tag{10.30}$$

lo cual es similar a la forma en que se encontró la resistencia de un circuito resistivo en paralelo. La capacitancia total de dos capacitores en serie es:

$$C_T = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \tag{10.31}$$

El voltaje en cada capacitor de la figura 10.61 puede encontrarse al reconocer primero que:

$$Q_T = Q_1$$

o bien:
$$C_TE = C_1V_1$$

Al resolver para V_1:

$$V_1 = \frac{C_TE}{C_1}$$



y al sustituir para C_T:

$$V_1 = \left[\frac{1/C_1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3}\right]E \qquad \textbf{(10.32)}$$

Resultará una ecuación similar para cada capacitor de la red.

Para capacitores en paralelo, como se muestra en la figura 10.62, el voltaje será el mismo en cada capacitor, y la carga total será la suma de la existente en cada capacitor:

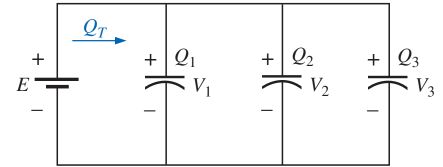


FIGURA 10.62
Capacitores en paralelo.

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 \qquad \textbf{(10.33)}$$

Sin embargo, $$Q = CV$$

Por tanto, $$C_TE = C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3$$

pero $$E = V_1 = V_2 = V_3$$

De esta forma, $$C_T = C_1 + C_2 + C_3 \qquad \textbf{(10.34)}$$

lo cual es similar a la forma con la que se encontró la resistencia de un circuito en serie.

EJEMPLO 10.14 Para el circuito de la figura 10.63:

a. Encuentre la capacitancia total.
b. Determine la carga sobre cada placa.
c. Encuentre el voltaje en cada capacitor.

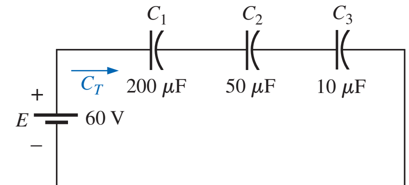


FIGURA 10.63
Ejemplo 10.14.

Soluciones:

a. $$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$
$$= \frac{1}{200 \times 10^{-6}\,\text{F}} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}\,\text{F}} + \frac{1}{10 \times 10^{-6}\,\text{F}}$$
$$= 0.005 \times 10^6 + 0.02 \times 10^6 + 0.1 \times 10^6$$
$$= 0.125 \times 10^6$$

y $$C_T = \frac{1}{0.125 \times 10^6} = \mathbf{8\ \mu F}$$

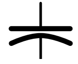
b. $$Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_3$$
$$= C_TE = (8 \times 10^{-6}\,\text{F})(60\,\text{V}) = \mathbf{480\ \mu C}$$

c. $$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{480 \times 10^{-6}\,\text{C}}{200 \times 10^{-6}\,\text{F}} = \mathbf{2.4\ V}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{480 \times 10^{-6}\,\text{C}}{50 \times 10^{-6}\,\text{F}} = \mathbf{9.6\ V}$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{480 \times 10^{-6}\,\text{C}}{10 \times 10^{-6}\,\text{F}} = \mathbf{48.0\ V}$$

y $$E = V_1 + V_2 + V_3 = 2.4\,\text{V} + 9.6\,\text{V} + 48\,\text{V}$$
$$= \mathbf{60\ V} \quad \text{(se comprueba)}$$



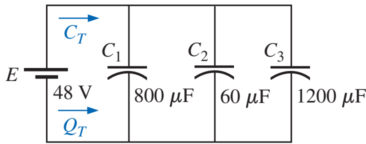


FIGURA 10.64
Ejemplo 10.15.

EJEMPLO 10.15 Para la red de la figura 10.64:

a. Encuentre la capacitancia total.
b. Determine la carga sobre cada placa.
c. Encuentre la carga total.

Soluciones:

a. $C_T = C_1 + C_2 + C_3 = 800\ \mu F + 60\ \mu F + 1200\ \mu F$
$= \mathbf{2060\ \mu F}$

b. $Q_1 = C_1E = (800 \times 10^{-6}\ F)(48\ V) = \mathbf{38.4\ mC}$
$Q_2 = C_2E = (60 \times 10^{-6}\ F)(48\ V) = \mathbf{2.88\ mC}$
$Q_3 = C_3E = (1200 \times 10^{-6}\ F)(48\ V) = \mathbf{57.6\ mC}$

c. $Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 38.4\ mC + 2.88\ mC + 57.6\ mC$
$= \mathbf{98.88\ mC}$

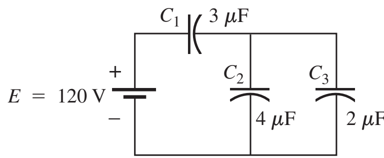


FIGURA 10.65
Ejemplo 10.16.

EJEMPLO 10.16 Encuentre el voltaje y la carga en cada capacitor de la red de la figura 10.65.

Solución:

$$C'_T = C_2 + C_3 = 4\ \mu F + 2\ \mu F = 6\ \mu F$$

$$C_T = \frac{C_1C'_T}{C_1 + C'_T} = \frac{(3\ \mu F)(6\ \mu F)}{3\ \mu F + 6\ \mu F} = 2\ \mu F$$

$$Q_T = C_TE = (2 \times 10^{-6}\ F)(120\ V) = \mathbf{240\ \mu C}$$

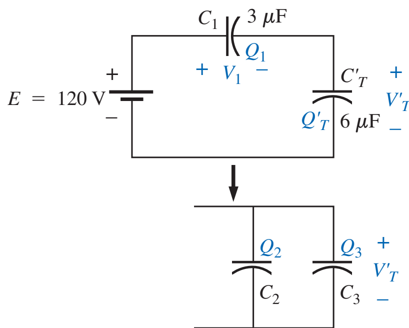


FIGURA 10.66
Equivalente reducido para la red de la figura 10.65.

Un circuito equivalente (Figura 10.66) tiene

$$Q_T = Q_1 = Q'_T$$

y, por tanto, $$Q_1 = \mathbf{240\ \mu C}$$

y $$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{240 \times 10^{-6}\ C}{3 \times 10^{-6}\ F} = \mathbf{80\ V}$$

$$Q'_T = 240\ \mu C$$

y, por tanto,

$$V'_T = \frac{Q'_T}{C'_T} = \frac{240 \times 10^{-6}\ C}{6 \times 10^{-6}\ F} = \mathbf{40\ V}$$

y $$Q_2 = C_2V'_T = (4 \times 10^{-6}\ F)(40\ V) = \mathbf{160\ \mu C}$$
$$Q_3 = C_3V'_T = (2 \times 10^{-6}\ F)(40\ V) = \mathbf{80\ \mu C}$$

EJEMPLO 10.17 Encuentre el voltaje y la carga en el capacitor C_1 de la figura 10.67 una vez que se ha cargado hasta su valor final.

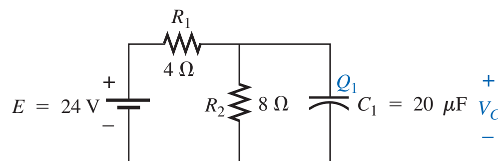


FIGURA 10.67
Ejemplo 10.17.



Solución: Como se analizó antes, el capacitor es efectivamente un circuito abierto para cd una vez que se ha cargado hasta su valor final (Figura 10.68). Por tanto,

$$V_C = \frac{(8\ \Omega)(24\ \text{V})}{4\ \Omega + 8\ \Omega} = \mathbf{16\ V}$$

$$Q_1 = C_1V_C = (20 \times 10^{-6}\ \text{F})(16\ \text{V}) = \mathbf{320\ \mu C}$$

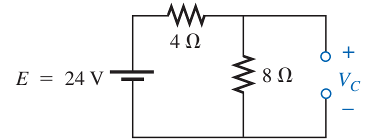


FIGURA 10.68
Determinación del valor final (estado estable) de v_C.

EJEMPLO 10.18 Encuentre el voltaje y la carga en cada capacitor de la red de la figura 10.69 una vez que se encuentran cargados a su valor final.

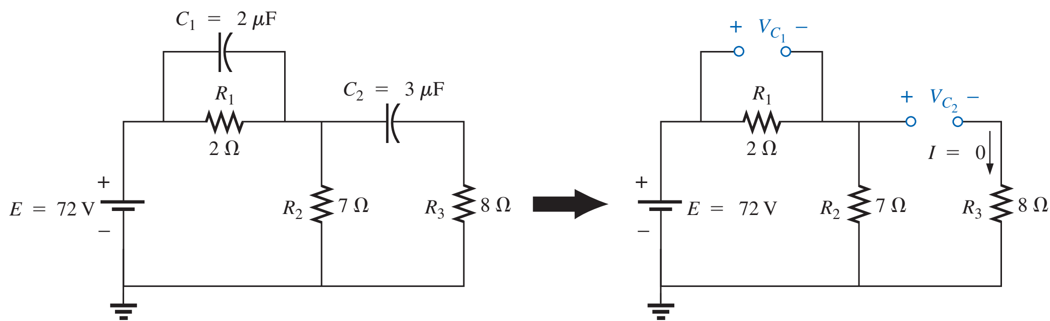


FIGURA 10.69
Ejemplo 10.18.

Solución:

$$V_{C_2} = \frac{(7\ \Omega)(72\ \text{V})}{7\ \Omega + 2\ \Omega} = \mathbf{56\ V}$$

$$V_{C_1} = \frac{(2\ \Omega)(72\ \text{V})}{2\ \Omega + 7\ \Omega} = \mathbf{16\ V}$$

$$Q_1 = C_1V_{C_1} = (2 \times 10^{-6}\ \text{F})(16\ \text{V}) = \mathbf{32\ \mu C}$$

$$Q_2 = C_2V_{C_2} = (3 \times 10^{-6}\ \text{F})(56\ \text{V}) = \mathbf{168\ \mu C}$$

10.14 ENERGÍA ALMACENADA POR UN CAPACITOR

El capacitor ideal no disipa nada de la energía que se le suministra, sino que la almacena en forma de campo eléctrico entre las superficies conductoras. En la figura 10.70 se presenta una gráfica del voltaje, la corriente y la potencia hacia un capacitor durante la fase de carga. La curva de la potencia se puede obtener al calcular el producto del voltaje y la corriente en instantes seleccionados y conectando los puntos obtenidos. La energía almacenada se representa mediante el área sombreada bajo la curva de potencia. Utilizando el cálculo, es posible determinar el área bajo la curva:

$$W_C = \frac{1}{2}CE^2$$

En general, $$W_C = \frac{1}{2}CV^2 \qquad \text{(J)} \qquad \mathbf{(10.35)}$$

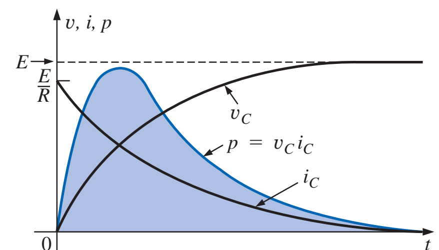
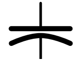


FIGURA 10.70
Gráfica de la potencia hacia un elemento capacitivo durante la fase transitoria.



donde V es el voltaje de estado estable en el capacitor. En términos de Q y C,

$$W_C = \frac{1}{2}C\left(\frac{Q}{C}\right)^2$$

o bien:

$$W_C = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{(J)} \qquad \textbf{(10.36)}$$

EJEMPLO 10.19 Para la red de la figura 10.69, determine la energía almacenada por cada capacitor.

Solución:

Para C_1,

$$\begin{aligned} W_C &= \frac{1}{2}CV^2 \\ &= \frac{1}{2}(2 \times 10^{-6}\text{ F})(16\text{ V})^2 = (1 \times 10^{-6})(256) \\ &= \mathbf{256\ \mu J} \end{aligned}$$

Para C_2,

$$\begin{aligned} W_C &= \frac{1}{2}CV^2 \\ &= \frac{1}{2}(3 \times 10^{-6}\text{ F})(56\text{ V})^2 = (1.5 \times 10^{-6})(3136) \\ &= \mathbf{4704\ \mu J} \end{aligned}$$

Debido al término cuadrático, observe la diferencia en la energía almacenada a causa de un mayor voltaje.

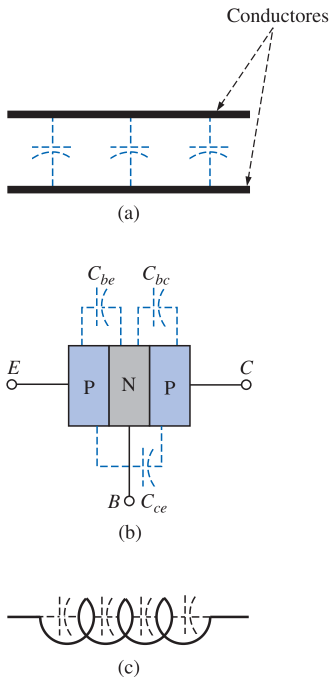


FIGURA 10.71
Ejemplos de capacitancia parásita.

10.15 CAPACITANCIAS PARÁSITAS

Además de los capacitores analizados hasta ahora en este capítulo, existen **capacitancias parásitas** que se presentan no gracias al diseño sino simplemente a dos superficies conductoras que se encuentren en cercanía relativa entre sí. Dos hilos conductores dentro de una misma red presentarán un efecto capacitivo entre ellos, como se muestra en la figura 10.71(a). En circuitos electrónicos, existen valores de capacitancia entre superficies conductoras del transistor, como se muestra en la figura 10.71(b). Como se mencionó, en el capítulo 12 se analizará otro elemento llamado *inductor*, el cual presenta efectos capacitivos entre el devanado [Figura 10.71(c)]. Las capacitancias parásitas con frecuencia pueden llevar a errores serios en el diseño del sistema si no se consideran adecuadamente.

10.16 APLICACIONES

Esta sección de aplicaciones para los capacitores incluye tanto la operación de una cámara desechable económica, de gran popularidad actualmente, como el análisis del uso de capacitores en acondicionadores de líneas (protectores de picos) que se encuentran presentes en la mayoría de los hogares y negocios. En el capítulo siguiente se presentarán ejemplos adicionales del uso de capacitores.



Lámpara de flash para cámara fotográfica

El circuito básico para la lámpara de flash de la popular cámara fotográfica desechable que se muestra en la figura 10.72(a) se proporciona en la figura 10.72(b), con la circuitería física apareciendo en la figura 10.72(c). Las etiquetas añadidas a la figura 10.72(c) identifican áreas generales del diseño y algunos componentes individuales. Los principales componentes del circuito electrónico incluyen un capacitor electrolítico polarizado grande de 160 μF, 330 V para almacenar la carga necesaria para la lámpara de flash, una lámpara de flash para generar la luz requerida, una batería de cd de 1.5 V, una red de conmutación para generar un voltaje de cd superior a 300 V, y una red disparadora para establecer unos miles de volts durante un periodo muy breve y disparar la lámpara de flash. Existen capacitores de 22 nF en la red disparadora como se muestra tanto en la figura 10.72(b) como en la 10.72 (c), y un tercer capacitor de 470 pF en el oscilador de alta frecuencia de la red de conmutación. Observe en particular que el tamaño de cada capacitor se encuentra directamente relacionado con su valor de capacitancia. Desde luego, despertará cierto interés el que una sola fuente de energía de sólo 1.5 V de cd pueda convertirse a una de algunos miles de volts (a pesar de que sea durante un periodo muy breve) para disparar la lámpara de flash. De hecho, esa pequeña batería individual posee la suficiente energía para cubrir todo el recorrido de la película por la cámara. Siempre debe tenerse presente que la energía se encuentra relacionada con la potencia y el tiempo mediante $W = Pt = (VI)t$. Es decir, podrá gene-

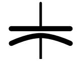


(a)

FIGURA 10.72(a)
Cámara con flash: apariencia general.

(b)

FIGURA 10.72(b)
Cámara con flash: circuito básico.



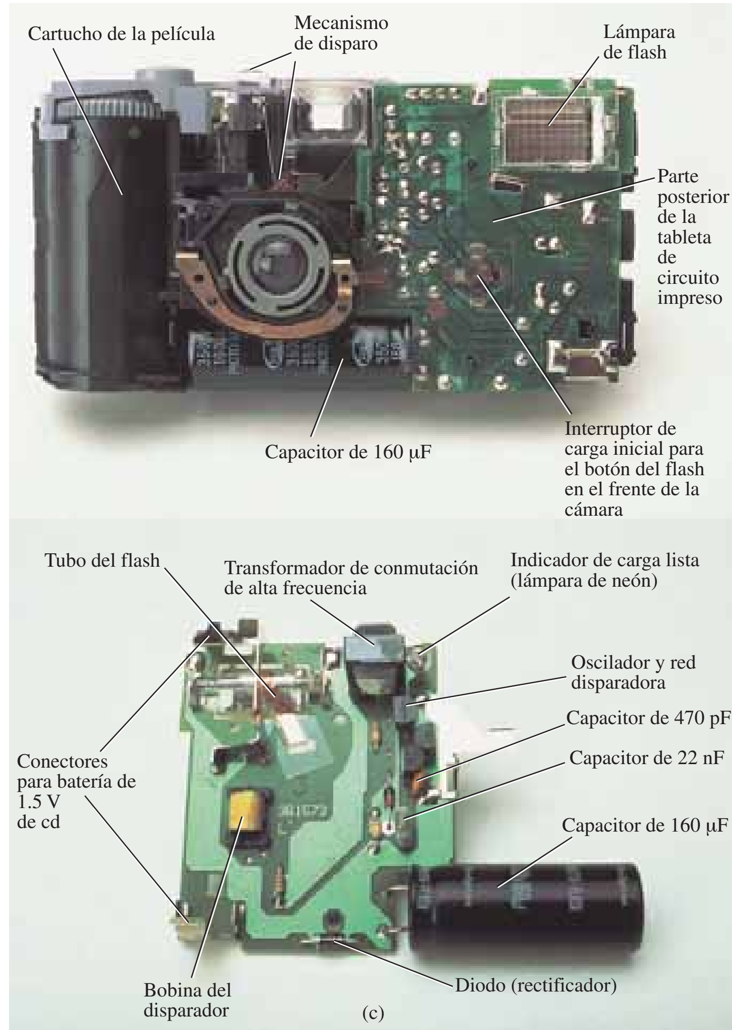
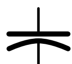


FIGURA 10.72(c)
Cámara con flash: construcción interna.

rarse un mayor nivel de voltaje para un nivel definido de energía siempre que los factores I y t sean lo suficientemente pequeños.

Al utilizar por primera vez la cámara se le indica al usuario que accione el botón del flash en la parte frontal de la cámara y esperar a que aparezca la luz indicadora de que el flash está listo. En cuanto el botón del flash se presione, se aplicarán los 1.5 V de la batería de cd a una red electrónica (una variedad de redes pueden efectuar la misma función) que generará una forma de onda osciladora de muy alta frecuencia (con una frecuencia muy alta y repetitiva) como se muestra en la figura 10.72(b). El transformador de alta frecuencia entonces incrementará de forma significativa la magnitud del voltaje generado y lo transferirá a un sistema de rectificación de media onda (presentado en capítulos anteriores), dando por resultado un voltaje de cd de aproximadamente 300 V en el capacitor de 160 μF para cargar al capacitor (según lo determina $Q = CV$). Una vez que se alcanza el nivel de 300 V, la línea marcada como "señal de muestra" (*sense* en inglés) de la figura 10.72(b) alimentará la información de vuelta al oscilador y lo apagará hasta que el voltaje de salida de cd caiga a un nivel de umbral bajo. Cuando el capacitor se encuentre com-

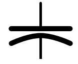


pletamente cargado, la luz de neón en paralelo con el capacitor se encenderá (etiquetada como “lámpara indicadora de flash listo” en la cámara) para indicar que la cámara se encuentra lista para utilizarse. La red completa desde el nivel de 1.5 V de cd hasta el nivel final de 300 V se denomina *convertidor cd-cd*. La terminología *red de conmutación* proviene de que el voltaje de cd aplicado de 1.5 V se interrumpe en forma periódica y se convierte a uno que cambia de nivel a una frecuencia muy alta de forma que el transformador pueda realizar su labor.

Aunque la cámara pueda utilizar una lámpara de neón de 60 V, la lámpara de neón y el resistor en serie R_n deberán contar con los 300 V en la rama antes de que la lámpara de neón se encienda. Las lámparas de neón son simplemente focos con un gas neón que permite la conducción cuando el voltaje en las terminales alcanza un nivel lo suficientemente grande. No existe un filamento, o hilo ardiente como en un foco incandescente, sino simplemente la conducción a través del medio gaseoso. Para cámaras nuevas, la primera secuencia de carga puede tomar de 12 a 15 s. Los posteriores ciclos de carga pueden tomar 7 u 8 s debido a que el capacitor mantendrá cierta carga residual sobre sus placas. Si no se utiliza la unidad de flash, la luz de neón consumirá la fuente de 300 V de cd con una corriente de consumo en microampere. A medida que el voltaje en las terminales caiga, existirá un punto donde la luz de neón se apagará. Para la unidad de la figura 10.72, esto tomará cerca de 15 minutos antes de que la luz se apague. Una vez apagada, la luz de neón no descargará más al capacitor y el voltaje en las terminales del capacitor permanecerá constante. Sin embargo, eventualmente el capacitor se descargará debido a su propia corriente de fuga y el voltaje en las terminales caerá a niveles muy bajos. El proceso de descarga es muy rápido cuando la unidad de flash se utiliza, ya que ocasiona que el voltaje en las terminales caiga muy rápido ($V = Q/C$) y, a través de la señal de conexión de retroalimentación de muestra, se ocasionará que el oscilador arranque nuevamente y recargue al capacitor. El lector habrá observado al utilizar una cámara de este tipo que una vez que la cámara se encuentra en su estado inicial, no existe necesidad de presionar el botón de carga entre cada fotografía —ya que esto se realiza de forma automática—. Sin embargo, si la cámara no se utiliza durante un periodo largo, tendrá que presionarse nuevamente el botón de carga; pero se observará que el tiempo de carga será de solamente 3 o 4 s debido a la carga residual sobre las placas del capacitor.

Los 300 V en el capacitor serán insuficientes para disparar la lámpara. Deberá incorporarse una circuitería adicional denominada *red disparadora* para generar los pocos miles de volts necesarios para disparar la lámpara de flash. El alto voltaje resultante es uno de los motivos de que exista un aviso de PRECAUCIÓN en cada cámara con respecto a los altos voltajes internos generados y la posibilidad de choque eléctrico si la cámara se abre.

Los miles de volts requeridos para disparar la lámpara de flash demandan un análisis que presenta elementos y conceptos superiores al nivel actual del texto. Sin embargo, esta descripción es sensible a este hecho y deberá considerarse simplemente como una primera exposición de algunas de las interesantes posibilidades disponibles a partir de la mezcla correcta de elementos. Cuando el interruptor del flash ubicado en la parte inferior izquierda de la figura 10.72(a) se cierre, establecerá una conexión entre los resistores R_1 y R_2. Mediante una acción de divisor de voltaje, un voltaje de cd se presentará en la terminal de compuerta (G) del SCR (Rectificador Controlado de Silicio, un dispositivo cuyo estado es controlado por el voltaje en la terminal de compuerta). Este voltaje de cd “encenderá” al SCR y establecerá una trayectoria de muy baja resistencia (similar a un corto circuito) entre sus terminales de ánodo (A) y cátodo (K). En este punto el capacitor de disparo, el cual está conectado de forma directa a los 300 V presentes en el capacitor, se cargará rápidamente a 300 V debido a que ahora cuenta con una trayectoria directa de baja resistencia a tierra a través del SCR. Una vez que alcance 300 V, la corriente de carga en esta parte de la red caerá a 0 A, y el SCR



se abrirá nuevamente dado que es un dispositivo que requiere de una corriente constante en el circuito del ánodo para permanecer encendido. El capacitor permanece entonces conectado a la bobina paralela (sin conexión a tierra a través del SCR) con sus 300 V y comienza a descargarse con rapidez a través de la bobina debido a que la única resistencia en el circuito que afecta la constante de tiempo es la resistencia de la bobina en paralelo. Como resultado, una corriente que cambia rápidamente a través de la bobina generará un alto voltaje en la bobina por motivos que se presentarán en el capítulo 12.

Cuando el capacitor desciende a cero volts, la corriente a través de la bobina será de cero ampere, pero se habrá establecido un fuerte campo magnético alrededor de la bobina. Este fuerte campo magnético se colapsará entonces rápidamente, estableciendo una corriente dentro de la red paralela que recargará nuevamente al capacitor. Este intercambio continuo entre los dos elementos de almacenamiento continuará durante cierto periodo, dependiendo de la resistencia en el circuito. Mientras mayor resistencia, menor "oscilación" del voltaje a la salida. Esta acción de la energía "saltando de regreso" al otro elemento es la base del efecto de "*flyback*" que con frecuencia se utiliza para generar altos voltajes de cd como los requeridos en los televisores. En la figura 10.72(b), se observa que la bobina de disparo está conectada directamente a una segunda bobina para constituir un autotransformador (un transformador con un extremo conectado). Mediante la acción del transformador el alto voltaje que se genera en la bobina de disparo se incrementará más, dando por resultado los 4000 V necesarios para disparar la lámpara de flash. Observe en la figura 10.72(c) que los 4000 V se aplican a una rejilla que se encuentra sobre la superficie del tubo de vidrio de la lámpara de flash (sin conexión interna o en contacto con los gases). Cuando se aplique el voltaje de disparo, excitará los gases existentes en la lámpara, ocasionando que una corriente muy alta se desarrolle dentro del foco durante un periodo muy breve y produciendo la brillante luz deseada. La corriente en la lámpara está soportada por la carga del capacitor de 160 μF la cual se disipará muy rápido. El voltaje del capacitor caerá muy rápido, la lámpara se apagará y el proceso de carga comenzará nuevamente. Si todo este proceso no ocurriera tan rápido como sucede, la lámpara se fundiría después de tan solo una utilización.

Acondicionador de línea (Protector de picos)

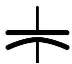


(a)

FIGURA 10.73(a)
Acondicionador de línea: apariencia general.

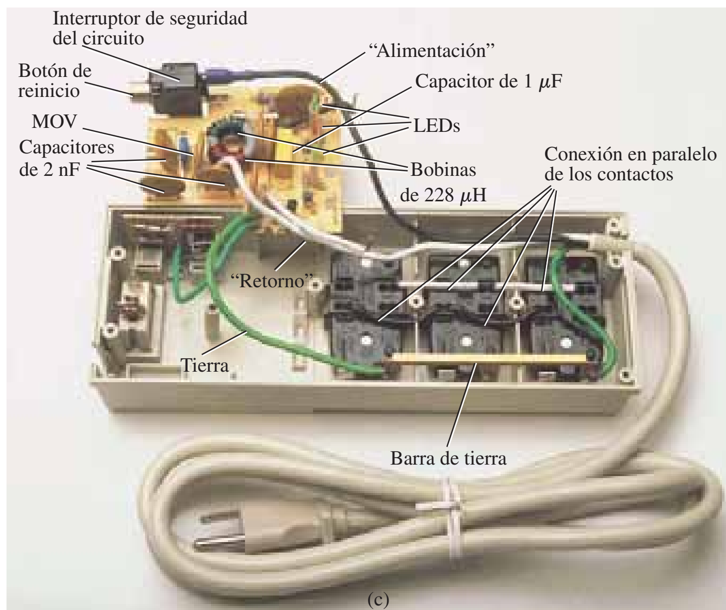
En años recientes se ha vuelto familiar la utilización de los acondicionadores de línea como una medida de seguridad para computadoras, televisores, reproductores de discos compactos y otros instrumentos delicados. Además de proteger el equipo de picos repentinos de voltaje y corriente, la mayoría de las unidades de calidad también filtran (eliminan) interferencia electromagnética (EMI, *ElectroMagnetic Interference*) e interferencia de radio frecuencia (RFI, *Radio-Frequency Interference*). EMI incluye cualquier perturbación no deseada en la línea de energía establecida por cualquier combinación de efectos electromagnéticos como los generados por motores en la línea, equipo de potencia en el área emitiendo señales que son captadas por la línea de alimentación al actuar como una antena, etc. RFI incluye todas las señales en el aire en la gama de frecuencias de audio y superior las cuales pueden también ser captadas por las líneas de alimentación dentro o fuera de la casa.

La unidad de la figura 10.73 posee todas las características de diseño esperadas para un buen acondicionador de línea. La figura 10.73(a) muestra que éste puede manejar la energía de 6 contactos y cuenta con protección para FAX/MODEM. También se observa que tiene dos indicadores de LED (diodos emisores de luz) los cuales revelan si existe alguna falla en la línea o si ésta se encuentra en condiciones adecuadas, así como un interruptor de circuito externo



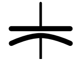
Carcasa del acondicionador de línea
Interruptor de encendido/apagado
228 μH
Interruptor de seguridad del circuito
Lámpara de encendido/apagado
Negro (alimentación)
2 nF
2 nF
180 V MOV
2 nF
Montaje del interruptor
Negro
Blanco (retorno)
Negro (alimentación)
228 μH
Blanco
Tierra (verde o desnudo)
2 nF
2 nF
Blanco (retorno)
Tierra
Negro (alimentación)
LED verde
Protección presente
Conectores
LED rojo
Falla en la línea
Etcétera
LED verde
Línea activa
Red de monitoreo del voltaje
Blanco (retorno)
Verde o desnudo (tierra)

(b)



(c)

FIGURA 10.73 (continuación)
Acondicionador de línea: (b) esquema eléctrico; (c) construcción interna.



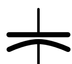
para reiniciar el sistema. Además, cuando el protector de picos se encuentra encendido, se observará una luz roja en el interruptor de encendido.

El esquema de la figura 10.73(b) no incluye todos los detalles del diseño, pero muestra los principales componentes que aparecen en la mayoría de los acondicionadores de línea de calidad. Observe primero, en la fotografía de la figura 10.73(c), que los contactos se encuentran en paralelo, con una barra de tierra utilizada para establecer una conexión a tierra para cada contacto. La tarjeta de circuito tuvo que voltearse para mostrar los componentes, por lo que se necesita cierto ajuste para relacionar la posición de los elementos sobre la tarjeta con la cubierta. La *línea de alimentación* o *cable energizado* (negro en la unidad presente) se conecta de forma directa desde la línea hasta el interruptor de seguridad del circuito. El otro extremo del interruptor de seguridad se conecta al otro extremo de la tarjeta de circuito. Todos los discos grandes que se observan son capacitores de 2 nF/73 [no todos se incluyen en la figura 10.73(b) por claridad]. Existen bastantes capacitores para manejar todas las posibilidades. Por ejemplo, capacitores de la línea al retorno (cable negro a cable blanco), de la línea a tierra (negro a verde) y del retorno a tierra (blanco a tierra). Cada uno tiene dos funciones. La primera función y la más obvia es evitar cualquier pico en el voltaje que pueda alcanzar la línea debido a efectos externos, como los relámpagos, para que no llegue a los equipos conectados a la unidad. Recuérdese de este capítulo que el voltaje en los capacitores no puede cambiar de forma instantánea y que, de hecho, actuará para nivelar cualquier cambio súbito en el voltaje en sus terminales. Por tanto, el capacitor evitará que el voltaje de línea a neutro cambie demasiado rápido, y cualquier pico que trate de ingresar a la línea tendrá que buscar otro punto en el circuito de alimentación para cruzar. De esta forma, los aparatos conectados al protector de picos estarán bien protegidos.

La segunda función requiere cierto conocimiento de la reacción de los capacitores a diferentes frecuencias y será analizada con mayor detalle en los siguientes capítulos. Por el momento, es suficiente decir que el capacitor tendrá diferente impedancia a diferentes frecuencias, evitando de esta forma que frecuencias no deseadas, como las asociadas con perturbaciones de EMI y RFI, afecten la operación de las unidades conectadas al acondicionador de línea. El capacitor en forma rectangular de 1 μF cercano al centro de la tarjeta se conecta directamente a través de la línea para absorber el choque de un fuerte pico de voltaje en la línea. Su mayor tamaño es clara evidencia de que se encuentra diseñado para absorber una alto nivel de energía establecido por un voltaje grande —corriente significativa durante un periodo que puede exceder unos cuantos milisegundos.

La estructura grande de forma anular ubicada en el centro de la tarjeta del circuito en la figura 10.73(c) tiene dos bobinas (Capítulo 12) de 228 μH que aparecen en la línea y el neutro de la figura 10.73(b). Su propósito, como el de los capacitores, es doble: bloquear los picos de corriente que lleguen a la línea e impedir que EMI y frecuencias RFI no deseadas alcancen los sistemas conectados. En el siguiente capítulo, se verá que las bobinas actúan como “bloqueadores” para cambios rápidos en la corriente, es decir, la corriente a través de una bobina no puede cambiar de forma instantánea. Para frecuencias crecientes, como las asociadas con perturbaciones EMI y RFI, la reactancia de una bobina se incrementará y absorberá la señal no deseada en lugar de dejarla pasar a la línea. Utilizar un bloqueador (“*choke*” en inglés) tanto en la línea como en el neutro propicia que la red del acondicionador se encuentre balanceada a tierra. En resumen, los capacitores dentro de una línea acondicionada tienen el efecto de *desviar* las perturbaciones, mientras que los inductores *bloquean* la perturbación.

El disco más pequeño (azul) entre dos capacitores que está cercano al interruptor de seguridad del circuito es un MOV (varistor de metal-óxido), el cual constituye el corazón de la mayoría de los acondicionadores de línea. Es un dispositivo electrónico cuyas características entre terminales cambiarán con el vol-



taje aplicado en sus terminales. Para el intervalo de valores normales en la línea, su resistencia entre terminales será lo suficientemente grande como para considerarse un circuito abierto, y su presencia puede ignorarse. Sin embargo, si el voltaje es demasiado grande, sus características entre terminales cambiarán de una resistencia muy grande a una muy pequeña la cual puede considerarse esencialmente como un corto circuito. Esta variación en la resistencia ante el voltaje aplicado es la razón para denominarlo *varistor*. En Estados Unidos, donde el voltaje de línea es de 120 V, los MOV son de 180 V o más. La razón para la diferencia de 60 V es que el valor nominal de 120 V es un valor efectivo relacionado con los niveles de voltaje de cd, mientras que la forma de onda para el voltaje en cualquier contacto de 120 V tiene un valor pico de cerca de 170 V. Este tema se tratará a profundidad en el capítulo 13.

Al observar el símbolo de un MOV en la figura 10.73(b) se verá que tiene una flecha en cada dirección, lo cual revela que el MOV es bidirecccional y que bloqueará voltajes con cualquier polaridad. Por tanto, en general, para condiciones normales de operación, la presencia del MOV puede ignorarse; pero si se presenta un pico grande en la línea, que exceda el valor nominal del MOV, éste actuará como un corto a través de la línea para proteger los circuitos conectados. Ello resulta en una mejora mayor que el hecho simple de colocar un fusible en la línea debido a que el MOV es sensible al voltaje, puede reaccionar mucho más rápido que un fusible, y presentará características de baja resistencia sólo durante un periodo corto. Cuando el pico haya pasado, el MOV regresará a su característica normal de circuito abierto. Si el lector se pregunta dónde irá el pico si la carga está protegida por un corto circuito, debe recordarse que todas las fuentes de perturbación como tormentas eléctricas, generadores, motores inductivos (como en aires acondicionados, lavavajillas, motosierras, etc.) tienen su propia “resistencia de fuente”, y siempre existirá cierta resistencia en la línea para absorber la perturbación.

La mayoría de los acondicionadores de línea, como parte de su publicidad, mencionan su nivel de absorción de energía. El valor nominal de la unidad de la figura 10.73 es de 1200 J, el cual es más alto que el de la mayoría. Si de la argumentación anterior sobre las cámaras se recuerda que $W = Pt = EIt$, podrá apreciarse que si un pico de 5000 V llegara a la línea, se tendría el producto $It = W/E = 1200\text{ J}/5000\text{ V} = 240\text{ mAs}$. Al asumir una relación lineal entre todas las cantidades, el nivel de energía especificado revela que una corriente de 100 A podría mantenerse durante $t = 240\text{ mAs}/100\text{ A} = 2.4\text{ ms}$, una corriente de 1000 A durante 240 μs, y una corriente de 10,000 A durante 24 μs. Obviamente, mientras mayor sea el producto de E e I, menor será el elemento de tiempo.

Las especificaciones técnicas para la unidad de la figura 10.73 incluyen un tiempo de respuesta instantáneo de 0 ns (cuestionable), con una protección de línea telefónica de 5 ns. La unidad tiene una capacidad nominal para disipar picos de hasta 6000 V y picos de corriente hasta de 96,000 A. Posee un nivel muy alto de supresión de ruido (80 dB; vea el capítulo 23) para frecuencias de 50 kHz a 1000 MHz y (como crédito para la compañía) cuenta con una garantía de por vida.

10.17 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Respuesta *RC* transitoria Ahora se utilizará PSpice para investigar la respuesta transitoria para el voltaje en el capacitor de la figura 10.74. En todos los ejemplos incluidos en el texto que involucran una respuesta transitoria aparece un interruptor en serie con la fuente como se muestra en la figura 10.75(a). Al utilizar

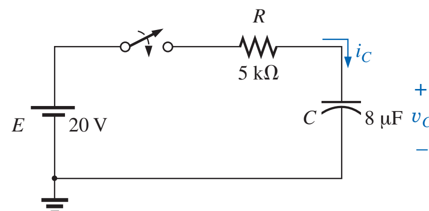
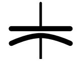


FIGURA 10.74
Circuito que se analizará utilizando PSpice.



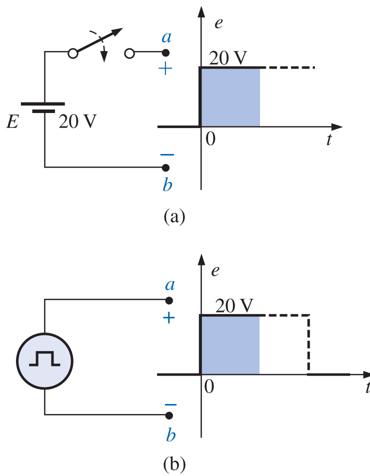


FIGURA 10.75
Establecimiento de un nivel de voltaje de cd conmutante: (a) combinación en serie del interruptor y el voltaje de cd; (b) opción de pulso de PSpice.

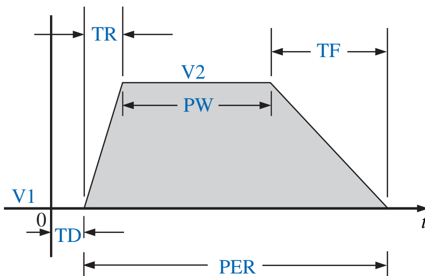


FIGURA 10.76
Parámetros de definición de ***VPULSE*** *de PSpice.*

PSpice, se establece este cambio instantáneo en el nivel de voltaje mediante la aplicación de una forma de onda como se muestra en la figura 10.75(b) con un ancho de pulso (*PW*) mayor que el periodo (5τ) de interés para la red.

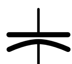
Una fuente de pulso se obtiene mediante la secuencia **Place part** (colocar parte) **Libraries-SOURCE-VPULSE-OK**. Un vez colocada, es posible establecer la etiqueta y todos los parámetros haciendo simplemente doble clic sobre cada uno para obtener el cuadro de diálogo **Display Properties**. A medida que se recorra la lista de atributos, se observarán los siguientes parámetros definidos por la figura 10.76:

V1 es el valor inicial.
V2 es el nivel del pulso.
TD es el tiempo de retardo.
TR es el tiempo de subida.
TF es el tiempo de caída.
PW es el ancho del pulso en el nivel de V_2.
PER es el periodo de la forma de onda.

Todos los parámetros se configuraron como se muestra en el esquema de la figura 10.77 para la red de la figura 10.74. Dado que un tiempo de subida o de bajada de 0 s no es realista desde el punto de vista práctico, se eligió 0.1 ms para cada parámetro en este ejemplo. Por otro lado, como $\tau = RC = (5\ \text{k}\Omega) \times (8\ \mu\text{F}) = 40$ ms y $5\tau = 200$ ms, se eligió un ancho de pulso de 500 ms. El periodo simplemente se seleccionó como el doble del ancho del pulso.

Ahora, para el proceso de simulación: primero se selecciona el botón **New Simulation Profile** para obtener el cuadro de diálogo **New Simulation**, en el que se inserta **TransientRC** como **Name** (el nombre) y se selecciona **Create** para abandonar el cuadro de diálogo. Luego aparecerá el cuadro de diálogo **Simulation Settings-Transient RC**, y bajo **Analysis**, se selecciona la opción **Time Domain** (**Transient**) bajo **Analysis type**. El **Run to time** (límite de ejecución) se establece en 200 ms de forma que sólo las primeras cinco constantes de tiempo aparezcan en la gráfica. La opción **Start saving data after** será de 0 s para asegurar que la información se recopile de forma inmediata. El **Maximum step size** está en 1 ms con el propósito de ofrecer suficientes puntos de información para una buena gráfica. Se da clic en **OK** y todo estará listo para seleccionar la tecla **Run Pspice**. El resultado será un diagrama sin gráfica (dado que no se ha definido aún) y un eje *x* que se extiende desde 0 s hasta 200 ms, como se definió líneas arriba. Para obtener una gráfica del voltaje en el capacitor en función del tiempo, se aplica la siguiente secuencia: botón **Add Trace** cuadro de diálogo **Add Traces V1(C)-OK**, y se obtendrá la gráfica de la figura 10.78. El color y el espesor de la gráfica y el eje pueden modificarse al colocar el cursor sobre la línea de la gráfica y haciendo clic con el botón derecho. Aparecerá una lista de la que se debe seleccionar **Properties**, luego aparecerá el cuadro de diálogo **Trace Properties** en donde se podrá modificar el color y el espesor de la línea. Dado que la gráfica se encuentra sobre un fondo negro, se obtuvo una mejor presentación al seleccionar el color amarillo y hacer más gruesa la línea, como se muestra en la figura 10.78. Luego, el cursor se puede colocar sobre el eje, y otro clic derecho permite volverlo amarillo y más grueso para mejorar la presentación. Para comparar, también resulta apropiado trazar en una gráfica la señal del pulso aplicado. Esto se realiza regresando a **Trace** y seleccionando **Add Trace** seguido de **V(Vpulse:+)** y **OK**. Ahora ambas formas de onda aparecerán sobre la misma pantalla como se muestra en la figura 10.78. En este caso, la gráfica se deja con un tinte verde para que pueda ser distinguida del eje y de la otra gráfica. Observe que sigue al eje izquierdo hasta el tope y recorre la pantalla en 20 V.

Si el lector desea ver la magnitud de cualquier punto en cualquier instante, simplemente debe seleccionar la tecla **Toggle cursor**. Luego, al dar clic sobre



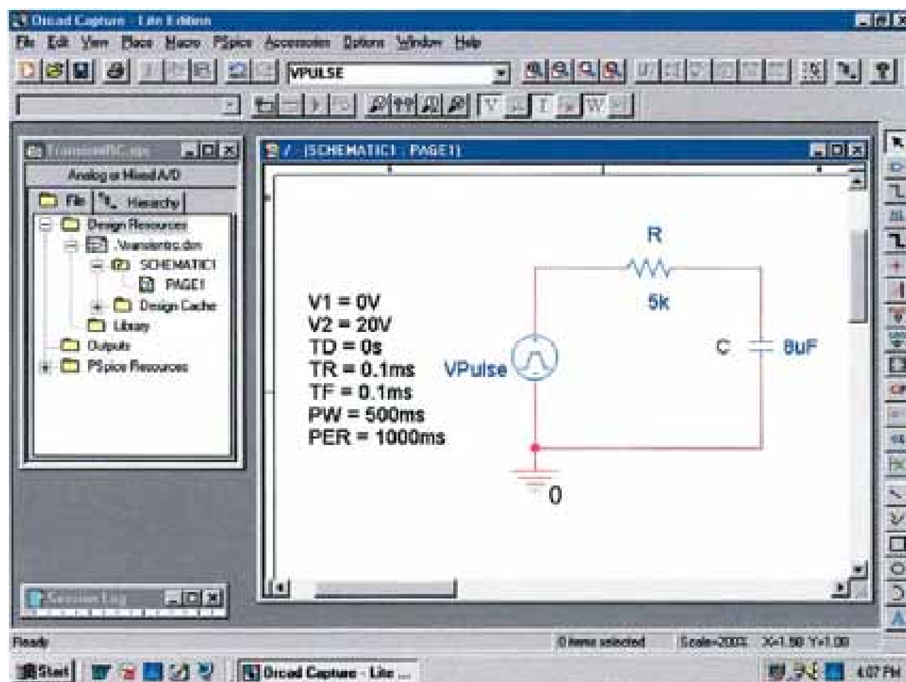


FIGURA 10.77
Uso de PSpice para analizar la respuesta transitoria del circuito R-C en serie de la figura 10.74.

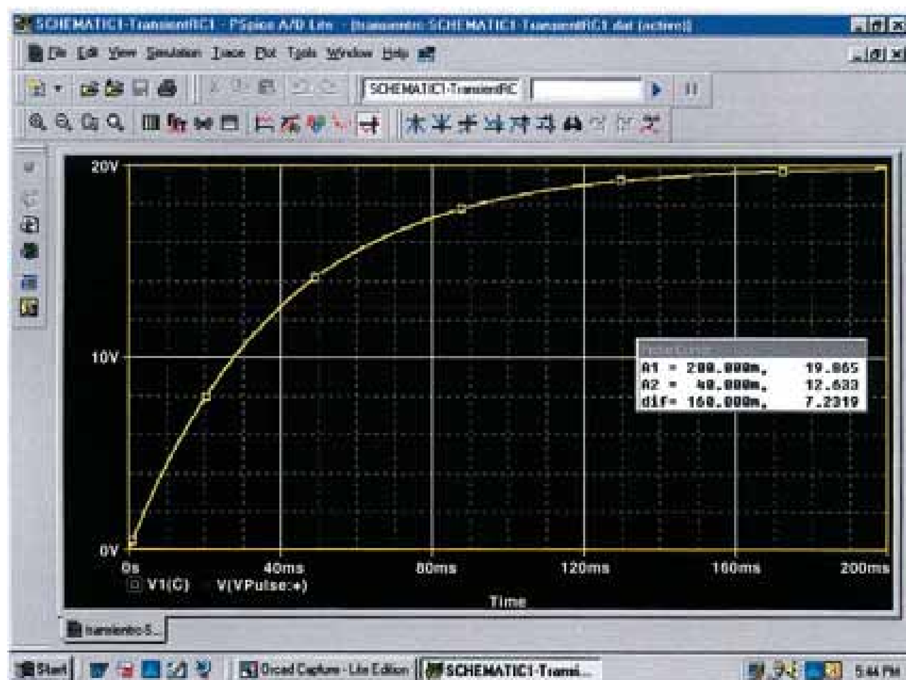
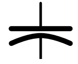


FIGURA 10.78
Respuesta transitoria para el voltaje en el capacitor de la figura 10.74 cuando se aplica ***VPulse****.*



V1(C) en la parte inferior izquierda de la pantalla, aparecerá un recuadro alrededor de **V1(C)** que mostrará el espaciado entre los puntos del cursor sobre la pantalla. Esto es importante cuando se utiliza más de un cursor. Al mover el cursor a 200 ms, se ve que la magnitud (**A1**) es 19.865 V (en el cuadro de diálogo **Probe Cursor**), mostrando claramente lo cerca que se encuentra del valor final de 20 V. Se puede colocar un segundo cursor sobre la pantalla mediante un clic derecho y luego hacer clic sobre el mismo **V1(C)** en la parte inferior de la pantalla. El recuadro alrededor de **V1(C)** no puede mostrar dos recuadros, pero el espaciado y la anchura de las líneas del recuadro definitivamente han cambiado. No existe un recuadro alrededor del símbolo de **Pulse** debido a que no se ha seleccionado —aunque éste pudo haber sido seleccionado por cualquier cursor—. Si ahora se mueve el segundo cursor hacia una constante de tiempo de 40 ms, vemos que el voltaje es de 12.633 V, como se muestra en el cuadro de diálogo **Probe Cursor**. Esto confirma el hecho de que el voltaje debe ser el 63.2% de su valor final de 20 V en una constante de tiempo (0.632 × 20 V = 12.4 V). Se pudieron haber obtenido dos gráficas separadas mediante **Plot-Add Plot to Window** y utilizando entonces la secuencia de trazo nuevamente.

Corriente capacitiva promedio Como un ejercicio para el uso de la fuente de pulso y para verificar nuestro análisis de la corriente promedio para una red puramente capacitiva, la descripción siguiente verificará los resultados del ejemplo 10.13. Para la forma de onda de pulso de la figura 10.59, los parámetros de la fuente de pulso aparecen en la figura 10.79. Observe que el tiempo de subida es ahora de 2 ms, iniciando en 0 s, y el tiempo de bajada es de 6 ms. El periodo se estableció en 15 ms para permitir el monitoreo de la corriente después de que el pulso haya pasado.

La simulación se inicia seleccionando primero la tecla **New Simulation Profile** para obtener el cuadro de diálogo **New Simulation,** en el que se ingresa

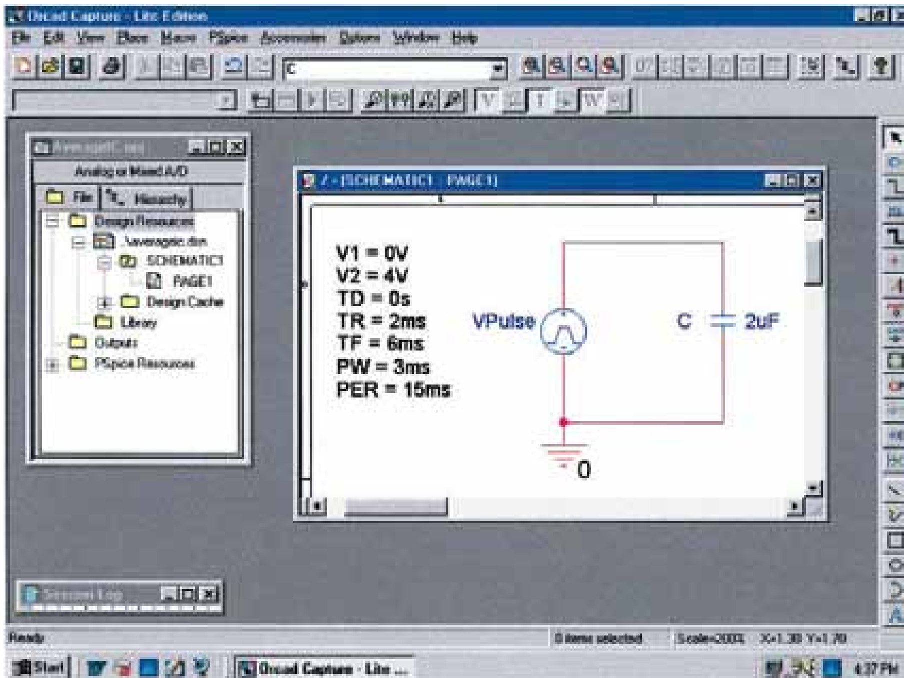
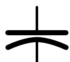


FIGURA 10.79
Utilización de PSpice para verificar los resultados del ejemplo 10.13.



AverageIC como **Name** (el nombre). Se selecciona **Create** para obtener el cuadro de diálogo **Simulation Settings-AverageIC**. Se selecciona **Analysis** y luego **Time Domain(Transient)** bajo las opciones de **Analysis type**. La opción **Run to time** se establece en 15 ms para incluir el periodo de interés, y la opción **Start saving data after** se establece en 0 s para asegurar puntos de información iniciando en $t = 0$ s. La opción **Maximum step size** se selecciona de 15 ms/1000 = 15 μs para asegurar 1000 puntos de información para la gráfica. Se da un clic en **OK** y luego se selecciona **Run PSpice** para ejecutar. Aparecerá una ventana con una escala horizontal que se extiende de 0 a 15 ms como se definió líneas arriba. Luego se selecciona la opción **Add Trace**, y se elige **I(C)** para que aparezca bajo **Trace Expression**. Se da clic en **OK** y aparecerá la gráfica de **I(C)** en la parte inferior de la figura 10.80. En esta ocasión sería adecuado observar la forma de onda de pulso en la misma ventana pero como una gráfica separada. Por tanto, se prosigue con **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace-V(Vpulse:+)-OK** y ambas gráficas aparecerán como se muestra en la figura 10.80.

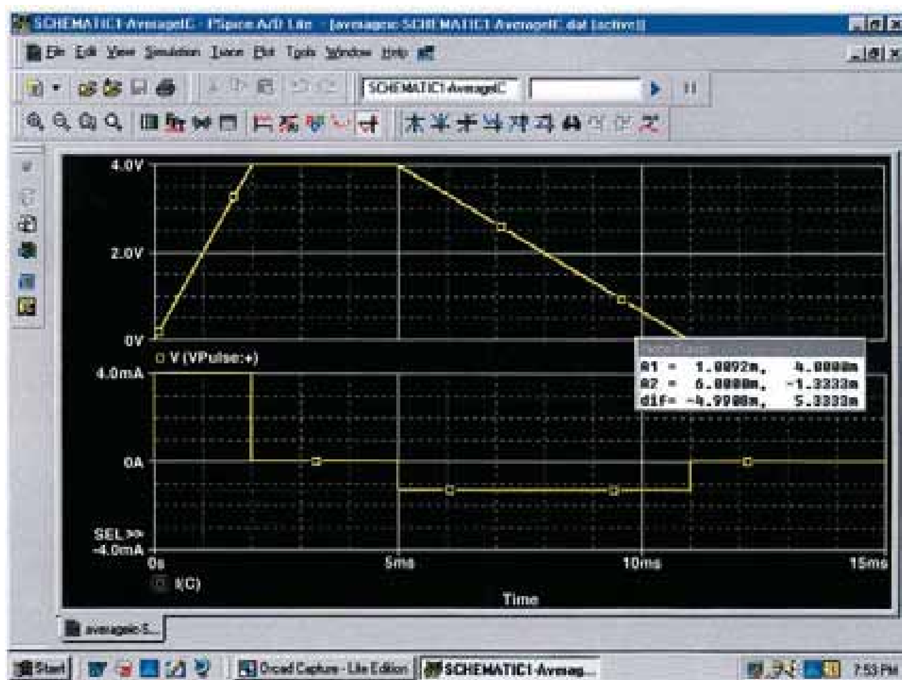


FIGURA 10.80

El pulso aplicado y la corriente resultante para el capacitor de 2 µF de la figura 10.79.

Ahora se puede utilizar el cursor para medir los niveles de corriente promedio resultantes. Primero, se selecciona la gráfica **I(C)** para mover la notación **SEL>>** a la gráfica inferior. **SEL>>** define la gráfica para pantallas con múltiples gráficas que estará activa. Luego se selecciona la opción **Toggle cursor** y se da un clic izquierdo sobre la gráfica **I(C)** para establecer el cursor en forma de cruz. El valor se estipula en 1 ms, y la magnitud de **A1** se despliega como 4 mA. Se da un clic derecho sobre la misma gráfica y se obtendrá un segundo cursor que podrá colocarse en 6 ms para obtener una respuesta de –1.33 mA (**A2**), como se esperaba del ejemplo 10.13. Ambas gráficas se colorean nuevamente de amarillo con una línea más gruesa mediante un clic derecho sobre la curva y seleccionando **Properties**.



PROBLEMAS

SECCIÓN 10.2 El campo eléctrico

1. Encuentre la intensidad del campo eléctrico en un punto a 2 m de distancia de una carga de 4 μC.
2. La intensidad del campo eléctrico es de 36 newton/coulomb (N/C) en un punto a *r* metros de distancia de una carga de 0.064 μC. Encuentre la distancia *r*.

SECCIÓN 10.3 Capacitancia

3. Encuentre la capacitancia de un capacitor de placas en paralelo si se depositan 1400 μC de carga sobre sus placas cuando se aplican 20 V en las placas.
4. ¿Cuánta carga se deposita sobre las placas de un capacitor de 0.05 μF si se aplican 45 V en el capacitor?
5. Encuentre la intensidad del campo eléctrico entre las placas de un capacitor de placas en paralelo si 100 mV se aplican en las placas y éstas se encuentran separadas 2 mm.
6. Repita el problema 5 si las placas están separadas 4 mils.
7. Un capacitor de placas en paralelo de 4 μF tiene 160 μC de carga sobre sus placas. Si las placas están separadas 5 mm, encuentre la intensidad del campo eléctrico entre las placas.
8. Encuentre la capacitancia de un capacitor de placas en paralelo si el área de cada placa es de 0.075 m^2 y la distancia entre las placas es de 1.77 mm. El dieléctrico es el aire.
9. Repita el problema 8 si el dieléctrico es papel parafinado.
10. Encuentre la distancia en mils entre las placas de un capacitor de 2 μF si el área de cada placa es de 0.09 m^2 y el dieléctrico es aceite de transformador.
11. La capacitancia de un capacitor con un dieléctrico de aire es de 1200 pF. Cuando se inserta un dieléctrico entre las placas, la capacitancia se incrementa a 0.006 μF. ¿De qué material está hecho el dieléctrico?
12. Las placas de un capacitor de aire con placas en paralelo están separadas 0.2 mm, tienen un área de 0.08 m^2, y se aplican 200 V en las placas.
    - **a.** Determine la capacitancia.
    - **b.** Encuentre la intensidad del campo eléctrico entre las placas.
    - **c.** Encuentre la carga sobre cada placa si el dieléctrico es el aire.
13. Una hoja de baquelita de 0.2 mm de espesor que tiene un área de 0.08 m^2 se inserta entre las placas mencionadas en el problema 12.
    - **a.** Encuentre la intensidad del campo eléctrico entre las placas.
    - **b.** Determine la carga sobre cada placa.
    - **c.** Determine la capacitancia.

SECCIÓN 10.4 Rigidez dieléctrica

14. Encuentre el máximo valor nominal de voltaje de los capacitores de los problemas 12 y 13 asumiendo una relación lineal entre el voltaje de ruptura y el espesor del dieléctrico.
15. Encuentre el voltaje máximo que puede aplicarse en un capacitor de placas en paralelo de 0.006 μF. El área de una placa mide 0.02 m^2 y el dieléctrico es mica. Asuma una relación lineal entre la rigidez del dieléctrico y su espesor.



16. Encuentre la distancia en milímetros entre las placas de un capacitor de placas en paralelo si el voltaje máximo que puede aplicarse en el capacitor es de 1250 V. El dieléctrico es mica. Asuma una relación lineal entre el voltaje de ruptura y el espesor del dieléctrico.

SECCIÓN 10.7 Transitorios en redes capacitativas: fase de carga

17. Para el circuito de la figura 10.81:

a. Determine la constante de tiempo del circuito.

b. Escriba la ecuación matemática para el voltaje v_C posterior al cierre del interruptor.

c. Determine el voltaje v_C después de una, tres y cinco constantes de tiempo.

d. Escriba las ecuaciones para la corriente i_C y el voltaje v_R.

e. Trace las formas de onda para v_C e i_C.

18. Repita el problema 17 para $R = 1\ \text{M}\Omega$ y compare los resultados.

19. Para el circuito de la figura 10.82:

a. Determine la constante de tiempo del circuito.

b. Escriba la ecuación matemática para el voltaje v_C posterior al cierre del interruptor.

c. Determine v_C después de una, tres y cinco constantes de tiempo.

d. Escriba las ecuaciones para la corriente i_C y el voltaje v_R.

e. Trace las formas de onda para v_C e i_C.

20. Para el circuito de la figura 10.83:

a. Determine la constante de tiempo del circuito.

b. Escriba la ecuación matemática para el voltaje v_C posterior al cierre del interruptor.

c. Escriba la ecuación matemática para la corriente i_C posterior al cierre del interruptor.

d. Trace las formas de onda para v_C e i_C.

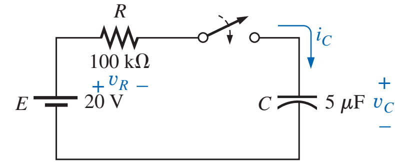


FIGURA 10.81
Problemas 17 y 18.

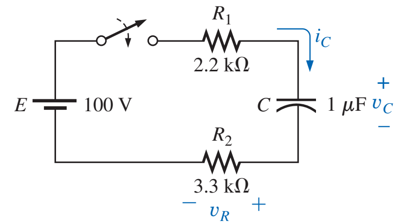


FIGURA 10.82
Problema 19.

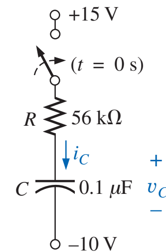


FIGURA 10.83
Problema 20.

SECCIÓN 10.8 Fase de descarga

21. Para el circuito de la figura 10.84:

a. Determine la constante de tiempo del circuito cuando el interruptor se coloca en la posición 1.

b. Encuentre la expresión matemática para el voltaje en el capacitor después de que el interruptor se coloca en la posición 1.

c. Determine la expresión matemática para la corriente posterior al cierre del interruptor (posición 1).

d. Determine el voltaje v_C y la corriente i_C cuando el interruptor se coloca en la posición 2 en $t = 100$ ms.

e. Determine las expresiones matemáticas para el voltaje v_C y la corriente i_C cuando el interruptor se coloca en la posición 3 en $t = 200$ ms.

f. Trace las formas de onda de v_C e i_C para un periodo que va de $t = 0$ a $t = 300$ ms.

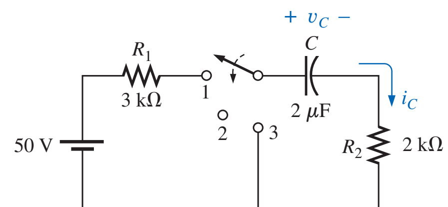
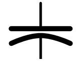


FIGURA 10.84
Problemas 21 y 22.



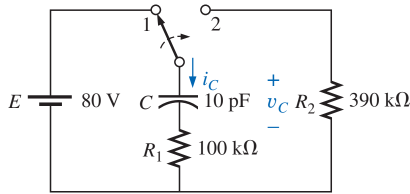


FIGURA 10.85
Problema 23.

22. Repita el problema 21 para una capacitancia de 20 μF.

***23.** Para la red de la figura 10.85:

a. Encuentre la expresión matemática para el voltaje en el capacitor después de que el interruptor se coloca en la posición 1.

b. Repita el inciso (a) para la corriente i_C.

c. Encuentre las expresiones matemáticas para el voltaje v_C y la corriente i_C cuando el interruptor se coloca en la posición 2 en un tiempo igual a cinco constantes de tiempo del circuito de carga.

d. Trace las formas de onda de v_C e i_C para un periodo que va de $t = 0$ a $t = 30$ μs.

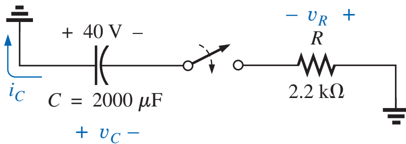


FIGURA 10.86
Problema 24.

24. El capacitor de la figura 10.86 inicialmente se encuentra cargado a 40 V antes de que el interruptor se cierre. Escriba las expresiones para los voltajes v_C y v_R y para la corriente i_C en la fase de decaimiento.

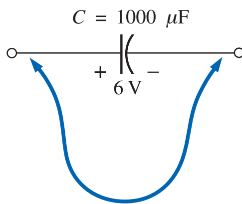


FIGURA 10.87
Problemas 25 y 29.

25. El capacitor de 1000 μF de la figura 10.87 está cargado a 6 V. Para descargarlo antes de utilizarlo, se coloca un cable con resistencia de 0.002 Ω en paralelo al mismo.

a. ¿Cuánto tiempo le tomará descargarse al capacitor?

b. ¿Cuál es el valor pico de la corriente?

c. Con base en la respuesta al inciso (b), ¿se espera una chispa cuando se realice el contacto entre ambos extremos del capacitor?

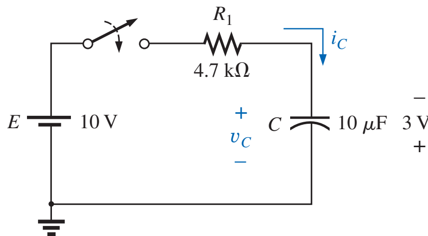


FIGURA 10.88
Problema 26.

SECCIÓN 10.9 Valores iniciales

26. El capacitor en la figura 10.88 inicialmente se encuentra cargado a 3 V con la polaridad mostrada.

a. Encuentre las expresiones matemáticas para el voltaje v_C y la corriente i_C cuando el interruptor se cierra.

b. Trace las formas de onda para v_C e i_C.

***27.** El capacitor de la figura 10.89 inicialmente se encuentra cargado a 12 V con la polaridad mostrada.

a. Encuentre las expresiones matemáticas para el voltaje v_C y la corriente i_C cuando el interruptor se cierra.

b. Trace las formas de onda para v_C e i_C.

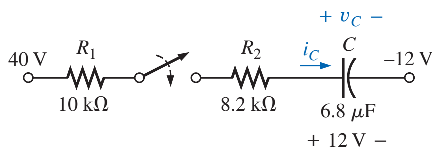


FIGURA 10.89
Problema 27.

SECCIÓN 10.10 Valores instantáneos

28. Dada la expresión $v_C = 8(1 - e^{-t/(20\times10^{-6})})$:

a. Determine v_C después de cinco constantes de tiempo.

b. Determine v_C después de 10 constantes de tiempo.

c. Determine v_C en $t = 5$ μs.



29. Para la situación del problema 25, determine cuándo la corriente de descarga es la mitad de su valor máximo si el contacto se realiza en $t = 0$ s.

30. Para la red de la figura 10.90, V_L debe ser igual a 8 V antes de que el sistema sea activado. Si el interruptor se cierra en $t = 0$ s, ¿cuánto tiempo tomará para que el sistema sea activado?

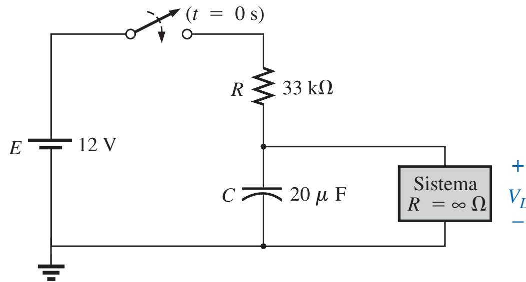


FIGURA 10.90
Problema 30.

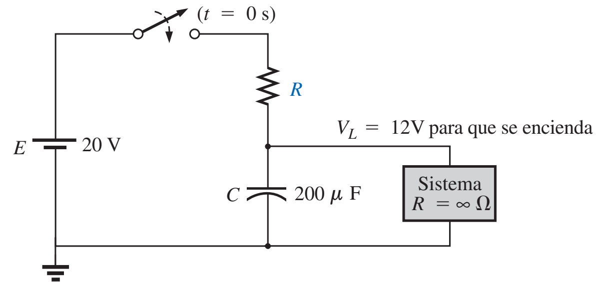


FIGURA 10.91
Problema 31.

*31. Diseñe la red de la figura 10.91 de forma que el sistema se encienda en 10 s después de que el interruptor se cierre.

32. Para el circuito de la figura 10.92:
   a. Encuentre el tiempo requerido para que v_C alcance 60 V con posterioridad al cierre del interruptor.
   b. Calcule la corriente i_C en el instante que $v_C = 60$ V
   c. Determine la potencia entregada por la fuente en el instante $t = 2\tau$.

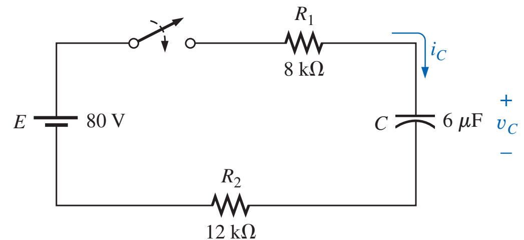


FIGURA 10.92
Problema 32.

*33. Para la red de la figura 10.93:
   a. Calcule v_C, i_C, y v_{R_1} en 0.5 s y 1 s después de que el interruptor haga contacto con la posición 1.
   b. La red permanece en la posición 1 10 minutos antes de que el interruptor se mueva a la posición 2. ¿Cuánto tiempo después de hacer contacto con la posición 2 tomará para que la corriente i_C caiga a 8 μA? ¿Cuánto tiempo *más* le tomará a v_C caer a 10 V?

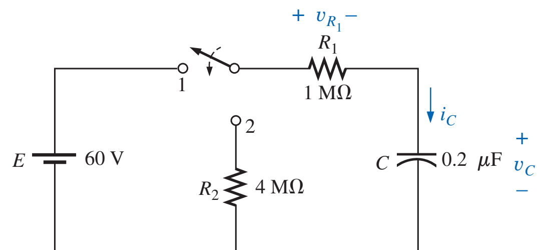


FIGURA 10.93
Problema 33.

34. Para el sistema de la figura 10.94, utilizando un multímetro digital (DMM) con resistencia interna de 10 MΩ en el modo de voltímetro:
   a. Determine la lectura del voltímetro una constante de tiempo después de que el interruptor se cierre.
   b. Encuentre la corriente i_C dos constantes de tiempo después de que el interruptor se cierre.
   c. Calcule el tiempo que debe transcurrir después de cerrar el interruptor para que el voltaje v_C sea de 50 V.

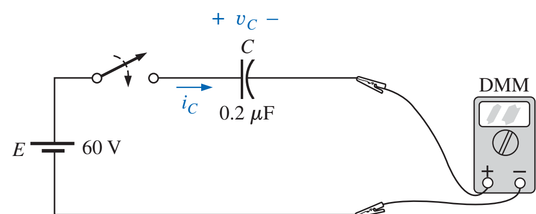
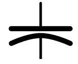


FIGURA 10.94
Problema 34.



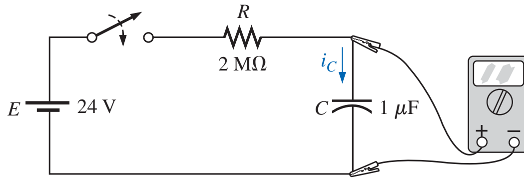


FIGURA 10.95
Problema 35.

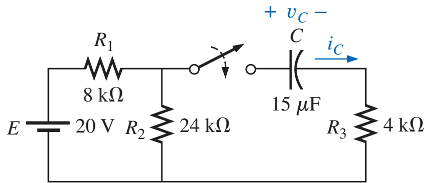


FIGURA 10.96
Problema 36.

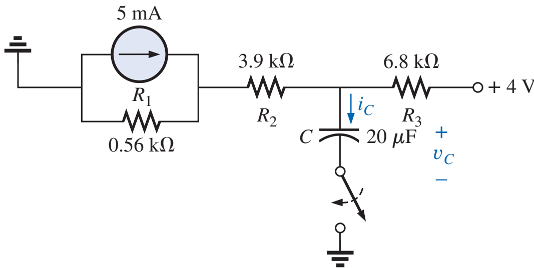


FIGURA 10.97
Problemas 37 y 55.

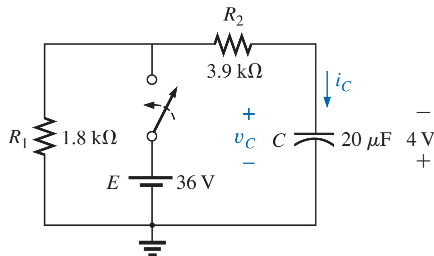


FIGURA 10.98
Problema 38.

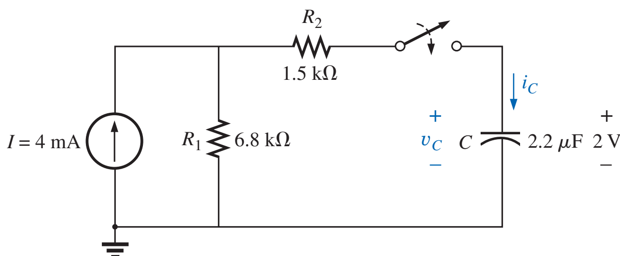


FIGURA 10.99
Problema 39.

SECCIÓN 10.11 Equivalente de Thévenin: $\tau = R_{Th}C$

35. Para el sistema de la figura 10.95, utilizando un DMM con resistencia interna de 10 MΩ en el modo de voltímetro:

a. Determine la lectura del voltímetro cuatro constantes de tiempo después de que el interruptor se cierre.

b. Determine el tiempo que debe transcurrir antes de que i_C caiga a 3 μA.

c. Calcule el tiempo que debe transcurrir después de cerrar el interruptor para que el voltaje en el medidor alcance 10 V.

36. Para el circuito de la figura 10.96:

a. Encuentre las expresiones matemáticas para el comportamiento transitorio del voltaje v_C y la corriente i_C posterior al cierre del interruptor.

b. Trace las formas de onda de v_C e i_C.

***37.** Repita el problema 36 para el circuito de la figura 10.97.

38. El capacitor de la figura 10.98 inicialmente se encuentra cargado en 4 V con la polaridad mostrada.

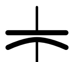
a. Escriba las expresiones matemáticas para el voltaje v_C y la corriente i_C cuando el interruptor se cierra.

b. Trace las formas de onda de v_C e i_C.

39. El capacitor de la figura 10.99 inicialmente está cargado en 2 V con la polaridad mostrada.

a. Escriba las expresiones matemáticas para el voltaje v_C y la corriente i_C cuando el interruptor se cierra.

b. Trace las formas de onda de v_C e i_C.



***40.** El capacitor de la figura 10.100 inicialmente está cargado en 3 V con la polaridad mostrada.

a. Escriba las expresiones matemáticas para el voltaje v_C y la corriente i_C cuando el interruptor se cierra.

b. Trace las formas de onda de v_C e i_C.

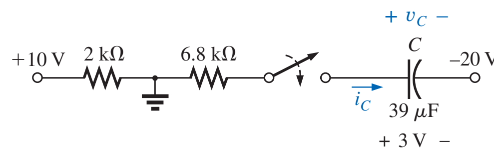


FIGURA 10.100
Problema 40.

SECCIÓN 10.2 La corriente i_C

41. Encuentre la forma de onda para la corriente promedio si el voltaje en un capacitor de 0.06 μF es como se muestra en la figura 10.101.

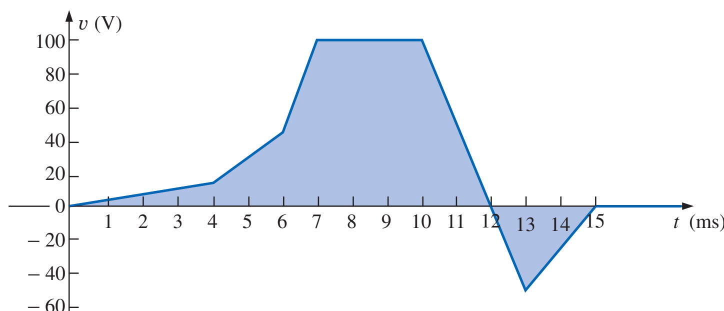


FIGURA 10.101
Problema 41.

42. Repita el problema 41 para la forma de onda de la figura 10.102.

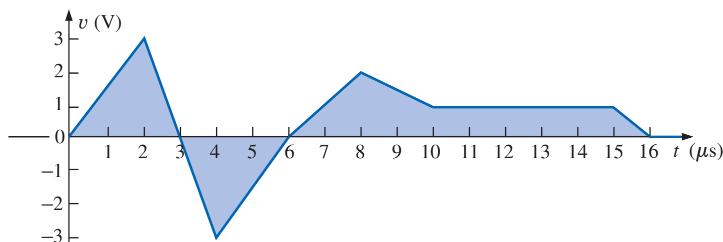


FIGURA 10.102
Problema 42.

***43.** Dada la forma de onda de la figura 10.103 para la corriente de un capacitor de 20 μF, trace la forma de onda del voltaje v_C en el capacitor si $v_C = 0$ V en $t = 0$ s.

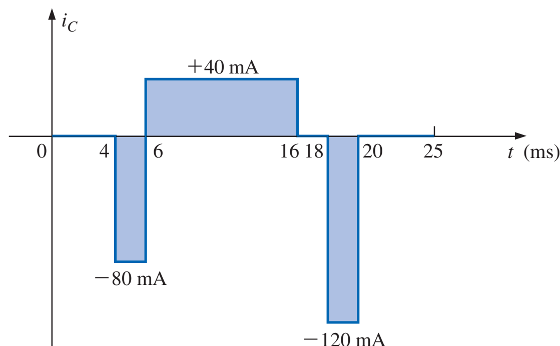
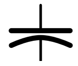


FIGURA 10.103
Problema 43.



SECCIÓN 10.13 Capacitores en serie y en paralelo

44. Encuentre la capacitancia total C_T entre los puntos *a* y *b* de los circuitos de la figura 10.104.

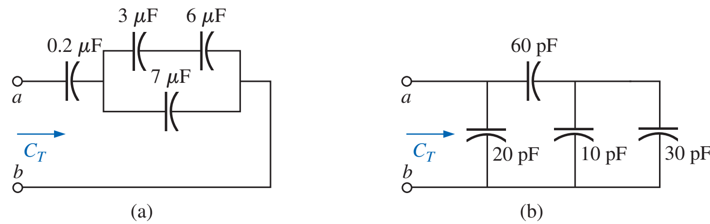


FIGURA 10.104
Problema 44.

45. Encuentre el voltaje y la carga en cada capacitor de los circuitos de la figura 10.105.

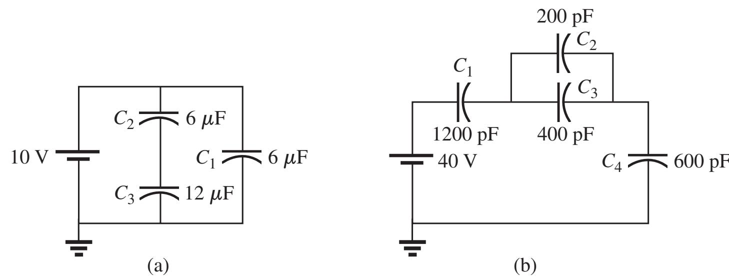


FIGURA 10.105
Problema 45.

***46.** Para cada configuración de la figura 10.106, determine el voltaje y la carga en cada capacitor.

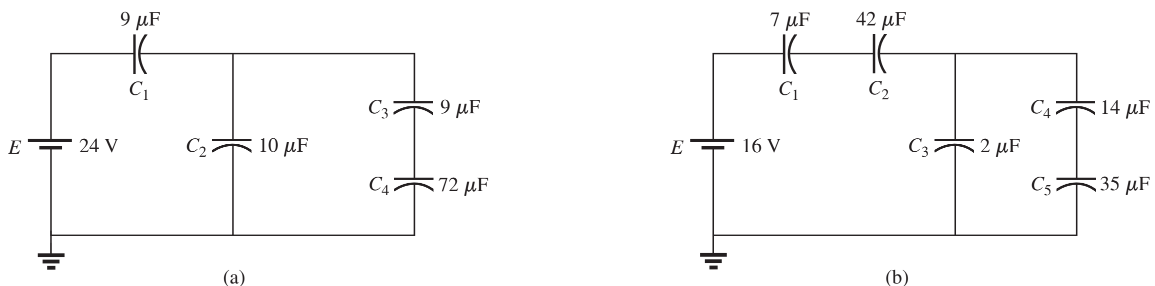
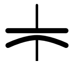


FIGURA 10.106
Problema 46.



***47.** Para la red de la figura 10.107, determine lo siguiente 100 ms después de que el interruptor se cierra:

a. V_{ab}
b. V_{ac}
c. V_{cb}
d. V_{da}
e. Si el interruptor se mueve a la posición 2 una hora después, encuentre el tiempo requerido para que v_{R_2} caiga a 20 V.

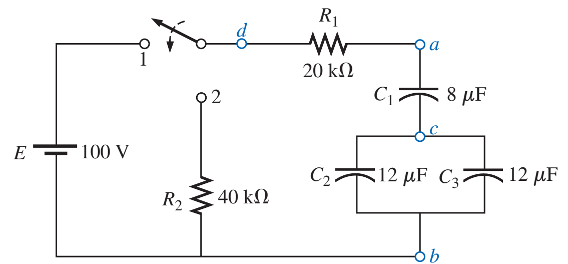
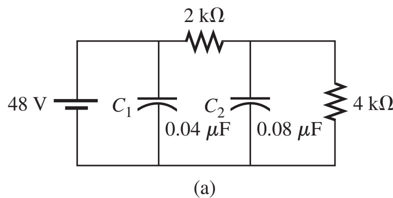


FIGURA 10.107
Problema 47.

48. Para los circuitos de la figura 10.108, encuentre el voltaje y la carga en cada capacitor después de que cada capacitor se ha cargado a su valor final.



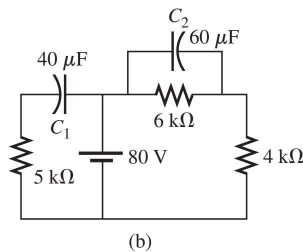


FIGURA 10.108
Problema 48.

SECCIÓN 10.14 Energía almacenada por un capacitor

49. Encuentre la energía almacenada por un capacitor de 120 pF con 12 V en sus placas.

50. Si la energía almacenada por un capacitor de 6 μF es de 1200 J, encuentre la carga Q sobre cada placa del capacitor.

***51.** Una cámara con flash tiene un capacitor de 1000 μF que se carga a 100 V.

a. ¿Cuánta energía es almacenada por el capacitor?
b. ¿Cuál es la carga sobre el capacitor?
c. Cuando el fotógrafo toma una fotografía, el flash se dispara durante 1/2000 s. ¿Cuál es la corriente promedio a través del tubo del flash?
d. Encuentre la potencia entregada al tubo del flash.
e. Después de tomar una fotografía, el capacitor debe recargarse mediante una fuente de alimentación que entrega una corriente máxima de 10 mA. ¿Cuánto tiempo tomará para que el capacitor se cargue?

52. Para la red de la figura 10.109:

a. Determine la energía almacenada por cada capacitor bajo condiciones de estado estable.
b. Repita el inciso (a) si los capacitores se encuentran en serie.

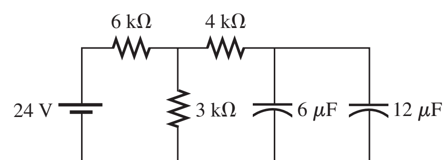
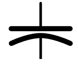


FIGURA 10.109
Problema 52.



SECCIÓN 10.17 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

53. Utilizando la función de captura esquemática:

a. Obtenga las formas de onda para v_C e i_C en función del tiempo para la red de la figura 10.35.

b. Obtenga la curva de potencia (que representa la energía almacenada por el capacitor durante el mismo intervalo de tiempo) y compárela con la gráfica de la figura 10.70.

***54.** Utilizando la función de captura esquemática, obtenga las formas de onda de v_C e i_C en función del tiempo para la red de la figura 10.49 mediante la opción de IC.

55. Verifique la solución al problema 37 (Figura 10.97) utilizando la función de captura esquemática.

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

56. Escriba un programa en QBASIC con el cual tabular el voltaje v_C y la corriente i_C para la red de la figura 10.44 para cinco constantes de tiempo después de que el interruptor se mueve a la posición 1 en $t = 0$ s. Utilice un incremento de $(1/5)\tau$.

***57.** Realice un programa que escriba las expresiones matemáticas para el voltaje v_C en la red de la figura 10.52 para cualesquiera valores de elemento cuando el interruptor se mueve a la posición 1.

***58.** Dados tres capacitores en un arreglo en serie-paralelo, escriba un programa para determinar la capacitancia total. Es decir, determine el número total de posibilidades, y cuestione al usuario para que identifique la configuración y proporcione los valores de capacitor. Luego calcule la capacitancia total.

GLOSARIO

Capacitancia Medida de la capacidad del capacitor para almacenar carga; se mide en farads (F).

Capacitancia parásita Capacitancia que aparece no por el diseño sino simplemente debido a que dos superficies conductoras se encuentran relativamente cercanas entre sí.

Capacitor Elemento fundamental eléctrico que tiene dos superficies conductoras separadas por un material aislante y la capacidad de almacenar carga sobre sus placas.

Constante dieléctrica Otro término para referirse a la *permitividad relativa*, definida en este mismo apartado.

Corriente de fuga Corriente que ocasionará la descarga total de un capacitor si el capacitor se desconecta de la red de carga por un periodo suficiente de tiempo.

Deformación del campo Efecto establecido por las líneas de flujo que no pasan directamente de una superficie conductora a otra.

Dieléctrico Material aislante entre las placas de un capacitor que puede tener un efecto pronunciado sobre la carga almacenada en las placas de un capacitor.

Intensidad del campo eléctrico Fuerza que actúa sobre una carga positiva unitaria en la región de interés.

Ley de Coulomb Ecuación que define la fuerza de atracción o de repulsión entre dos cargas.

Líneas de flujo eléctrico Líneas trazadas para indicar la intensidad y dirección de un campo eléctrico en una región particular.

Permitividad Medida de qué tan bien *permitirá* un dieléctrico el establecimiento de líneas de flujo dentro de él.

Permitividad relativa La permitividad de un material comparada con la del aire.

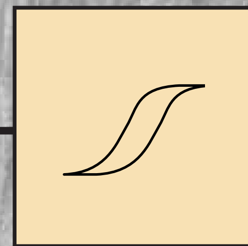
Rigidez dieléctrica Indicación del voltaje por unidad de longitud requerido para que se establezca conducción dentro de un dieléctrico.

Voltaje de ruptura Otro término para referirse a la *rigidez dieléctrica*, definida líneas arriba.

Voltaje de trabajo Voltaje que puede aplicarse en un capacitor por periodos largos sin el riesgo de que se presente un rompimiento dieléctrico.

Voltaje pico Voltaje máximo que puede aplicarse en un capacitor por periodos muy cortos.

11



Circuitos magnéticos

11.1 INTRODUCCIÓN

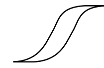
El magnetismo juega una parte integral en casi todo dispositivo eléctrico usado actualmente en la industria, la investigación o en casa. Generadores, motores, transformadores, corta circuitos, televisiones, computadoras, grabadoras de cinta y teléfonos emplean efectos magnéticos para efectuar una variedad de importantes tareas.

La brújula, usada por los marinos chinos ya en el siglo II d.C., se basa en un **imán permanente** para indicar dirección. El imán permanente está hecho de un material, como el acero o el hierro, que permanece magnetizado por largos periodos sin necesitar de una fuente externa de energía.

En 1820, el físico danés Hans Christian Oersted descubrió que la aguja de una brújula se deflexiona cuando se acerca a un conductor portador de corriente. Por primera vez fue demostrado que la electricidad y el magnetismo están relacionados, y en el mismo año el físico francés André-Marie Ampère efectuó experimentos en esta área y desarrolló lo que actualmente se llama **ley de circuitos de Ampère**. En años subsecuentes, investigadores como Michael Faraday, Karl Friedrich Gauss y James Clerk Maxwell continuaron experimentando en esta área y desarrollaron muchos de los conceptos básicos del **electromagnetismo** —estudio de los efectos magnéticos inducidos por el flujo de carga, o corriente.

Hay mucha similitud entre los análisis de circuitos eléctricos y circuitos magnéticos. Esto se demostrará en este capítulo, cuando se comparen las ecuaciones básicas y los métodos aplicados para resolver circuitos magnéticos con los utilizados para circuitos eléctricos.

A menudo surgirán dificultades para entender los métodos usados con los circuitos magnéticos pero no por las ecuaciones mismas, sino al tratar de aprender a usar el conjunto de unidades apropiado. El problema existe porque aún se utilizan tres diferentes sistemas de unidades en la industria. En todo este capítulo se usará el Sistema Internacional (SI). Para los sistemas CGS e inglés se proporciona una tabla de conversiones en el apéndice F.



11.2 CAMPOS MAGNÉTICOS

En la región que rodea a un imán permanente existe un campo magnético que puede ser representado por **líneas de flujo magnético** similares a las líneas de flujo eléctrico. Sin embargo, las líneas de flujo magnético no tienen orígenes o puntos terminales, como lo tienen las líneas de flujo eléctrico, sino que existen en lazos continuos, como se muestra en la figura 11.1. El símbolo para el flujo magnético es la letra griega (phi) Φ.

Las líneas de flujo magnético van del polo norte al polo sur retornando al polo norte a través de la barra metálica. Observe el espaciamiento uniforme entre las líneas de flujo dentro del núcleo y la distribución simétrica fuera del material magnético. Ésas son propiedades adicionales de las líneas de flujo magnético en materiales homogéneos (esto es, materiales que tienen estructura o composición uniformes). También es importante darse cuenta de que las líneas continuas de flujo magnético tratan de ocupar un área tan pequeña como sea posible. Esto resultará en líneas de flujo magnético de longitud mínima entre polos iguales, como se muestra en la figura 11.2. La intensidad de un campo magnético en una región particular está directamente relacionada con la densidad de las líneas de flujo en esa región. Por ejemplo, en la figura 11.1, la intensidad del campo magnético en *a* es el doble que en *b* ya que el doble de líneas de flujo magnético están asociadas con el plano perpendicular en *a* que en *b*. Recuérdese que la intensidad de los imanes permanentes es mayor cerca de los polos.

Si polos diferentes de dos imanes permanentes son acercados uno al otro, los imanes se atraerán y la distribución del flujo será como se muestra en la figura 11.2. Si se acercan polos iguales, los imanes se repelerán y la distribución del flujo será como se muestra en la figura 11.3.

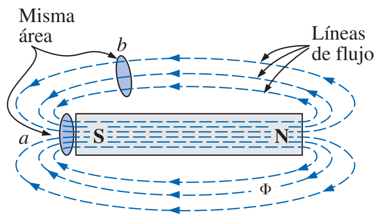


FIGURA 11.1
Distribución del flujo para un imán permanente.

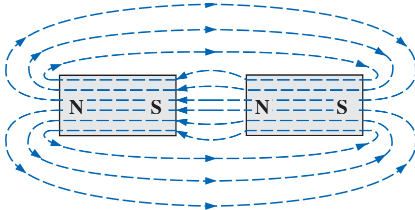


FIGURA 11.2
Distribución del flujo para dos polos adyacentes, opuestos.

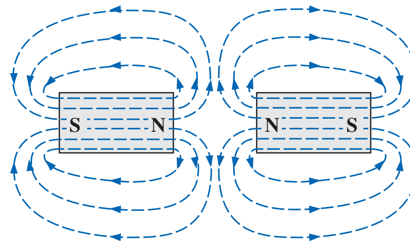


FIGURA 11.3
Distribución del flujo para dos polos adyacentes, semejantes.

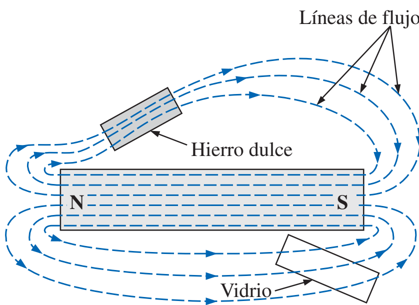


FIGURA 11.4
Efecto de una muestra ferromagnética sobre la distribución del flujo de un imán permanente.

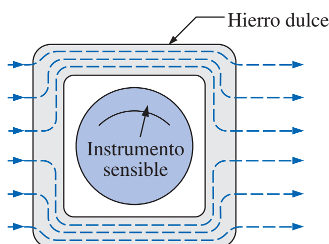


FIGURA 11.5
Efecto de un blindaje magnético sobre la distribución del flujo.

Si un material no magnético, como vidrio o cobre, se coloca en las trayectorias de flujo que rodean a un imán permanente, habrá un cambio casi imperceptible en la distribución del flujo (Figura 11.4). Sin embargo, cuando un material magnético, como el hierro dulce, se coloca en la trayectoria del flujo, las líneas de flujo pasarán por el hierro y no por el aire circundante porque pueden hacerlo con mayor facilidad a través de materiales magnéticos que por el aire. Este principio se pone en uso en el blindaje de elementos eléctricos sensibles e instrumentos que pueden ser afectados por campos magnéticos parásitos (Figura 11.5).

Como se indicó en la introducción, un campo magnético (representado por líneas concéntricas de flujo magnético, como en la figura 11.6) está presente alrededor de todo alambre que porte una corriente eléctrica. La dirección de las líneas de flujo magnético puede encontrarse de manera sencilla colocando el pulgar de la mano *derecha* en la dirección del flujo *convencional* de la corriente



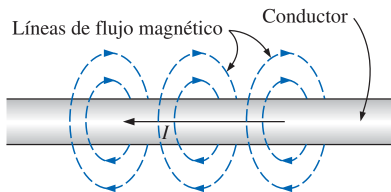


FIGURA 11.6
Líneas de flujo magnético alrededor de un conductor portador de corriente.

y observando la dirección de los dedos. (Este método es llamado comúnmente *regla de la mano derecha*.) Si el conductor es enrollado en una sola vuelta (Figura 11.7), el flujo resultante fluirá en una dirección común a través del centro de la bobina. Una bobina de más de una vuelta producirá un campo magnético que existirá en una trayectoria continua a través y alrededor de la bobina (Figura 11.8).

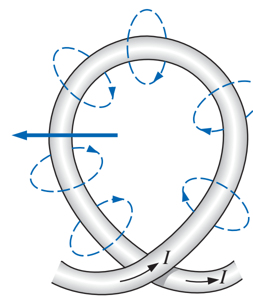


FIGURA 11.7
Distribución del flujo en una bobina de una sola vuelta.

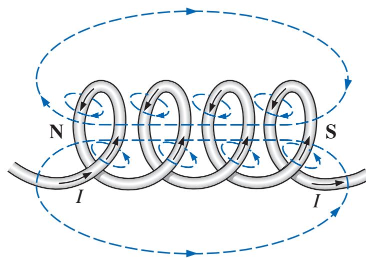


FIGURA 11.8
Distribución del flujo en una bobina portadora de corriente.

La distribución del flujo de la bobina es bastante similar a la del imán permanente. Las líneas de flujo saliendo de la bobina por la izquierda y entrando por la derecha simulan un polo norte y un polo sur, respectivamente. La principal diferencia entre las dos distribuciones de flujo es que las líneas de flujo están más concentradas en el imán permanente que en la bobina. También, como la intensidad de un campo magnético está determinada por la densidad de las líneas de flujo, la bobina tiene una intensidad de campo más débil. La intensidad de campo de la bobina puede incrementarse colocando ciertos materiales, como hierro, acero o cobalto, en su interior para incrementar la densidad de flujo (definida en la siguiente sección) dentro de la bobina. Mediante el incremento de la intensidad del campo con la adición del núcleo, se diseña un *electroimán* (Figura 11.9) que, además de tener todas las propiedades de un imán permanente, también posee una intensidad de campo que se puede variar cambiando una de las componentes (corriente, vueltas, etc.). Por supuesto, la corriente debe pasar por la bobina del electroimán para que se desarrolle el flujo magnético, mientras que en el imán permanente no hay necesidad de la bobina o de la corriente. La dirección de las líneas de flujo se puede determinar para el electroimán (o en cualquier núcleo con un embobinado) colocando los dedos de la mano derecha en la dirección del flujo de corriente alrededor del núcleo. El pulgar señalará entonces en la dirección del polo norte del flujo magnético inducido, como se muestra en la figura 11.10(a). Una sección transversal del mismo electroimán está incluida en la figura 11.10(b) para presentar la convención utilizada en direcciones perpendiculares a la página. La cruz y el punto se refieren al final y a la punta de la flecha, respectivamente.

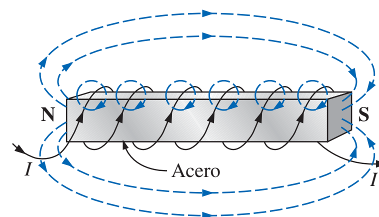
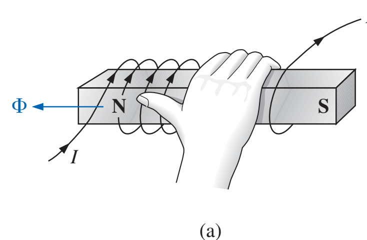


FIGURA 11.9
Electroimán.



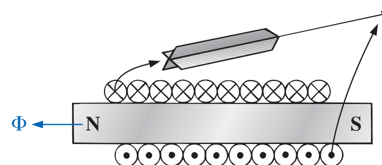
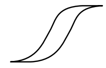


FIGURA 11.10
Determinación de la dirección del flujo en un electroimán: (a) método; (b) notación.



Otras áreas de aplicación para los efectos electromagnéticos se muestran en la figura 11.11. La trayectoria del flujo para cada caso se indica en la figura correspondiente.

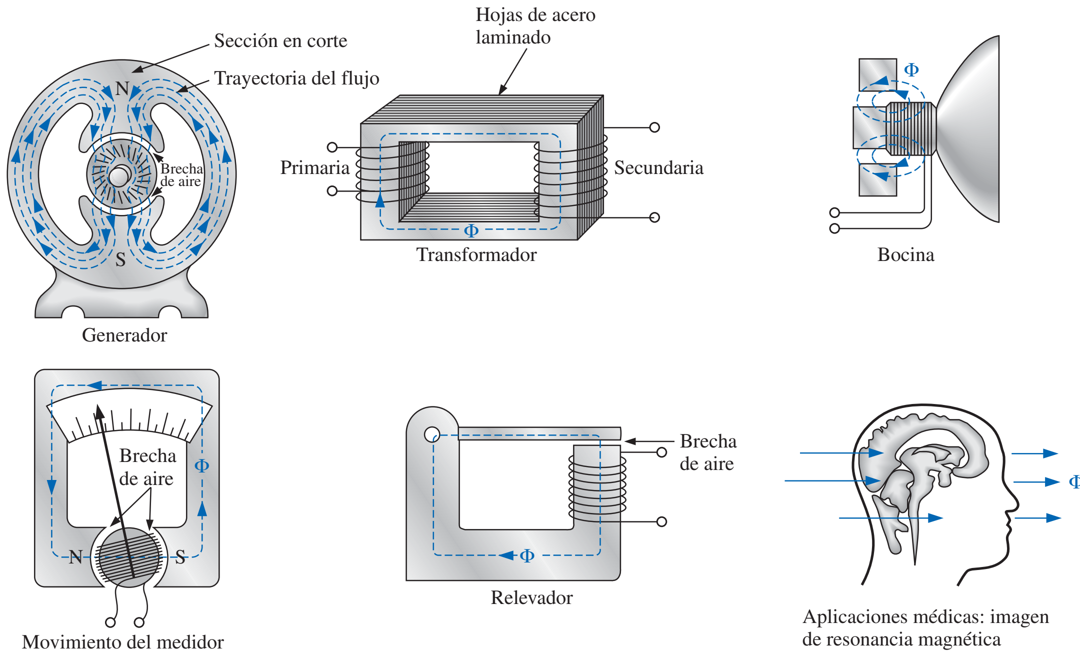


FIGURA 11.11
Algunas áreas de aplicación de los efectos magnéticos.

Alemán
(Wittenberg, Göttingen)
(1804-1891)
Físico
Profesor de física,
Universidad de Göttingen



Cortesía de
Smithsonian Institution
Fotografía núm. 52,604

Weber hizo importantes contribuciones al establecimiento de un sistema de *unidades absolutas* para las ciencias eléctricas, que en su época empezaban a constituirse en un área muy activa de investigación y desarrollo. Estableció una definición de la corriente eléctrica en un sistema electromagnético basándose en el campo magnético producido por la corriente. Weber era políticamente activo y fue despedido de la facultad de la Universidad de Göttingen por protestar la supresión de la constitución por el rey de Hanover en 1837. Sin embargo, encontró otras posiciones en la facultad y eventualmente retornó a Göttingen como director del observatorio astronómico. Recibió honores en Inglaterra, Francia y Alemania, incluyendo la Medalla Copley de la Real Sociedad Británica.

FIGURA 11.12
Wilhelm Eduard Weber.

11.3 DENSIDAD DE FLUJO

En el SI el flujo magnético se mide en *webers* (vea la figura 11.12) y tiene asignado el símbolo Φ. La cantidad de líneas de flujo por unidad de área se llama **densidad de flujo**, se denota por la letra mayúscula B y se mide en *teslas* (vea la figura 11.15). Su magnitud se determina por la siguiente ecuación:

$$B = \frac{\Phi}{A} \qquad \begin{aligned} B &= \text{teslas (T)} \\ \Phi &= \text{webers (Wb)} \\ A &= \text{metros cuadrados (m}^2\text{)} \end{aligned} \qquad \textbf{(11.1)}$$

donde Φ es la cantidad de líneas de flujo que pasan por el área A (Figura 11.13). La densidad de flujo en la posición a en la figura 11.1 es el doble que en b porque el doble de líneas de flujo están pasando por la misma área.
Por definición,

$$1\ \text{T} = 1\ \text{Wb/m}^2$$

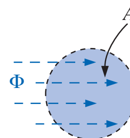
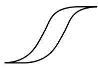


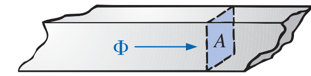
FIGURA 11.13
Definición de la densidad de flujo B.



EJEMPLO 11.1 Para el núcleo de la figura 11.14, determine la densidad de flujo B en teslas.

Solución:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{6 \times 10^{-5}\ \text{Wb}}{1.2 \times 10^{-3}\ \text{m}^2} = \mathbf{5 \times 10^{-2}\ T}$$



$\Phi = 6 \times 10^{-5}$ Wb
$A = 1.2 \times 10^{-3}$ m^2

FIGURA 11.14
Ejemplo 11.1.

EJEMPLO 11.2 En la figura 11.14, si la densidad de flujo es de 1.2 T y el área mide 0.25 pulg^2, determine el flujo a través del núcleo.

Solución: Por la ecuación (11.1),

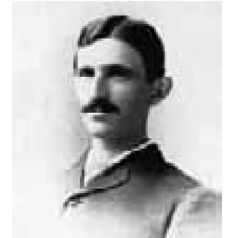
$$\Phi = BA$$

Sin embargo, convirtiendo 0.25 pulg^2 a unidades métricas,

$$A = 0.25\ \text{pulg}^2\left(\frac{1\ \text{m}}{39.37\ \text{pulg}}\right)\left(\frac{1\ \text{m}}{39.37\ \text{pulg}}\right) = 1.613 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$$

y
$$\Phi = (1.2\ \text{T})(1.613 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) = \mathbf{1.936 \times 10^{-4}\ Wb}$$

Crota-estadounidense (Smiljan, París, Colorado Springs, Nueva York)
(1856-1943)
Ingeniero eléctrico e inventor
Recibió la Medalla Edison en 1917



Cortesía de Smithsonian Institution Fotografía núm. 52,223

Tesla es considerado a menudo como uno de los más innovadores e inventivos personajes en la historia de las ciencias. Fue el primero en introducir la *máquina de corriente alterna*, eliminando la necesidad de barras conmutadoras en las máquinas de cd. Después de emigrar a Estados Unidos en 1884, vendió varias de sus patentes sobre *máquinas, transformadores* y *bobinas de inducción de ca* (incluida la *bobina Tesla* como se conoce actualmente) a la Westinghouse Electric Company. Se afirma que el descubrimiento más importante lo realizó en su laboratorio de Colorado Springs, donde en 1900 descubrió las *ondas terrestres estacionarias*. Sus descubrimientos e inventos son muy numerosos como para anotarlos aquí, pero abarcan desde sistemas de iluminación hasta *sistemas polifásicos de potencia* y *sistemas inalámbricos de comunicación mundial*.

FIGURA 11.15
Nikola Tesla.

Un instrumento diseñado para medir la densidad de flujo en gauss (sistema CGS) se muestra en la figura 11.16. El apéndice F revela que 1 T = 10^4 gauss. La magnitud de la lectura que aparece en la carátula del medidor en la figura 11.16 es, por tanto,

$$1.964\ \text{gauss}\left(\frac{1\ \text{T}}{10^4\ \text{gauss}}\right) = 1.964 \times 10^{-4}\ \text{T}$$

11.4 PERMEABILIDAD

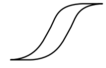
Si se usan núcleos de diferentes materiales con las mismas dimensiones físicas en el electroimán descrito en la sección 11.2, la fuerza del imán variará de acuerdo con el núcleo usado. Esta variación en fuerza se debe al mayor o menor número de líneas de flujo que pasan por el núcleo. Los materiales en los que las líneas de flujo pueden establecerse fácilmente se llaman *magnéticos* y tienen una *alta permeabilidad*. Por tanto, la **permeabilidad** (μ) de un material es una medida de la facilidad con que líneas de flujo magnético pueden establecerse en él. La permeabilidad es similar en muchos aspectos a la conductividad en circuitos eléctricos. La permeabilidad del espacio libre μ_o (vacío) es:

$$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ \frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}}$$

Como se indicó, μ tiene unidades de Wb/A·m. Hablando prácticamente, la permeabilidad de todos los materiales no magnéticos, como cobre, aluminio, madera, vidrio y aire, es la misma que para el espacio libre. Los materiales que tienen permeabilidades ligeramente menores que la del espacio libre se denominan **diamagnéticos**, y aquellos con permeabilidades ligeramente mayores que la del espacio libre se denominan **paramagnéticos**. Los materiales magnéticos, como hierro, níquel, acero, cobalto y aleaciones de esos metales, tienen permeabilidad de cientos e incluso miles de veces más que la del espacio libre. Los materiales con esas muy altas permeabilidades se llaman **ferromagnéticos**.



FIGURA 11.16
Gausímetro digital. (Cortesía de LDJ Electronics, Inc.)



La razón de la permeabilidad de un material a la del espacio libre se llama **permeabilidad relativa**; esto es,

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} \qquad \textbf{(11.2)}$$

En general, para materiales ferromagnéticos, $\mu_r \geq 100$, y para materiales no magnéticos, $\mu_r = 1$.

Ya que μ_r es una variable dependiente de otras cantidades del circuito magnético, sus valores μ_r no están tabulados. Los métodos para calcular μ_r a partir de los datos suministrados por los fabricantes se consideran en una sección posterior.

11.5 RELUCTANCIA

La resistencia de un material al flujo de carga (corriente) se determina para circuitos eléctricos por la ecuación:

$$R = \rho\frac{l}{A} \qquad (\text{ohms}, \Omega)$$

La **reluctancia** de un material al establecimiento de líneas de flujo magnético en él está determinada por la siguiente ecuación:

$$\mathscr{R} = \frac{l}{\mu A} \qquad (\text{rels, o At/Wb}) \qquad \textbf{(11.3)}$$

donde $\mathscr{R}$ es la reluctancia, l es la longitud de la trayectoria magnética, y A es el área de la sección transversal. La t en las unidades At/Wb es el número de vueltas del embobinado aplicado. Se abundará acerca de ampere-vueltas (At) en la siguiente sección. Observe que la resistencia y la reluctancia son inversamente proporcionales al área, lo cual indica que un aumento en área resultará en una reducción en cada una y en un *aumento* en el resultado deseado: corriente y flujo. Para un aumento en longitud, ocurre lo opuesto, y el efecto deseado se reduce. Sin embargo, la reluctancia es inversamente proporcional a la permeabilidad, mientras que la resistencia es directamente proporcional a la resistividad. Entre mayor es μ o menor es, ρ, menores son la reluctancia y la resistencia, respectivamente. Por tanto, los materiales con alta permeabilidad, como los ferromagnéticos, tienen muy pequeñas reluctancias y un mayor flujo a través del núcleo. No hay una unidad ampliamente aceptada para la reluctancia, aunque el *rel* y el At/Wb son los más empleados.

11.6 LEY DE OHM PARA CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Recuerde la ecuación:

$$\text{Efecto} = \frac{\text{causa}}{\text{oposición}}$$

que aparece en el capítulo 4 al introducir la ley de Ohm para circuitos eléctricos. Para circuitos magnéticos, el efecto deseado es el flujo Φ. La causa es la **fuerza magnetomotriz (fmm)** $\mathscr{F}$, que es la fuerza externa (o "presión") requerida para establecer las líneas de flujo magnético dentro del material magnético. La oposición al establecimiento del flujo Φ es la reluctancia $\mathscr{R}$.



Al sustituir se tiene:

$$\Phi = \frac{\mathscr{F}}{\mathscr{R}} \tag{11.4}$$

La fuerza magnetomotriz $\mathscr{F}$ es proporcional al producto del número de vueltas alrededor del núcleo (en donde desea establecerse el flujo) y la corriente a través de las vueltas del alambre (Figura 11.17). En forma de ecuación,

$$\mathscr{F} = NI \qquad \text{(ampere-vueltas, At)} \tag{11.5}$$

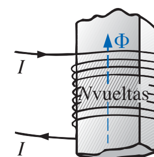


FIGURA 11.17
Definición de los componentes de una fuerza magnetomotriz.

Esta ecuación indica claramente que un incremento en el número de vueltas o de corriente a través del alambre resultará en un aumento de la "presión" sobre el sistema para establecer líneas de flujo a través del núcleo.

Aunque hay una gran similitud entre los circuitos eléctricos y magnéticos, debe quedar claro que el flujo Φ no es una variable de "flujo" tal como la corriente en un circuito eléctrico. El flujo magnético se establece en el núcleo por la alteración de la estructura atómica del núcleo debida a presión externa, y no es una medida del flujo a través del núcleo de algunas partículas cargadas.

11.7 FUERZA MAGNETIZANTE

La fuerza magnetomotriz por unidad de longitud se llama **fuerza magnetizante** (H). En forma de ecuación,

$$H = \frac{\mathscr{F}}{l} \qquad \text{(At/m)} \tag{11.6}$$

Sustituyendo la fuerza magnetomotriz resultará en:

$$H = \frac{NI}{l} \qquad \text{(At/m)} \tag{11.7}$$

Para el circuito magnético de la figura. 11.18, si $NI = 40$ At y $l = 0.2$ m, entonces:

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{40 \text{ At}}{0.2 \text{ m}} = 200 \text{ At/m}$$

En palabras, el resultado indica que hay 200 At de "presión" por metro para establecer flujo en el núcleo.

En la figura 11.18, advierta que la dirección del flujo Φ se puede determinar colocando los dedos de la mano derecha en la dirección de la corriente alrededor del núcleo y observando la dirección del pulgar. Es interesante darse cuenta de que *la fuerza magnetizante es independiente del tipo de material del núcleo* —está determinada sólo por el número de vueltas, la corriente y la longitud del núcleo.

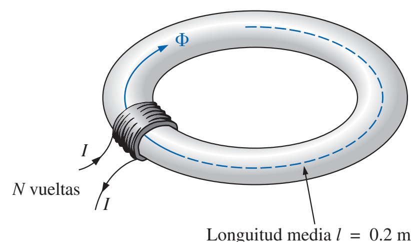
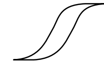


FIGURA 11.18
Definición de la fuerza magnetizante de un circuito magnético.

La fuerza magnetizante aplicada tiene un efecto pronunciado sobre la permeabilidad resultante de un material magnético. Conforme la fuerza magnetizante aumenta, la permeabilidad se eleva a un máximo y luego cae a un mínimo, como se muestra en la figura 11.19 para tres materiales magnéticos empleados comúnmente.



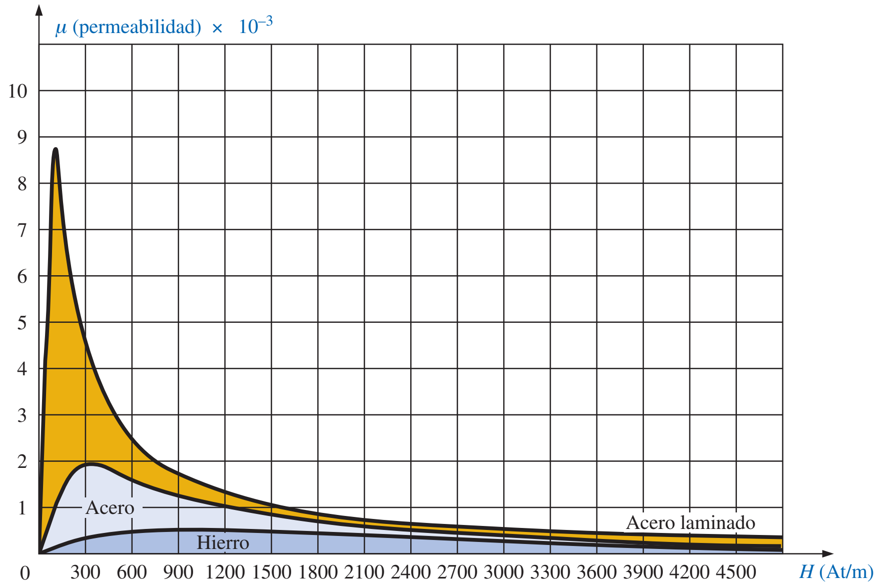


FIGURA 11.19
Variación de μ con la fuerza magnetizante.

La densidad de flujo y la fuerza magnetizante están relacionadas por la siguiente ecuación:

$$B = \mu H \tag{11.8}$$

Esta ecuación indica que para una fuerza magnetizante particular, entre mayor sea la permeabilidad, mayor será la densidad de flujo inducida.

Dado que los henrys (H) y la fuerza magnetizante (*H*) usan la misma letra mayúscula, es preciso señalar que todas las unidades de medida en el texto, por ejemplo henrys, usan letras en tipo romano, como H, mientras que variables como la fuerza magnetizante usan letras cursivas, como *H*.

11.8 HISTÉRESIS

Una curva de la densidad de flujo *B* en función de la fuerza magnetizante *H* de un material es de particular importancia para un ingeniero. Es común encontrarse curvas de este tipo en manuales, folletos descriptivos y boletines publicados por los fabricantes de materiales magnéticos. Una curva típica *B*-*H* para un material ferromagnético como el acero puede obtenerse usando la construcción de la figura 11.20.

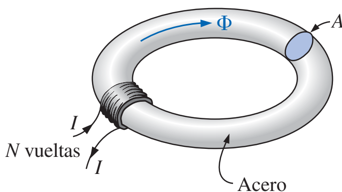


FIGURA 11.20
Circuito magnético en serie usado para definir la curva de histéresis.

Al inicio, el núcleo no está magnetizado y la corriente $I = 0$. Si se incrementa la corriente *I* a algún valor mayor que cero, la fuerza magnetizante *H* aumentará hasta un valor determinado por:

$$H\uparrow = \frac{NI\uparrow}{l}$$

El flujo Φ y la densidad de flujo *B* ($B = \Phi/A$) también aumentarán con la corriente *I* (o *H*). Si el material no tiene magnetismo residual, y la fuerza magnetizante se incrementa de cero a algún valor H_a, la curva *B*-*H* seguirá la trayectoria mostrada en la figura 11.21 entre *o* y *a*. Si se incrementa la fuerza



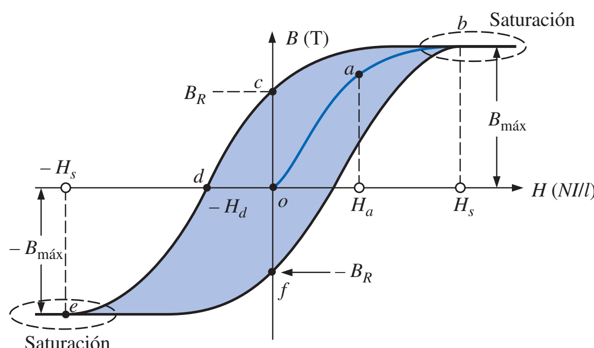


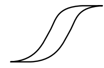
FIGURA 11.21
Curva de histéresis.

magnetizante H hasta que ocurra la saturación (H_s), la curva continuará como se muestra en la figura hasta el punto b. Cuando ocurra la saturación, la densidad de flujo habrá, *para todo fin práctico*, alcanzado su valor máximo. Cualquier aumento adicional de corriente a través de la bobina que incremente $H = NI/l$ resultará en un incremento muy pequeño en la densidad de flujo B.

Si la fuerza magnetizante se reduce a cero haciendo que I disminuya a cero, la curva seguirá la trayectoria de la curva entre b y c. La densidad de flujo B_R, que permanece cuando la fuerza magnetizante es cero, se llama *densidad de flujo residual*. Es esta densidad de flujo residual la que hace posible crear imanes permanentes. Si ahora se quita la bobina del núcleo de la figura 11.20, el núcleo tendrá aún las propiedades magnéticas determinadas por la densidad de flujo residual, una medida de su capacidad de retención. Si la corriente I se invierte, desarrollando una fuerza magnetizante, $-H$, la densidad de flujo B disminuirá con un aumento en I. Eventualmente, la densidad de flujo será cero cuando se alcance $-H_d$ (la porción de curva desde c hasta d). La fuerza magnetizante $-H_d$ requerida para "obligar" a la densidad de flujo a reducir su nivel a cero se llama *fuerza coercitiva*, una medida de la coercitividad de la muestra magnética. Como la fuerza $-H$ se incrementa hasta que la saturación ocurre de nuevo y entonces se invierte y lleva de regreso a cero, resultará la trayectoria *def*. Si la fuerza magnetizante se incrementa en la dirección positiva ($+H$), la curva trazará la trayectoria mostrada de f a b. Toda la curva representada por *bcdefb* se llama curva de **histéresis** para el material ferromagnético, del griego *hysterein*, que significa "quedarse atrás". La densidad de flujo B *permaneció* atrás de la fuerza magnetizante H durante el trazo entero de la curva. Cuando H era cero en c, B no era cero sino que sólo había comenzado a declinar. Mucho después que H había pasado por cero y llegado a ser igual a $-H_d$, la densidad de flujo B finalmente llegó a ser igual a cero.

Si se repite el ciclo, la curva obtenida para el mismo núcleo estará determinada por la H máxima aplicada. En la figura 11.22 se muestran tres lazos de histéresis para el mismo material para valores máximos de H menores que el valor de saturación. Adicionalmente, la curva de saturación se repite para fines de comparación.

A partir de las distintas curvas observe que para un valor particular de H, digamos, H_x, el valor de B puede variar ampliamente de acuerdo con la historia del núcleo. En un esfuerzo por asignar un valor particular de B a cada valor de H, se conectaron las puntas de los lazos de histéresis. La curva resultante, mostrada por la línea sólida oscura en la figura 11.22 y para varios materiales en la figura 11.23, se llama *curva de magnetización normal*. Una vista ampliada de una región aparece en la figura 11.24.



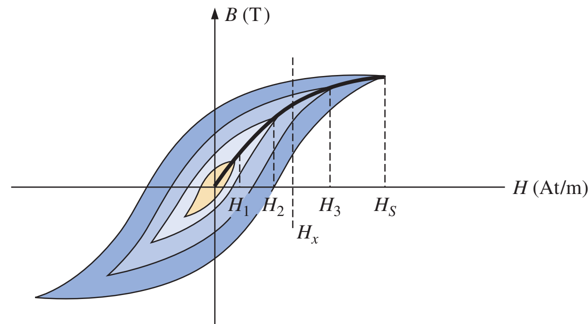


FIGURA 11.22
Definición de la curva de magnetización normal.

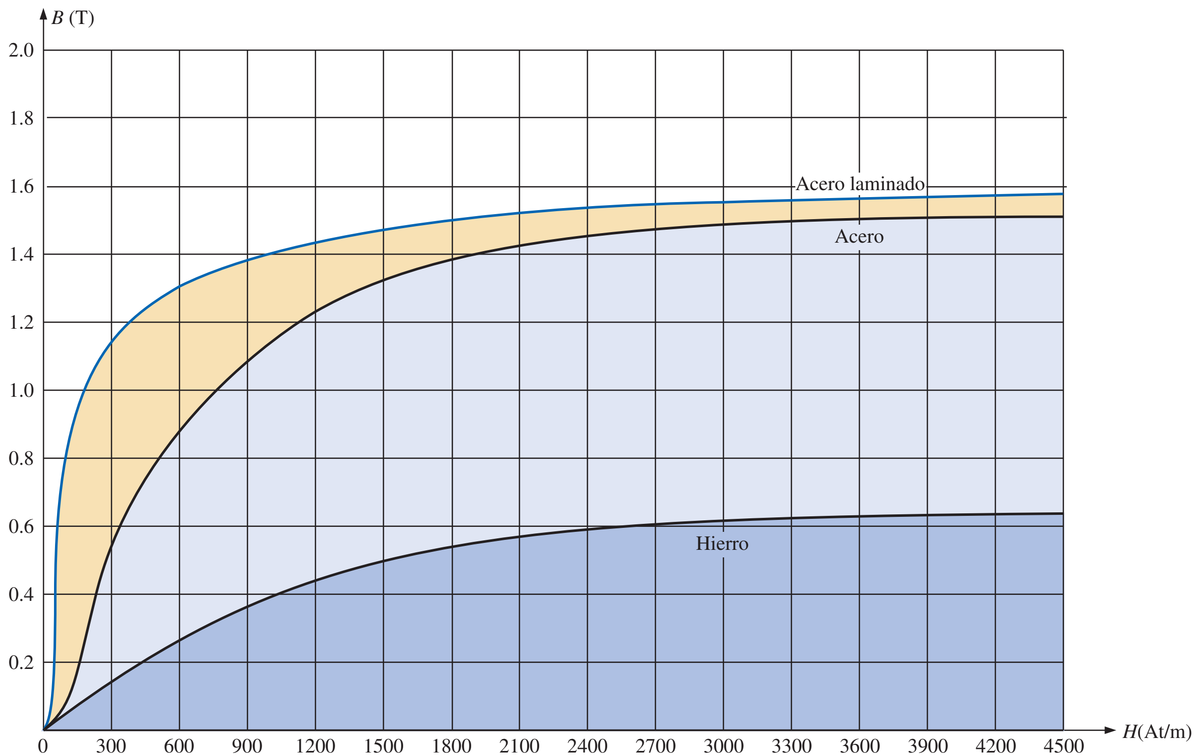
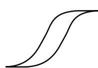


FIGURA 11.23
Curva de magnetización normal para tres materiales ferromagnéticos.

Una comparación de las figuras 11.19 y 11.23 muestra que para el mismo valor de H, el valor de B es mayor en la figura 11.23 para los materiales con la mayor μ en la figura 11.19. Esto es particularmente obvio para valores bajos de H. Esta correspondencia entre las dos figuras debe existir ya que $B = \mu H$. De hecho, si en la figura 11.23 se encuentra μ para cada valor de H usando la ecuación $\mu = B/H$, se obtendrán las curvas de la figura 11.19. En la figura 11.25 puede apreciarse un instrumento que proporciona una gráfica de la curva B-H para una muestra magnética.

Es interesante observar que las curvas de histéresis de la figura 11.22 tienen una *simetría puntual* alrededor del origen; esto es, el patrón invertido a la izquierda del eje vertical es el mismo que el que aparece a la derecha del eje vertical. Además, el lector encontrará que una aplicación adicional de las mismas



B (T)

1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1

Acero laminado

Acero

Hierro

0 100 200 300 400 500 600 700 H (At/m)

FIGURA 11.24
Vista ampliada de la figura 11.23 para la región de fuerza magnetizante baja.

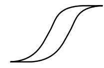




FIGURA 11.25
Magnetómetro de muestra vibratoria modelo 9600. (Cortesía de LDJ Electronics, Inc.)

fuerzas magnetizantes a la muestra resultará en la misma gráfica. Para una corriente I en $H = NI/l$ que se moverá entre máximos positivos y negativos a una razón fija, resultará la misma curva B-H durante cada ciclo. Tal será el caso cuando se examinen redes de ca (senoidal) en capítulos posteriores. La inversión del campo (Φ) debida a la dirección cambiante de la corriente resultará en una pérdida de energía que puede describirse introduciendo primero la *teoría de dominio del magnetismo*.

Dentro de cada átomo, los electrones orbitales (descritos en el capítulo 2) están girando también alrededor de sus propios ejes mientras giran alrededor del núcleo. El átomo, debido a sus electrones girando alrededor de sus propios ejes, tiene un campo magnético asociado. En materiales no magnéticos, el campo magnético neto es cero ya que los campos magnéticos debidos a los átomos del material se oponen uno a otro. Sin embargo, en materiales magnéticos como el hierro y el acero, los campos magnéticos de grupos de átomos, que son del orden de 10^{12}, están alineados, formando imanes de barra muy pequeños. Este grupo de átomos alineados magnéticamente se llama **dominio**. Cada dominio es una entidad separada; esto es, cada dominio es independiente de los dominios circundantes. Para una muestra no magnetizada de material magnético, esos dominios aparecen al azar, como se muestra en la figura 11.26(a). El campo magnético neto en cualquier dirección es cero.

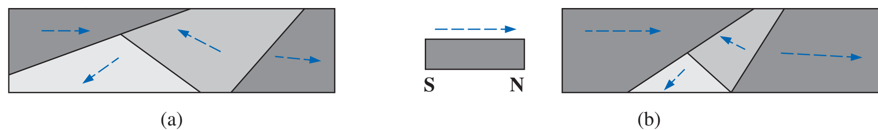


FIGURA 11.26
Demostración de la teoría del dominio del magnetismo.

Cuando se aplica una fuerza externa magnetizante, los dominios que están casi alineados con el campo aplicado crecerán a costa de los dominios menos favorablemente orientados, como se muestra en la figura 11.26(b). Si en cierto momento se aplica un campo de suficiente intensidad, todos los dominios tendrán la orientación de la fuerza magnetizante aplicada, y cualquier incremento adicional del campo externo no aumentará la intensidad del flujo magnético a través del núcleo —condición llamada *saturación*—. La elasticidad de lo ante-



rior queda evidenciada por el hecho de que cuando se quite la fuerza magnetizante, el alineamiento se perderá en alguna medida y la densidad de flujo caerá a B_R. En otras palabras, quitar la fuerza magnetizante resultará en el retorno de varios dominios desalineados dentro del núcleo. Sin embargo, el alineamiento continuado de varios de los dominios explica nuestra capacidad de crear imanes permanentes.

En un punto justo antes de la saturación, los dominios opuestos desalineados se reducen a pequeños cilindros de distintas formas llamados *burbujas*. Esas burbujas se pueden mover dentro de la muestra magnética por medio de la aplicación de un campo magnético de *control*. Esas burbujas magnéticas forman la base del sistema de memoria de burbuja para computadoras diseñado recientemente.

11.9 LEY DE CIRCUITOS DE AMPÈRE

Como se mencionó en la introducción a este capítulo, existe una amplia similitud entre los análisis de los circuitos eléctricos y magnéticos. Esta similitud ya ha sido demostrada hasta cierto punto para las cantidades anotadas en la tabla 11.1.

TABLA 11.1

	Circuitos eléctricos	Circuitos magnéticos
Causa	E	$\mathscr{F}$
Efecto	I	Φ
Oposición	R	$\mathscr{R}$

Si se aplica la analogía de la "causa" a la ley de voltaje de Kirchhoff ($\Sigma_{\circlearrowright} V = 0$), se obtiene lo siguiente:

$$\Sigma_{\circlearrowright} \mathscr{F} = 0 \qquad \text{(para circuitos magnéticos)} \tag{11.9}$$

la cual, en palabras, establece que la suma algebraica de las elevaciones y caídas de la fmm alrededor de un lazo cerrado de un circuito magnético es igual a cero; esto es, la suma de las elevaciones en fmm es igual a la suma de las caídas en fmm alrededor de un lazo cerrado.

La ecuación (11.9) se denomina **ley de circuitos de Ampère**. Cuando se aplica a circuitos magnéticos, las fuentes de fmm se expresan con la ecuación:

$$\mathscr{F} = NI \qquad \text{(At)} \tag{11.10}$$

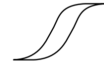
La ecuación para la caída de fmm a través de una porción de un circuito magnético puede encontrarse aplicando las relaciones dadas en la tabla 11.1; esto es, para circuitos eléctricos,

$$V = IR$$

que resulta en lo siguiente para circuitos magnéticos:

$$\mathscr{F} = \Phi\mathscr{R} \qquad \text{(At)} \tag{11.11}$$

donde Φ es el flujo que pasa a través de una sección del circuito magnético y $\mathscr{R}$ es la reluctancia de esa sección. Sin embargo, la reluctancia rara vez se calcula



en el análisis de circuitos magnéticos. Una ecuación más práctica para la caída de la fmm es:

$$\mathscr{F} = Hl \qquad \text{(At)} \qquad \textbf{(11.12)}$$

como se deriva de la ecuación (11.6), donde H es la fuerza magnetizante sobre una sección de un circuito magnético y l es la longitud de la sección.

Como un ejemplo de la ecuación (11.9), considere el circuito magnético que aparece en la figura 11.27 construido de tres materiales ferromagnéticos diferentes. Aplicando la ley de circuitos de Ampère se tiene:

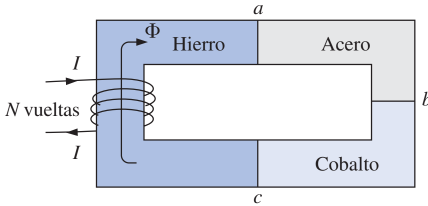


FIGURA 11.27
Circuito magnético en serie de tres materiales diferentes.

$$\Sigma_{\circlearrowright} \mathscr{F} = 0$$

$$\underbrace{+NI}_{\text{Elevación}} - \underbrace{H_{ab}l_{ab}}_{\text{Caída}} - \underbrace{H_{bc}l_{bc}}_{\text{Caída}} - \underbrace{H_{ca}l_{ca}}_{\text{Caída}} = 0$$

$$\underbrace{NI}_{\substack{\text{fmm}\\\text{aplicada}}} = \underbrace{H_{ab}l_{ab} + H_{bc}l_{bc} + H_{ca}l_{ca}}_{\text{Caídas de fmm}}$$

Todos los términos de la ecuación son conocidos excepto la fuerza magnetizante para cada porción del circuito magnético, que puede encontrarse usando la curva *B*-*H* si se conoce la densidad de flujo *B*.

11.10 EL FLUJO Φ

Si las relaciones descritas en la sección previa se continúan aplicando a la ley de corriente de Kirchhoff, se encontrará que la suma de los flujos que entran a una unión es igual a la suma de los flujos que salen de una unión; esto es, para el circuito de la figura 11.28,

$$\Phi_a = \Phi_b + \Phi_c \qquad \text{(en la unión } a\text{)}$$

o bien:

$$\Phi_b + \Phi_c = \Phi_a \qquad \text{(en la unión } b\text{)}$$

las cuales son equivalentes.

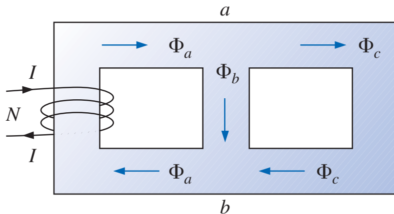


FIGURA 11.28
Distribución del flujo de una red magnética en serie-paralelo.

11.11 CIRCUITOS MAGNÉTICOS EN SERIE: DETERMINACIÓN DE *NI*

La posición que se ha alcanzado hasta ahora permitirá resolver algunos problemas de circuitos magnéticos, que son básicamente de dos tipos. En un tipo, Φ se conoce, y debe calcularse la fmm *NI* aplicada. Éste es el tipo de problema que se encuentra en el diseño de motores, generadores y transformadores. En el otro tipo, se conoce *NI* y debe encontrarse el flujo Φ del circuito magnético. Este tipo de problema se encuentra principalmente en el diseño de amplificadores magnéticos y resulta más difícil ya que el enfoque es de "prueba y error" "al azar".

Como se indicó antes, el valor de μ variará de punto a punto a lo largo de la curva de magnetización. Esto elimina la posibilidad de encontrar la reluctancia de cada "rama" o la "reluctancia total" de una red, como se hizo para circuitos eléctricos donde ρ tenía un valor fijo para cualquier corriente o voltaje aplicados. Si se pudiese determinar la reluctancia total, entonces Φ se determinaría usando la analogía de la ley de Ohm para circuitos magnéticos.

Para circuitos magnéticos, el nivel de *B* o de *H* se determina a partir del otro nivel, usando la curva *B*-*H*, μ y rara vez se calcula, a menos que se pida.



Un enfoque empleado a menudo en el análisis de circuitos magnéticos es el método de la *tabla*. Antes de analizar un problema en detalle, se prepara una tabla que proporciona en la columna extrema izquierda las distintas secciones del circuito magnético. Las columnas a la derecha se reservan para las cantidades encontradas para cada sección. De esta manera, quien resuelve el problema puede saber qué se requiere para completarlo y también cuál debe ser el siguiente paso por efectuar. Después de unos cuantos ejemplos, la utilidad de este método debe resultar clara.

Esta sección considerará sólo circuitos magnéticos en *serie* donde el flujo Φ es el mismo en todas partes. En cada ejemplo, se debe determinar la magnitud de la fuerza magnetomotriz.

EJEMPLO 11.3 Para el circuito magnético en serie de la figura 11.29:

a. Encuentre el valor de I necesario para desarrollar un flujo magnético de $\Phi = 4 \times 10^{-4}$ Wb.
b. Determine μ y μ_r para el material bajo esas condiciones.

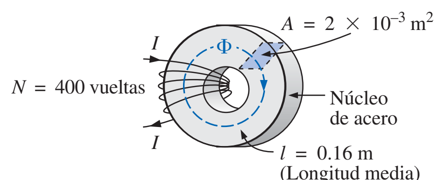
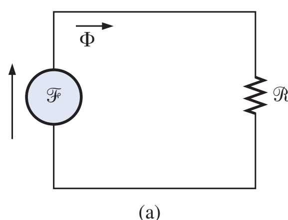
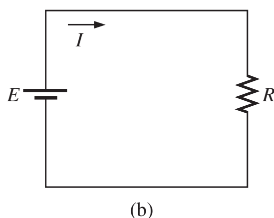


FIGURA 11.29
Ejemplo 11.3.

Soluciones: El circuito magnético se puede representar por el sistema que se muestra en la figura 11.30(a). La analogía de circuito eléctrico aparece en la figura 11.30(b). Analogías de este tipo pueden ser de gran ayuda en la solución de los circuitos magnéticos. La tabla 11.2 es para la parte (a) de este problema. La tabla es bastante trivial para este ejemplo, pero define las cantidades que deben encontrarse.



(a)



(b)

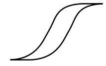
FIGURA 11.30
(a) Circuito magnético equivalente y (b) analogía del circuito eléctrico.

TABLA 11.2

Sección	Φ (Wb)	A (m^2)	B (T)	H (At/m)	l (m)	Hl (At)
Una sección continua	4×10^{-4}	2×10^{-3}			0.16	

a. La densidad de flujo B es:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{4 \times 10^{-4}\,\text{Wb}}{2 \times 10^{-3}\,\text{m}^2} = 2 \times 10^{-1}\,\text{T} = 0.2\,\text{T}$$



Usando las curvas *B-H* de la figura 11.24 es posible determinar la fuerza magnetizante *H*:

$$H \text{ (acero fundido)} = 170 \text{ At/m}$$

Aplicando la ley de circuitos de Ampère se obtiene:

$$NI = Hl$$

e

$$I = \frac{Hl}{N} = \frac{(170 \text{ At/m})(0.16 \text{ m})}{400 \text{ t}} = \mathbf{68 \text{ mA}}$$

(Recuérdese que t representa vueltas.)

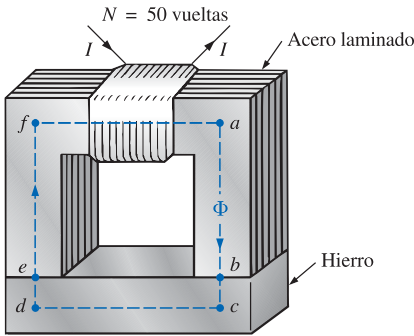
b. La permeabilidad del material puede encontrarse mediante la ecuación (11.8):

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0.2 \text{ T}}{170 \text{ At/m}} = \mathbf{1.176 \times 10^{-3} \text{ Wb/A·m}}$$

y la permeabilidad relativa es:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} = \frac{1.176 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7}} = \mathbf{935.83}$$

EJEMPLO 11.4 El electroimán de la figura 11.31 ha atraído un trozo de hierro. Determine la corriente *I* requerida para establecer el flujo indicado en el núcleo.



$l_{ab} = l_{cd} = l_{ef} = l_{fa} = 4$ pulg
$l_{bc} = l_{de} = 0.5$ pulg
Área (en todas partes) $= 1$ pulg^2
$\Phi = 3.5 \times 10^{-4}$ Wb

FIGURA 11.31
Electroimán para el ejemplo 11.4.

Solución: Para poder usar las figuras 11.23 y 11.24, se debe convertir primero al sistema métrico. Sin embargo, como el área es la misma en todas partes, es posible determinar la longitud de cada material en vez de trabajar con las secciones individuales:

$$l_{efab} = 4 \text{ pulg} + 4 \text{ pulg} + 4 \text{ pulg} = 12 \text{ pulg}$$

$$l_{bcde} = 0.5 \text{ pulg} + 4 \text{ pulg} + 0.5 \text{ pulg} = 5 \text{ pulg}$$

$$12 \text{ pulg}\left(\frac{1 \text{ m}}{39.37 \text{ pulg}}\right) = 304.8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$5 \text{ pulg}\left(\frac{1 \text{ m}}{39.37 \text{ pulg}}\right) = 127 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$1 \text{ pulg}^2\left(\frac{1 \text{ m}}{39.37 \text{ pulg}}\right)\left(\frac{1 \text{ m}}{39.37 \text{ pulg}}\right) = 6.452 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

La información disponible de las especificaciones del problema ha sido insertada en la tabla 11.3. Cuando el problema esté terminado, cada espacio contendrá alguna información. Se pueden encontrar datos suficientes para completar el problema al llenar cada columna de izquierda a derecha. Conforme sean calculadas las diversas cantidades, se colocarán en una tabla similar localizada al final del ejemplo.

TABLA 11.3

Sección	Φ (Wb)	*A* (m^2)	*B* (T)	*H* (At/m)	*l* (m)	*Hl* (At)
efab	3.5×10^{-4}	6.452×10^{-4}			304.8×10^{-3}	
bcde	3.5×10^{-4}	6.452×10^{-4}			127×10^{-3}	

La densidad de flujo para cada sección es:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{3.5 \times 10^{-4} \text{ Wb}}{6.452 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 0.542 \text{ T}$$



y la fuerza magnetizante es:

$$H \text{ (lámina de acero, figura 11.24)} \cong 70 \text{ At/m}$$
$$H \text{ (hierro, figura 11.23)} \cong 1600 \text{ At/m}$$

Observe la extrema diferencia en la fuerza magnetizante para cada material para la densidad de flujo requerida. De hecho, al aplicar la ley de circuitos de Ampère, se encontrará que la sección de lámina de acero podría ignorarse con un error mínimo en la solución.

Al determinar *Hl* para cada sección resulta:

$$H_{efab}l_{efab} = (70 \text{ At/m})(304.8 \times 10^{-3} \text{ m}) = 21.34 \text{ At}$$
$$H_{bcde}l_{bcde} = (1600 \text{ At/m})(127 \times 10^{-3} \text{ m}) = 203.2 \text{ At}$$

Y al insertar los datos anteriores en la tabla 11.3 se obtendrá la tabla 11.4.

TABLA 11.4

Sección	Φ (Wb)	*A* (m²)	*B* (T)	*H* (At/m)	*l* (m)	*Hl* (At)
efab	3.5×10^{-4}	6.452×10^{-4}	0.542	70	304.8×10^{-3}	21.34
bcde	3.5×10^{-4}	6.452×10^{-4}	0.542	1600	127×10^{-3}	203.2

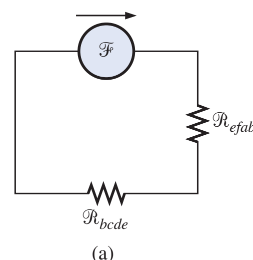
El circuito magnético equivalente y la analogía del circuito eléctrico para el sistema de la figura 11.31 aparecen en la figura 11.32.

Al aplicar la ley de circuitos de Ampère,

$$NI = H_{efab}l_{efab} + H_{bcde}l_{bcde}$$
$$= 21.34 \text{ At} + 203.2 \text{ At} = 224.54 \text{ At}$$

y
$$(50 \text{ t})I = 224.54 \text{ At}$$

de modo que:
$$I = \frac{224.54 \text{ At}}{50 \text{ t}} = \mathbf{4.49\ A}$$



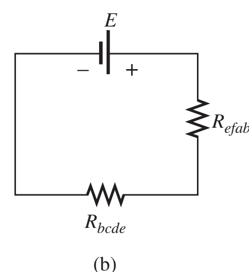


FIGURA 11.32
(a) Circuito magnético equivalente y (b) analogía del circuito eléctrico para el electroimán de la figura 11.31.

EJEMPLO 11.5 Determine la corriente secundaria I_2 para el transformador de la figura 11.33 si el flujo resultante en el sentido de las manecillas del reloj en el núcleo es de 1.5×10^{-5} Wb.

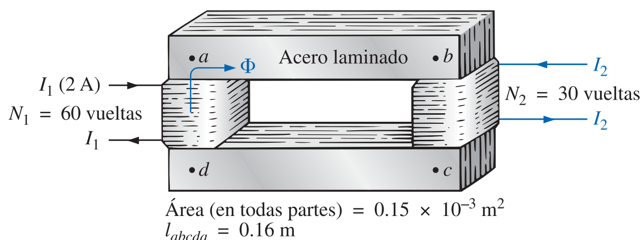
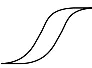


FIGURA 11.33
Transformador para el ejemplo 11.5.

Solución: Éste es el primer ejemplo a considerar con dos fuerzas magnetizantes. En las analogías de la figura 11.34 puede verse que el flujo resultante de cada una es opuesto, así como las dos fuentes de voltaje son opuestas en la analogía del circuito eléctrico.

Los datos estructurales aparecen en la tabla 11.5.



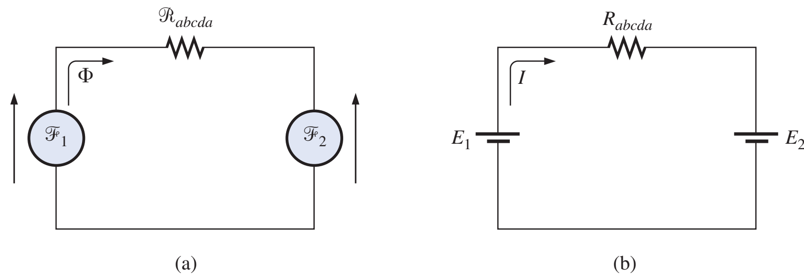


FIGURA 11.34
(a) Circuito magnético equivalente y (b) analogía de circuito eléctrico para el transformador de la figura 11.33.

TABLA 11.5

Sección	Φ (Wb)	A (m²)	B (T)	H (At/m)	l (m)	Hl (At)
abcda	1.5×10^{-5}	0.15×10^{-3}			0.16	

La densidad de flujo en todas partes es:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{1.5 \times 10^{-5}\text{ Wb}}{0.15 \times 10^{-3}\text{ m}^2} = 10 \times 10^{-2}\text{ T} = 0.10\text{ T}$$

y

$$H\text{ (de la figura 11.24)} \cong \frac{1}{5}(100\text{ At/m}) = 20\text{ At/m}$$

Al aplicar la ley de circuitos de Ampère,

$$N_1I_1 - N_2I_2 = H_{abcda}l_{abcda}$$
$$(60\text{ t})(2\text{ A}) - (30\text{ t})(I_2) = (20\text{ At/m})(0.16\text{ m})$$
$$120\text{ At} - (30\text{ t})I_2 = 3.2\text{ At}$$

y $$(30\text{ t})I_2 = 120\text{ At} - 3.2\text{ At}$$

o bien: $$I_2 = \frac{116.8\text{ At}}{30\text{ t}} = \mathbf{3.89\text{ A}}$$

Para el análisis de la mayoría de los sistemas transformadores, se emplea la ecuación $N_1I_1 = N_2I_2$. Esto resultaría en 4 A contra 3.89 A en el ejemplo anterior. Sin embargo, esta diferencia normalmente se ignora y la ecuación $N_1I_1 = N_2I_2$ se considera exacta.

Debido a la no linealidad de la curva *B-H*, *no es posible aplicar la superposición a circuitos magnéticos*; esto es, en el ejemplo 11.5, no se pueden considerar los efectos de cada fuente independientemente y luego encontrar los efectos totales usando superposición.

11.12 BRECHAS DE AIRE

Antes de continuar con los ejemplos ilustrativos, se considerarán los efectos que tiene una brecha de aire sobre un circuito magnético. Observe la presencia de brechas de aire en los circuitos magnéticos del motor y el medidor de la figura 11.11. La dispersión de las líneas de flujo fuera del área común del núcleo para la brecha de aire en la figura 11.35(a) se conoce como *efecto de borde*. Para los propósitos de este análisis, se ignora este efecto y se supone la distribución de flujo mostrada en la figura 11.35(b).

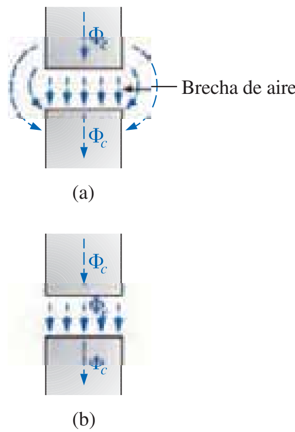
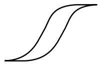


FIGURA 11.35
Brechas de aire: (a) con aparición de márgenes; (b) ideal.



La densidad de flujo de la brecha de aire en la figura 11.35(b) está dada por:

$$B_g = \frac{\Phi_g}{A_g} \qquad \textbf{(11.13)}$$

donde, para los fines de este análisis,

$$\Phi_g = \Phi_{\text{núcleo}}$$

y

$$A_g = A_{\text{núcleo}}$$

En la mayor parte de las aplicaciones prácticas, la permeabilidad del aire se toma igual a la del espacio libre. La fuerza magnetizante de la brecha de aire se determina entonces por:

$$H_g = \frac{B_g}{\mu_o} \qquad \textbf{(11.14)}$$

y la caída de la fmm a través de la brecha de aire es igual a $H_g l_g$. Una ecuación para H_g es la siguiente:

$$H_g = \frac{B_g}{\mu_o} = \frac{B_g}{4\pi \times 10^{-7}}$$

y

$$H_g = (7.96 \times 10^5)B_g \qquad \text{(At/m)} \qquad \textbf{(11.15)}$$

EJEMPLO 11.6 Encuentre el valor de I necesario para establecer un flujo magnético de $\Phi = 0.75 \times 10^{-4}$ Wb en el circuito magnético en serie de la figura 11.36.

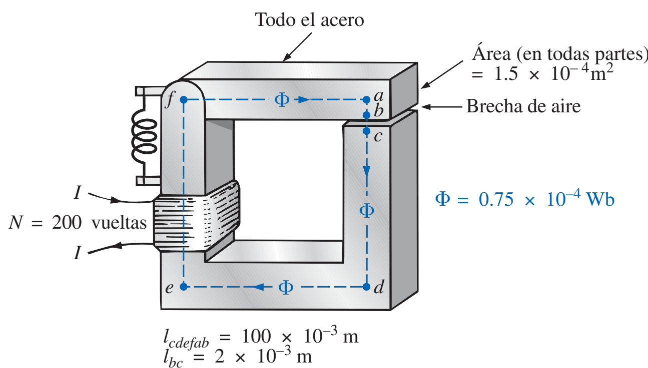


FIGURA 11.36
Relevador para el ejemplo 11.6.

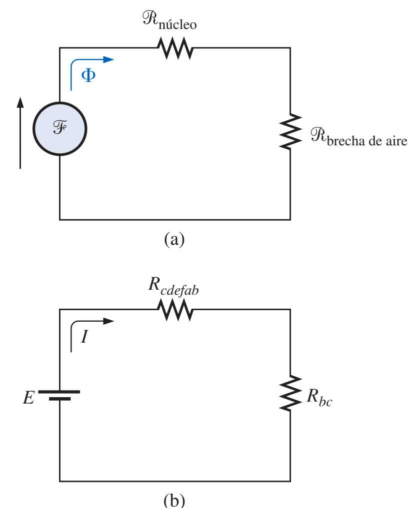
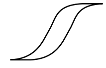


FIGURA 11.37
(a) Circuito magnético equivalente y (b) analogía de circuito eléctrico para el relevador de la figura 11.36.

Solución: Un circuito magnético equivalente y su analogía de circuito eléctrico se muestran en la figura 11.37.

La densidad de flujo para cada sección es:

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.75 \times 10^{-4}\,\text{Wb}}{1.5 \times 10^{-4}\,\text{m}^2} = 0.5\,\text{T}$$



A partir de las curvas *B-H* de la figura 11.24,

$$H\text{ (acero)} \cong 280\text{ At/m}$$

Aplicando la ecuación (11.15),

$$H_g = (7.96 \times 10^5)B_g = (7.96 \times 10^5)(0.5\text{ T}) = 3.98 \times 10^5\text{ At/m}$$

Las caídas de la fmm son:

$$H_{\text{núcleo}}l_{\text{núcleo}} = (280\text{ At/m})(100 \times 10^{-3}\text{ m}) = 28\text{ At}$$
$$H_g l_g = (3.98 \times 10^5\text{ At/m})(2 \times 10^{-3}\text{ m}) = 796\text{ At}$$

Aplicando la ley de circuitos de Ampère,

$$NI = H_{\text{núcleo}}l_{\text{núcleo}} + H_g l_g$$
$$= 28\text{ At} + 796\text{ At}$$
$$(200\text{ t})I = 824\text{ At}$$
$$I = \mathbf{4.12\text{ A}}$$

Observe de lo anterior que la brecha de aire requiere la mayor porción (por mucho) del *NI* aplicado debido a que el aire no es magnético.

11.13 CIRCUITOS MAGNÉTICOS EN SERIE-PARALELO

Como podría esperarse, las estrechas analogías entre los circuitos eléctricos y magnéticos conducen eventualmente a circuitos magnéticos en serie-paralelo similares en muchos aspectos a los encontrados en el capítulo 7. De hecho, la analogía del circuito eléctrico será de ayuda al definir el procedimiento a seguir hacia una solución.

EJEMPLO 11.7 Determine la corriente *I* necesaria para establecer un flujo de 1.5×10^{-4} Wb en la sección del núcleo indicada en la figura 11.38.

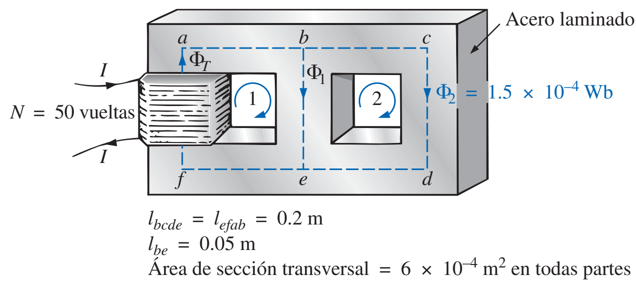
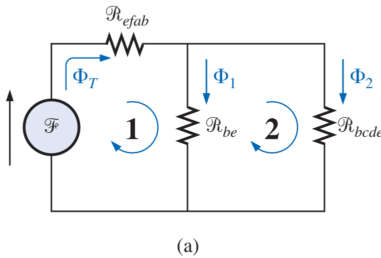


FIGURA 11.38
Ejemplo 11.7.



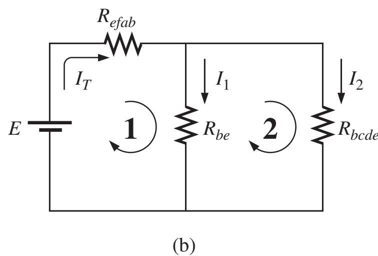


FIGURA 11.39
(a) Circuito magnético equivalente y (b) analogía de circuito eléctrico para el sistema en serie-paralelo de la figura 11.38.

Solución: El circuito magnético equivalente y la analogía del circuito eléctrico se muestran en la figura 11.39. Se tiene:

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{A} = \frac{1.5 \times 10^{-4}\text{ Wb}}{6 \times 10^{-4}\text{ m}^2} = 0.25\text{ T}$$

De la figura 11.24,

$$H_{bcde} \cong 40\text{ At/m}$$

Aplicando la ley de circuitos de Ampère alrededor del lazo 2 en las figuras 11.38 y 11.39,



$$\Sigma_{\circlearrowright}\ \mathscr{F} = 0$$
$$H_{be}l_{be} - H_{bcde}l_{bcde} = 0$$
$$H_{be}(0.05\text{ m}) - (40\text{ At/m})(0.2\text{ m}) = 0$$
$$H_{be} = \frac{8\text{ At}}{0.05\text{ m}} = 160\text{ At/m}$$

De la figura 11.24,

$$B_1 \cong 0.97\text{ T}$$

y

$$\Phi_1 = B_1A = (0.97\text{ T})(6 \times 10^{-4}\text{ m}^2) = 5.82 \times 10^{-4}\text{ Wb}$$

Los resultados se registran en la tabla 11.6.

TABLA 11.6

Sección	**Φ (Wb)**	***A* (m²)**	***B* (T)**	***H* (At/m)**	***l* (m)**	***Hl* (At)**
bcde	1.5×10^{-4}	6×10^{-4}	0.25	40	0.2	8
be	5.82×10^{-4}	6×10^{-4}	0.97	160	0.05	8
efab		6×10^{-4}			0.2	

La tabla revela que ahora se debe dirigir la atención a la sección *efab*:

$$\Phi_T = \Phi_1 + \Phi_2 = 5.82 \times 10^{-4}\text{ Wb} + 1.5 \times 10^{-4}\text{ Wb}$$
$$= 7.32 \times 10^{-4}\text{ Wb}$$
$$B = \frac{\Phi_T}{A} = \frac{7.32 \times 10^{-4}\text{ Wb}}{6 \times 10^{-4}\text{ m}^2}$$
$$= 1.22\text{ T}$$

De la figura 11.23,

$$H_{efab} \cong 400\text{ At}$$

Aplicando la ley de circuitos de Ampère,

$$+NI - H_{efab}l_{efab} - H_{be}l_{be} = 0$$
$$NI = (400\text{ At/m})(0.2\text{ m}) + (160\text{ At/m})(0.05\text{ m})$$
$$(50\text{ t})I = 80\text{ At} + 8\text{ At}$$
$$I = \frac{88\text{ At}}{50\text{ t}} = \mathbf{1.76\text{ A}}$$

Para demostrar que μ es sensible a la fuerza magnetizante H, la permeabilidad de cada sección se determina como sigue. Para la sección *bcde*,

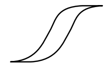
$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0.25\text{ T}}{40\text{ At/m}} = 6.25 \times 10^{-3}$$

y

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} = \frac{6.25 \times 10^{-3}}{12.57 \times 10^{-7}} = \mathbf{4972.2}$$

Para la sección *be*,

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{0.97\text{ T}}{160\text{ At/m}} = 6.06 \times 10^{-3}$$



y $$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} = \frac{6.06 \times 10^{-3}}{12.57 \times 10^{-7}} = \mathbf{4821}$$

Para la sección *efab*,

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1.22\text{ T}}{400\text{ At/m}} = 3.05 \times 10^{-3}$$

y $$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} = \frac{3.05 \times 10^{-3}}{12.57 \times 10^{-7}} = \mathbf{2426.41}$$

11.14 DETERMINACIÓN DE Φ

Los ejemplos de esta sección son para resolver problemas del segundo tipo, donde se conoce *NI* y debe encontrarse el flujo Φ. Éste es un problema relativamente directo cuando sólo una sección magnética está implicada. Entonces,

$$H = \frac{NI}{l} \qquad H \rightarrow B \qquad (B\text{-}H \text{ curva})$$

y $$\Phi = BA$$

Para circuitos magnéticos con más de una sección, no hay un orden fijo de pasos que conduzcan a una solución exacta para todo problema en el primer intento. Sin embargo, en general, se procede como sigue. Tiene que encontrarse la fmm aplicada para una *estimación calculada* del flujo Φ y luego compararla con el valor especificado de la fmm. Entonces es posible hacer ajustes a la estimación para llevarla a su valor real. En la mayoría de las aplicaciones, un valor con aproximación de ±5% de la Φ real o *NI* especificada es aceptable.

Puede hacerse una estimación razonable del valor de Φ cuando se toma en cuenta que la caída máxima de la fmm aparece a través del material con la permeabilidad más pequeña si la longitud y el área de cada material son iguales. Como se ve en el ejemplo 11.6, si hay una brecha de aire en el circuito magnético, se tendrá una caída considerable de fmm a través de la brecha de aire. Por tanto, como punto inicial en problemas de este tipo, se supondrá que la fmm total (*NI*) está a través de la sección con la μ más baja o $\mathcal{R}$ (máxima si las otras dimensiones físicas son relativamente similares). Esta suposición da un valor de Φ que producirá una *NI* calculada mayor que el valor especificado. Entonces, después de considerar muy cuidadosamente los resultados de la hipótesis original, se *cortan* Φ y *NI* introduciendo los efectos (reluctancia) de las otras porciones del circuito magnético y se *ensaya* la nueva solución. Por razones obvias, a menudo este enfoque se llama método de *prueba y error*.

EJEMPLO 11.8 Calcule el flujo magnético Φ para el circuito magnético de la figura 11.40.

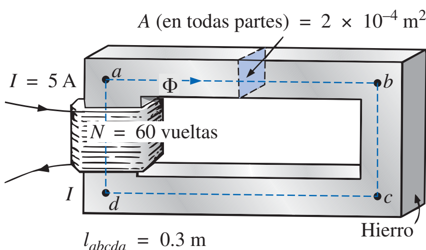


FIGURA 11.40
Ejemplo 11.8.

Solución: Por la ley de circuitos de Ampère,

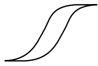
$$NI = H_{abcda} l_{abcda}$$

o bien: $$H_{abcda} = \frac{NI}{l_{abcda}} = \frac{(60\text{ t})(5\text{ A})}{0.3\text{ m}} = \frac{300\text{ At}}{0.3\text{ m}} = 1000\text{ At/m}$$

y $$B_{abcda} \text{ (de la figura 11.23)} \cong 0.39\text{ T}$$

Como $B = \Phi/A$, se tiene:

$$\Phi = BA = (0.39\text{ T})(2 \times 10^{-4}\text{ m}^2) = \mathbf{0.78 \times 10^{-4}\ Wb}$$



EJEMPLO 11.9 Encuentre el flujo magnético Φ para el circuito magnético en serie de la figura 11.41 para la fmm especificada.

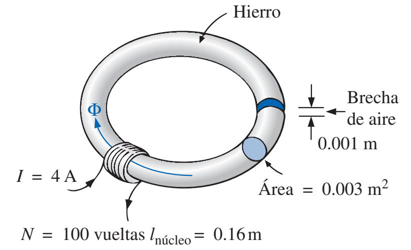


FIGURA 11.41
Ejemplo 11.9.

Solución: Suponiendo que la fmm *NI* aplicada total está a través de la brecha de aire,

$$NI = H_g l_g$$

o bien:
$$H_g = \frac{NI}{l_g} = \frac{400 \text{ At}}{0.001 \text{ m}} = 4 \times 10^5 \text{ At/m}$$

y
$$B_g = \mu_o H_g = (4\pi \times 10^{-7})(4 \times 10^5 \text{ At/m})$$
$$= 0.503 \text{ T}$$

El flujo:

$$\Phi_g = \Phi_{núcleo} = B_g A$$
$$= (0.503 \text{ T})(0.003 \text{ m}^2)$$
$$\Phi_{núcleo} = 1.51 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

Usando este valor de Φ, se puede encontrar *NI*. Los datos se insertan en la tabla 11.7.

TABLA 11.7

Sección	Φ (Wb)	*A* (m²)	*B* (T)	*H* (At/m)	*l* (m)	*Hl* (At)
Núcleo	1.51×10^{-3}	0.003	0.503	1500 (*B-H* curva)	0.16	
Brecha de aire	1.51×10^{-3}	0.003	0.503	4×10^5	0.001	400

$$H_{núcleo} l_{núcleo} = (1500 \text{ At/m})(0.16 \text{ m}) = 240 \text{ At}$$

Aplicando la ley de circuitos de Ampère, resulta:

$$NI = H_{núcleo} l_{núcleo} + H_g l_g$$
$$= 240 \text{ At} + 400 \text{ At}$$
$$= 640 \text{ At} > 400 \text{ At}$$

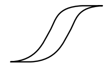
Como se ignora la reluctancia de todas las trayectorias magnéticas excepto la de la brecha de aire, el valor calculado es mayor que el valor especificado. Por tanto, debe reducirse este valor mediante la inclusión del efecto de esas reluctancias. Como aproximadamente (640 At − 400 At)/640 At = 240 At/640 At ≅ 37.5% del valor calculado es superior al valor deseado, se reduce Φ en 30% y se ve qué tan cerca se llega a la fmm aplicada de 400 At:

$$\Phi = (1 - 0.3)(1.51 \times 10^{-3} \text{ Wb})$$
$$= 1.057 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

Vea la tabla 11.8.

TABLA 11.8

Sección	Φ (Wb)	*A* (m²)	*B* (T)	*H* (At/m)	*l* (m)	*Hl* (At)
Núcleo	1.057×10^{-3}	0.003			0.16	
Brecha de aire	1.057×10^{-3}	0.003			0.001	



$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{1.057 \times 10^{-3}\ \text{Wb}}{0.003\ \text{m}^2} \cong 0.352\ \text{T}$$

$$\begin{aligned} H_g l_g &= (7.96 \times 10^5) B_g l_g \\ &= (7.96 \times 10^5)(0.352\ \text{T})(0.001\ \text{m}) \\ &\cong 280.19\ \text{At} \end{aligned}$$

A partir de las curvas *B-H*,

$$H_{\text{núcleo}} \cong 850\ \text{At/m}$$

$$H_{\text{núcleo}} l_{\text{núcleo}} = (850\ \text{At/m})(0.16\ \text{m}) = 136\ \text{At}$$

Aplicando la ley de circuitos de Ampère resulta:

$$\begin{aligned} NI &= H_{\text{núcleo}} l_{\text{núcleo}} + H_g l_g \\ &= 136\ \text{At} + 280.19\ \text{At} \\ &= \mathbf{416.19\ At} > 400\ \text{At} \quad \text{(pero dentro de } \pm 5\% \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{y, por tanto, aceptable)} \end{aligned}$$

La solución es, entonces,

$$\Phi \cong \mathbf{1.057 \times 10^{-3}\ Wb}$$

11.15 APLICACIONES

Sistemas de grabación

La aplicación más común del material magnético es, probablemente, en el creciente número de instrumentos de grabación usados diariamente en casas y oficinas. Por ejemplo, la cinta VHS y la de audio de 8 mm mostradas en la figura 11.42 se usan casi diariamente por toda familia que posea una videocasetera o un reproductor de audio. El proceso básico de grabación no es difícil de entender, y será descrito con todo detalle en la sección de discos duros para computadora.



(a)



(b)

FIGURA 11.42

Cinta magnética: (a) formato VHS y de audio de 8 mm (Cortesía de Maxell Corporation of America); (b) proceso de fabricación (Cortesía de Ampex Corporation).



Bocinas y micrófonos

Los efectos electromagnéticos constituyen la fuerza móvil en el diseño de bocinas como la mostrada en la figura 11.43. El aspecto de la forma de onda pulsante de la corriente de entrada es determinado por el sonido a ser reproducido por la bocina a un alto nivel de audio. Conforme la corriente alcanza los picos y valles del patrón de sonido, la intensidad del electroimán varía exactamente de la misma manera. Esto ocasiona que el cono de la bocina vibre con una frecuencia directamente proporcional a la de la entrada pulsante. Entre mayor es el tono del patrón de sonido, mayor es la frecuencia de la vibración oscilante entre los picos y valles y mayor la frecuencia de la vibración del cono.

Un segundo diseño usado más a menudo en sistemas de bocinas más caros aparece en la figura 11.44. En este caso, el imán permanente está fijo y la entrada se aplica a un núcleo móvil dentro del imán, como se muestra en la figura. Altos picos de la corriente en la entrada producen un fuerte patrón de flujo en la bobina de voz, ocasionando que sea llevada hacia el patrón de flujo del imán permanente. Como ocurrió con la bocina de la figura 11.43, el núcleo vibra entonces a una razón determinada por la entrada y proporciona el sonido audible.

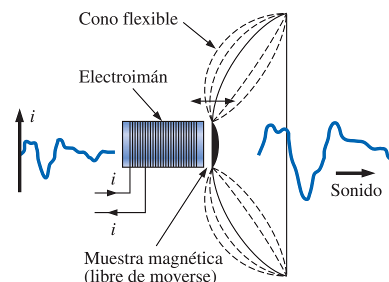


FIGURA 11.43
Bocina.

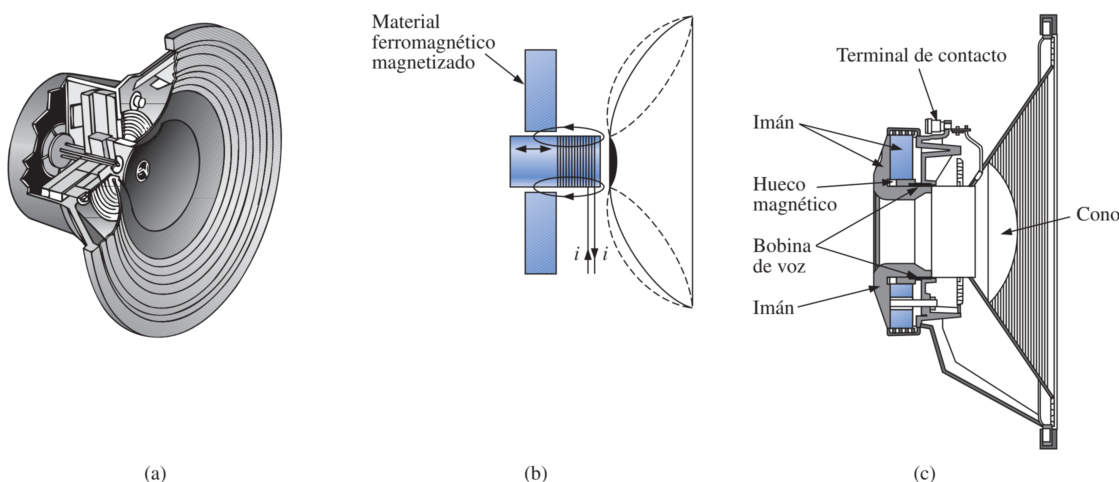


FIGURA 11.44
Bocina coaxial de alta fidelidad: (a) construcción; (b) operación básica; (c) sección transversal de una unidad real. (Cortesía de Electro-Voice, Inc.)

Micrófonos como los de la figura 11.45 emplean también efectos electromagnéticos. El sonido a ser reproducido a un nivel superior de audio ocasiona que el núcleo y la bobina móvil unida se muevan dentro del campo magnético del imán permanente. Según la ley de Faraday ($e = N\, d\phi/dt$), se induce un voltaje en la bobina móvil de manera proporcional a la rapidez con que se está moviendo dentro del campo magnético. El patrón de voltaje inducido resultante se puede amplificar y reproducir a un nivel de audio mucho mayor por medio del uso de bocinas, como se describió antes. Los micrófonos de este tipo se emplean con mucha frecuencia, aunque también se encuentran disponibles otros tipos que usan efectos capacitivos, de carbono granular, y piezoeléctricos*. Este diseño particular se llama comercialmente micrófono *dinámico*.

*La piezoelectricidad es la generación de un voltaje pequeño al ejercer presión a través de ciertos cristales.

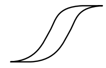




FIGURA 11.45
Micrófono dinámico. (Cortesía de Electro-Voice, Inc.)

Discos duros para computadora

El *disco duro* de una computadora es una unidad sellada que almacena datos sobre un recubrimiento magnético aplicado a la superficie de platos circulares que giran como un disco. Los platos están construidos sobre una base de aluminio o vidrio (ambos no ferromagnéticos) que los hace rígidos —de ahí el nombre *disco duro*—. Como la unidad está sellada, los platos internos y otros componentes son inaccesibles, y un "crash" (término aplicado a la pérdida de datos de un disco o al mal funcionamiento del mismo) usualmente requiere que la unidad entera sea reemplazada. Los discos duros están disponibles actualmente en diámetros que van desde menos de una pulgada hasta 5¼ pulgadas; los más populares para las unidades actuales de escritorio son los de 3½ pulgadas. Las unidades portátiles (lap-top) usan típicamente discos de 2½ pulgadas. A todos los discos duros se les llama *discos Winchester*, término aplicado por primera vez en la década de 1960 a un disco IBM que tenía 30 MB [un byte es una serie de bits binarios (ceros y unos) que representan un número, una letra o un símbolo] de almacenamiento de datos fijo (no accesible) y 30 MB de almacenamiento de datos accesibles. El término *Winchester* fue aplicado porque la capacidad de datos 30-30 recordaba el nombre del popular rifle Winchester 30-30.

El recubrimiento magnético que se aplica sobre los discos es llamado *el medio* y es de la variedad de *óxido* o de *película delgada*. El recubrimiento de óxido se forma al revestir primero el plato con un gel que contiene partículas de óxido de hierro (ferromagnético). El disco es entonces girado a muy alta velocidad para dispersar el material uniformemente sobre la superficie del plato. La superficie resultante se cubre entonces con una capa protectora que se alisa tanto como es posible. El recubrimiento de película delgada es muy delgado, pero durable, con una superficie lisa y consistente en toda el área del disco. En años recientes la tendencia ha sido hacia el recubrimiento de película delgada porque las cabezas de lectura/escritura (descritas a continuación) deben desplazarse más cercanamente a la superficie del plato, requiriendo un espesor de recubrimiento consistente. Técnicas recientes han resultado en recubrimientos magnéticos de película delgada tan delgados como un millonésimo de pulgada.

La información sobre un disco se almacena alrededor del disco en trayectorias circulares llamadas *pistas* o *cilindros*, con cada pista conteniendo determinado número de bits de información por pulgada. El producto del número de bits por pulgada y el número de pistas por pulgada es la densidad por área del disco, que proporciona una excelente cantidad para compararla con la de sistemas anteriores y revela cuánto ha progresado el campo en años recientes. En la década de 1950 los primeros discos tenían una densidad por área de aproximadamente 2 kbits/pulg^2 la cual, comparada con las densidades típicas



actuales de 4 Gbits/pulg^2, constituye un logro increíble; considérense 4,000,000,000,000 de bits de información sobre un área del tamaño de la carátula de un reloj de pulsera. El **electromagnetismo** es el elemento clave al *escribir* información sobre el disco duro y al *leer* la información contenida en éste.

En su forma más simple, la *cabeza de escritura/lectura* de un disco duro (o un disco flexible) es un electroimán en forma de U con una brecha de aire que va montado justo encima de la superficie del disco, como se muestra en la figura 11.46. Cuando el disco gira, la información en forma de un voltaje con polaridades cambiantes se aplica al devanado del electroimán. Para los fines de este texto, se asociará un nivel positivo de voltaje con un nivel 1 (de aritmética binaria) y un nivel negativo de voltaje con un nivel 0. Las combinaciones de esos niveles 0 y 1 se pueden usar para representar letras, números o símbolos. Si están energizados como se muestra en la figura 11.46 con un nivel 1 (voltaje positivo), el patrón de flujo magnético resultante tendrá la dirección mostrada en el núcleo. Cuando el patrón de flujo encuentra la brecha de aire del núcleo, salta al material magnético (ya que el flujo magnético busca la trayectoria de menor reluctancia y el aire tiene una reluctancia alta) y establece un patrón de flujo, como se muestra sobre el disco, hasta que alcanza el otro extremo de la brecha de aire del núcleo, donde retorna al electroimán y completa la trayectoria. Como la cabeza se mueve al siguiente sector de bit, deja atrás el patrón de flujo magnético establecido justamente de izquierda a derecha. El siguiente sector de bit tiene una entrada de nivel 0 (voltaje negativo) que invierte la polaridad del voltaje aplicado y la dirección del flujo magnético en el núcleo de la cabeza. El resultado en el disco es un patrón de flujo opuesto al asociado con un nivel 1. El siguiente bit de información es también un nivel 0, dando lugar al mismo patrón recién generado. Por tanto, entonces, la información se almacena sobre el disco en forma de pequeños imanes cuya polaridad define si están representando un 0 o un 1.

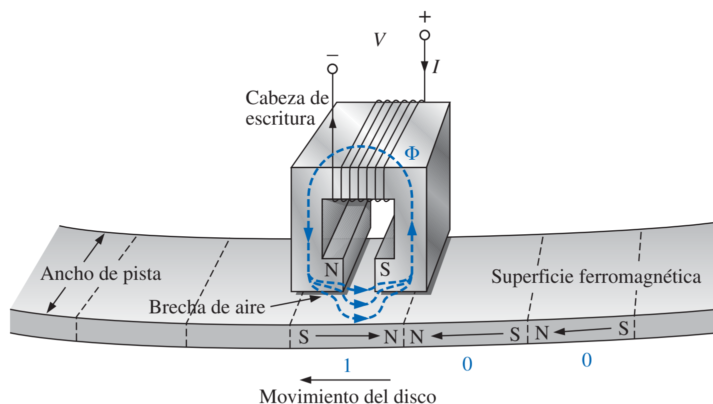
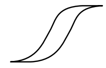


FIGURA 11.46
Almacenamiento en disco duro usando una cabeza electromagnética de escritura en forma de U.

Una vez que los datos han sido almacenados, se debe tener algún método para recuperar la información cuando se desee. Los primeros y escasos discos duros usaban la misma cabeza para efectuar las funciones de escritura y lectura. En la figura 11.47(a), el electroimán en forma de U en modo de lectura simplemente toma el patrón de flujo de la corriente del bit de información. La *ley de Faraday de la inducción electromagnética* establece que se induce un voltaje en una bobina si ésta se expone a un campo magnético cambiante. El cambio en el flujo para el núcleo en la figura 11.47(a) es mínimo al pasar sobre el imán de barra inducido en la superficie del disco. Se establece un patrón de



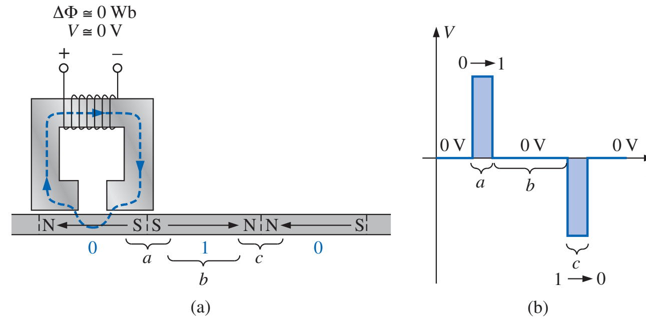


FIGURA 11.47
Lectura de la información de un disco duro usando un electroimán en forma de U.

flujo en el núcleo debido al imán de barra sobre el disco, pero la falta de un cambio significativo en el nivel de flujo resulta en un voltaje inducido en las terminales de salida del sensor de aproximadamente 0 V, como se muestra en la figura 11.47(b) para la forma de onda de la lectura. Un cambio significativo en flujo ocurre cuando la cabeza pasa sobre la región de transición, así marcada en la figura 11.47(a). En la región *a* el patrón de flujo cambia de una dirección a la otra —un cambio significativo en flujo ocurre en el núcleo cuando se invierte la dirección, ocasionando un voltaje medible generado en las terminales de la bobina de captación de acuerdo con la ley de Faraday e indicado en la figura 11.47(b)—. En la región *b* no hay cambio significativo en el patrón de flujo de un área de bit a la siguiente, y no se genera un voltaje, como se ve también en la figura 11.47(b). Sin embargo, cuando se alcanza la región *c*, el cambio de flujo es significativo pero opuesto al que ocurre en la región *a*, resultando en otro pulso pero de polaridad opuesta. Por tanto, los bits de salida de información se encuentran en forma de pulsos que tienen un aspecto totalmente distinto del de las señales de lectura pero son, por cierto, representativos de la información que está almacenada. Además, observe que la salida se genera en las regiones de transición y no en la región de flujo constante del bit almacenado.

En los primeros años del desarrollo de la tecnología de cómputo, el uso de la misma cabeza para las funciones de lectura y escritura era aceptable; pero conforme las pistas se hicieron más estrechas y el tiempo de búsqueda (el tiempo promedio requerido para ir de una pista a otra cierta distancia al azar) tuvo que reducirse, resultó cada vez más difícil construir la bobina o configuración del núcleo de manera que fuese lo suficientemente delgada y tuviese un peso mínimo. A fines de la década de 1970, IBM introdujo la *cabeza inductiva de película delgada*, que fue fabricada de manera muy similar a como se hace con los pequeños circuitos integrados actualmente. El resultado es una cabeza con longitud característica menor que $\frac{1}{10}$ de pulgada, altura menor que $\frac{1}{50}$ de pulgada, masa mínima y alta durabilidad. El tiempo de búsqueda promedio se ha reducido de unos pocos cientos de milisegundo a 6 u 8 ms para unidades muy rápidas, y a 8 o 10 ms para unidades promedio. Además, los métodos de producción se han mejorado hasta el punto en que la cabeza puede "flotar" sobre la superficie (para minimizar los daños al disco) a una altura de sólo 5 micropulgadas o 0.000005 de pulgada. Usando la velocidad típica de un disco duro de máquinas portátiles de 3600 rpm (tan alta como 7200 rpm para computadoras de escritorio) y un diámetro promedio de 1.75 pulgadas para un disco de 3.5 pulgadas, la velocidad de la cabeza sobre el riel es de aproximadamente 38 mph. Escalando la altura de flotación a $\frac{1}{4}$ de pulgada (multiplicando por un factor de 50,000), la velocidad aumentaría a cerca de 1.9×10^6 mph. En otras palabras, la velocidad de la cabeza sobre la superficie del disco es análoga a la



de una masa desplazándose a ¼ de pulgada sobre una superficie a 1.9 millones de millas por hora, sin que la cabeza toque nunca la superficie del disco —logro técnico que tal vez sea mejorado por un factor de 10 en la próxima década—. A propósito, la velocidad de rotación de los discos flexibles es aproximadamente ⅒ de la de los discos duros, o 360 rpm. Además, la cabeza toca la superficie magnética del disco flexible, limitando la vida de almacenamiento de la unidad. La fuerza magnetizante típica necesaria para establecer la orientación magnética es de 400 mA-vuelta (pico a pico). El resultado es una corriente de escritura de sólo 40 mA para una cabeza inductiva de película delgada de 10 vueltas.

Aunque la cabeza inductiva de película delgada podría utilizarse como una cabeza de lectura, la cabeza *magnetorresistiva* (MR) tiene características mejoradas de lectura. La cabeza MR depende del hecho de que la resistencia de un conductor ferromagnético dulce como el permolloy es sensible a cambios en los campos magnéticos externos. Al girar el disco duro, los cambios en el flujo magnético de las regiones magnetizadas inducidas del disco cambian la resistencia terminal de la cabeza. Una corriente constante que pasa por el sensor muestra un voltaje terminal sensible a la magnitud de la resistencia. El resultado son voltajes de salida con valores pico en exceso de 300 V, los cuales sobrepasan el voltaje de las cabezas de lectura inductivas típicas por un factor de 2 o 3:1.

Investigaciones adicionales revelarán que la mejor cabeza de escritura es la de variedad inductiva de película delgada, y que la cabeza óptima de lectura es la de tipo MR. Cada una tiene criterios particulares de diseño para lograr un desempeño máximo, lo que ha dado lugar a la cada vez más común *cabeza de elemento dual*, donde cada cabeza contiene trayectorias conductivas separadas y brechas de aire con anchos diferentes. La densidad por área de los nuevos discos duros requerirá en esencia del ensamble de cabeza dual para un desempeño óptimo.

Conforme la densidad del disco aumente, el ancho de las pistas o cilindros disminuirá en forma correspondiente. El resultado neto serán cabezas más pequeñas para la función de lectura y escritura, un brazo de soporte para la cabeza que debe ser capaz de moverse entrando y saliendo del disco giratorio en pequeños incrementos, y una sensibilidad incrementada en cuanto a los efectos de temperatura que puedan causar que el disco mismo se contraiga o expanda. Antes, el sistema mecánico con sus engranes y poleas era lo suficientemente sensible como para efectuar el trabajo. Sin embargo, la densidad actual requiere un sistema con menos juego y menor sensibilidad a los factores externos como la temperatura y la vibración. Muchos discos modernos utilizan una bobina de voz y un brazo ferromagnético como se muestra en la figura 11.48.

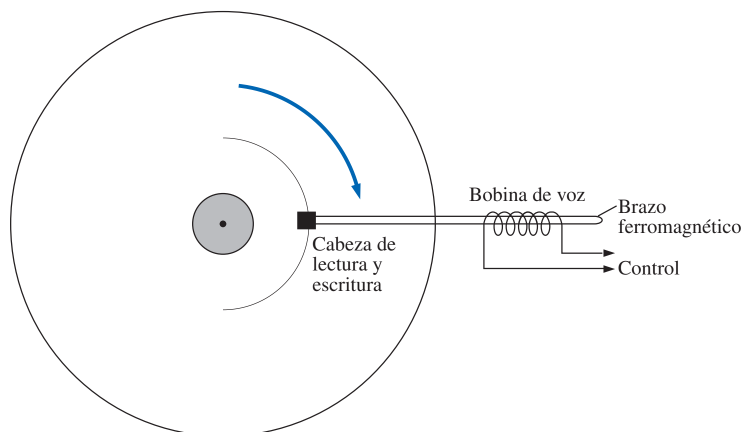
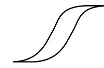


FIGURA 11.48
Disco con bobina de voz y brazo ferromagnético.



La corriente a través de la bobina determinará la intensidad del campo magnético dentro de ésta y ocasionará que el brazo de soporte para la cabeza se mueva hacia dentro y hacia fuera, estableciendo así una fijación burda para la extensión del brazo sobre el disco. Sería posible, ciertamente, relacionar la posición del brazo con el voltaje aplicado a la bobina, pero ello no tendría el nivel de precisión requerido para los discos de alta densidad. Para lograr la precisión deseada, ha sido agregado un rayo láser como parte integral de la cabeza. Franjas circulares colocadas alrededor del disco (llamadas *indicadores de pista*) aseguran que el rayo láser ubique correctamente y mantenga la cabeza en la posición adecuada. Suponiendo que la pista es una superficie lisa y el área circundante tiene una textura burda, un rayo láser se reflejará de vuelta a la cabeza cuando esté sobre la pista, mientras que se dispersará si cae sobre las áreas adyacentes. Este tipo de sistema permite una recalibración continua del brazo al comparar simplemente su posición con la localidad deseada —maniobra llamada "recalibración al vuelo".

Como con todo, para cualquier diseño hay límites. Sin embargo, en este caso, no es porque no puedan hacerse discos más grandes o agregarse más pistas al disco. El límite en el tamaño de los discos duros para computadoras personales (PC) está fijado por el BIOS (Basic Input Output System) que está instalado en todas las PC. Al principio, cuando se desarrolló hace varios años, el programa BIOS fue diseñado alrededor de una posibilidad máxima de almacenamiento de 8.4 gigabytes. En ese entonces, este número pareció lo suficientemente grande como para soportar cualquier desarrollo nuevo en los años siguientes. Sin embargo, discos de 8 gigabytes y mayores se han vuelto muy comunes en computadoras portátiles de, en promedio, 20 gigabytes y computadoras de escritorio con 40 gigabytes también en promedio. El resultado es que tuvieron que desarrollarse métodos matemáticos para evitar el valor máximo diseñado para cada componente del sistema BIOS. Fundamentalmente, los valores máximos para el programa BIOS son los siguientes:

Cilindros (o discos)	1024
Cabezas	128
Sectores	128
Bytes por sector	512

Multiplicando por todos los factores resulta un máximo de 8.59 gigabytes, pero la referencia coloquial es normalmente 8.4 gigabytes.

Los programas más modernos usan una técnica de traslación del BIOS por medio de la cual aplican un juego matemático en el que hacen aparecer el disco al programa BIOS diferente de lo que realmente es. Por ejemplo, el disco puede tener 2048 pistas y 16 cabezas, pero por el enlace matemático con el programa BIOS, parecerá que tiene 1024 pistas y 32 cabezas. En otras palabras, hubo un trueque entre números en la lista oficial máxima. Esto está bien para ciertas combinaciones, pero la combinación total de cifras para el diseño no puede exceder de 8.4 gigabytes. También, debe tomarse conciencia de que esta manipulación matemática es posible sólo si el sistema operativo tiene impresa la traslación BIOS. Implementando nuevos controladores mejorados IDE, el BIOS puede tener acceso a discos mayores que 8.4 gigabytes.

Lo anterior es clara evidencia de la importancia de los efectos magnéticos en la creciente sociedad industrial actual, orientada a las computadoras. Aunque la investigación continúa maximizando la densidad por área, parece cierto que el almacenamiento permanecerá magnético para el proceso de escritura y lectura y no será reemplazado por ninguna de las crecientes alternativas tales como la variedad del láser óptico usado comúnmente en los CD-ROM.

En la figura 11.49 se muestra un disco de 3.5 pulgadas y de altura máxima, fabricado por la Seagate Corporation y que tiene una capacidad formateada de 17.2 gigabytes (GB) con un tiempo promedio de búsqueda de 9 ms.



FIGURA 11.49
Disco duro de 3.5 pulgadas con capacidad de 17.2 GB y tiempo de búsqueda promedio de 9 ms. (Cortesía de Seagate Corporation.)



Sensor de efecto Hall

El sensor de efecto Hall es un dispositivo semiconductor que genera un voltaje de salida cuando está expuesto a un campo magnético. La construcción básica consiste en una placa de material semiconductor a través de la cual se hace pasar una corriente, como se muestra en la figura 11.50(a). Si se aplica un campo magnético de modo perpendicular a la dirección de la corriente, vea la figura 11.50(a), se generará un voltaje V_H entre las dos terminales, como se indica en la figura 11.50(a). La diferencia en potencial se debe a la separación de carga establecida por la fuerza de Lorentz —estudiada primero por Hendrick Lorentz a fines del siglo XIX—. Lorentz encontró que en un campo magnético los electrones están sometidos a una fuerza que es proporcional a su velocidad a través del campo y a la intensidad de éste. La dirección de la fuerza se determina por la regla de la mano izquierda. Simplemente se sitúa el dedo índice de la mano izquierda en la dirección del campo magnético, con el segundo dedo en ángulo recto con respecto al dedo índice en la dirección de la corriente convencional a través del material semiconductor, como se muestra en la figura 11.50(b). El pulgar, si se coloca en ángulo recto con respecto al dedo índice, indicará la dirección de la fuerza sobre los electrones. En la figura 11.50(b), la fuerza ocasiona que los electrones se acumulen en la región del fondo del semiconductor (conectado a la terminal negativa del voltaje V_H), dejando una carga neta positiva en la región superior del material (conectado a la terminal positiva de V_H). Entre mayor es la corriente o la intensidad del campo magnético, mayor será el voltaje inducido V_H.

Por tanto, en esencia, el sensor de efecto Hall puede revelar la intensidad de un campo magnético o el nivel de corriente a través de un dispositivo si el otro factor determinante se mantiene fijo. Dos aplicaciones del sensor son evidentes: medir la intensidad de un campo magnético en la vecindad de un sensor (para una corriente aplicada fija), y medir el nivel de corriente a través de un sensor (con conocimiento de la intensidad del campo magnético unido al sensor). El gausímetro que se muestra en la figura 11.16 emplea un sensor de efecto Hall. En el interior del medidor, se pasa una corriente fija por el sensor y el voltaje V_H indica la intensidad relativa del campo. Por medio de amplificación, calibración y escalamiento apropiados, el medidor puede mostrar la intensidad relativa en gauss.

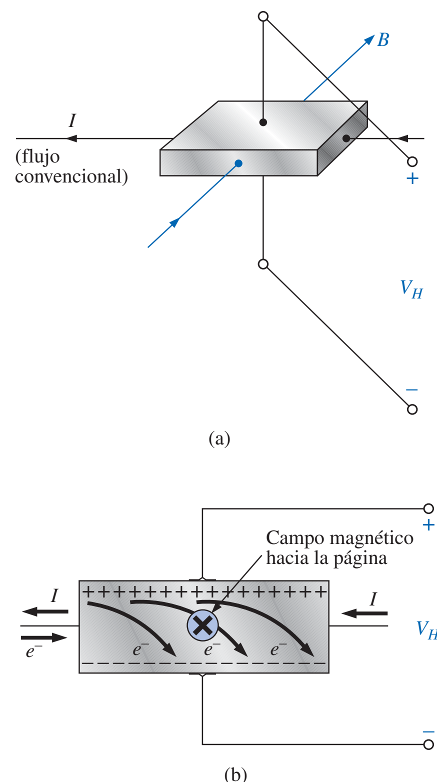
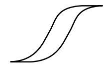


FIGURA 11.50
Sensor de efecto Hall: (a) orientación de los parámetros de control; (b) efecto sobre el flujo de electrones.

El sensor de efecto Hall tiene una amplia gama de aplicaciones que son a menudo muy interesantes e innovadoras. La aplicación más difundida es un disparador para un sistema de alarma instalado en grandes almacenes, donde los robos son un problema frecuente. Una franja magnética unida a la mercancía hace sonar una alarma cuando un cliente pasa por las puertas de salida sin pagar por el producto. El sensor, la corriente de control, y el sistema de monitoreo están instalados en la puerta de salida y reaccionan a la presencia del campo magnético cuando el producto sale del almacén. Si el producto ha sido pagado, el cajero remueve la franja o la desmagnetiza aplicando una fuerza magnetizante que reduce el magnetismo residual en la franja casi a cero.

El sensor de efecto Hall se usa también para indicar la velocidad de una bicicleta en un exhibidor digital convenientemente montado sobre el manubrio. Como se muestra en la figura 11.51(a), el sensor va montado sobre el marco de la bicicleta, y un pequeño imán permanente se instala sobre un rayo de la rueda frontal. El imán deber ser cuidadosamente montado para que pase sobre la región del sensor. Cuando el imán pasa sobre el sensor, resulta el patrón de flujo de la figura 11.51(b), y se presenta un voltaje con un pico agudo en el sensor.



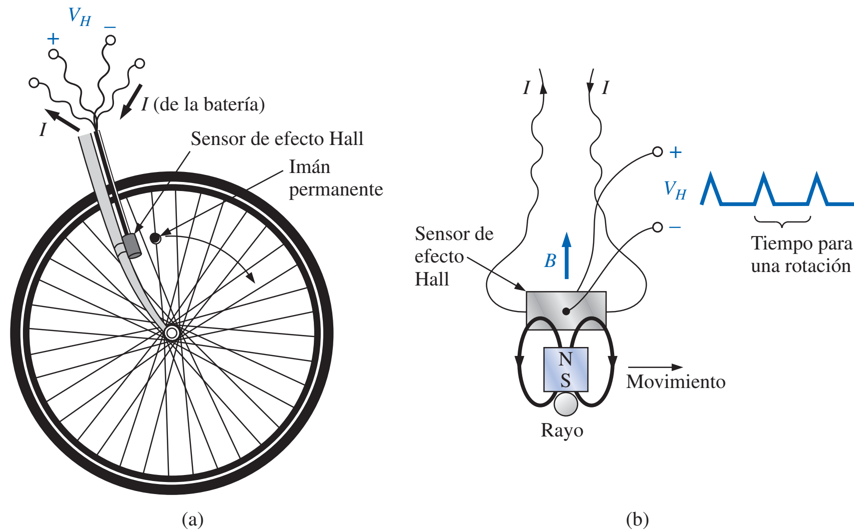


FIGURA 11.51
Obtención de la indicación de velocidad para una bicicleta usando un sensor de efecto Hall: (a) montaje de los componentes; (b) respuesta de efecto Hall.

Suponiendo una bicicleta con una rueda de 26 pulgadas de diámetro, la circunferencia será de aproximadamente 82 pulgadas. En una milla, el número de rotaciones es:

$$5280 \text{ pie}\left(\frac{12 \text{ pulg}}{1 \text{ pie}}\right)\left(\frac{1 \text{ rotaciones}}{82 \text{ pulg}}\right) \cong 773 \text{ rotaciones}$$

Si la bicicleta está desplazándose a 20 mph, un pulso de salida ocurrirá a razón de 4.29 por segundo. Es interesante notar que a una velocidad de 20 mph, la rueda está girando a más de 4 revoluciones por segundo, y que el número total de rotaciones en 20 millas es de 15,460.

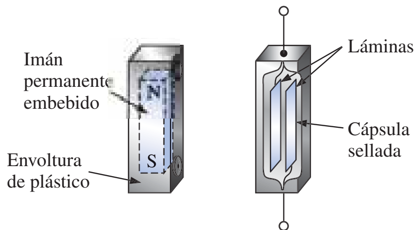


FIGURA 11.52
Interruptor magnético.

Interruptor magnético

Uno de los interruptores más frecuentemente empleados en los sistemas de alarma es el *interruptor magnético* mostrado en la figura 11.52. Como lo muestra la figura, hay dos componentes en el interruptor: un imán permanente embebido en una unidad que está normalmente conectada al elemento móvil (puerta, ventana, etc.), y un interruptor en la otra unidad que está conectada al circuito de control eléctrico. El interruptor está construido con dos lengüetas de aleación de hierro (ferromagnético) en una cápsula sellada herméticamente. Los extremos libres de las dos lengüetas no se tocan pero están muy cerca uno de otro. En ausencia de un campo magnético las lengüetas permanecen separadas. Sin embargo, cuando se introduce un campo magnético, las lengüetas se atraerán entre sí porque las líneas de flujo buscan la trayectoria de menor reluctancia y, de ser posible, ejercitan toda alternativa para establecer la trayectoria de menor reluctancia. Esto es similar a colocar una barra ferromagnética cerca de los extremos de un imán en forma de U. La barra es atraída hacia los polos del imán, estableciendo una trayectoria de flujo magnético sin brechas de aire y con reluctancia mínima. En el estado de circuito abierto la resistencia entre lengüetas es mayor que 100 MΩ, mientras que en el estado cerrado, la resistencia cae a menos de 1 Ω.

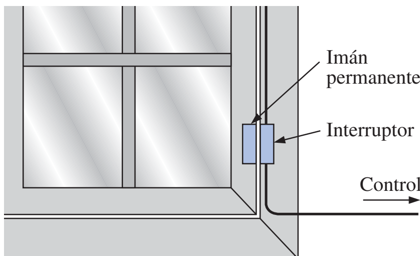
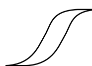


FIGURA 11.53
Uso de un interruptor magnético para observar el estado de una ventana.

En la figura 11.53 se ve que han sido colocados un interruptor, en el marco fijo de una ventana, y un imán, en la unidad móvil de la ventana. Cuando la



ventana está cerrada, como en la figura 11.53, el imán y el interruptor están lo suficientemente cerca como para hacer contacto entre las lengüetas, y existe una corriente a través del interruptor y el panel de control. Con la ventana cerrada el sistema de alarma acepta el flujo de corriente resultante como una respuesta normal segura. Si la ventana se abre, el imán dejará la vecindad del interruptor, y el interruptor se abrirá. La corriente a través del interruptor se interrumpirá y la alarma reaccionará apropiadamente.

Una de las ventajas del interruptor magnético es que la operación correcta de cualquier interruptor se puede verificar con un elemento magnético portátil. Simplemente se acerca el imán al interruptor y se observa la respuesta de salida. No hay necesidad de abrir y cerrar continuamente las ventanas y puertas. Además, el interruptor está encerrado herméticamente de manera que la oxidación y objetos ajenos a él no lo pueden dañar; el resultado es una unidad que puede durar indefinidamente. Los interruptores magnéticos están disponibles también en otras formas y tamaños que les permiten quedar ocultos a la vista. Uno es una variedad circular que puede fijarse en el borde y el marco de una puerta, resultando en sólo dos discos pequeños que son visibles cuando la puerta está abierta.



FIGURA 11.54
Equipo para la formación de imágenes por resonancia magnética. (Cortesía de Siemens Medical Systems, Inc.)

Imagen por resonancia magnética

La imagen por resonancia magnética [MRI, llamada también *resonancia magnética nuclear* (NMR)] recibe cada vez más atención conforme se trata de mejorar la calidad de las imágenes transversales del cuerpo humano, tan útiles en los diagnósticos y tratamientos médicos. La MRI no expone al paciente a los potencialmente peligrosos rayos X o a los materiales de contraste inyectados como los empleados para obtener análisis de tomografías axiales computarizadas (CAT).

Las tres mayores componentes de un sistema MRI son: un enorme imán que puede pesar hasta 100 toneladas, una mesa para transportar al paciente hasta el orificio circular en el imán, y un centro de control, como se muestra en la figura 11.54. La imagen se obtiene colocando al paciente en la cámara circular a una profundidad precisa, dependiendo de la sección transversal por obtenerse, y aplicando un fuerte campo magnético para provocar que los núcleos de ciertos átomos en el cuerpo se alineen. Entonces, al paciente se le aplican ondas de radio de diferentes frecuencias en la región de interés, y si la frecuencia de una onda concuerda con la frecuencia natural del átomo, los núcleos entrarán en estado de resonancia y absorberán energía de la señal aplicada. Cuando se quita la señal, los núcleos liberan, en forma de señales débiles pero que se pueden detectar, la energía adquirida. La intensidad y duración de la energía emitida varía de un tejido del cuerpo a otro. Las débiles señales son entonces amplificadas, digitalizadas y traducidas para proporcionar una imagen de sección transversal como la mostrada en la figura 11.55.



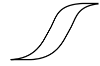
FIGURA 11.55
Imagen por resonancia magnética. (Cortesía de Siemens Medical Systems, Inc.)

Las unidades MRI son muy caras y por ello no están disponibles en todas partes. Sin embargo, en años recientes su número se ha incrementado, y se dispone de una en casi toda comunidad importante. Para algunos pacientes, la claustrofobia que experimentan mientras se encuentran en el tubo circular es difícil de superar. Sin embargo, recientemente ha sido desarrollada una unidad más abierta, como se muestra en la figura 11.56, que ha eliminado esa incomodidad.

Los pacientes que tienen implantes metálicos o marcapasos, o aquellos que han trabajado en ambientes industriales donde pequeñas partículas ferromagnéticas pudieran haberse alojado en áreas abiertas sensibles como ojos, nariz, etc., tienen que usar un sistema CAT de exploración que no emplee efectos magnéticos. El médico responsable está bien entrenado en tales áreas y ayudará a superar todo temor infundado o sugerirá métodos alternativos.



FIGURA 11.56
Equipo para la formación de imágenes por resonancia magnética (tipo abierto). (Cortesía de Siemens Medical Systems, Inc.)



PROBLEMAS

SECCIÓN 11.3 Densidad de flujo

1. Usando el apéndice F, llene los espacios en blanco en la tabla siguiente. Indique las unidades para cada cantidad.

	Φ	B
SI	5×10^{-4} Wb	8×10^{-4} T
CGS	______	______
Inglés	______	______

2. Resuelva el problema 1 para la tabla siguiente si el área = 2 pulg^2:

	Φ	B
SI	______	______
CGS	60,000 maxwells	______
Inglés	______	______

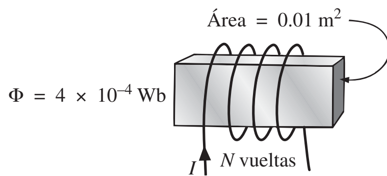


FIGURA 11.57
Problema 3.

3. Para el electroimán de la figura 11.57:
   a. Encuentre la densidad de flujo en el núcleo.
   b. Trace las líneas de flujo magnético e indique sus direcciones.
   c. Indique los polos norte y sur del imán.

SECCIÓN 11.5 Reluctancia

4. ¿Qué sección de la figura 11.58 —(a), (b) o (c)—, tiene la mayor reluctancia para el establecimiento de líneas de flujo a través de su dimensión más larga?

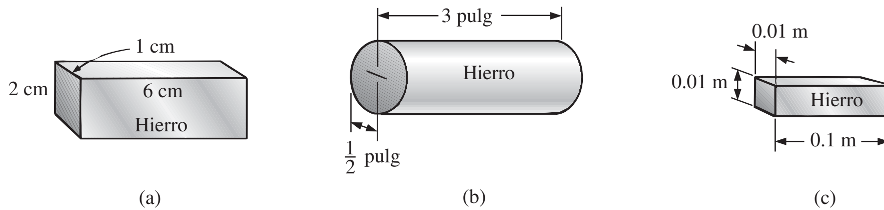


FIGURA 11.58
Problema 4.

SECCIÓN 11.6 Ley de Ohm para circuitos magnéticos

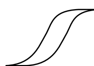
5. Encuentre la reluctancia de un circuito magnético si se establece un flujo magnético $\Phi = 4.2 \times 10^{-4}$ Wb mediante la aplicación de una fmm de 400 At.

6. Resuelva el problema 5 para Φ = 72,000 maxwells y una fmm aplicada de 120 gilberts.

SECCIÓN 11.7 Fuerza magnetizante

7. Encuentre la fuerza magnetizante H para el problema 5 en unidades SI cuando el circuito magnético tiene 6 pulgadas de longitud.

8. Si se aplica una fuerza magnetizante H de 600 At/m a un circuito magnético, se establece una densidad de flujo B de 1200×10^{-4} Wb/m^2. Encuentre la permeabilidad μ de un material que producirá el doble de la densidad de flujo original para la misma fuerza magnetizante.



SECCIÓN 11.8 Histéresis

9. Para el circuito magnético en serie de la figura 11.59, determine la corriente I necesaria para establecer el flujo indicado.

10. Encuentre la corriente necesaria para establecer un flujo de $\Phi = 3 \times 10^{-4}$ Wb en el circuito magnético en serie de la figura 11.60.

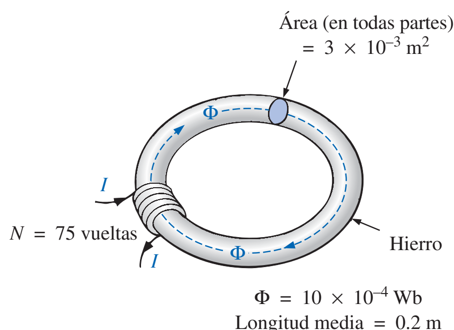


FIGURA 11.59
Problema 9.

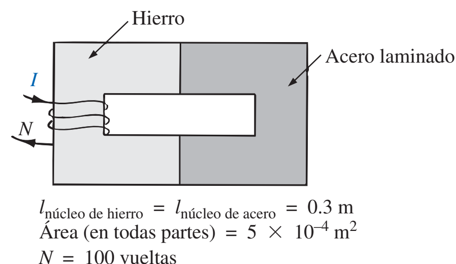


FIGURA 11.60
Problema 10.

11. a. Encuentre el número de vueltas N_1 requeridas para establecer un flujo $\Phi = 12 \times 10^{-4}$ Wb en el circuito magnético de la figura 11.61.
b. Encuentre la permeabilidad μ del material.

12. a. Encuentre la fmm (NI) necesaria para establecer un flujo $\Phi = 80{,}000$ líneas en el circuito magnético de la figura 11.62.
b. Encuentre la permeabilidad de cada material.

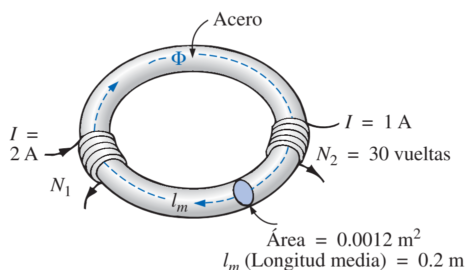


FIGURA 11.61
Problema 11.

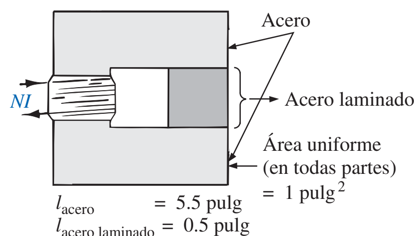


FIGURA 11.62
Problema 12.

***13.** Para el circuito magnético en serie de la figura 11.63 con la aplicación de dos fuentes de "presión" magnética, determine la corriente I. Cada fmm aplicada establece un patrón de flujo en el sentido de las manecillas del reloj.

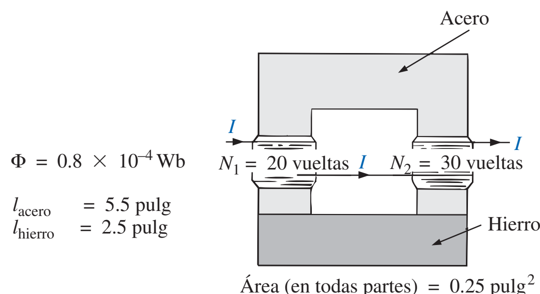
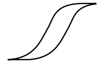


FIGURA 11.63
Problema 13.



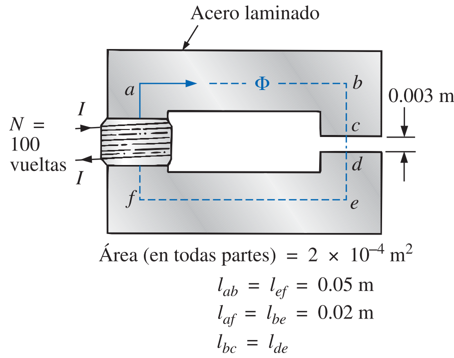


FIGURA 11.64
Problema 14.

SECCIÓN 11.12 Brechas de aire

14. a. Encuentre la corriente I requerida para establecer un flujo $\Phi = 2.4 \times 10^{-4}$ Wb en el circuito magnético de la figura 11.64.

b. Compare la caída de fmm a través de la brecha de aire con la caída a través del resto del circuito magnético. Analice sus resultados usando el valor de μ para cada material.

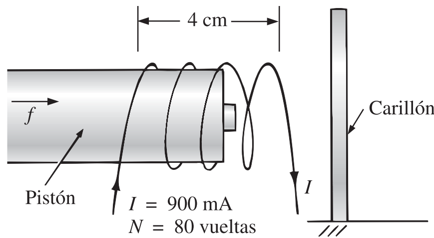


FIGURA 11.65
Timbre doméstico para el problema 15.

***15.** La fuerza que lleva el pistón del timbre doméstico de la figura 11.65 está determinada por:

$$f = \frac{1}{2} NI \frac{d\phi}{dx} \qquad \text{(newton)}$$

donde $d\phi/dx$ es la razón de cambio del flujo de acoplamiento a la bobina cuando el núcleo es atraído a la bobina. La máxima razón de cambio de flujo ocurrirá cuando el núcleo esté ¼ a ¾ de su trayectoria. En esta región, si Φ cambia desde 0.5×10^{-4} Wb a 8×10^{-4} Wb, ¿cuál es la fuerza que lleva el pistón?

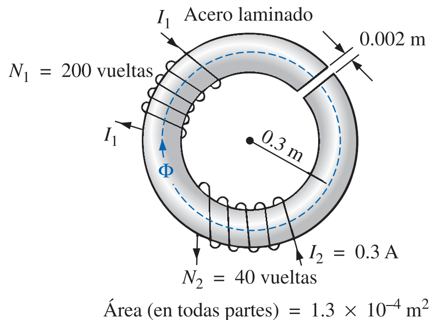


FIGURA 11.66
Problema 16.

16. Determine la corriente I_1 requerida para establecer un flujo de $\Phi = 2 \times 10^{-4}$ Wb en el circuito magnético de la figura 11.66.

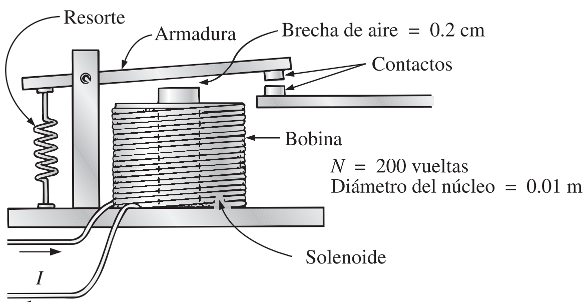


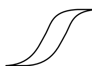
FIGURA 11.67
Relevador para el problema 17.

***17. a.** Un flujo de 0.2×10^{-4} Wb establecerá suficiente fuerza atractiva para que la armadura del relevador de la figura 11.67 cierre los contactos. Determine la corriente requerida para establecer este nivel de flujo si se supone que la caída total de fmm es a través de la brecha de aire.

b. La fuerza ejercida sobre la armadura está determinada por la ecuación:

$$F\,(\text{newton}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_g^2 A}{\mu_o}$$

donde B_g es la densidad de flujo dentro de la brecha de aire y A es el área común de la brecha de aire. Encuentre la fuerza ejercida en newton cuando se establece el flujo Φ especificado en la parte (a).



***18.** Para el circuito magnético en serie-paralelo de la figura 11.68, encuentre el valor de la I necesario para establecer un flujo en la brecha de aire de $\Phi_g = 2 \times 10^{-4}$ Wb.

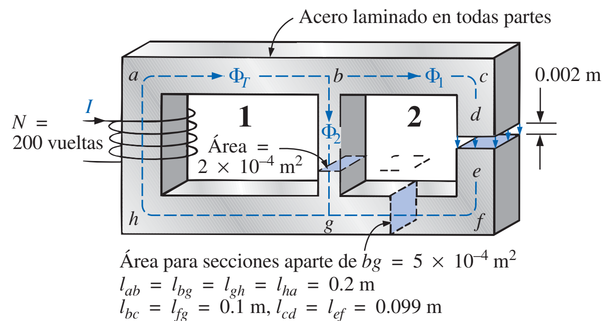


FIGURA 11.68
Problema 18.

SECCIÓN 11.14 Determinación de Φ

19. Encuentre el flujo magnético Φ establecido en el circuito magnético en serie de la figura 11.69.

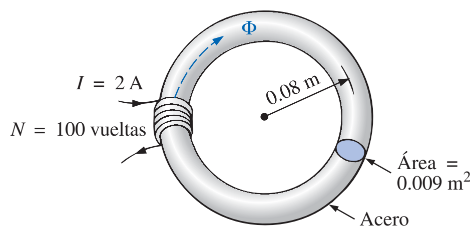


FIGURA 11.69
Problema 19.

***20.** Determine el flujo magnético Φ establecido en el circuito magnético en serie de la figura 11.70.

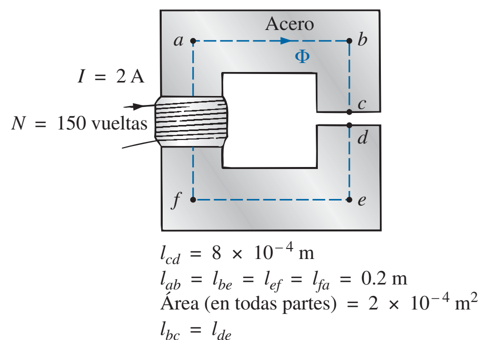


FIGURA 11.70
Problema 20.

***21.** Observe que la curva *B-H* para el acero que aparece en la figura 11.23 concuerda estrechamente con la curva para el voltaje en un capacitor que se carga de cero volts a su valor final.

a. Usando la ecuación para la carga de voltaje como guía, escriba una ecuación para B en función de H [$B = f(H)$] para el acero.

b. Pruebe la ecuación resultante en $H = 900$ At/m, 1800 At/m, y 2700 At/m.

c. Usando la ecuación de la parte (a), obtenga una ecuación para H en términos de B [$H = f(B)$].

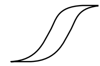
d. Pruebe la ecuación resultante en $B = 1$ T y $B = 1.4$ T.

e. Use el resultado de la parte (c) y efectúe el análisis del ejemplo 11.3, luego compare los resultados para la corriente I.

ANÁLISIS POR COMPUTADORA Lenguaje de Programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

***22.** Usando los resultados del problema 21, escriba un programa para efectuar el análisis de un núcleo como el mostrado en el ejemplo 11.3; esto es, siendo las dimensiones del núcleo y las vueltas aplicadas a las variables de entrada solicitadas por el programa.

***23.** Usando los resultados del problema 21, desarrolle un programa para efectuar el análisis que aparece en el ejemplo 11.9 para el acero. Tendrá que ser desarrollada una rutina de prueba para determinar si los resultados obtenidos son suficientemente cercanos a los ampere-vuelta aplicados.



GLOSARIO

Densidad de flujo (B) Medida del flujo por área unitaria perpendicular a una trayectoria de flujo magnético. Se mide en teslas (T) o webers por metro cuadrado (Wb/m^2).

Dominio Grupo de átomos magnéticamente alineados.

Electromagnetismo Efectos magnéticos introducidos por el flujo de carga o corriente.

Fuerza magnetizante (H) Medida de la fuerza magnetomotriz por unidad de longitud de un circuito magnético.

Fuerza magnetomotriz (fmm) ($\mathscr{F}$) "Presión" requerida para establecer flujo magnético en un material ferromagnético. Se mide en ampere-vueltas (At).

Histéresis Efecto de retraso entre la densidad de flujo de un material y la fuerza magnetizante aplicada.

Imán permanente Material como el acero o el hierro que permanecerá magnetizado por largos periodos sin ayuda de medios externos.

Ley de circuitos de Ampère Ley que establece que la suma algebraica de las elevaciones y caídas de la fmm alrededor de un lazo cerrado de un circuito magnético es igual a cero.

Líneas de flujo magnético Líneas de naturaleza continua que revelan la intensidad y dirección de un campo magnético.

Materiales diamagnéticos Materiales que tienen permeabilidades ligeramente menores que la permeabilidad del espacio libre.

Materiales ferromagnéticos Materiales con permeabilidades cientos y miles de veces mayores que la permeabilidad del espacio libre.

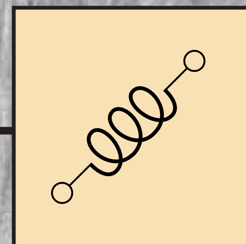
Materiales paramagnéticos Materiales que tienen permeabilidades ligeramente mayores que la permeabilidad del espacio libre.

Permeabilidad (μ) Medida de la facilidad con que puede establecerse flujo magnético en un material. Se mide en Wb/Am.

Permeabilidad relativa (μ_r) Razón de la permeabilidad de un material a la del espacio libre.

Reluctancia ($\mathscr{R}_r$) Cantidad determinada por las características físicas de un material que proporcionará una indicación de la "reluctancia" de ese material al establecimiento de líneas de flujo magnético en el material. Se mide en rels o At/Wb.

12



Inductores

12.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes se han examinado el resistor y el capacitor con todo detalle. En este capítulo se considerará un tercer elemento, el **inductor**, el cual tiene varias características de respuesta similares en muchos aspectos a las del capacitor. De hecho, algunas secciones de este capítulo procederán en paralelo a aquellas que tratan sobre el capacitor para enfatizar la similitud que existe entre los dos elementos.

12.2 LEY DE FARADAY DE LA INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Si un conductor se mueve a través de un campo magnético de manera que corte líneas magnéticas de flujo, se inducirá un voltaje en el conductor, como se muestra en la figura 12.1. Entre mayor es el número de líneas de flujo cortadas por unidad de tiempo (mediante el incremento de la velocidad con que el conductor pasa por el campo), o más intenso es el campo magnético (por la misma

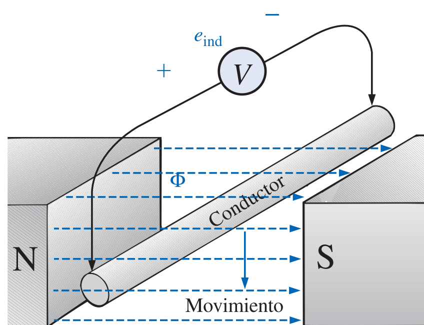
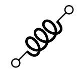


FIGURA 12.1
Generación de un voltaje inducido mediante el movimiento de un conductor a través de un campo magnético.



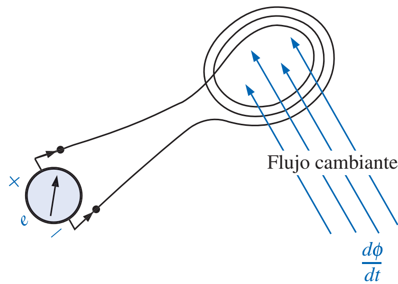


FIGURA 12.2
Demostración de la ley de Faraday.

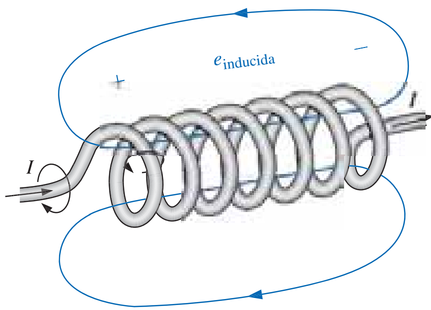


FIGURA 12.3
Demostración del efecto de la ley de Lenz.

Estadounidense
(Albany, NY; Princeton, NJ)
(1797-1878)
Físico y matemático
Profesor de Filosofía Natural, Universidad de Princeton



Cortesía de Smithsonian Institution Fotografía núm. 59,054

A principios del siglo XIX el título de Profesor de Filosofía Natural fue aplicado a los educadores en ciencias. Como estudiante y profesor en la Academia Albany, Henry llevó a cabo amplias investigaciones en el área de electromagnetismo. Mejoró el diseño de los *electroimanes* aislando el alambre de la bobina para permitir una envoltura más estrecha sobre el núcleo. Uno de sus primeros diseños fue capaz de levantar 3600 libras. En 1832 descubrió la *autoinducción* y publicó un ensayo sobre ésta; lo cual fue seguido por la construcción de un eficaz *transmisor y receptor eléctrico de telegrafía*, así como de extensas investigaciones sobre la naturaleza oscilatoria de la luz y sobre descargas a partir de una *jarra de Leyden*. En 1845 fue designado primer Secretario de la Smithsonian Institution.

FIGURA 12.4
Joseph Henry.

velocidad de recorrido), mayor será el voltaje inducido en el conductor. Si el conductor se mantiene fijo y el campo magnético se mueve de manera que sus líneas de flujo corten al conductor, se producirá el mismo efecto.

Si una bobina de N vueltas se coloca en la región de un flujo cambiante, como en la figura 12.2, se inducirá un voltaje en la bobina de acuerdo con la **ley de Faraday**:

$$e = N\frac{d\phi}{dt} \quad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(12.1)}$$

donde N representa el número de vueltas de la bobina y $d\phi/dt$ es el cambio instantáneo en flujo (en webers) que atraviesa la bobina. El término *atraviesa* se refiere al flujo dentro de las vueltas de alambre. El término *cambiante* indica simplemente que la intensidad del campo que atraviesa la bobina cambia en magnitud, o bien que la bobina se mueve a través del campo de manera que el número de líneas de flujo a través de la bobina cambia con el tiempo.

Si el flujo que atraviesa a la bobina deja de cambiar, como cuando la bobina está quieta en un campo magnético de intensidad fija, $d\phi/dt = 0$, y el voltaje inducido $e = N(d\phi/dt) = N(0) = 0$.

12.3 LEY DE LENZ

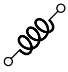
En la sección 11.2 se mostró que el flujo magnético que atraviesa una bobina de N vueltas con una corriente I tiene la distribución de la figura 12.3.

Si la corriente aumenta en magnitud, el flujo que atraviesa la bobina también aumenta. Sin embargo, se mostró en la sección 12.2 que un flujo cambiante que atraviesa una bobina induce un voltaje en la bobina. Por tanto, para esta bobina, se induce un voltaje *en* la bobina debido al cambio de corriente *por* la bobina. La polaridad de este voltaje inducido tiende a establecer una corriente en la bobina que produce un flujo que se opondrá a cualquier cambio en el flujo original. En otras palabras, el efecto inducido (e_{ind}) es un resultado de la corriente creciente por la bobina. Sin embargo, el voltaje inducido resultante tenderá a establecer una corriente que se opondrá el cambio creciente en corriente a través de la bobina. Recuérdese que todo esto ocurre simultáneamente. En el instante en que la corriente empieza a crecer en magnitud, habrá un efecto opuesto que trata de limitar el cambio. Tal efecto "estrangula" el cambio en corriente a través de la bobina. Por consiguiente, a menudo se llama **choke** ("estrangulador") al inductor o a la bobina. De hecho, pronto se verá que la corriente por una bobina no puede cambiar instantáneamente. Es necesario un lapso, determinado por la bobina y la resistencia del circuito, antes que el inductor cese su oposición a un cambio momentáneo en la corriente. Una situación similar para el voltaje en un capacitor se analizó en el capítulo 10. La reacción anterior se cumple para niveles de corriente crecientes o decrecientes a través de la bobina. Este efecto es ejemplo de un principio general conocido como **ley de Lenz**, el cual establece que:

un efecto inducido siempre se opone a la causa que lo produce.

12.4 AUTOINDUCTANCIA

La capacidad de una bobina de oponerse a cualquier cambio en la corriente es una medida de la **autoinductancia** L de la bobina. Por brevedad, el prefijo *auto* generalmente se elimina. La inductancia se mide en henrys (H), en honor del físico estadounidense Joseph Henry (Figura 12.4).



Los **inductores** son bobinas de dimensiones diversas diseñadas para introducir cantidades específicas de inductancia dentro de un circuito. La inductancia de una bobina varía directamente con las propiedades magnéticas de ésta. Por tanto, los materiales ferromagnéticos se emplean con frecuencia para incrementar la inductancia aumentando el flujo de acoplamiento a la bobina.

Una buena aproximación, en términos de dimensiones físicas, para la inductancia de las bobinas de la figura 12.5 se puede hallar usando la siguiente ecuación:

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l} \quad \text{(henrys, H)} \qquad \textbf{(12.2)}$$

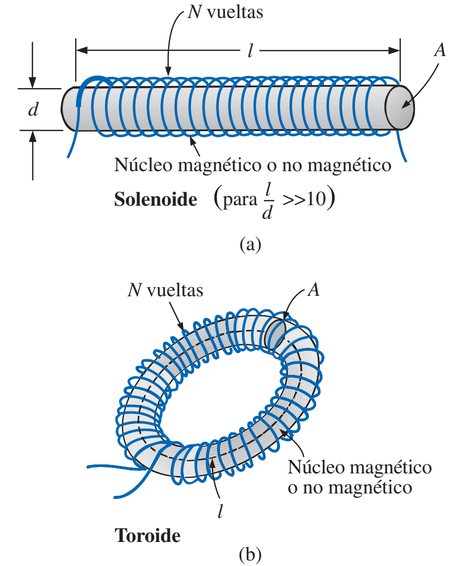


FIGURA 12.5
Configuraciones de inductor para los que es apropiada la ecuación (12.2).

donde N representa el número de vueltas; μ, la permeabilidad del núcleo (como se presentó en la sección 11.4; debe tenerse presente que μ no es una constante sino que depende del nivel de B y H ya que $\mu = B/H$); A, el área del núcleo en metros cuadrados; y l, la longitud media del núcleo en metros.

Sustituyendo $\mu = \mu_r \mu_o$ en la ecuación (12.2) se obtiene:

$$L = \frac{N^2 \mu_r \mu_o A}{l} = \mu_r \frac{N^2 \mu_o A}{l}$$

y

$$L = \mu_r L_o \qquad \textbf{(12.3)}$$

donde L_o es la inductancia de la bobina con un núcleo de aire. En otras palabras, la inductancia de una bobina con un núcleo ferromagnético es la permeabilidad relativa del núcleo multiplicada por la inductancia lograda con un núcleo de aire.

Se pueden encontrar ecuaciones para la inductancia de bobinas diferentes de las mostradas líneas arriba en manuales de referencia. La mayoría de las ecuaciones son más complejas que las descritas.

EJEMPLO 12.1 Encuentre la inductancia de la bobina de núcleo de aire de la figura 12.6.

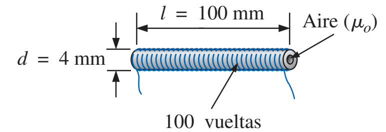


FIGURA 12.6
Ejemplo 12.1.

Solución:

$$\mu = \mu_r \mu_o = (1)(\mu_o) = \mu_o$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{(\pi)(4 \times 10^{-3}\ \text{m})^2}{4} = 12.57 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

$$L_o = \frac{N^2 \mu_o A}{l} = \frac{(100\ \text{t})^2(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A·m})(12.57 \times 10^{-6}\ \text{m}^2)}{0.1\ \text{m}}$$

$$= \mathbf{1.58\ \mu H}$$

EJEMPLO 12.2 Repita el ejemplo 12.1, pero con un núcleo de hierro y condiciones tales que $\mu_r = 2000$.

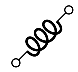
Solución: Por la ecuación (12.3),

$$L = \mu_r L_o = (2000)(1.58 \times 10^{-6}\ \text{H}) = \mathbf{3.16\ mH}$$

12.5 TIPOS DE INDUCTORES

Equivalente práctico

Los inductores, así como los capacitores, no son ideales. Asociadas con todo inductor se tienen una resistencia igual a la resistencia de las vueltas y una



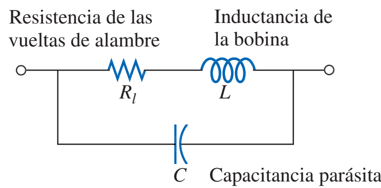


FIGURA 12.7
Modelo completo equivalente para un inductor.

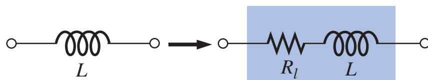


FIGURA 12.8
Modelo práctico equivalente para un inductor.

capacitancia parásita debida a la capacitancia entre las vueltas de la bobina. Para incluir esos efectos, el circuito equivalente para el inductor es como se muestra en la figura 12.7. Sin embargo, para la mayoría de las aplicaciones consideradas en este texto, la capacitancia parásita que aparece en la figura 12.7 puede ser ignorada, resultando el modelo equivalente de la figura 12.8. La resistencia R_l puede jugar un papel importante en el análisis de redes con elementos inductivos. Para la mayoría de las aplicaciones, ha sido posible tratar al capacitor como un elemento ideal manteniendo un alto grado de precisión. Sin embargo, para el inductor, a menudo R_l se debe incluir en el análisis y puede tener un efecto pronunciado en la respuesta de un sistema (vea el Capítulo 20, "Resonancia"). El nivel de R_l puede ir desde unos pocos ohms hasta unos cuantos cientos de ohms. Recuérdese que entre más largo o delgado es el alambre usado en la construcción del inductor, mayor será la resistencia de cd según lo determina $R = \rho l / A$. En este texto el análisis inicial tratará al inductor como un elemento ideal. Una vez que se tenga una percepción general para la respuesta del elemento, se incluirán los efectos de R_l.

Símbolos

La función principal del inductor, sin embargo, es introducir inductancia —no resistencia o capacitancia— en una red. Por esta razón, los símbolos empleados para la inductancia son como se muestran en la figura 12.9.

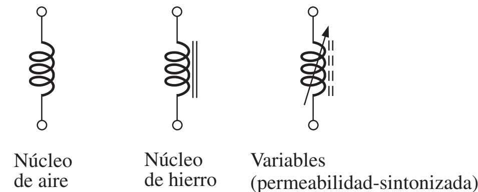


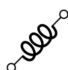
FIGURA 12.9
Símbolos de inductor.

Apariencia

Todos los inductores, como los capacitores, pueden clasificarse bajo dos encabezados generales: *fijos* y *variables*. Los inductores fijos de núcleo de aire y de núcleo de hierro se describieron en la última sección. La bobina variable de permeabilidad sintonizada tiene un eje ferromagnético que puede moverse dentro de la bobina para variar los enlaces de flujo de la bobina y por ello su inductancia. En la figura 12.10 se muestran varios inductores fijos y variables.

Pruebas

Las razones principales para las fallas de los inductores son los cortos que se desarrollan entre los devanados y los circuitos abiertos en los devanados a causa de factores tales como corrientes excesivas, sobrecalentamiento y el paso del tiempo. La condición de circuito abierto puede ser revisada fácilmente con un ohmímetro (indicación de ∞ ohms), pero la condición de corto circuito es más difícil de revisar porque la resistencia de muchos buenos inductores es relativamente pequeña y el corto de unos pocos devanados no afectará adversamente la resistencia total. Por supuesto, si se conoce la resistencia típica de la bobina, será posible compararla contra el valor medido. Un corto entre los



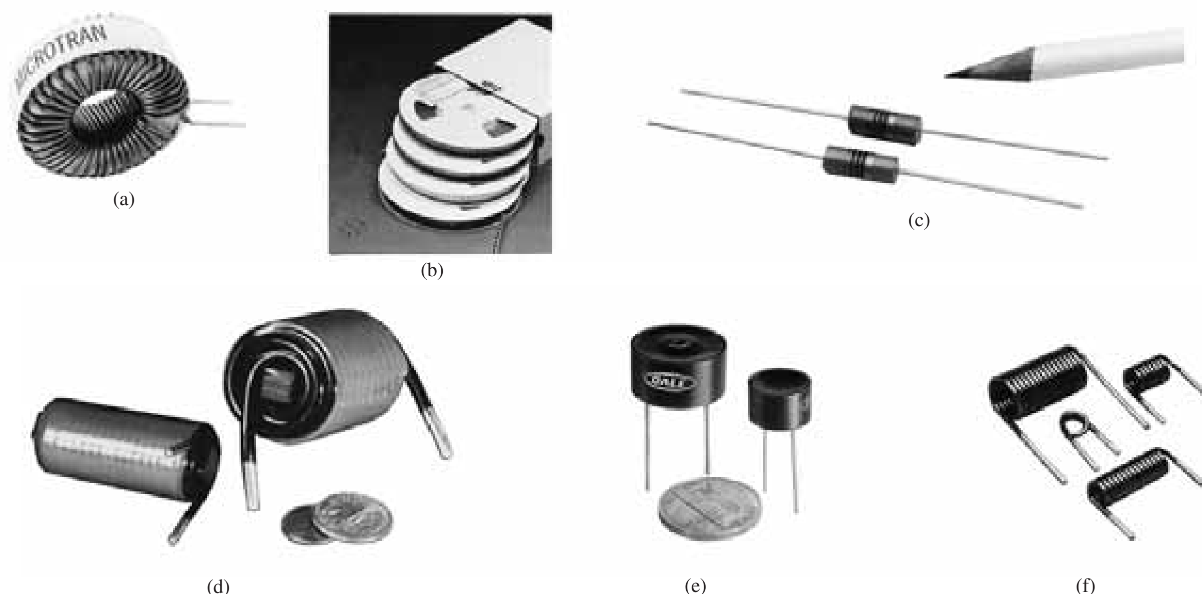


FIGURA 12.10

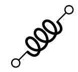
Diversos tipos de inductores: (a) inductor toroidal de potencia (1.4 μH a 5.6 μH) (cortesía de Microtan Co., Inc.); (b) inductores de montura superficial sobre carretes (0.1 μH hasta 1000 μH sobre carretes de 500 piezas en 46 valores) (cortesía de Bell Industries); (c) inductores moldeados (0.1 μH a 10 μH); (d) inductores de filtro de alta corriente (24 μH en 60 A a 500 μH en 15 A); (e) inductores de filtro toroidales (40 μH a 5 H); (f), inductores de núcleo de aire (1 a 32 vueltas) para aplicaciones de alta frecuencia. [Partes (c) a la (f), cortesía de Dale Electronics, Inc.]

devanados y el núcleo se pueden revisar colocando simplemente un conductor del medidor sobre un alambre (terminal) y el otro sobre el núcleo mismo. Una indicación de cero ohms refleja un corto entre los dos porque todo el alambre que forma el devanado tiene una cubierta aislante. El medidor LCR universal de la figura 10.20 se puede usar para revisar el nivel de inductancia.

Valores estándar y factor de reconocimiento

Los valores estándar para inductores emplean los mismos multiplicadores numéricos usados con resistores y capacitores. Igual que el capacitor, los inductores de mayor demanda emplean los mismos multiplicadores numéricos que los resistores más comunes, esto es, aquellos con el intervalo completo de tolerancias (5%, 10% y 20%), tal como aparecen en la tabla 3.8. Sin embargo, los inductores también están disponibles con los multiplicadores asociados con los resistores de 5% y 10% de la tabla 3.9. Por tanto, puede esperarse encontrar inductores con los siguientes multiplicadores: **0.1** μH, **0.12** μH, **0.15** μH, **0.18** μH, **0.22** μH, **0.27** μH, **0.33** μH, **0.39** μH, **0.47** μH, **0.56** μH, **0.68** μH, y **0.82** μH, y luego **1** mH, **1.2** mH, **1.5** mH, **1.8** mH, **2.2** mH, **2.7** mH, y así sucesivamente.

La figura 12.11 fue creada para disponer de un factor de reconocimiento cuando se trata de los diversos tipos y usos de inductores —en otras palabras, para ayudar al lector a desarrollar la habilidad de identificar tipos de inductores, sus intervalos típicos de valores, y algunas de las aplicaciones más comunes. La figura 12.11 no está completa, ciertamente, pero ofrece un primer paso para tener una idea de qué esperar en varias aplicaciones.



Tipo: Bobina de núcleo abierto
Valores típicos: 3 mH a 40 mH
Aplicaciones: Se utiliza en circuitos de filtro pasa bajos. Se encuentra en una red de distribución de frecuencias.

Tipo: Bobina toroidal
Valores típicos: 1 mH a 30 mH
Aplicaciones: Se utiliza como un *choke* en circuitos de líneas de potencia de ca para filtrar transitorios y reducir interferencia EMI. Esta bobina se encuentra en muchos aparatos electrónicos.

Tipo: Bobina Hash Choke
Valores típicos: 3 μH a 1 mH
Aplicaciones: Se utiliza en el suministro de líneas de ca que entregan altas corrientes.

Tipo: Bobina de línea de retardo
Valores típicos: 10 μH a 50 μH
Aplicaciones: Se utiliza en televisiones a color para corregir las diferencias de tiempo entre las señales a color y las señales en blanco y negro.

Tubo de plástico
3"
Aislante de fibra
Bobina
Núcleo interno

Tipo: Bobina Choke de modo común
Valores típicos: 0.6 mH a 50 mH
Aplicaciones: Se utiliza en filtros de línea de ca, interruptores de potencia, cargas de baterías y otro equipo electrónico.

Tipo: Chokes RF
Valores típicos: 10 μH a 50 μH
Aplicaciones: Se utiliza en radio, televisión y circuitos de comunicación. Se encuentra en circuitos de AM, FM y UHF.

Tipo: Bobinas de manchas
Valores típicos: 0.1 μH a 100 μH
Aplicaciones: Se utilizan en una amplia variedad de circuitos como osciladores, filtros, filtros pasa banda y otros.

Tipo: Inductores de montaje de superficie
Valores típicos: 0.01 μH a 100 μH
Aplicaciones: Se encuentran en muchos circuitos electrónicos que requieren componentes miniaturizados sobre PCB multicapas.

Tipo: Bobina ajustable RF
Valores típicos: 1 μH a 100 μH
Aplicaciones: Inductor variable utilizado en osciladores y diversos circuitos de RF tales como transceptores CB, televisores y radios.

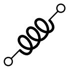
FIGURA 12.11
Áreas típicas de aplicación para elementos inductivos.

12.6 VOLTAJE INDUCIDO

La inductancia de una bobina es también una medida del cambio en el flujo de enlace debido a un cambio en la corriente a través de ella; esto es,

$$L = N\frac{d\phi}{di} \quad \text{(H)} \tag{12.4}$$

donde N es el número de vueltas, ϕ es el flujo en webers, e i es la corriente a través de la bobina. Si un cambio en corriente a través de la bobina no resulta en un cambio significativo en el flujo de enlace por su centro, el nivel de inductancia resultante será relativamente pequeño. Por esta razón, la inductancia de una bobina es sensible al punto de operación sobre la curva de histéresis (descrita con todo detalle en la sección 11.8). Si la bobina está operando sobre la pronunciada pendiente, el cambio en flujo será relativamente alto para un cambio en la corriente a través de la bobina. Si la bobina está operando en saturación o cerca de ésta, el cambio será relativamente pequeño para el mismo cambio en corriente, dando como resultado un nivel reducido de inductancia. Este efecto es particularmente importante cuando se examinan circuitos de ca



ya que un nivel de cd asociado con la señal de ca aplicada puede poner la bobina en o cerca de la saturación, y el nivel de inductancia resultante para la señal de ca aplicada puede ser significativamente menor que el esperado. El lector encontrará que la corriente de cd máxima normalmente está proporcionada en los manuales y hojas de datos para evitar la región de saturación.

La ecuación (12.4) revela también que a mayor inductancia de una bobina (con N fijo), mayor será el cambio instantáneo en el flujo de enlace debido a un cambio instantáneo en corriente a través de la bobina.

Si se escribe la ecuación (12.1) como:

$$e_L = N\frac{d\phi}{dt} = \left(N\frac{d\phi}{di}\right)\left(\frac{di}{dt}\right)$$

y se sustituye la ecuación (12.4), se tiene entonces:

$$e_L = L\frac{di}{dt} \qquad \text{(V)} \qquad \textbf{(12.5)}$$

lo cual revela que la magnitud del voltaje en un inductor está directamente relacionada con la inductancia L y la razón instantánea del cambio de corriente a través de la bobina. Por tanto, es obvio que a mayor *razón* de cambio de corriente, mayor será el voltaje inducido. Esto ciertamente concuerda con la argumentación anterior de la ley de Lenz.

Cuando los efectos inducidos se emplean en la generación de voltajes como los disponibles en generadores de cd o ca, el símbolo e es apropiado para el voltaje inducido. Sin embargo, en análisis de redes, el voltaje en un inductor siempre tendrá una polaridad tal que se opondrá a la fuente que lo produce, y por tanto se usará la siguiente notación en los próximos análisis:

$$v_L = L\frac{di}{dt} \qquad \textbf{(12.6)}$$

Si la corriente por la bobina no cambia en un instante particular, el voltaje inducido en la bobina será cero. Para aplicaciones en cd, $di/dt = 0$, una vez que que ha pasado el efecto transitorio, y el voltaje inducido es:

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L(0) = 0\text{ V}$$

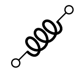
Recuérdese que la ecuación para la corriente de un capacitor es,

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

Observe la similitud entre esta ecuación y la ecuación (12.6). De hecho, si se aplica la dualidad $v \leftrightarrows i$ (esto es, intercambio de los dos) y $L \leftrightarrows C$ para capacitancia e inductancia, cada ecuación puede obtenerse de la otra.

El voltaje promedio en la bobina está definido por la ecuación:

$$v_{L_{\text{promedio}}} = L\frac{\Delta i}{\Delta t} \qquad \text{(V)} \qquad \textbf{(12.7)}$$



donde Δ significa un cambio finito (medible). Compare esto con $i_C = C(\Delta v/\Delta t)$, y el significado de Δ y la aplicación de esta ecuación deben haber quedado claros desde el capítulo 10. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 12.3 Encuentre la forma de onda para el voltaje promedio en la bobina si la corriente por una bobina de 4 mH es como se muestra en la figura 12.12.

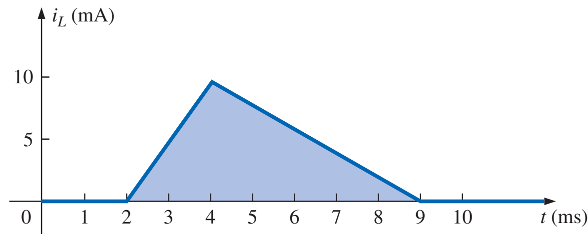


FIGURA 12.12
Ejemplo 12.3.

Soluciones:

a. *0 a 2 ms:* Como no hay cambio en la corriente a través de la bobina, no hay voltaje inducido en ella; esto es,

$$v_L = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = L\frac{0}{\Delta t} = \mathbf{0}$$

b. *2 ms a 4 ms:*

$$v_L = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = (4 \times 10^{-3}\text{ H})\left(\frac{10 \times 10^{-3}\text{ A}}{2 \times 10^{-3}\text{ s}}\right) = 20 \times 10^{-3}\text{ V}$$
$$= \mathbf{20\ mV}$$

c. *4 ms a 9 ms:*

$$v_L = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = (-4 \times 10^{-3}\text{ H})\left(\frac{10 \times 10^{-3}\text{ A}}{5 \times 10^{-3}\text{ s}}\right) = -8 \times 10^{-3}\text{ V}$$
$$= \mathbf{-8\ mV}$$

d. *9 ms a ∞:*

$$v_L = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = L\frac{0}{\Delta t} = \mathbf{0}$$

La forma de onda para el voltaje promedio en la bobina se muestra en la figura 12.13. A partir de la curva observe que:

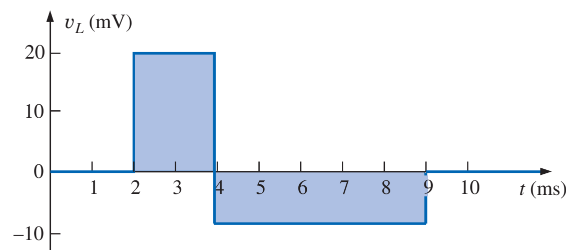
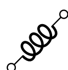


FIGURA 12.13
Voltaje en una bobina de 4 mH debido a la corriente de la figura 12.12.



el voltaje en la bobina no está determinado solamente por la magnitud del cambio en corriente a través de la bobina (Δi), sino también por la razón de cambio de la corriente a través de la bobina ($\Delta i/\Delta t$).

Se escribió un enunciado similar para la corriente de un capacitor debido a un cambio en el voltaje en el mismo.

Un examen cuidadoso de la figura 12.13 revelará también que el área bajo el pulso positivo de 2 ms a 4 ms es igual al área bajo el pulso negativo de 4 ms a 9 ms. En la sección 12.13 se encontrará que el área bajo las curvas representa la energía almacenada o liberada por el inductor. De 2 ms a 4 ms, el inductor está almacenando energía, mientras que de 4 ms a 9 ms, el inductor está liberando la energía almacenada. Para todo el periodo de cero a 10 ms, la energía ha sido almacenada y liberada; no ha habido disipación como en los elementos resistivos. En un ciclo completo, tanto el capacitor como el inductor ideales no consumen energía sino simplemente la almacenan y liberan en sus formas respectivas.

12.7 TRANSITORIOS *R-L*: CICLO DE ALMACENAMIENTO

Los voltajes y las corrientes cambiantes en un circuito de cd que se presentan durante el almacenamiento de energía en forma de un campo magnético en un inductor se pueden describir mejor usando el circuito de la figura 12.14. En el instante en que el interruptor se cierre, la inductancia de la bobina impedirá un cambio instantáneo en la corriente a través de la bobina. La caída de potencial en la bobina, v_L, será igual al voltaje aplicado E determinado por la ley de Kirchhoff ya que $v_R = iR = (0)R = 0$ V. La corriente i_L crecerá entonces desde cero, estableciendo una caída de voltaje en el resistor y una correspondiente caída en v_L. La corriente continuará aumentando hasta que el voltaje en el inductor caiga a cero volts y el voltaje total aplicado aparezca en el resistor. Al principio, la corriente i_L aumenta muy rápido, seguida por una razón de crecimiento que disminuye continuamente hasta que alcanza su valor máximo de E/R.

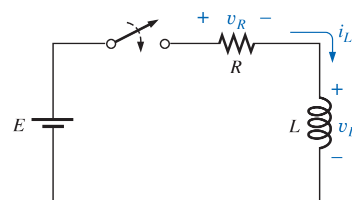


FIGURA 12.14
Red básica R-L transitoria.

Como se recordará del análisis de los capacitores, un capacitor equivale a un corto circuito cuando el interruptor se cierra y a un circuito abierto cuando se establecen las condiciones de estado estable. El inductor se comporta de manera opuesta en cada etapa. En el instante en que el interruptor de la figura 12.14 se cierra, la red equivalente aparecerá como se muestra en la figura 12.15. Observe la correspondencia con los anteriores comentarios relativos a los niveles de voltaje y corriente. El inductor obviamente cumple todos los requisitos para un circuito abierto equivalente: $v_L = E$ volts, e $i_L = 0$ A.

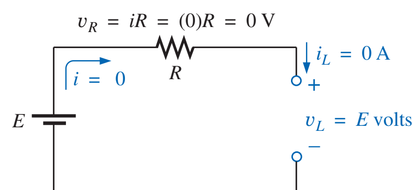


FIGURA 12.15
Circuito de la figura 12.14 al instante en que se cierra el interruptor.

Cuando se alcanzan las condiciones de estado estable y la fase de almacenamiento está completa, la red "equivalente" aparece como se muestra en la figura 12.16. La red revela claramente que:

Un inductor ideal ($R_l = 0\ \Omega$) equivale a un corto circuito en una red de cd una vez que se alcanzan las condiciones de estado estable.

Afortunadamente, las ecuaciones matemáticas para los voltajes y la corriente para la fase de almacenamiento son similares en muchos aspectos a las encontradas para la red *R-C*. La experiencia ganada con esas ecuaciones en el capítulo 10 indudablemente hará el análisis de las redes *R-L* algo más fácil de entender.

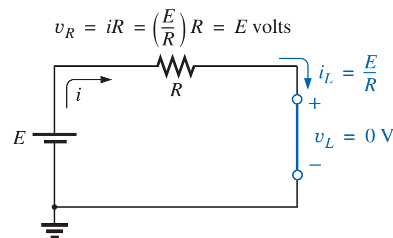
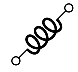


FIGURA 12.16
Circuito de la figura 12.14 bajo condiciones de estado estable.



La ecuación para la corriente i_L durante la fase de almacenamiento es la siguiente:

$$i_L = I_m(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/(L/R)}) \qquad \textbf{(12.8)}$$

Observe el factor $(1 - e^{-t/\tau})$, que también apareció para el voltaje v_C de un capacitor durante la fase de carga. En la figura 12.17 se muestra una gráfica de la ecuación, indicando claramente que el máximo valor de i_L en el estado estable es E/R, y que la razón de cambio de la corriente disminuye con el paso del tiempo. La abscisa está escalada en constantes de tiempo, con τ para circuitos inductivos misma que está definida por:

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad \text{(segundos, s)} \qquad \textbf{(12.9)}$$

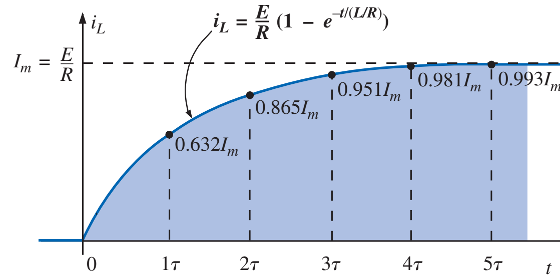


FIGURA 12.17
Trazado de la forma de onda para i_L durante el ciclo de almacenamiento.

El hecho de que τ tenga las unidades de tiempo se puede verificar tomando la ecuación para el voltaje inducido:

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$

y despejando L:

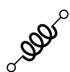
$$L = \frac{v_L}{di/dt}$$

que conduce a la relación:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{\dfrac{v_L}{di/dt}}{R} = \frac{v_L}{\dfrac{di}{dt}R} \longrightarrow \frac{V}{\dfrac{IR}{t}} = \frac{\not{V}}{\dfrac{\not{V}}{t}} = t \qquad \text{(s)}$$

La experiencia adquirida con el factor $(1 - e^{-t/\tau})$ permite verificar el nivel de 63.2% después de una constante de tiempo, 86.5% después de dos constantes de tiempo, etc. Por conveniencia, la figura 10.29 se repite como figura 12.18 para evaluar las funciones $(1 - e^{-t/\tau})$ y $e^{-t/\tau}$ para diversos valores de τ.

Si se mantiene R constante y se incrementa L, la razón L/R y el tiempo de subida aumentan. El cambio en el comportamiento transitorio para la corriente i_L se grafica en la figura 12.19 para diversos valores de L. Observe de nuevo la dualidad entre esas curvas y las obtenidas para la red R-C en la figura 10.32.



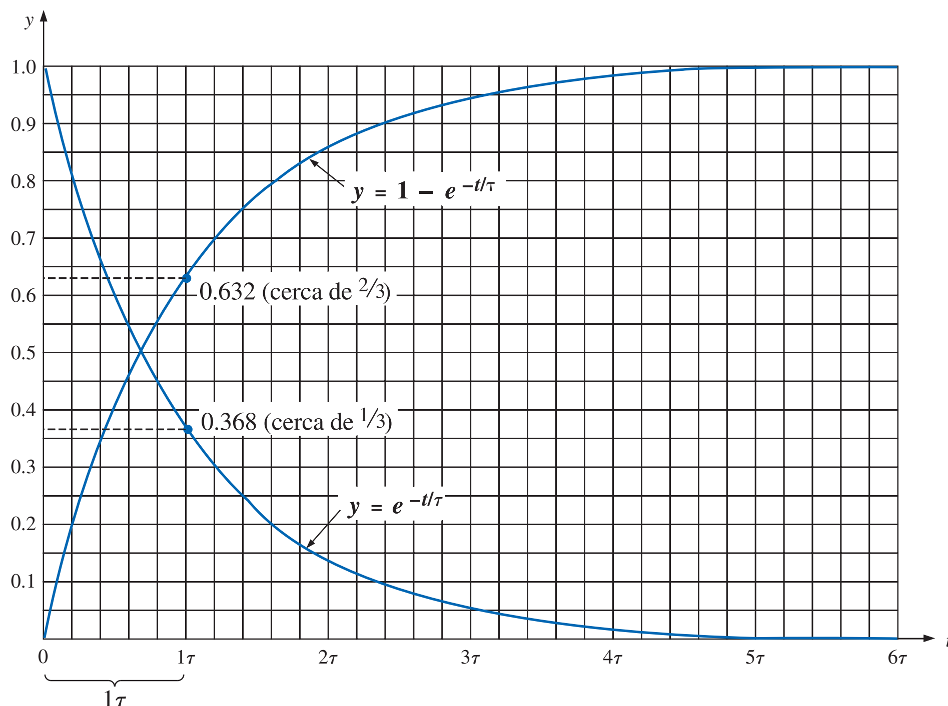


FIGURA 12.18
Trazado de las funciones $y = 1 - e^{-t/\tau}$ e $y = e^{-t/\tau}$.

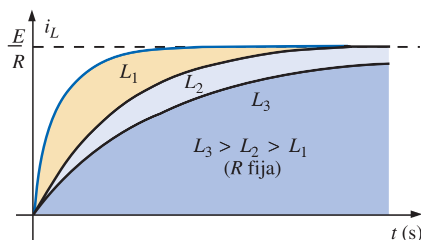


FIGURA 12.19
Efecto de L sobre la forma de onda de la i_L de almacenamiento.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, se supondrá que:

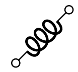
la fase de almacenamiento ya pasó y quedaron establecidas las condiciones de estado estable una vez que ha transcurrido un lapso igual a cinco constantes de tiempo.

Además, como L/R siempre toma algún valor numérico, aunque sea muy pequeño, el lapso 5τ siempre será mayor que cero, confirmando que:

la corriente no puede cambiar instantáneamente en una red inductiva.

De hecho, a mayor inductancia, más se opondrá el circuito a un rápido crecimiento del nivel de corriente.

Las figuras 12.15 y 12.16 revelan claramente que el voltaje en la bobina salta a E volts cuando el interruptor se cierra y cae a cero volts con el tiempo.



El decaimiento ocurre de manera exponencial, y durante la fase de almacenamiento v_L se puede describir matemáticamente por la siguiente ecuación:

$$v_L = Ee^{-t/\tau} \qquad \textbf{(12.10)}$$

Una gráfica de v_L aparece en la figura 12.20 con el eje del tiempo de nuevo dividido en incrementos iguales de τ. Obviamente, el voltaje v_L disminuirá a cero volts a la misma razón que la corriente se dirige hacia su valor máximo.

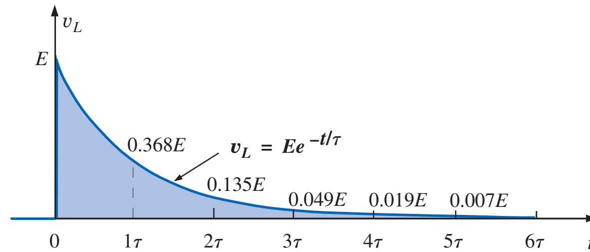


FIGURA 12.20
Trazado del voltaje v_R en función del tiempo para la red de la figura 12.14.

En cinco constantes de tiempo, $i_L = E/R$, $v_L = 0$ V, y el inductor puede ser reemplazado por su corto circuito equivalente.

Como: $\qquad v_R = i_R R = i_L R$

entonces: $\qquad v_R = \left[\frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})\right]R$

y $\qquad v_R = E(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \textbf{(12.11)}$

y la curva para v_R tendrá la misma forma que la obtenida para i_L.

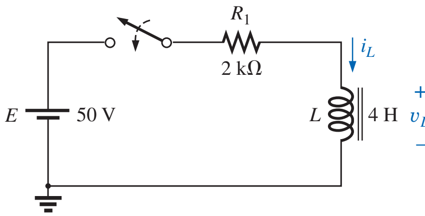


FIGURA 12.21
Ejemplo 12.4.

EJEMPLO 12.4 Encuentre las expresiones matemáticas para el comportamiento transitorio de i_L y v_L para el circuito de la figura 12.21 después de cerrar el interruptor. Trace las curvas resultantes.

Solución:

$$\tau = \frac{L}{R_1} = \frac{4\text{ H}}{2\text{ k}\Omega} = 2\text{ ms}$$

Por la ecuación (12.8),

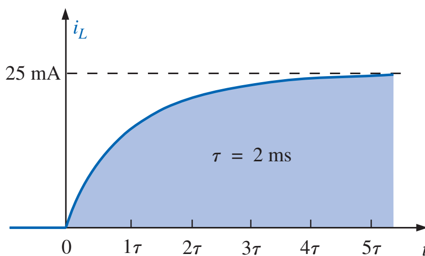
$$I_m = \frac{E}{R_1} = \frac{50}{2\text{ k}\Omega} = 25 \times 10^{-3}\text{ A} = 25\text{ mA}$$

e $\qquad i_L = \mathbf{(25 \times 10^{-3})(1 - e^{-t/(2\times10^{-3})})}$

Por la ecuación (12.10),

$$v_L = \mathbf{50e^{-t/(2\times10^{-3})}}$$

Ambas formas de onda aparecen en la figura 12.22.



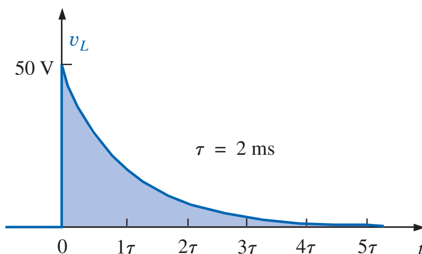
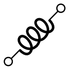


FIGURA 12.22
i_L y v_L para la red de la figura 12.21.



12.8 VALORES INICIALES

Esta sección es paralela a la sección 10.9 (Valores iniciales —Capacitores) con respecto al efecto de los *valores iniciales* en la fase transitoria. Como la corriente a través de una bobina no puede cambiar instantáneamente, ésta comenzará la *fase transitoria* en el *valor inicial* establecido por la red (vea la figura 12.23) antes del cierre del interruptor. Pasará entonces por la fase transitoria hasta que alcance el nivel de *estado estable* (o *final*) después de unas cinco constantes de tiempo. El nivel de estado estable de la corriente en el inductor puede conocerse mediante la simple sustitución del corto circuito equivalente (o R_l para el equivalente práctico) y encontrando la corriente resultante a través del elemento.

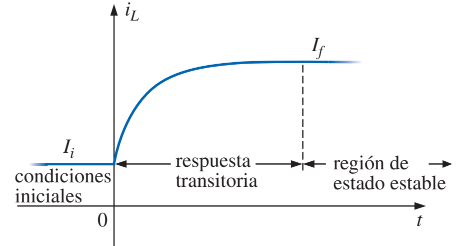


FIGURA 12.23
Definición de las tres fases de una forma de onda transitoria.

Usando la ecuación transitoria desarrollada en la sección previa, se puede escribir una ecuación para la corriente i_L para todo el intervalo de tiempo de la figura 12.23; esto es,

$$i_L = I_i + (I_f - I_i)(1 - e^{-t/\tau})$$

en que $(I_f - I_i)$ representa el cambio total durante la fase de transición. Sin embargo, quitando paréntesis y arreglando términos:

$$\begin{aligned} i_L &= I_i + I_f - I_f e^{-t/\tau} - I_i + I_i e^{-t/\tau} \\ &= I_f - I_f e^{-t/\tau} + I_i e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

se encuentra:

$$\boxed{i_L = I_f + (I_i - I_f)e^{-t/\tau}} \tag{12.12}$$

Si se tiene que trazar la forma de onda para la corriente i_L desde el valor inicial hasta el valor final, debe empezarse trazando una línea en el valor inicial y los niveles de estado estable, agregando luego la respuesta transitoria (sensible a la constante de tiempo) entre los dos niveles. El siguiente ejemplo aclarará el procedimiento.

EJEMPLO 12.5 El inductor de la figura 12.24 tiene un nivel inicial de corriente de 4 mA en la dirección mostrada. (Métodos específicos para establecer la corriente inicial se presentarán en las secciones y problemas subsiguientes.)

a. Encuentre la expresión matemática para la corriente a través de la bobina una vez que se cierra el interruptor.
b. Encuentre la expresión matemática para el voltaje en la bobina durante el mismo periodo transitorio.
c. Trace la forma de onda para cada una, desde el valor inicial hasta el valor final.

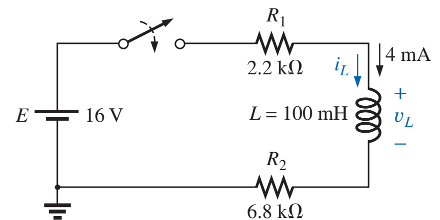


FIGURA 12.24
Ejemplo 12.5.

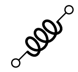
Soluciones:

a. Sustituyendo el corto circuito equivalente para el inductor resultará en una corriente final o de estado estable determinada por la ley de Ohm:

$$I_f = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{16\text{ V}}{2.2\text{ k}\Omega + 6.8\text{ k}\Omega} = \frac{16\text{ V}}{9\text{ k}\Omega} = 1.78\text{ mA}$$

La constante de tiempo está determinada por:

$$\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{100\text{ mH}}{2.2\text{ k}\Omega + 6.8\text{ k}\Omega} = \frac{100\text{ mH}}{9\text{ k}\Omega} = 11.11\ \mu\text{s}$$



Aplicando la ecuación (12.12):

$$\begin{aligned} i_L &= I_f + (I_i - I_f)e^{-t/\tau} \\ &= 1.78 \text{ mA} + (4 \text{ mA} - 1.78 \text{ mA})e^{-t/11.11\ \mu\text{s}} \\ &= \mathbf{1.78\ mA + 2.22\ mA}\boldsymbol{e^{-t/11.11\ \mu s}} \end{aligned}$$

b. Como la corriente a través del inductor es de 4 mA antes del cierre del interruptor, el voltaje (cuyo nivel es sensible sólo a cambios en la corriente a través de la bobina) debe tener un valor inicial de 0 V. Al momento en que el interruptor se cierra, la corriente a través de la bobina no puede cambiar instantáneamente, por lo que la corriente a través de los elementos resistivos será de 4 mA. El voltaje pico resultante en $t = 0$ s puede entonces encontrarse usando la ley de voltaje de Kirchhoff como sigue:

$$\begin{aligned} V_m &= E - V_{R_1} - V_{R_2} \\ &= 16 \text{ V} - (4 \text{ mA})(2.2 \text{ k}\Omega) - (4 \text{ mA})(6.8 \text{ k}\Omega) \\ &= 16 \text{ V} - 8.8 \text{ V} - 27.2 \text{ V} = 16 \text{ V} - 36 \text{ V} \\ &= -20 \text{ V} \end{aligned}$$

Advierta el signo menos que indica que la polaridad del voltaje v_L es opuesta a la polaridad definida de la figura 12.24.

El voltaje decaerá entonces (con la misma constante de tiempo que la corriente i_L) a cero porque el inductor está acercándose a su equivalencia de corto circuito.

La ecuación para v_L es, por tanto:

$$v_L = \mathbf{-20}\boldsymbol{e^{-t/11.11\ \mu s}}$$

c. Vea la figura 12.25. Primero se trazaron los valores inicial y final de la corriente, y luego fue incluida la respuesta transitoria entre esos niveles. Para el voltaje, la forma de onda comienza y termina en cero, con el valor pico teniendo un signo sensible a la polaridad definida de v_L en la figura 12.24.

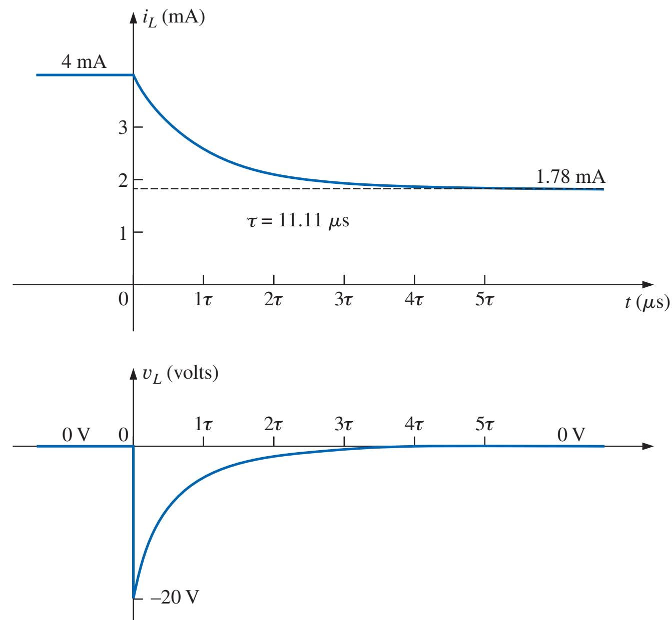
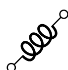


FIGURA 12.25
i_L y v_L para la red de la figura 12.24.



Se probará ahora la validez de la ecuación para i_L sustituyendo $t = 0$ s para reflejar el instante en que se cierra el interruptor.

$$e^{-t/\tau} = e^{-0} = 1$$

e $$i_L = 1.78 \text{ mA} + 2.22 \text{ mA}e^{-t/\tau} = 1.78 \text{ mA} + 2.22 \text{ mA} = 4 \text{ mA}$$

Cuando $t > 5\tau$,

$$e^{-t/\tau} \cong 0$$

e $$i_L = 1.78 \text{ mA} + 2.22 \text{ mA}e^{-t/\tau} = 1.78 \text{ mA}$$

12.9 TRANSITORIOS *R-L*: FASE DE DECAIMIENTO

En el análisis de circuitos *R-C*, se encontró que el capacitor podía mantener su carga y almacenar energía en forma de campo eléctrico por un lapso determinado por los factores de fuga. En los circuitos *R-L*, la energía se almacena en forma de campo magnético establecido por la corriente a través de la bobina. Sin embargo, a diferencia de un capacitor, un inductor aislado no puede continuar almacenando energía ya que la ausencia de una trayectoria cerrada ocasionaría que la corriente cayese a cero, liberando la energía almacenada en la forma de un campo magnético. Si el circuito *R-L* en serie de la figura 12.26 hubiese alcanzado condiciones de estado estable y el interruptor fuese abierto rápidamente, una chispa brincaría probablemente a través de los contactos debido al rápido cambio en la corriente desde un máximo de E/R hasta cero ampere. El cambio en corriente di/dt de la ecuación $v_L = L(di/dt)$ establecería un alto voltaje v_L en la bobina que, en conjunción con el voltaje aplicado E, aparece en los puntos del interruptor. Éste es el mismo mecanismo que se aplica en el sistema de encendido de un auto para encender el combustible en el cilindro. Se generan alrededor de 25,000 V por la rápida disminución en la corriente de la bobina de ignición que ocurre cuando el interruptor en el sistema se abre. (En sistemas antiguos, los "puntos" en el distribuidor servían como interruptor.) Esta reacción inductiva es importante cuando se considera que la única fuente independiente en un auto es una batería de 12 V.

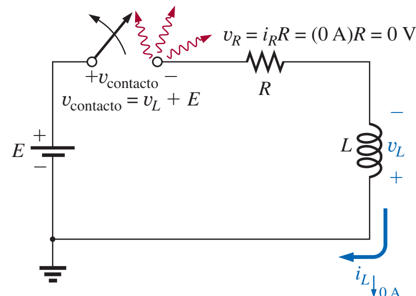


FIGURA 12.26
Demostración del efecto de abrir un interruptor en serie con un inductor con corriente de estado estable.

Si al abrir el interruptor para moverlo a otra posición se causa tal rápida descarga de la energía almacenada, ¿cómo puede la fase de decaimiento de un circuito *R-L* ser analizada de la misma manera que un circuito *R-C*? La solución está en emplear una red como la que aparece en la figura 12.27(a). Cuando el interruptor se cierra, el voltaje en el resistor R_2 es de E volts, y la ramificación *R-L* responderá de la misma manera que la descrita líneas arriba, con las mismas formas de onda y niveles. Una red Thévenin de E en paralelo con R_2 resultaría simplemente en la fuente que se muestra en la figura 12.27(b) ya que

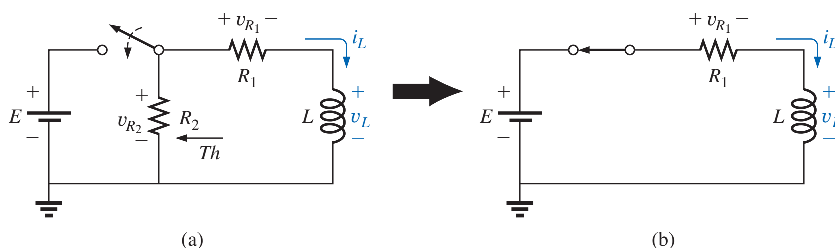
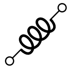


FIGURA 12.27
Inicio de la fase de almacenamiento para el inductor L al cerrar el interruptor.



R_2 entraría en corto por el reemplazo de corto circuito de la fuente de voltaje E cuando se determina la resistencia de Thévenin.

Después de que ha pasado la fase de almacenamiento y se han establecido las condiciones de estado estable, el interruptor puede abrirse sin el efecto de chispa o descarga rápida debido al resistor R_2, el cual proporciona una trayectoria completa para la corriente i_L. De hecho, por claridad, la trayectoria de descarga está aislada en la figura 12.28. El voltaje v_L en el inductor invertirá su polaridad y tiene una magnitud determinada por:

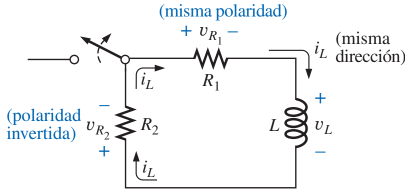


FIGURA 12.28
Red de la figura 12.27 en el instante en que se abre el interruptor.

$$v_L = -(v_{R_1} + v_{R_2}) \tag{12.13}$$

Recuérdese que el voltaje en un inductor puede cambiar instantáneamente pero no la corriente. El resultado es que la corriente i_L debe mantener igual dirección y magnitud, como se muestra en la figura 12.28. Por tanto, en el instante en que el interruptor se abre, i_L es aún $I_m = E/R_1$, y

$$\begin{aligned} v_L &= -(v_{R_1} + v_{R_2}) = -(i_1R_1 + i_2R_2) \\ &= -i_L(R_1 + R_2) = -\frac{E}{R_1}(R_1 + R_2) = -\left(\frac{R_1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1}\right)E \end{aligned}$$

y

$$v_L = -\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)E \tag{12.14}$$

la cual es mayor que E volts por la razón R_2/R_1. En otras palabras, cuando se abre el interruptor, el voltaje en el inductor invertirá la polaridad y caerá instantáneamente desde E hasta $-[1 + (R_2/R_1)]E$ volts.

Conforme un inductor libere su energía almacenada, el voltaje en la bobina decaerá hasta cero de la siguiente manera:

$$v_L = -V_i e^{-t/\tau'} \tag{12.15}$$

con:

$$V_i = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)E$$

y

$$\tau' = \frac{L}{R_T} = \frac{L}{R_1 + R_2}$$

La corriente decaerá desde un máximo de $I_m = E/R_1$ hasta cero. Empleando la ecuación (12.20), $I_i = E/R_1$ e $I_f = 0$ A de manera que:

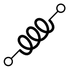
$$\begin{aligned} i_L &= I_f + (I_i - I_f)e^{-t/\tau'} \\ &= 0\text{ A} + \left(\frac{E}{R_1} - 0\text{ A}\right)e^{-t/\tau'} \end{aligned}$$

e

$$i_L = \frac{E}{R_1}e^{-t/\tau'} \tag{12.16}$$

con:

$$\tau' = \frac{L}{R_1 + R_2}$$



La expresión matemática para el voltaje en cualquier resistor puede determinarse entonces mediante la ley de Ohm:

$$\upsilon_{R_1} = i_{R_1}R_1 = i_L R_1$$
$$= \frac{E}{R_1}R_1 e^{-t/\tau'}$$

y
$$\upsilon_{R_1} = Ee^{-t/\tau'} \quad \textbf{(12.17)}$$

El voltaje υ_{R_1} tiene la misma polaridad que durante la fase de almacenamiento ya que la corriente i_L tiene la misma dirección. El voltaje υ_{R2} se expresa como sigue usando la polaridad definida de la figura 12.27:

$$\upsilon_{R_2} = -i_{R_2}R_2 = -i_L R_2$$
$$= -\frac{E}{R_1}R_2 e^{-t/\tau'}$$

y
$$\upsilon_{R_2} = -\frac{R_2}{R_1}Ee^{-t/\tau'} \quad \textbf{(12.18)}$$

EJEMPLO 12.6 Se añade el resistor R_2 a la red de la figura 12.21, como se muestra en la figura 12.29.

a. Encuentre las expresiones matemáticas para i_L, υ_L, υ_{R_1} y υ_{R_2} para cinco constantes de tiempo de la fase de almacenamiento.
b. Encuentre las expresiones matemáticas para i_L, υ_L, υ_{R_1} y υ_{R_2} si el interruptor se abre después de cinco constantes de tiempo de la fase de almacenamiento.
c. Trace las formas de onda para cada voltaje y corriente para las dos fases cubiertas por este ejemplo y el ejemplo 12.4 cuando pasan cinco constantes de tiempo entre fases. Use las polaridades definidas de la figura 12.27.

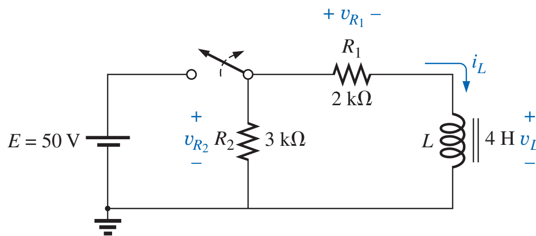


FIGURA 12.29
Polaridades definidas para υ_{R_1}, υ_{R_2}, υ_L y dirección de la corriente i_L para el ejemplo 12.6.

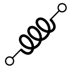
Soluciones:

a. $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{4\text{ H}}{2\text{ k}\Omega} = 2\text{ ms}$

Ecuación (12.10): $\upsilon_L = Ee^{-t/\tau}$

$$\upsilon_L = \mathbf{50e^{-t/2\times10^{-3}}}$$

Ecuación (12.8): $i_L = I_m(1 - e^{-t/\tau})$



$$I_m = \frac{E}{R_1} = \frac{50\text{ V}}{2\text{ k}\Omega} = 25\text{ mA}$$

$$i_L = \mathbf{25 \times 10^{-3}(1 - e^{-t/2\times10^{-3}})}$$

ecuación (12.11): $\quad v_{R_1} = E(1 - e^{-t/\tau})$

$$v_{R_1} = \mathbf{50(1 - e^{-t/2\times10^{-3}})}$$

$$v_{R_2} = \mathbf{50\text{ V}}$$

b. $\tau' = \dfrac{L}{R_1 + R_2} = \dfrac{4\text{ H}}{2\text{ k}\Omega + 3\text{ k}\Omega} = \dfrac{4\text{ H}}{5 \times 10^3\ \Omega} = 0.8 \times 10^{-3}\text{ s}$
$= 0.8\text{ ms}$

Por la ecuación (12.15),

$$V_i = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)E = \left(1 + \frac{3\text{ k}\Omega}{2\text{ k}\Omega}\right)(50\text{ V}) = 125\text{ V}$$

y $\qquad v_L = -V_i e^{-t/\tau'} = \mathbf{-125}\boldsymbol{e}^{\mathbf{-t/(0.8\times10^{-3})}}$

Por la ecuación (12.16),

$$I_i = I_m = \frac{E}{R_1} = \frac{50\text{ V}}{2\text{ k}\Omega} = 25\text{ mA}$$

e $\qquad i_L = \mathbf{(25 \times 10^{-3})}\boldsymbol{e}^{\mathbf{-t/(0.8\times10^{-3})}}$

Por la ecuación (12.17),

$$v_{R_1} = Ee^{-t/\tau'} = \mathbf{50}\boldsymbol{e}^{\mathbf{-t/(0.8\times10^{-3})}}$$

Por la ecuación (12.18),

$$v_{R_2} = -\frac{R_2}{R_1}Ee^{-t/\tau'} = -\frac{3\text{ k}\Omega}{2\text{ k}\Omega}(50\text{ V})e^{-t/\tau'} = \mathbf{-75}\boldsymbol{e}^{\mathbf{-t/(0.8\times10^{-3})}}$$

c. Vea la figura 12.30 (página opuesta).

En el análisis precedente se supuso que las condiciones de estado estable se establecieron durante la fase de carga y que $I_m = E/R_1$, con $v_L = 0$ V. Sin embargo, si el interruptor de la figura 12.28 se abre antes que i_L alcance su valor máximo, la ecuación para la corriente en decaimiento de la figura 12.28 debe cambiar a:

$$i_L = I_i e^{-t/\tau'} \qquad \textbf{(12.19)}$$

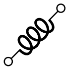
donde I_i es la corriente de arranque o inicial. La ecuación (12.15) se modificaría como sigue:

$$v_L = -V_i e^{-t/\tau'} \qquad \textbf{(12.20)}$$

con: $\qquad V_i = I_i(R_1 + R_2)$

12.10 VALORES INSTANTÁNEOS

El desarrollo presentado en la sección 10.10 para redes capacitivas también puede aplicarse a redes *R-L* para determinar tiempo y corrientes y voltajes instantáneos. Los valores instantáneos de cualquier voltaje o corriente se pueden



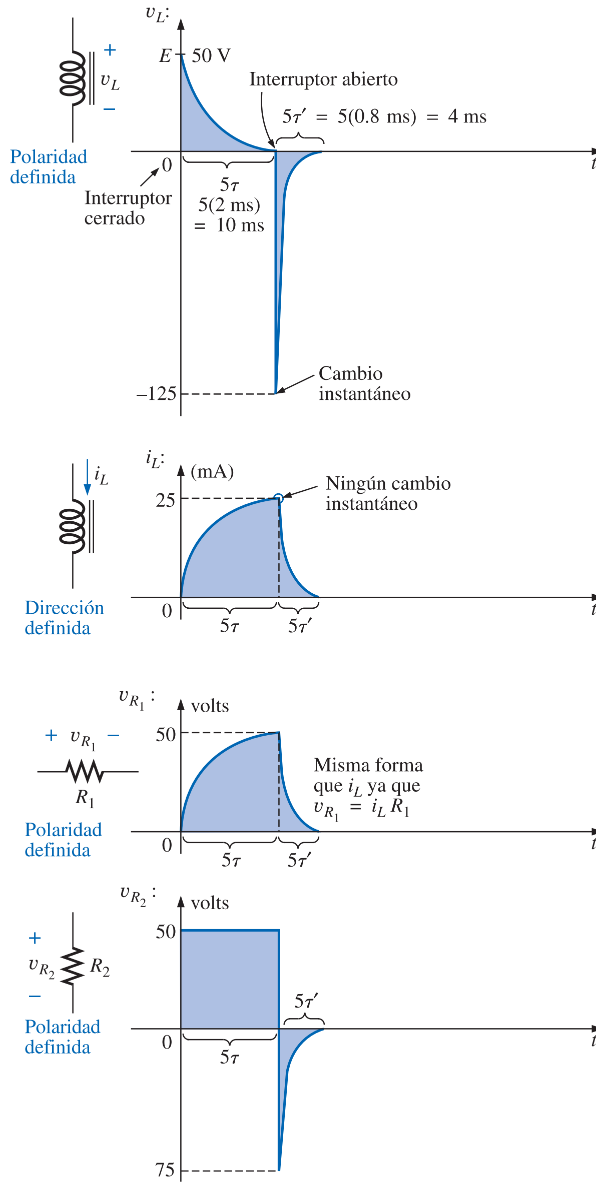
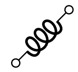


FIGURA 12.30
Los diversos voltajes y la corriente para la red de la figura 12.29.

determinar insertando t en la ecuación y usando una calculadora o tabla para determinar la magnitud del término exponencial.

La similitud entre las ecuaciones $v_C = E(1 - e^{-t/\tau})$ e $i_L = I_m(1 - e^{-t/\tau})$ da lugar a la siguiente ecuación para t que es idéntica a la usada para obtener la ecuación (10.24):

$$t = \tau \log_e\left(\frac{I_m}{I_m - i_L}\right) \quad \textbf{(12.21)}$$



Para la otra forma, la ecuación $v_C = Ee^{-t/\tau}$ se equipara con $v_L = Ee^{-t/\tau}$, lo que permite una deducción similar a la empleada para la ecuación (10.25):

$$t = \tau \log_e \frac{E}{v_L} \qquad \textbf{(12.22)}$$

Las similitudes entre las ecuaciones anteriores y las del capítulo 10 deben permitir obtener fácilmente la ecuación para t.

12.11 EQUIVALENTE THÉVENIN: $\tau = L/R_{Th}$

En el capítulo 10 ("Capacitores"), se encontró que hay ocasiones en que el circuito no tiene la forma básica de la figura 12.14. Lo mismo es cierto para redes inductivas. De nuevo, es necesario encontrar el circuito equivalente de Thévenin antes de proceder de la manera descrita en este capítulo. Considere el siguiente ejemplo.

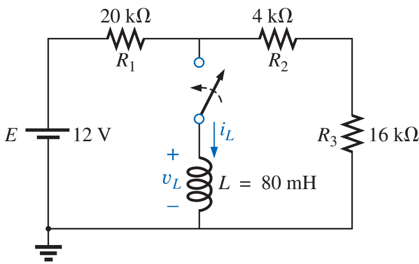


FIGURA 12.31
Ejemplo 12.7.

EJEMPLO 12.7 Para la red de la figura 12.31:

a. Encuentre la expresión matemática para el comportamiento transitorio de la corriente i_L y del voltaje v_L después del cierre del interruptor ($I_i = 0$ mA).
b. Trace la forma de onda resultante para cada expresión.

Soluciones:

a. Aplicando el teorema de Thévenin al inductor de 80 mH (Figura 12.32), resulta:

$$R_{Th} = \frac{R}{N} = \frac{20\text{ k}\Omega}{2} = 10\text{ k}\Omega$$

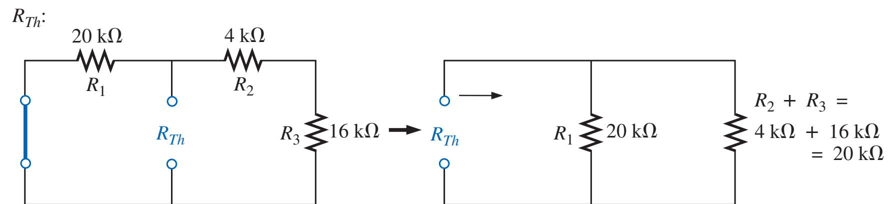


FIGURA 12.32
Determinación de R_{Th} para la red de la figura 12.31.

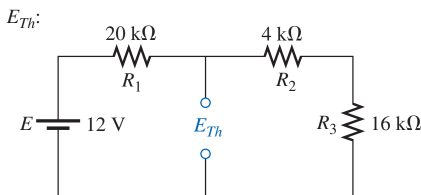
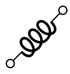


FIGURA 12.33
Determinación de E_{Th} para la red de la figura 12.31.

Aplicando la regla del divisor de voltaje (Figura 12.33),

$$E_{Th} = \frac{(R_2 + R_3)E}{R_1 + R_2 + R_3}$$
$$= \frac{(4\text{ k}\Omega + 16\text{ k}\Omega)(12\text{ V})}{20\text{ k}\Omega + 4\text{ k}\Omega + 16\text{ k}\Omega} = \frac{(20\text{ k}\Omega)(12\text{ V})}{40\text{ k}\Omega} = 6\text{ V}$$

El circuito equivalente de Thévenin se muestra en la figura 12.34. Usando la ecuación (12.8),



$$i_L = \frac{E_{Th}}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{80 \times 10^{-3}\ \text{H}}{10 \times 10^{3}\ \Omega} = 8 \times 10^{-6}\ \text{s}$$

$$I_m = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{6\ \text{V}}{10 \times 10^{3}\ \Omega} = 0.6 \times 10^{-3}\ \text{A}$$

e $$\boldsymbol{i_L = (0.6 \times 10^{-3})(1 - e^{-t/(8\times10^{-6})})}$$

Usando la ecuación (12.10),

$$\upsilon_L = E_{Th}e^{-t/\tau}$$

de modo que: $$\boldsymbol{\upsilon_L = 6e^{-t/(8\times10^{-6})}}$$

b. Vea la figura 12.35.

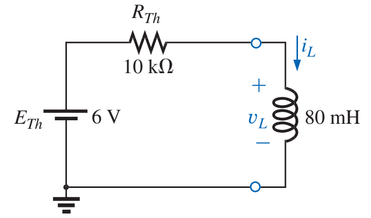


FIGURA 12.34
Circuito equivalente de Thévenin resultante para la red de la figura 12.31.

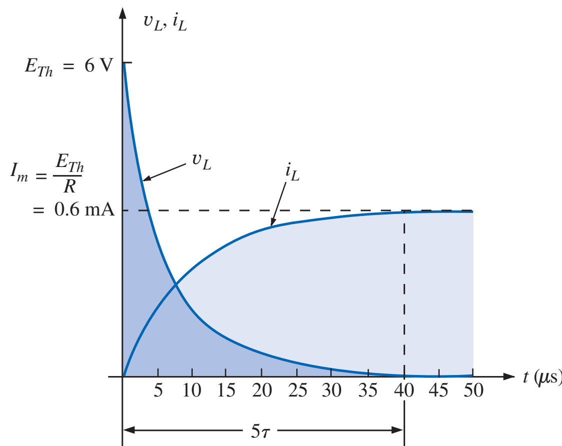


FIGURA 12.35
Formas de onda resultantes para i_L y υ_L en la red de la figura 12.31.

EJEMPLO 12.8 El interruptor S_1 de la figura 12.36 ha estado cerrado por largo tiempo. En At $t = 0$ s, S_1 se abre en el mismo instante que S_2 se cierra para evitar una interrupción en la corriente a través de la bobina.

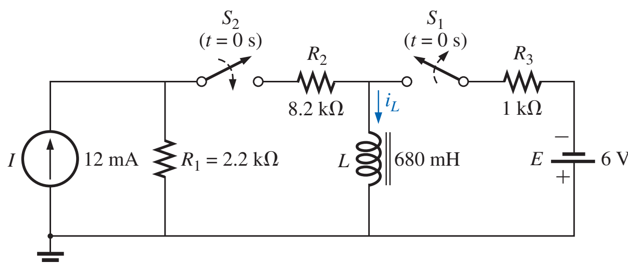
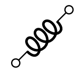


FIGURA 12.36
Ejemplo 12.8.



a. Encuentre la corriente inicial a través de la bobina. Ponga atención particular a su dirección.
b. Encuentre la expresión matemática para la corriente i_L después del cierre del interruptor S_2.
c. Trace la forma de onda para i_L.

Soluciones:

a. Usando la ley de Ohm, la corriente inicial a través de la bobina se determina mediante:

$$I_i = -\frac{E}{R_3} = -\frac{6\text{ V}}{1\text{ k}\Omega} = -6\text{ mA}$$

b. Aplicando el teorema de Thévenin:

$$R_{Th} = R_1 + R_2 = 2.2\text{ k}\Omega + 8.2\text{ k}\Omega = 10.4\text{ k}\Omega$$
$$E_{Th} = IR_1 = (12\text{ mA})(2.2\text{ k}\Omega) = 26.4\text{ V}$$

La red equivalente de Thévenin aparece en la figura 12.37.

La corriente de estado estable se puede determinar entonces mediante la sustitución del corto circuito equivalente para el inductor:

$$I_f = \frac{E}{R_{Th}} = \frac{26.4\text{ V}}{10.4\text{ k}\Omega} = 2.54\text{ mA}$$

La constante de tiempo:

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{680\text{ mH}}{10.4\text{ k}\Omega} = 65.39\ \mu\text{s}$$

Aplicando la ecuación (12.12):

$$\begin{aligned} i_L &= I_f + (I_i - I_f)e^{-t/\tau} \\ &= 2.54\text{ mA} + (-6\text{ mA} - 2.54\text{ mA})e^{-t/65.39\ \mu\text{s}} \\ &= \mathbf{2.54\ mA - 8.54\ mA}\boldsymbol{e^{-t/(65.39\ \mu s)}} \end{aligned}$$

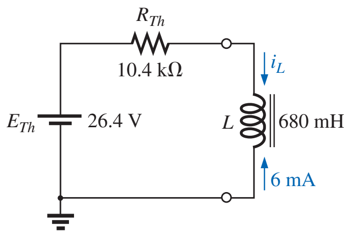


FIGURA 12.37
Circuito equivalente de Thévenin para la red de la figura 12.36 para $t \geq 0$ s.

c. Observe la figura 12.38.

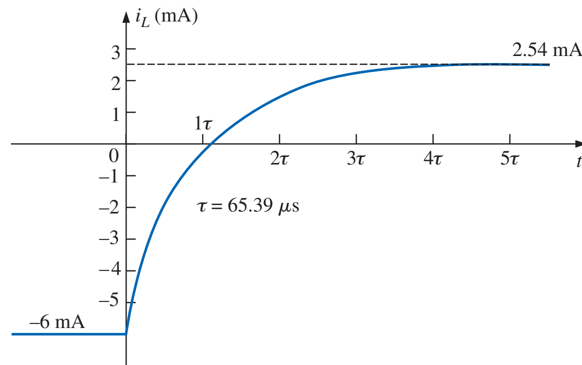
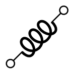


FIGURA 12.38
Corriente i_L para la red de la figura 12.37.



12.12 INDUCTORES EN SERIE Y EN PARALELO

Los inductores, así como los resistores y los capacitores, pueden colocarse en serie o en paralelo. Se pueden obtener niveles crecientes de inductancia colocando los inductores en serie, y se pueden obtener niveles decrecientes colocando los inductores en paralelo.

Para inductores en serie, la inductancia total se encuentra de la misma manera que la resistencia total de los resistores en serie (Figura 12.39):

$$L_T = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N \tag{12.23}$$

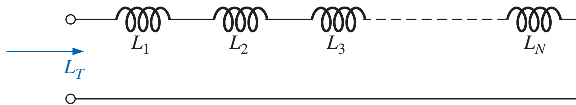


FIGURA 12.39
Inductores en serie.

Para inductores en paralelo, la inductancia total se encuentra de la misma manera que la resistencia total de los resistores en paralelo (Figura 12.40):

$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_N} \tag{12.24}$$

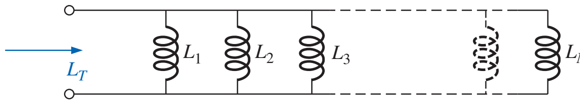


FIGURA 12.40
Inductores en paralelo.

Para dos inductores en paralelo,

$$L_T = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{12.25}$$

EJEMPLO 12.9 Reduzca la red de la figura 12.41 a su forma más simple.

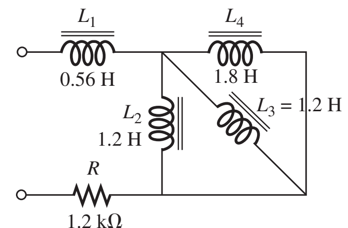


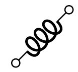
FIGURA 12.41
Ejemplo 12.9.

Solución: Los inductores L_2 y L_3 tienen el mismo valor y están en paralelo, resultando un valor equivalente en paralelo de:

$$L'_T = \frac{L}{N} = \frac{1.2\text{ H}}{2} = 0.6\text{ H}$$

La resultante de 0.6 H está entonces en paralelo con el inductor de 1.8 H, y

$$L''_T = \frac{(L'_T)(L_4)}{L'_T + L_4} = \frac{(0.6\text{ H})(1.8\text{ H})}{0.6\text{ H} + 1.8\text{ H}}$$
$$= 0.45\text{ H}$$



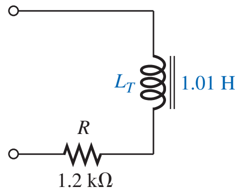


FIGURA 12.42
Terminal equivalente de la red de la figura 12.41.

El inductor L_1 está entonces en serie con el valor equivalente en paralelo, y

$$L_T = L_1 + L''_T = 0.56\text{ H} + 0.45\text{ H} = 1.01\text{ H}$$

La red reducida equivalente aparece en la figura 12.42.

12.13 CIRCUITOS *R-L* Y *R-L-C* CON ENTRADAS DE cd

En la sección 12.7 se encontró que, para todo fin práctico, un inductor se puede reemplazar por un corto circuito en un circuito de cd después que ha transcurrido un lapso mayor a cinco constantes de tiempo. Si en los circuitos siguientes se supone que todas las corrientes y todos los voltajes han alcanzado sus valores finales, la corriente a través de cada inductor se puede hallar reemplazando cada inductor por un corto circuito. Por ejemplo, para el circuito de la figura 12.43,

$$I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{10\text{ V}}{2\ \Omega} = \mathbf{5\ A}$$

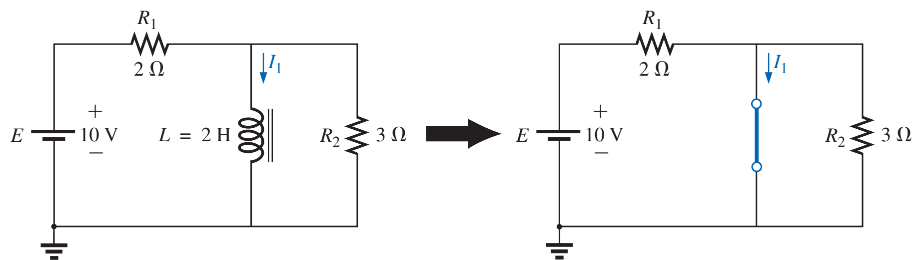


FIGURA 12.43
Sustitución del corto circuito equivalente para el inductor para $t > 5\tau$.

Para el circuito de la figura 12.44,

$$I = \frac{E}{R_2 \parallel R_3} = \frac{21\text{ V}}{2\ \Omega} = \mathbf{10.5\ A}$$

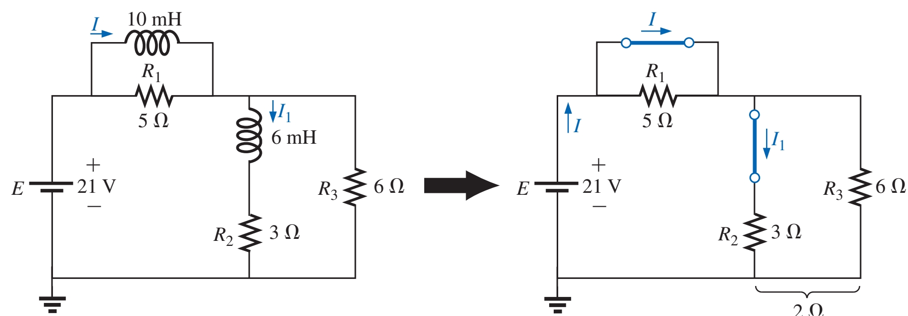
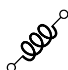


FIGURA 12.44
Establecimiento de la red equivalente para $t > 5\tau$.



Aplicando la regla del divisor de corriente,

$$I_1 = \frac{R_3 I}{R_3 + R_2} = \frac{(6\ \Omega)(10.5\ \text{A})}{6\ \Omega + 3\ \Omega} = \frac{63\ \text{A}}{9} = \mathbf{7\ A}$$

En los siguientes ejemplos se supondrá que el voltaje en los capacitores y la corriente a través de los inductores han alcanzado sus valores finales. Bajo esas condiciones, los inductores se pueden reemplazar por corto circuitos y los capacitores por circuitos abiertos.

EJEMPLO 12.10 Encuentre la corriente I_L y el voltaje V_C para la red de la figura 12.45.

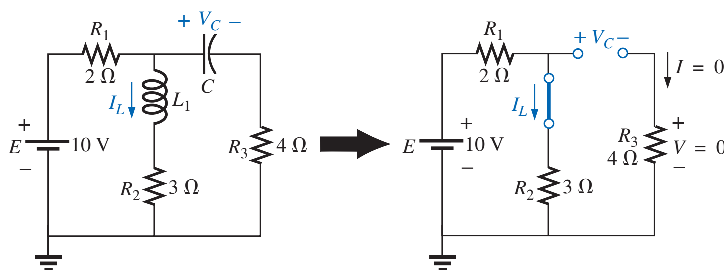


FIGURA 12.45
Ejemplo 12.10.

Solución:

$$I_L = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10\ \text{V}}{5\ \Omega} = \mathbf{2\ A}$$

$$V_C = \frac{R_2 E}{R_2 + R_1} = \frac{(3\ \Omega)(10\ \text{V})}{3\ \Omega + 2\ \Omega} = \mathbf{6\ V}$$

EJEMPLO 12.11 Encuentre las corrientes I_1 e I_2 y los voltajes V_1 y V_2 para la red de la figura 12.46.

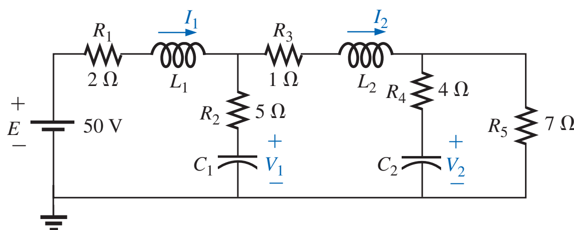
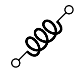


FIGURA 12.46
Ejemplo 12.11.



Solución: Observe la figura 12.47:

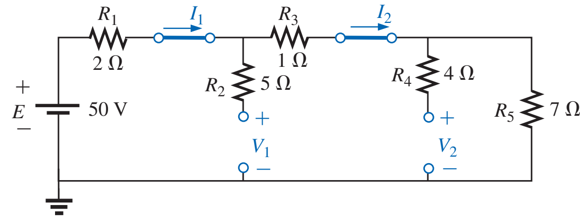


FIGURA 12.47
Sustitución de los corto circuitos equivalentes para los inductores y circuitos abiertos equivalentes para el capacitor cuando $t > 5\tau$.

$$I_1 = I_2$$

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{50\text{ V}}{2\ \Omega + 1\ \Omega + 7\ \Omega} = \frac{50\text{ V}}{10\ \Omega} = \mathbf{5\ A}$$

$$V_2 = I_2 R_5 = (5\text{ A})(7\ \Omega) = \mathbf{35\ V}$$

Aplicando la regla del divisor de voltaje,

$$V_1 = \frac{(R_3 + R_5)E}{R_1 + R_3 + R_5} = \frac{(1\ \Omega + 7\ \Omega)(50\text{ V})}{2\ \Omega + 1\ \Omega + 7\ \Omega} = \frac{(8\ \Omega)(50\text{ V})}{10\ \Omega} = \mathbf{40\ V}$$

12.14 ENERGÍA ALMACENADA POR UN INDUCTOR

El inductor ideal, así como el capacitor ideal, no disipa la energía eléctrica que se le suministra; la almacena en forma de campo magnético. Una gráfica del voltaje, la corriente y la potencia en un inductor se muestra en la figura 12.48 durante la formación del campo magnético que rodea al inductor. La energía almacenada se representa por el área sombreada bajo la curva de potencia. Usando cálculo, se puede mostrar que la evaluación del área bajo la curva resulta en:

$$W_{\text{almacenada}} = \frac{1}{2}LI_m^2 \qquad \text{(joules, J)} \qquad \mathbf{(12.26)}$$

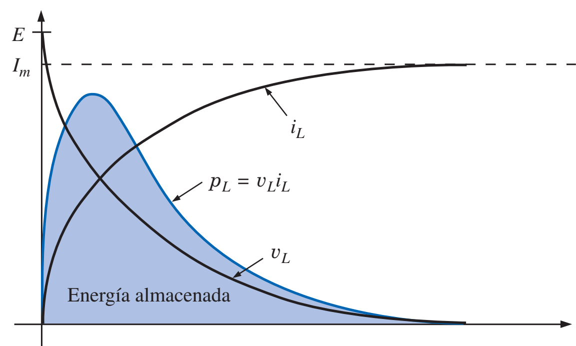
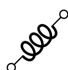


FIGURA 12.48
Curva de potencia para un elemento inductivo bajo condiciones transitorias.



EJEMPLO 12.12 Encuentre la energía almacenada por el inductor en el circuito de la figura 12.49 cuando la corriente a través de él ha alcanzado su valor final.

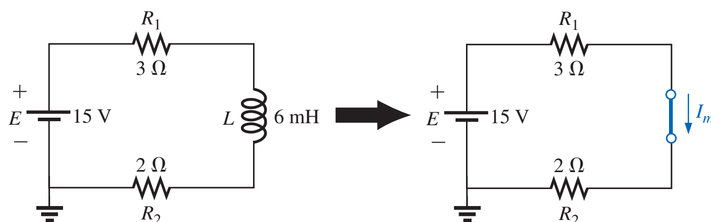


FIGURA 12.49
Ejemplo 12.12.

Solución:

$$I_m = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{15\text{ V}}{3\ \Omega + 2\ \Omega} = \frac{15\text{ V}}{5\ \Omega} = 3\text{ A}$$

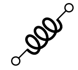
$$W_{\text{almacenada}} = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}(6 \times 10^{-3}\text{ H})(3\text{ A})^2 = \frac{54}{2} \times 10^{-3}\text{ J}$$

$$= \mathbf{27\ mJ}$$

12.15 APLICACIONES

Lámpara de destello de una cámara y acondicionador de línea

El inductor (o bobina como algunos prefieren llamarlo) desempeña importantes funciones en el circuito de la lámpara de destello de una cámara fotográfica y en el acondicionador de línea (protector de picos) descritos en la sección Aplicaciones del capítulo 10 sobre capacitores. Para la cámara, fue el componente importante que dio lugar al pico de alto voltaje en la bobina de disparo, que luego fue amplificado por la acción autotransformadora del secundario para generar los 4000 V necesarios para encender la lámpara de destello. Recuérdese que el capacitor en paralelo con la bobina de disparo se cargó hasta 300 V usando la trayectoria de baja resistencia proporcionada por el SCR. Sin embargo, una vez que el capacitor estuvo plenamente cargado, se quitó la trayectoria de corto circuito a tierra proporcionada por el SCR, y el capacitor comenzó a descargarse inmediatamente a través de la bobina de disparo. Como la única resistencia en la constante de tiempo para la red inductiva es la relativamente baja resistencia de la bobina misma, la corriente a través de la bobina creció a una razón muy rápida. Se desarrolló entonces un importante voltaje en la bobina de acuerdo con la ecuación (12.6): $v_L = L(di/dt)$. Este voltaje, a su vez, fue incrementado por la acción transformadora a la bobina secundaria del autotransformador, y se encendió la lámpara de destello. Este alto voltaje generado en la bobina de disparo aparece también directamente en el capacitor de la red de disparo. El resultado es que el capacitor comenzará a cargarse de nuevo hasta que el voltaje generado en la bobina caiga a cero volts. Sin embargo, cuando cae, el capacitor se descargará de nuevo a través de la bobina, estableciendo otra corriente de carga por la bobina, y desarrollará de nuevo un voltaje en ésta. El intercambio de alta frecuencia de energía entre la bobina y el capacitor se llama *flyback* debido al "ir y venir" de energía de un elemento de



almacenaje al otro. Dicho intercambio comenzará a decaer con el tiempo debido a los elementos resistivos existentes en el lazo. A mayor resistencia, más rápidamente llegará a cero. Si el par capacitor-inductor fuese aislado y "estimulado" durante la operación con la aplicación de un voltaje de cd, el voltaje de alta frecuencia generado en la bobina podría mantenerse y usarse. De hecho, es este efecto el que se usa para generar un voltaje estable de cd (usando rectificación para convertir la forma de onda osciladora a una de naturaleza estable de cd) tan común en televisores.

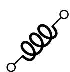
En el acondicionador de línea, el propósito principal de los inductores es "bloquear" los picos de corriente que pueden ocurrir en la línea usando el efecto descrito bajo la discusión de la ley de Lenz en este capítulo. Los inductores son de tal naturaleza que una corriente rápidamente cambiante a través de una bobina dará lugar al desarrollo de una corriente en la bobina que se opondrá a la corriente que estableció el efecto inducido en primer lugar. Este efecto es tan fuerte que puede eliminar los picos de corriente de muchos ampere en la línea. Sin embargo, un resultado no deseable en los acondicionadores de línea es el voltaje en la bobina que se desarrolla cuando se "bloquea" esta corriente rápidamente cambiante a través de la bobina. No obstante, como se mencionó en el capítulo 10, hay dos bobinas en el sistema que generarán fems opuestas de manera que el voltaje neto a tierra es cero. Esto se ve claramente cuando el lector examina con cuidado las dos bobinas sobre el núcleo ferromagnético y advierte que están enrolladas de manera que generan campos opuestos. La reacción de las bobinas en el acondicionador de línea a diferentes frecuencias y su capacidad de ayudar a bloquear las perturbaciones EMI y RFI tendrá que esperar hasta que en un capítulo posterior se analice el efecto de la frecuencia sobre la reacción de un inductor.

Interruptor reductor casero

Los inductores pueden encontrarse en una amplia variedad de circuitos electrónicos comunes caseros. El reductor típico casero usa un inductor para proteger otros componentes y la carga aplicada de corrientes "rápidas" —corrientes que crecen a razones muy altas y a menudo a niveles excesivamente elevados—. Este aspecto es particularmente importante para los reductores ya que es común usarlos para controlar la intensidad de la luz de una lámpara incandescente. Al "prenderlas", la resistencia característica de las lámparas incandescentes es muy baja, y fluyen corrientes relativamente altas por cortos periodos hasta que se calienta el filamento de la lámpara. El inductor es también efectivo en bloquear el ruido de alta frecuencia (RFI) generado por la acción del interruptor del triac en el reductor. Se incluye también un capacitor de la línea a neutro para prevenir cualesquiera picos de voltaje que afecten la operación del reductor y la carga aplicada (lámpara, etc.) y ayudar en la supresión de perturbaciones RFI.

Una fotografía de uno de los reductores más comunes se proporciona en la figura 12.50(a), con una vista interna mostrada en la figura 12.50(b). Los componentes básicos de los reductores más comercialmente accesibles aparecen en el esquema de la figura 12.50(c). En este diseño, se usa un inductor de 14.5 μH por su capacidad de "bloqueo" descrita, y un capacitor de 0.068 μF para la operación de "desviación". Observe el tamaño del inductor con su pesado alambre y gran núcleo ferromagnético y el tamaño relativamente grande de los dos capacitores de 0.068 μF. Ambos sugieren que están diseñados para absorber perturbaciones de alta energía.

La operación general del reductor se muestra en la figura 12.51. La red de control está en serie con la lámpara y actuará esencialmente como una impedancia que puede variar entre niveles muy bajos y muy altos; niveles de muy baja



(a)

Cubierta del reóstato
Inductor de 14.5 μH
Capacitores de 0.068 μF
Resistor de 47 kΩ
Alimentación
Triac
Disipador de calor para el triac

(b)

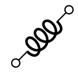
Alimentación
\+
REDUCTOR
Interruptor reductor encendido/apagado
47 kΩ
DIAC
A
TRIAC
120 V ca
0.068 μF
Reóstato de 330 kΩ
G
K
Inductor de 14.5 μH
0.068 μF
Lámpara bajo control
–
Retorno

(c)

FIGURA 12.50
Control de reductor: (a) apariencia externa; (b) construcción interna; (c) esquema.

impedancia tienen semejanza con un corto circuito de manera que la mayor parte del voltaje aplicado aparece en la lámpara [Figura 12.51(a)], y niveles de muy alta impedancia asemejan un circuito abierto donde muy poco voltaje aparece en la lámpara [Figura 12.51(b)]. En consecuencia, niveles intermedios de impedancia controlarán el voltaje terminal del foco. Por ejemplo, si la red de control tiene una impedancia muy alta (circuito abierto equivalente) a través de medio ciclo como se muestra en la figura 12.51(c), el brillo del foco será menor que con voltaje pleno pero no de 50% debido a la relación no lineal entre el brillo de un foco y el voltaje aplicado. También está presente un efecto de retardo en la operación real del reductor, pero este tema tendrá que ser pospuesto hasta que se examinen las redes de adelanto y de retardo en los capítulos de ca.

La perilla, barra corrediza o cualquier otro método de control que sea usado sobre el frente del interruptor para controlar la intensidad de la luz están directamente conectados al reóstato en la rama paralela al triac. Su posición deter-



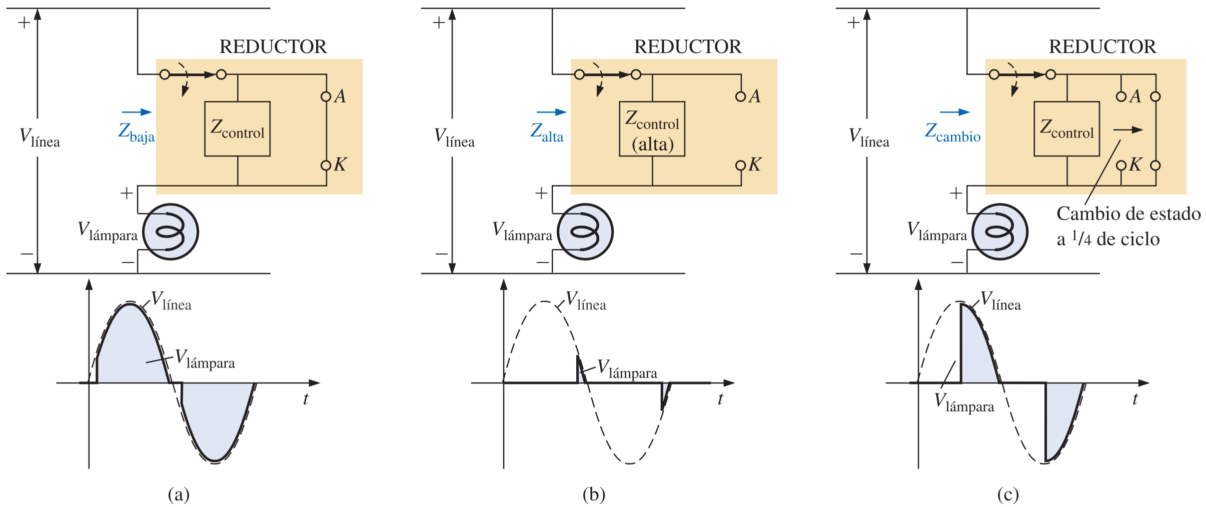


FIGURA 12.51
Operación básica del reductor de la figura 12.50: (a) voltaje total a la lámpara; (b) acercamiento al punto de corte para el foco; (c) iluminación reducida de la lámpara.

minará en qué momento el voltaje en el capacitor alcanza un nivel suficientemente alto como para encender el diac (un diodo bidireccional) y establecer un voltaje en la compuerta (G) del triac para encenderlo. Cuando lo haga, se establecerá una trayectoria de muy baja resistencia del ánodo (A) al cátodo (K), y el voltaje aplicado aparecerá directamente en la lámpara. Una explicación más detallada de esta operación aparecerá en un capítulo posterior luego del examen de algunos conceptos importantes sobre redes de ca. Durante el periodo en que el SCR esté desconectado, su resistencia terminal entre ánodo y cátodo será muy alta y puede aproximarse por un circuito abierto. Durante este periodo el voltaje aplicado no alcanzará la carga (lámpara). En el transcurso de tales intervalos la impedancia de la rama paralela que contiene el reóstato, el resistor fijo y el capacitor, es suficientemente alta comparada con la carga que también puede ignorarse, completando el circuito abierto equivalente en serie con la carga. Observe la colocación de los elementos en la fotografía de la figura 12.50 y el hecho de que la placa metálica a la cual el triac está conectado es en realidad un disipador de calor para el dispositivo. El interruptor de encendido y apagado (on/off) se sitúa en la misma cubierta que el reóstato. Desde luego, el diseño total está muy bien planeado para mantener un tamaño relativamente pequeño para el reductor.

Como la idea aquí sólo es controlar la cantidad de potencia que llega a la carga, ocasionalmente se formula la pregunta: ¿por qué no usar simplemente un reóstato en serie con la lámpara? La pregunta se responde mejor mediante el examen de la figura 12.52, que muestra una red sencilla con un reóstato en serie con la lámpara. A potencia plena, un foco de 60 W sobre una línea de 120 V tiene, teóricamente, una resistencia interna de $R = V^2/P$ (de la ecuación $P = V^2/R$) $= (120\text{ V})^2/60\text{ W} = 240\ \Omega$. Aunque la resistencia es sensible al voltaje aplicado, se supondrá este nivel para los cálculos siguientes. Al considerar el caso en que el reóstato se establece al mismo nivel que el foco, como se muestra en la figura 12.52, habrá 60 V en el reóstato y el foco. La potencia en cada elemento será entonces $P = V^2/R = (60\text{ V})^2/240\ \Omega = 15$ W. Naturalmente, la luz del foco es muy tenue, pero el reóstato dentro del interruptor reductor estará disipando 15 W de potencia en forma continua. Si se considera el tamaño de un potenciómetro de 2 W en el laboratorio, podrá imaginarse el

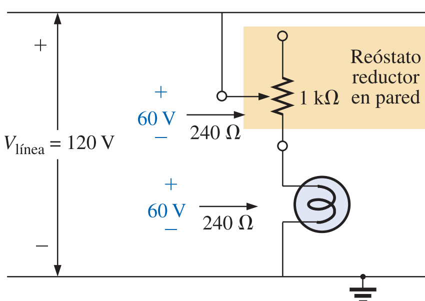
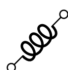


FIGURA 12.52
Control directo del reóstato del brillo de un foco de 60 W.



tamaño de reóstato que se necesitaría para 15 W, por no mencionar el precio, aunque la principal preocupación sería probablemente todo el calor desarrollado en las paredes de la habitación. Se pagaría potencia eléctrica que no estaría efectuando una función útil. También, si se tuviesen cuatro reductores fijos al mismo nivel, se estaría malgastando suficiente potencia como para poder encender otro foco de 60 W.

En ocasiones, especialmente cuando las luces están muy bajas por la acción del reductor, puede oírse un débil "silbido" proveniente del foco de luz. Este efecto ocurrirá a veces cuando el periodo de conducción del reductor es muy pequeño. El corto, repetitivo pulso de voltaje aplicado al foco, pondrá a éste en una condición que podría parecerse a un estado de resonancia (Capítulo 20). Los cortos pulsos son suficientes para calentar el filamento y sus estructuras de soporte, y entonces los pulsos son removidos por un periodo más largo para permitir que el filamento se enfríe de nuevo. Este ciclo repetitivo de calentamiento y enfriamiento puede ocasionar que el filamento se mueva, y el "silbido" resultante puede escucharse en un ambiente tranquilo. A propósito, entre más largo es el filamento, más intenso es el "silbido". Una condición adicional para que se dé este efecto es que el filamento tenga la forma de una bobina y no sea un alambre recto.

Conjunto yolk de un monitor de televisión o de computadora personal

Los inductores y capacitores cumplen una gran cantidad de funciones durante la operación de un monitor de televisión o de computadora personal. Sin embargo, el uso más obvio de la bobina es en el conjunto yolk enrollado alrededor del cuello del tubo como se muestra en la figura 12.53. En esta figura se aprecia que el tubo mismo, además de proporcionar la pantalla de observación, es en realidad un gran capacitor que constituye una parte integral en el establecimiento del alto voltaje de cd para la operación apropiada del monitor.

En la figura 12.54(a) se muestra una fotografía del conjunto yolk de un televisor en blanco y negro. Está construido de cuatro bobinas de 28 mH con dos conjuntos de dos bobinas conectadas en un punto [Figura 12.54(b)] de manera que compartan la misma corriente y establezcan el mismo campo magnético. El propósito del conjunto yolk es controlar la dirección del haz de electrones

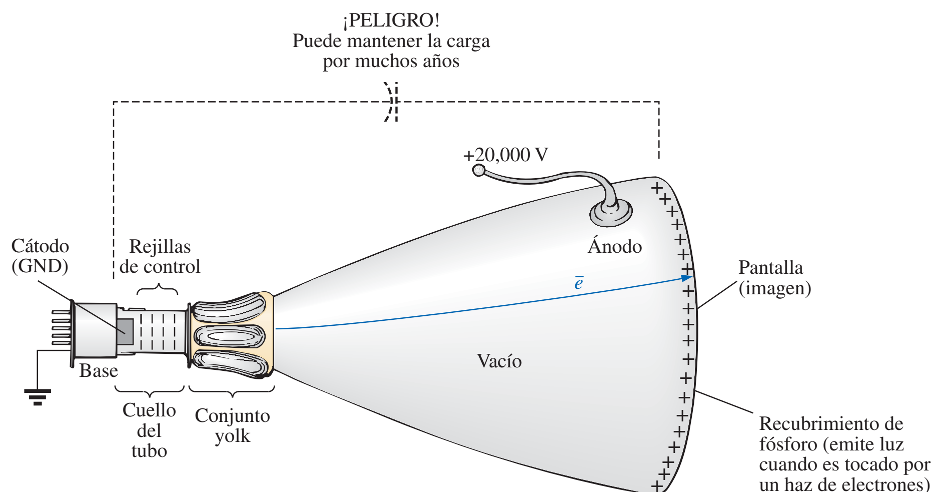
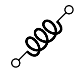


FIGURA 12.53
Conjunto yolk para un tubo de televisión o de computadora personal.



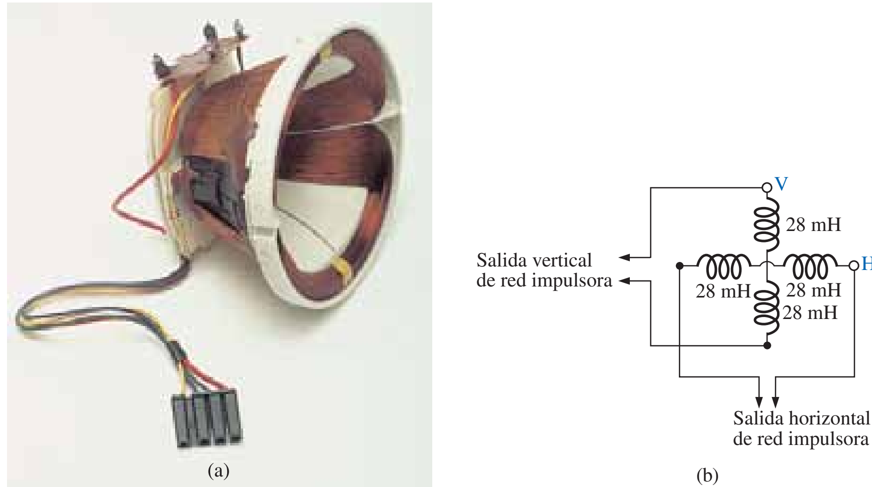


FIGURA 12.54
(a) Conjunto yolk de televisión en blanco y negro; (b) representación esquemática.

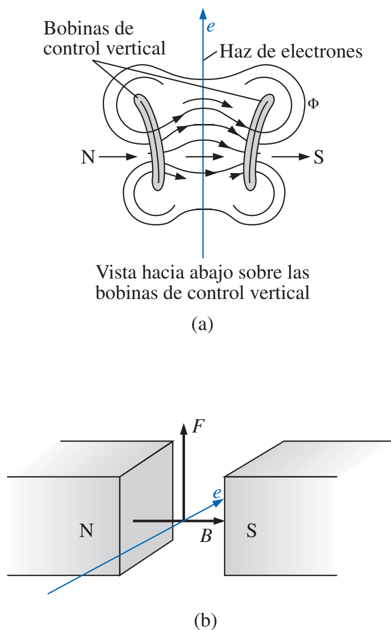
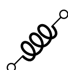


FIGURA 12.55
Bobinas de deflexión: (a) control vertical; (b) regla de la mano derecha para el flujo de electrones.

desde el cátodo hasta la pantalla del tubo. Cuando el cátodo se calienta a una muy alta temperatura por un filamento interno a la estructura, en el medio circundante se emiten electrones. La colocación de un potencial positivo muy alto (10 a 25 kV de cd) al recubrimiento conductivo sobre el frente del tubo atraerá los electrones emitidos a muy alta velocidad y, por tanto, a un nivel muy elevado de energía cinética. Cuando los electrones tocan el recubrimiento fosforescente (usualmente blanco, verde o ámbar) sobre la pantalla, se emitirá luz que puede verse por quien esté observando el monitor. Las características del haz (como intensidad, foco y forma) se controlan por una serie de rejillas colocadas relativamente cerca del cátodo en el cuello del tubo. La rejilla es de naturaleza tal que los electrones cargados negativamente pueden pasar con facilidad a través de ella, pero el número y la velocidad con que pasan pueden controlarse por un potencial negativo aplicado a la rejilla. Las rejillas no pueden tener un potencial positivo porque los electrones cargados negativamente serían atraídos a la estructura de la rejilla y al final se desintegrarían debido a la alta razón de conducción. Los potenciales negativos sobre las rejillas controlan el flujo de electrones por repulsión y cubriendo la atracción del gran potencial positivo aplicado a la cara del tubo.

Una vez que el haz ha sido establecido con la deseada intensidad y forma, se debe dirigir a una ubicación particular sobre la pantalla usando el conjunto *yolk*. Para control vertical, las dos bobinas a los lados establecen un patrón de flujo magnético, como se muestra en la figura 12.55(a). La dirección resultante del campo magnético es de izquierda a derecha según puede apreciarse en las figuras 12.55(a) y 12.55(b). Usando la mano derecha, con el dedo índice señalando en la dirección del campo magnético y el dedo medio (en ángulo recto con el dedo índice) en la dirección del flujo electrónico, el pulgar (también en ángulo recto con el dedo índice) señalará en la dirección de la fuerza sobre el haz de electrones. El resultado es una deflexión del haz como se ve en la figura 12.53. Entre mayor sea el campo magnético de las bobinas como queda determinado por la corriente a través de éstas, mayor será la deflexión del haz.

Antes de continuar, es importante darse cuenta de que cuando el haz de electrones toca la pantalla fosforescente como se muestra en la figura 12.56, se está moviendo con suficiente velocidad como para causar una emisión secundaria de rayos X que se dispersan hacia todos lados del monitor. Aunque los



rayos X decaen exponencialmente con la distancia desde la fuente, existe cierta preocupación respecto a la seguridad, por lo que todos los monitores modernos tienen blindaje alrededor de la superficie externa del tubo como se muestra en la figura 12.56. Resulta interesante que lo peligroso de esta situación no sea la vista directa sino la vista lateral, por arriba o por debajo de la pantalla. En la actualidad los monitores están limitados a 25 kV en el ánodo ya que la aplicación de voltajes en exceso de 25 kV puede resultar en una emisión directa de rayos X. Internamente, todos los monitores modernos tienen un dispositivo de seguridad para garantizar que este nivel nunca se alcance en el sistema de operación.

El tiempo y el espacio no permiten aquí un análisis detallado de la operación completa de un monitor, pero hay algunos hechos con respecto a ésta que revelan lo elaborado de su diseño. Cuando se genera una imagen sobre una pantalla, se realiza mediante un *píxel* a la vez a lo largo de una línea horizontal. Un píxel es un punto en la pantalla. Los píxeles son negros (ninguna señal) o blancos (con señal) para televisores blanco y negro (monocromáticos), y blanco y negro o algún color para televisores a color. Para monitores EGA la resolución es de 640 píxeles a lo ancho y de 35 píxeles a lo alto, mientras que los monitores VGA son también de 640 píxeles a lo ancho pero de 480 píxeles a lo alto. Es obvio que entre más píxeles se tengan en la misma área, la imagen será más nítida. Una frecuencia de barrido típica es 31.5 kHz, lo cual significa que se pueden trazar 31,500 líneas en 1 s, o que se puede trazar una línea de 640 píxeles en aproximadamente 31.7 μs.

Los patrones sobre la pantalla se desarrollan por la secuencia de líneas que aparecen en la figura 12.57. Comenzando en la parte superior izquierda, la imagen se mueve por la pantalla hacia abajo a la línea siguiente hasta que termina en el extremo derecho inferior de la pantalla, en ese punto ocurre un rápido y nuevo trazo (invisible) de regreso al punto inicial. Las frecuencias típicas de barrido (generación completa de la imagen) varían desde 60 hasta 80 cuadros por segundo. Entre más lenta es la razón, mayor es la posibilidad de parpadeo en las imágenes. A 60 cuadros por segundo, un cuadro entero se genera cada $1/60 = 16.67$ ms $= 0.017$ s.

Los monitores de color son particularmente interesantes porque todos los colores sobre la pantalla se generan por los colores rojo, azul y verde. La razón es que el ojo humano responde a las longitudes de onda y a los niveles de energía de los diversos colores. La ausencia de cualquier color es negro, y el resultado de toda la energía hacia cada uno de los tres colores es blanco. El color amarillo es una combinación de rojo y verde sin azul, y el rosa es principalmente energía roja con menores cantidades de azul y verde. Una descripción en profundidad de este tipo "aditivo" de generación de color se deja como ejercicio para el lector.

El hecho de que tres colores definan el color resultante requiere que en un monitor a color haya tres cátodos para generar tres haces de electrones. Sin embargo, los tres haces deben barrer la pantalla en las mismas posiciones relativas. Cada píxel queda constituido así por tres puntos de color en la misma posición relativa, como se muestra en la figura 12.58. Cada punto contiene un material fosforescente que genera el color deseado cuando es tocado por un haz de electrones. Para situaciones donde el color deseado no tiene verde, el haz de electrones asociado con el color verde se apaga. De hecho, entre cada píxel, cada haz se cierra para proporcionar la definición entre los píxeles de color. Los puntos dentro del píxel están tan cerca que el ojo humano no puede distinguir los colores individuales sino simplemente el color que resulta del proceso "aditivo".

Durante todo el tiempo de "encendido" de un monitor, se aplican de 10 a 25 kV al conductor sobre la pantalla para atraer electrones. Con el tiempo habrá, naturalmente, una acumulación de carga negativa sobre la pantalla que permanecerá incluso después que la potencia sea suprimida —se trata de una carga

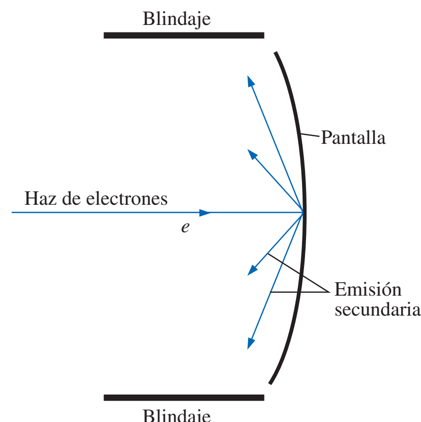


FIGURA 12.56
Emisión secundaria y medidas protectoras para una televisión o un monitor de computadora personal.

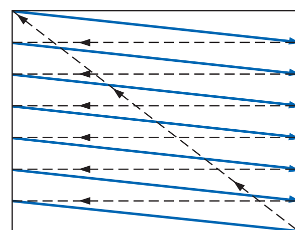


FIGURA 12.57
Generación de patrón.

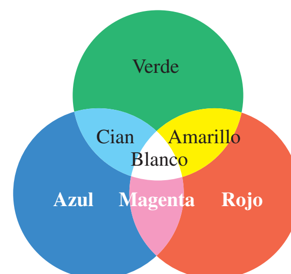
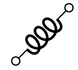


FIGURA 12.58
Píxeles de televisión a color.



típica capacitiva de almacenamiento—. Por un breve periodo, la pantalla estará con 25 kV en las placas que caerán conforme el "capacitor" empiece a descargarse. Sin embargo, la falta de una trayectoria de baja resistencia resultará a menudo en un almacenamiento de la carga durante un periodo largo. Esta carga almacenada y el voltaje asociado en las placas son suficientemente altos como para causar daños severos. Por tanto, es necesario que los televisores y monitores sean reparados o revisados sólo por alguien bien capacitado sobre cómo descargar el tubo. Un procedimiento comúnmente aplicado es unir un conductor largo desde el eje metálico de un desarmador plano hasta una buena conexión a tierra. Luego se deja la conexión del ánodo al tubo en su lugar, y se inserta simplemente el desarmador bajo la tapa hasta que toca el clip metálico de la tapa. Probablemente se escuchará un fuerte chasquido cuando ocurra la descarga. Debido a la enorme cantidad de carga residual, se recomienda que el procedimiento anterior sea repetido dos o tres veces. Incluso, entonces, hay que tratar el tubo con gran respeto. En resumen, hasta que se esté familiarizado con el procedimiento de descarga, debe dejarse la revisión de televisores y monitores a alguien con experiencia suficiente. Una preocupación adicional son los muy altos pulsos de voltaje que se generan en un sistema en operación. El lector debe estar consciente de que son de una magnitud tal que incluso pueden destruir equipo estándar de prueba.

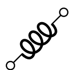
El efecto capacitivo del tubo es parte integral del desarrollo del alto potencial de cd en el ánodo. Su acción de filtrado suaviza los pulsos repetitivos de alto voltaje que se generan por la acción de flyback del televisor. De otra manera, la pantalla sería simplemente un patrón de parpadeo conforme el potencial del ánodo se encendiese y apagase con la señal pulsante.

12.16 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Respuesta *RL* transitoria El análisis por computadora comenzará con un análisis transitorio de la red de elementos paralelos inductivos mostrados en la figura 12.59. Los inductores se toman de la biblioteca **ANALOG** en el cuadro de diálogo **Place Part**. Como se observó en la figura 12.59, el inductor se exhibe con la identificación de sus terminales lo cual ayuda a reconocer los nodos al llamar gráficas y valores específicos de salida. En general, cuando un elemento se coloca primero sobre un esquema, se asigna el número 1 al extremo izquierdo en una presentación horizontal y en la parte superior en una presentación vertical. Así mismo, se asigna el número 2 al extremo derecho de un elemento en la presentación horizontal y al pie en la presentación vertical. Sin embargo, el lector debe estar consciente de que la opción **Rotate** gira el elemento en dirección contraria a las manecillas del reloj, por lo que llevar un resistor horizontal a la posición vertical requiere tres rotaciones para llevar el número 1 de nuevo a la parte superior. En capítulos previos se observó que varias de las salidas se tomaron de la terminal 2 porque una sola rotación colocó esta terminal en la parte superior de la presentación vertical. Obsérvese también, en la figura 12.59, la necesidad de un resistor R_1 en serie dentro del lazo en paralelo de los inductores. En PSpice, los inductores deben tener un resistor en serie para reflejar condiciones del mundo real. Sin embargo, el valor elegido de 1 mΩ es tan pequeño que no afectará la respuesta del sistema. Para **VPulse**, el tiempo de subida se seleccionó igual a 0.01 ms, y el ancho del pulso como 10 ms porque la constante de tiempo de la red es $\tau = L_T/R = (4\text{ H} \parallel 12\text{ H})/2\text{ k}\Omega = 1.5\text{ ms}$ y $5\tau = 7.5\text{ ms}$.

La simulación es la misma que la aplicada al obtener la respuesta transitoria de redes capacitivas. En forma condensada, la secuencia para obtener una gráfica del voltaje en las bobinas en función del tiempo es como sigue: tecla



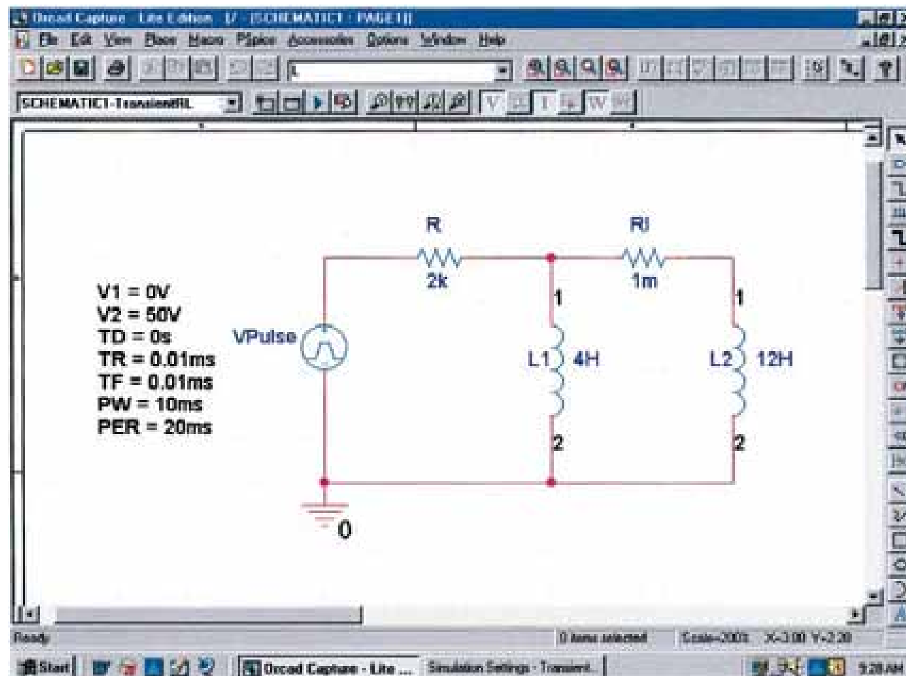
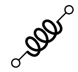


FIGURA 12.59
Uso de PSpice para obtener la respuesta transitoria de una red inductiva en paralelo debida a un pulso aplicado de 50 V.

NewSimulationProfile tecla**-TransientRL-Create-TimeDomain(Transient)-Run to time:** 10ms**-Start saving data after:**0s y **Maximum step size:**5μs**-OK-Run PSpice** tecla**-Add Trace** tecla**-V1(L2)-OK**. La gráfica resultante aparece en la parte inferior de la figura 12.60. Se eligió un tamaño máximo de paso de 5 μs para garantizar que fuese menor que la subida o caída de 10 μs. Observe que el voltaje en la bobina salta al nivel de 50 V casi de inmediato; luego decae a 0 V en aproximadamente 8 ms. Una gráfica de la corriente total a través de las bobinas en paralelo puede obtenerse con **Plot-Plot to Window-Add Trace** tecla**-I(R)-OK**, resultando la gráfica que aparece en la parte superior de la figura 12.60. Cuando la gráfica apareció por vez primera, la escala vertical se extendió desde 0 A hasta 40 mA aunque el valor máximo de i_R era de 25 mA. Para llevar el valor máximo a la parte superior de la gráfica, se seleccionó **Plot** seguido por **Axis Settings-Y Axis-User Defined-0A to 25mA-OK**.

Para visualizar los valores se seleccionó la gráfica de voltaje, **SEL>>**, seguida por la tecla **Toggle cursor** y un clic sobre la pantalla para establecer el cursor en forma de cruz. El primer cursor (clic izquierdo) se estableció sobre una constante de tiempo para revelar un valor de 18.461 V para **A1** (aproximadamente 36.8% del máximo definido por la forma de onda exponencial). El segundo cursor (clic derecho) se estableció en 7.5 ms o cinco constantes de tiempo, resultando en un valor relativamente bajo de 0.338 V para **A2**.

Respuesta transitoria con condiciones iniciales La siguiente aplicación verificará los resultados del ejemplo 12.5, el cual tiene una condición inicial asociada con el elemento inductivo. Se emplea de nuevo **VPULSE** con los parámetros que aparecen en la figura 12.61. Como $\tau = L/R = 100$ mH/ (2.2 kΩ + 6.8 kΩ) = 100 mH/9 kΩ = 11.11 μs y $5\tau = 55.55$ μs, el ancho del pulso **(PW)** se estableció en 100 μs. Los tiempos de subida y caída se fijaron en 100 μs/1000 = 0.1 μs. Observe de nuevo que las etiquetas 1 y 2 aparecen con el elemento inductivo.



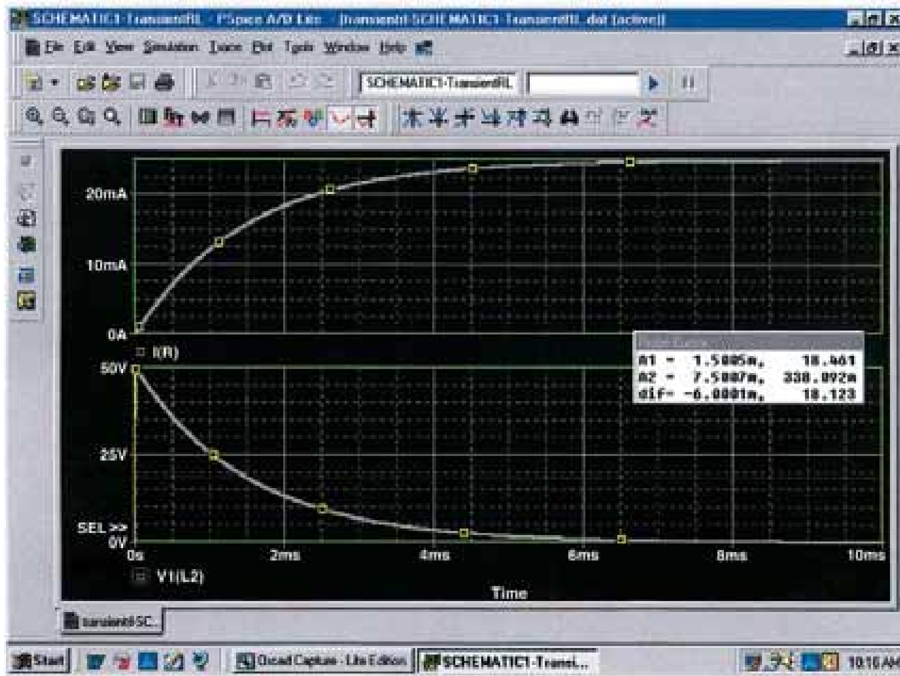
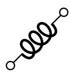


FIGURA 12.60
Respuesta transitoria de v_L e i_R para la red de la figura 12.59.

Establecer las condiciones iniciales para el inductor requiere un procedimiento que no ha sido descrito aún. Primero se hace doble clic sobre el símbolo del inductor para obtener el cuadro de diálogo **Property Editor**. Luego se selecciona **Parts** en el extremo inferior del cuadro de diálogo, y se elige **New Column** para obtener el cuadro de diálogo **Add New Column**. Bajo **Name**, se introduce **IC** (abreviatura para "condición inicial", no "corriente capacitiva") seguida por la condición inicial de 4 mA bajo **Value**; luego se da clic sobre **OK**. El cuadro de diálogo **Property Editor** aparecerá de nuevo, pero ahora la condición inicial aparece como **New Column** en el listado horizontal dedicado al elemento inductivo. En este punto se selecciona **Display** para obtener el cuadro de diálogo **Display Properties**, y bajo **Display Format** se elige **Name and Value** de manera que aparezcan **IC** y **4mA.** Se da clic en **OK**, y se regresa al cuadro de diálogo **Property Editor**. Finalmente, se da clic sobre **Apply** y se sale del cuadro de diálogo **(X)**. El resultado es la pantalla de la figura 12.61 para el elemento inductivo.

Ahora se verá la simulación. Primero se selecciona la tecla **New Simulation Profile**, se inserta el nombre **InitialCond(L)**, y se continúa con **Create**. Entonces, en el cuadro de diálogo **Simulation Settings**, se selecciona **Time Domain(Transient)** para obtener **Analysis type** y **General Settings** para **Options**. **Run to time** debe ser de 200 μs para poder ver el efecto total de la fuente de pulso sobre la respuesta transitoria. **Start saving data after** debe permanecer en 0 s, y **Maximum step size** debe ser de 200 μs/1000 = 200 ns. Se da clic en **OK** y luego se selecciona la tecla **Run PSpice**. El resultado será una pantalla con un eje x extendiéndose desde 0 hasta 200 μs. Seleccionar **Trace** para obtener el cuadro de diálogo **Add Traces** y entonces elegir **I(L)** seguido por **OK** resultará en la pantalla de la figura 12.62. La gráfica para **I(L)** comienza claramente en el valor inicial de 4 mA y luego decae a 1.78 mA según fue definido por el primer cursor (clic izquierdo). El segundo cursor (clic



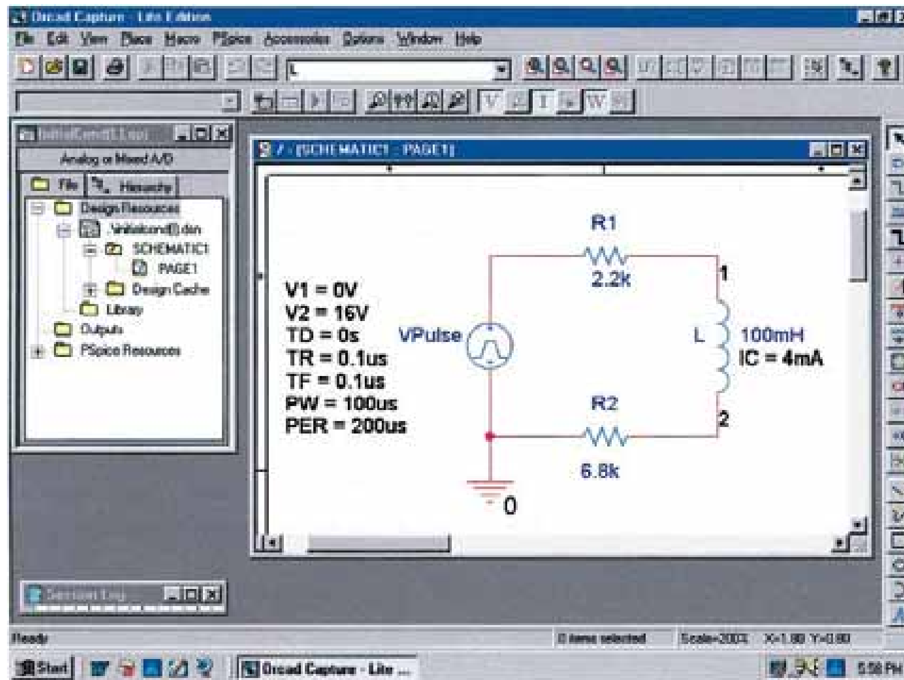


FIGURA 12.61
Uso de PSpice para determinar la respuesta transitoria para un circuito en el que el elemento inductivo tiene una condición inicial.

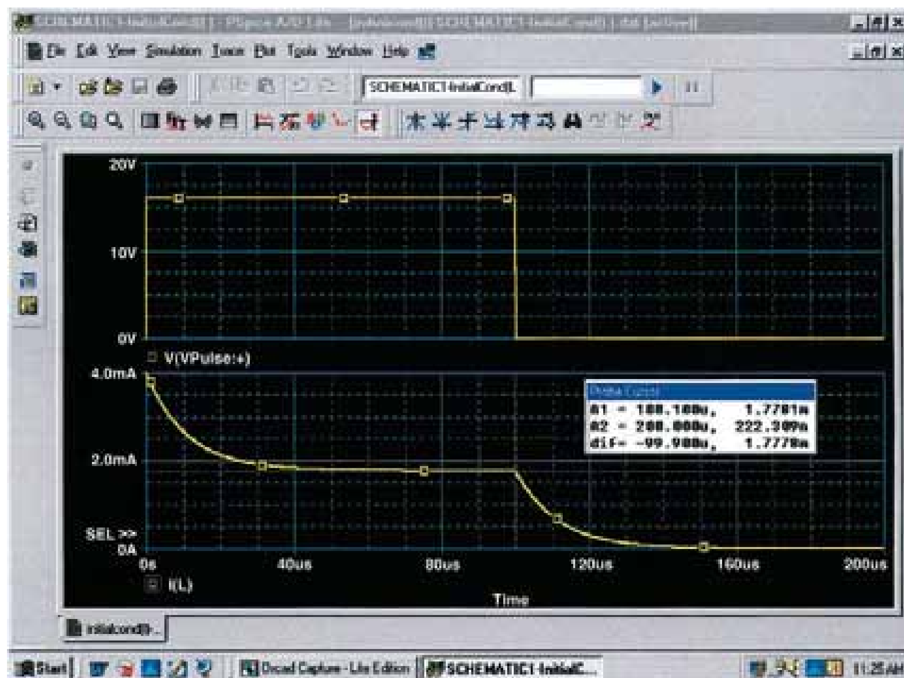
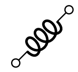


FIGURA 12.62
Gráfica del pulso aplicado y corriente resultante para el circuito de la figura 12.61.



derecho) revela que la corriente ha caído a 0.222 μA (esencialmente 0 A) después de que la fuente de pulso ha caído a 0 V en 100 μs. La fuente **VPulse** fue colocada en la misma figura por medio de **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace-V(VPulse: +)-OK** para permitir una comparación entre el voltaje aplicado y la corriente resultante en el inductor.

Electronics Workbench

La respuesta transitoria de una red *R-L* también se puede obtener usando Electronics Workbench. El circuito por examinar aparece en la figura 12.63 con una fuente de voltaje de pulso para simular el cierre de un interruptor en $t = 0$ s. La fuente, llamada **PULSE_VOLTAGE_SOURCE** en la lista **Source**, está cerca de la parte inferior izquierda del menú de partes **Sources**. Cuando se seleccione, aparecerá con un rótulo, un voltaje inicial, un voltaje de paso y una frecuencia. Todo puede cambiarse haciendo doble clic sobre el símbolo fuente para obtener el cuadro de diálogo **Pulse Voltage**. Como se muestra en la figura 12.63, el **Pulsed Value** se establecerá en 20 V, y el **Delay Time** en 0 s. El **Rise time** y el **Fall Time** permanecerán en los niveles por omisión de 1 ns. Para el presente análisis es deseable un **Pulse Width** que sea por lo menos dos veces el periodo transitorio de 5τ del circuito. Para los valores elegidos de R y L, $\tau = L/R = 10$ mH/100 $\Omega = 0.1$ ms $= 100$ μs. El periodo transitorio de 5τ es, por tanto, 500 μs o 0.5 ms. Así, un **Pulse Width** de 1 ms parece apropiado con un **Period** de 2 ms. El resultado es una frecuencia de $f = 1/T = 1/2$ ms $= 500$ Hz. Cuando todo se ha establecido y seleccionado, los parámetros de la fuente de pulso aparecerán como se muestra en la figura 12.63. A continuación se colocan sobre la pantalla el resistor, el inductor y la tierra para completar el circuito.

Esta vez se desea ver los nombres de los nodos para poder llamarlos cuando se establezca el proceso de simulación. Esto se logra por medio de **Options-Preferences-Show node names**. En este caso se tienen dos —uno en la terminal

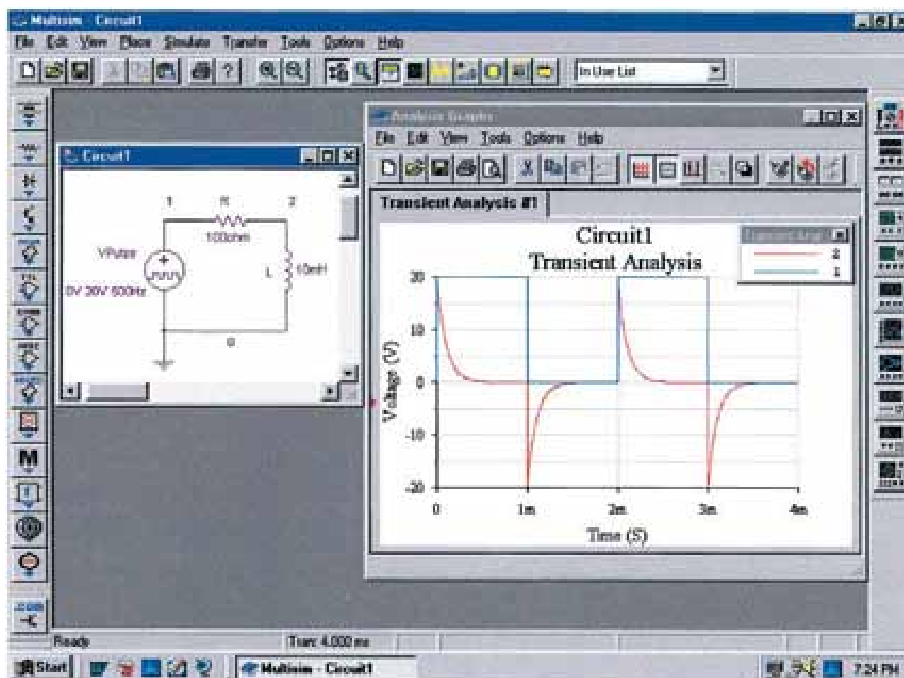
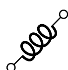


FIGURA 12.63

Uso de Electronics Workbench para obtener la respuesta transitoria para un circuito inductivo.



positiva de la fuente **(1)** y el otro en la parte superior del inductor **(2)** representando el voltaje en el inductor.

El proceso de simulación se inicia por la siguiente secuencia: **Simulate-Analysis-Transient Analysis**. El resultado es el cuadro de diálogo **Transient Analysis** en el que se escoge primero **Analysis Parameters**. Bajo **Parameters**, se emplea 0 s como el **Start time** y 4 ms como el **End time** para obtener dos ciclos enteros del voltaje aplicado. Después de habilitar **Maximum time step settings(TMAX)** se establece **Minimum number of time points** en 1000 para obtener una gráfica razonablemente buena durante el periodo transitorio que cambia con rapidez. Luego, debe seleccionarse la sección **Output variables** e informar al programa en qué niveles de voltaje y corriente se está interesado. En el lado izquierdo del cuadro de diálogo se encuentra una lista de **Variables** definidas para el circuito. A la derecha se localiza una lista de **Selected variables for analysis**. En medio se advierte **Plot during simulation** o **Remove**. Para mover una variable de la columna izquierda a la derecha, simplemente se selecciona en la columna izquierda y se elige **Plot during simulation**. La variable aparecerá entonces en la columna derecha. Para los fines de esta sección, parece apropiado trazar el voltaje aplicado y el voltaje en la bobina, por lo que **1** y **2** fueron movidos a la columna derecha. Luego se selecciona **Simulate**, y aparece una ventana titulada **Analysis Graphs** con las gráficas seleccionadas como se muestra en la figura 12.63. Se da clic sobre la tecla **Show/Hide Grid** (una retícula roja sobre un eje negro), y aparecen las líneas de la retícula. Entonces, seleccionar la tecla **Show/Hide Legend** a la derecha inmediata resultará en el pequeño cuadro de diálogo **Transient Anal** que identificará el color que va con cada voltaje nodal. En este caso, el color del voltaje aplicado es azul, y el voltaje en la bobina es rojo.

El voltaje de la fuente aparece como se esperaba con su transición a 20 V, 50% del ciclo de trabajo, y el periodo de 2 ms. El voltaje en la bobina saltó de inmediato al nivel de 20 V y entonces comenzó su decaimiento a 0 V en aproximadamente 0.5 ms como se predijo. Cuando el voltaje fuente cayó a cero, el voltaje en la bobina invirtió su polaridad para mantener la misma dirección de la corriente en el circuito inductivo. Recuérdese que para una bobina, el voltaje puede cambiar instantáneamente, pero el inductor "bloquea" cualquier cambio instantáneo en la corriente. Invirtiendo su polaridad, el voltaje en la bobina asegura la misma polaridad de voltaje en el resistor y, por tanto, la misma dirección de la corriente por la bobina y el circuito.

PROBLEMAS

SECCIÓN 12.2 Ley de Faraday de la inducción electromagnética

1. Si el flujo que atraviesa una bobina de 50 vueltas cambia a razón de 0.085 Wb/s, ¿cuál es el voltaje inducido en la bobina?
2. Determine la razón del cambio de flujo que atraviesa una bobina si se inducen 20 V en una bobina de 40 vueltas.
3. ¿Cuántas vueltas tiene una bobina si se le inducen 42 mV mediante un cambio de flujo de 0.003 Wb/s?

SECCIÓN 12.4 Autoinductancia

4. Encuentre la inductancia L en henrys del inductor de la figura 12.64.
5. Resuelva el problema 4 con $l = 4$ pulg y $d = 0.25$ pulg.

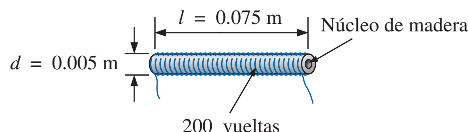
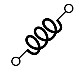


FIGURA 12.64
Problemas 4 y 5.



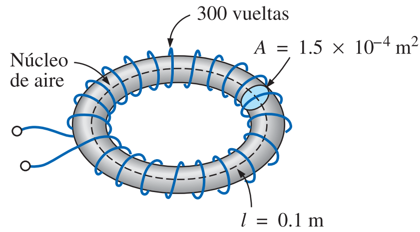


FIGURA 12.65
Problema 6.

6. **a.** Encuentre la inductancia L en henrys del inductor de la figura 12.65.
   b. Resuelva la parte (a) si se agrega un núcleo ferromagnético con una μ_r de 2000.

SECCIÓN 12.6 Voltaje inducido

7. Encuentre el voltaje inducido en una bobina de 5 H si la razón de cambio a través de la bobina es de:
   a. 0.5 A/s
   b. 60 mA/s
   c. 0.04 A/ms
8. Encuentre el voltaje inducido en un inductor de 50 mH si la corriente a través de la bobina cambia a razón de 0.1 mA/μs.
9. Encuentre la forma de onda para el voltaje inducido en una bobina de 200 mH si la corriente a través de la bobina es como se muestra en la figura 12.66.

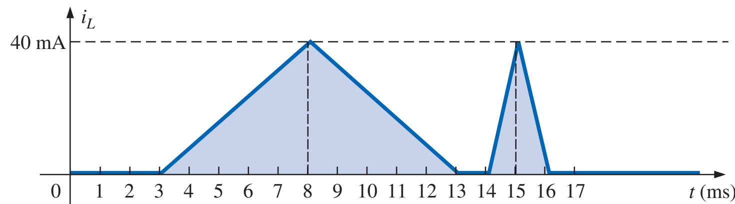


FIGURA 12.66
Problema 9.

10. Trace la forma de onda para el voltaje inducido en una bobina de 0.2 H si la corriente a través de la bobina es como se muestra en la figura 12.67.

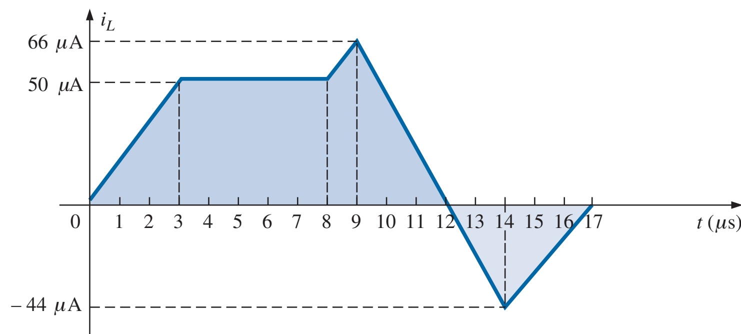
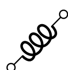


FIGURA 12.67
Problema 10.



***11.** Encuentre la forma de onda para la corriente de una bobina de 10 mH si el voltaje en la bobina sigue el patrón de la figura 12.68. La corriente i_L es de 4 mA en $t = 0$ s.

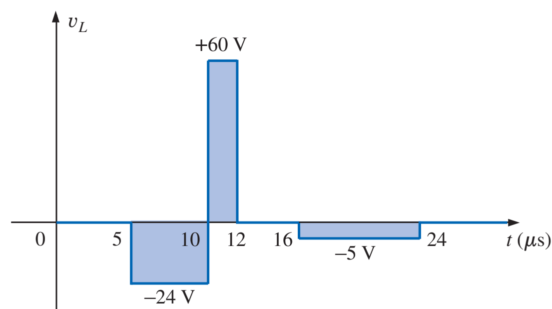


FIGURA 12.68
Problema 11.

SECCIÓN 12.7 Transitorios *R-L*: ciclo de almacenamiento

12. Para el circuito de la figura 12.69:

a. Determine la constante de tiempo.

b. Escriba la expresión matemática para la corriente i_L después de cerrar el interruptor.

c. Resuelva la parte (b) para v_L y v_R.

d. Determine i_L y v_L en una, tres y cinco constantes de tiempo.

e. Trace las formas de onda de i_L, v_L y v_R.

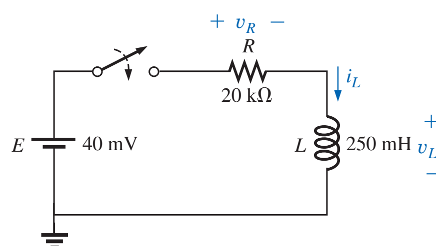


FIGURA 12.69
Problema 12.

13. Para el circuito de la figura 12.70:

a. Determine τ.

b. Escriba la expresión matemática para la corriente i_L después de cerrar el interruptor en $t = 0$ s.

c. Escriba las expresiones matemáticas para v_L y v_R después de cerrar el interruptor en $t = 0$ s.

d. Determine i_L y v_L en $t = 1\tau$, 3τ y 5τ.

e. Trace las formas de onda de i_L, v_L y v_R para la fase de almacenamiento.

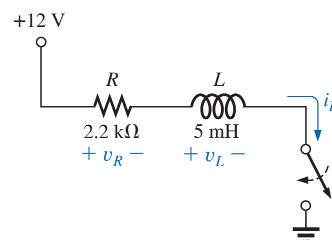


FIGURA 12.70
Problema 13.

SECCIÓN 12.8 Valores iniciales

14. Para la red de la figura 12.71:

a. Escriba las expresiones matemáticas para la corriente i_L y el voltaje v_L que siguen al cierre del interruptor. Observe la magnitud y la dirección de la corriente inicial.

b. Trace la forma de onda de i_L y v_L para todo el periodo desde el valor inicial hasta el nivel de estado estable.

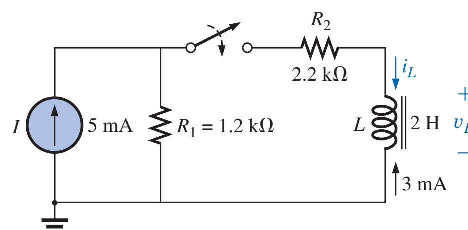
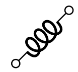


FIGURA 12.71
Problema 14.



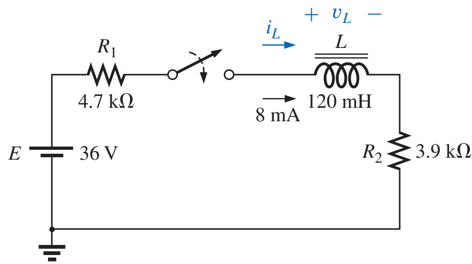


FIGURA 12.72
Problema 15.

15. Para la red de la figura 12.72:

a. Escriba las expresiones matemáticas para la corriente i_L y el voltaje v_L que siguen al cierre del interruptor. Observe la magnitud y la dirección de la corriente inicial.

b. Trace la forma de onda de i_L y v_L para todo el periodo desde el valor inicial hasta el nivel de estado estable.

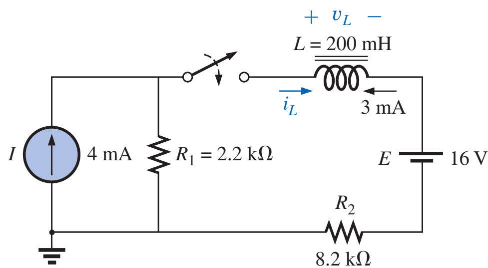


FIGURA 12.73
Problema 16.

***16.** Para la red de la figura 12.73:

a. Escriba las expresiones matemáticas para la corriente i_L y el voltaje v_L que siguen al cierre del interruptor. Observe la magnitud y la dirección de la corriente inicial.

b. Trace la forma de onda de i_L y v_L para todo el periodo desde el valor inicial hasta el nivel de estado estable.

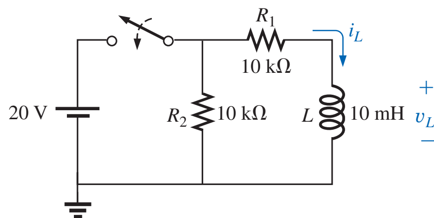


FIGURA 12.74
Problemas 17, 45 y 46.

SECCIÓN 12.9 Transitorios *R-L*: fase de decaimiento

17. Para la red de la figura 12.74:

a. Determine las expresiones matemáticas para la corriente i_L y el voltaje v_L cuando el interruptor está cerrado.

b. Resuelva la parte (a) si el interruptor se abre después de que ha transcurrido un periodo de cinco constantes de tiempo.

c. Trace las formas de onda de las partes (a) y (b) sobre el mismo conjunto de ejes.

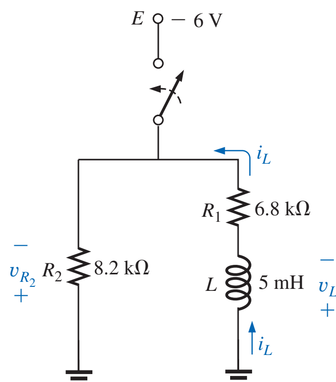


FIGURA 12.75
Problema 18.

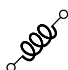
***18.** Para la red de la figura 12.75:

a. Escriba la expresión matemática para la corriente i_L y el voltaje v_L que siguen al cierre del interruptor.

b. Determine las expresiones matemáticas para i_L y v_L si el interruptor se abre después que ha pasado un periodo de cinco constantes de tiempo.

c. Trace las formas de onda de i_L y v_L para los periodos de tiempo definidos en las partes (a) y (b).

d. Trace la forma de onda para el voltaje en R_2 para el mismo periodo abarcado por i_L y v_L. Observe con cuidado las polaridades y direcciones definidas en la figura 12.75.



***19.** Para la red de la figura 12.76:

a. Determine las expresiones matemáticas para la corriente i_L y el voltaje v_L que siguen al cierre del interruptor.

b. Resuelva la parte (a) si el interruptor se abre en $t = 1\ \mu s$.

c. Trace las formas de onda de las partes (a) y (b) sobre los mismos ejes.

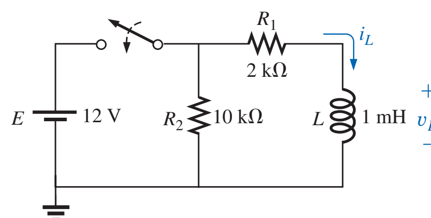


FIGURA 12.76
Problema 19.

SECCIÓN 12.10 Valores instantáneos

20. Con referencia a la solución del ejemplo 12.4, determine el tiempo en que la corriente i_L alcanza un nivel de 10 mA. Luego determine el tiempo en que el voltaje cae a un nivel de 10 V.

21. Con referencia a la solución del ejemplo 12.5, determine el tiempo en que la corriente i_L cae a 2 mA.

SECCIÓN 12.11 Equivalente de Thévenin: $\tau = L/R_{Th}$

22. a. Determine las expresiones matemáticas para i_L y v_L después del cierre del interruptor que aparece en la figura 12.77.

b. Determine i_L y v_L en $t = 100$ ns.

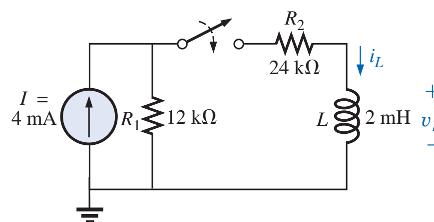


FIGURA 12.77
Problema 22.

***23. a.** Determine las expresiones matemáticas para i_L y v_L después del cierre del interruptor que aparece en la figura 12.78.

b. Calcule i_L y v_L en $t = 10\ \mu s$.

c. Escriba las expresiones matemáticas para la corriente i_L y el voltaje v_L si el interruptor es abierto en $t = 10\ \mu s$.

d. Trace las formas de onda de i_L y v_L para las partes (a) y (c).

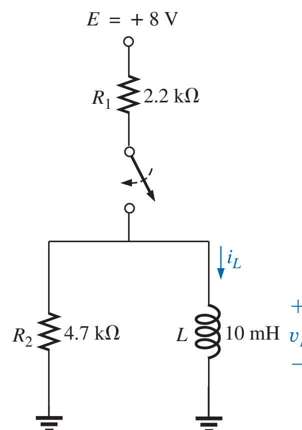
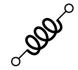


FIGURA 12.78
Problema 23.



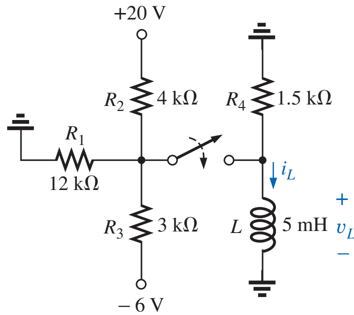


FIGURA 12.79
Problema 24.

***24. a.** Determine las expresiones matemáticas para i_L y v_L después del cierre del interruptor que aparece en la figura 12.79.

b. Determine i_L y v_L después de dos constantes de tiempo de la fase de almacenamiento.

c. Escriba las expresiones matemáticas para la corriente i_L y el voltaje v_L si el interruptor se abre en el instante definido en la parte (b).

d. Trace las formas de onda de i_L y v_L para las partes (a) y (c).

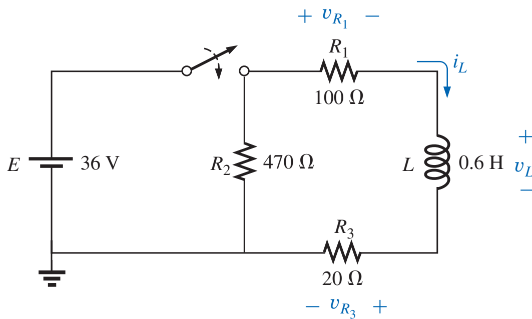


FIGURA 12.80
Problema 25.

***25.** Para la red de la figura 12.80, el interruptor está cerrado en $t = 0$ s.

a. Determine v_L en $t = 25$ ms.

b. Encuentre v_L en $t = 1$ ms.

c. Calcule v_{R_1} en $t = 1\tau$.

d. Encuentre el tiempo requerido para que la corriente i_L llegue a 100 mA.

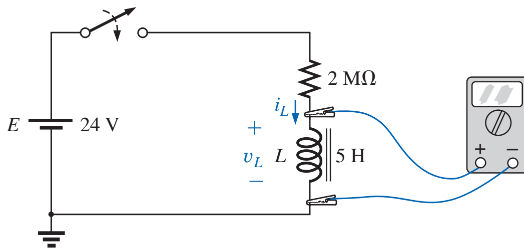


FIGURA 12.81
Problemas 26 y 27.

***26.** El interruptor para la red de la figura 12.81 ha estado cerrado aproximadamente 1 h. Entonces se abre en el tiempo definido como $t = 0$ s.

a. Determine el tiempo requerido para que la corriente i_R caiga a 1 mA.

b. Encuentre el voltaje v_L en $t = 1$ ms.

c. Calcule v_{R_3} en $t = 5\tau$.

27. La red de la figura 12.81 emplea un DMM con una resistencia interna de 10 MΩ en modo de voltímetro. El interruptor es cerrado en $t = 0$ s.

a. Encuentre el voltaje en la bobina un instante después que el interruptor se cierra.

b. ¿Cuál es el valor final de la corriente i_L?

c. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir antes de que i_L alcance 10 μA?

d. ¿Cuál es la lectura del voltímetro en $t = 12\ \mu$s?

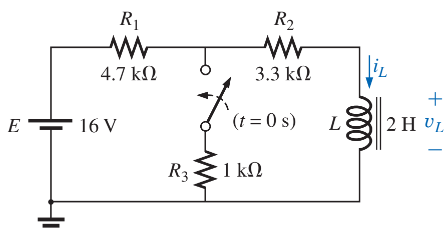
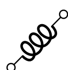


FIGURA 12.82
Problema 28.

***28.** El interruptor que aparece en la figura 12.82 ha estado abierto un largo tiempo; luego se cierra en $t = 0$ s.

a. Escriba la expresión matemática para la corriente i_L y el voltaje v_L después del cierre del interruptor.

b. Trace la forma de onda de i_L y v_L desde el valor inicial hasta el nivel de estado estable.



***29.** El interruptor de la figura 12.83 ha estado cerrado por un largo tiempo; luego se abre en $t = 0$ s.
   a. Escriba la expresión matemática para la corriente i_L y el voltaje v_L después que el interruptor se abre.
   b. Trace la forma de onda de i_L y v_L desde el valor inicial hasta el nivel de estado estable.

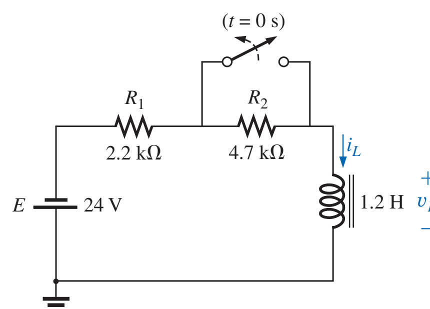


FIGURA 12.83
Problema 29.

***30.** El interruptor de la figura 12.84 ha estado abierto por un largo tiempo; luego se cierra en $t = 0$ s.
   a. Escriba la expresión matemática para la corriente i_L y el voltaje v_L después que el interruptor se cierra.
   b. Trace la forma de onda para i_L y v_L desde el valor inicial hasta el nivel de estado estable.

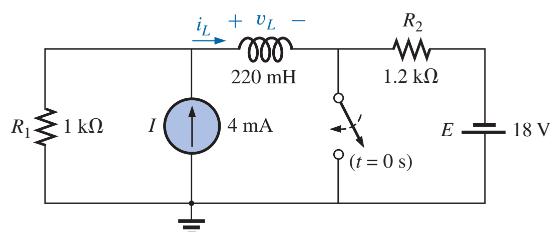


FIGURA 12.84
Problemas 30 y 43.

SECCIÓN 12.12 Inductores en serie y en paralelo

31. Encuentre la inductancia total de los circuitos de la figura 12.85.

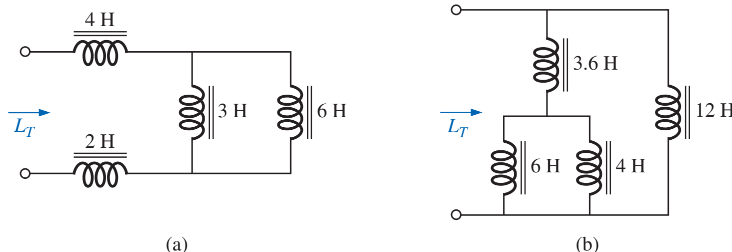


FIGURA 12.85
Problema 31.

32. Reduzca las redes de la figura 12.86 al menor número de elementos.

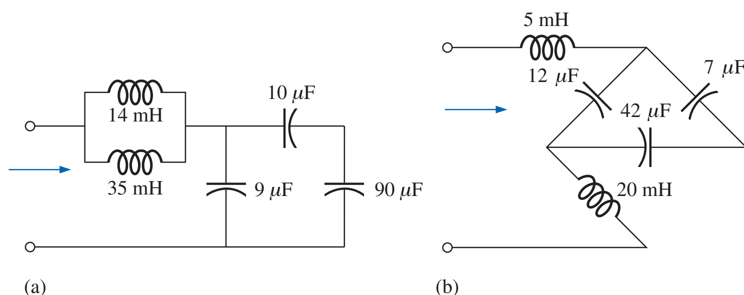
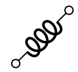


FIGURA 12.86
Problema 32.



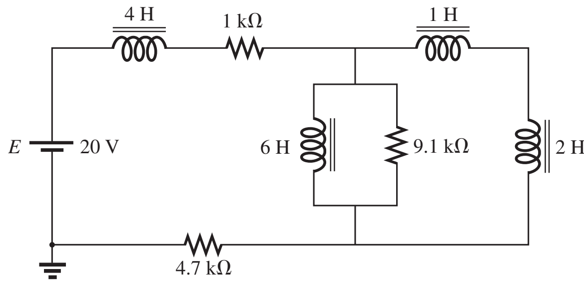


FIGURA 12.87
Problema 33.

33. Reduzca la red de la figura 12.87 al menor número de componentes.

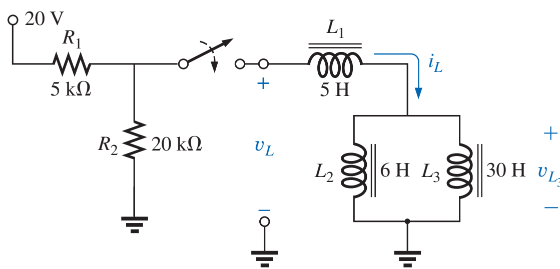


FIGURA 12.88
Problema 34.

***34.** Para la red de la figura 12.88:

a. Encuentre las expresiones matemáticas para el voltaje v_L y la corriente i_L que siguen al cierre del interruptor.

b. Trace las formas de onda de v_L e i_L obtenidas en la parte (a).

c. Determine la expresión matemática para el voltaje v_{L_3} que sigue al cierre del interruptor, y trace la forma de onda.

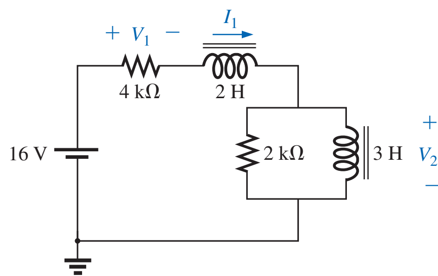


FIGURA 12.89
Problemas 35 y 38.

SECCIÓN 12.13 Circuitos *R-L* y *R-L-C* con entradas de cd

Para los problemas del 35 al 37, suponga que el voltaje en cada capacitor y la corriente por cada inductor han alcanzado sus valores finales.

35. Encuentre los voltajes V_1 y V_2 y la corriente I_1 para el circuito de la figura 12.89.

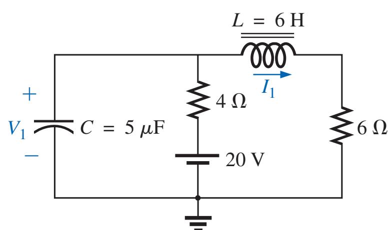
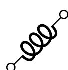


FIGURA 12.90
Problemas 36 y 39.

36. Encuentre la corriente I_1 y el voltaje V_1 para el circuito de la figura 12.90.



37. Encuentre el voltaje V_1 y la corriente a través de cada inductor en el circuito de la figura 12.91.

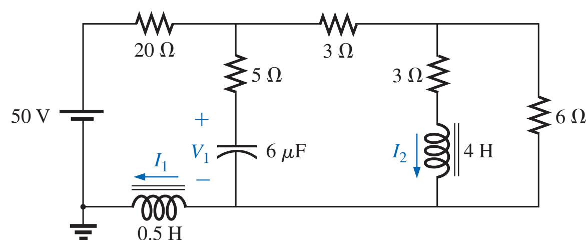


FIGURA 12.91
Problemas 37 y 40.

SECCIÓN 12.14 Energía almacenada por un inductor

38. Encuentre la energía almacenada en cada inductor del problema 35.

39. Encuentre la energía almacenada en el capacitor y el inductor del problema 36.

40. Encuentre la energía almacenada en cada inductor del problema 37.

SECCIÓN 12.16 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

***41.** Verifique los resultados del ejemplo 12.6 usando la función VPULSE y un ancho de pulso (*PW*) igual a cinco constantes de tiempo de la red en carga.

***42.** Verifique los resultados del ejemplo 12.3 usando la función VPULSE y un *PW* igual a 1 ns.

***43.** Verifique los resultados del problema 30 usando la función VPULSE y la corriente inicial apropiada.

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

44. Escriba un programa que proporcione una solución general para el circuito de la figura 12.14; esto es, dados los parámetros de la red, genere las ecuaciones para i_L, v_L y v_R.

45. Escriba un programa que proporcione una solución general para las fases de almacenamiento y decaimiento de la red de la figura 12.74; esto es, dados los valores de la red, el programa debe generar las ecuaciones para i_L y v_L en cada fase. En este caso, suponga que la fase de almacenamiento ha pasado por cinco constantes de tiempo antes de que empiece la fase de decaimiento.

46. Resuelva el problema 45, pero suponga que la fase de almacenamiento no se completó, requiriéndose que se determinen los valores instantáneos de i_L y v_L cuando el interruptor esté abierto.

GLOSARIO

Autoinductancia (L) Medida de la capacidad de una bobina de oponerse a cualquier cambio en la corriente a través de ella y almacenar energía en forma de un campo magnético en la región que la rodea.

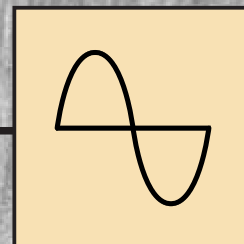
Choke Término aplicado a menudo a un inductor debido a su capacidad de resistir un cambio en corriente a través de él.

Inductor Elemento fundamental de sistemas eléctricos construido de numerosas vueltas de alambre alrededor de un núcleo ferromagnético o un núcleo de aire.

Ley de Faraday Ley que relaciona el voltaje inducido en una bobina con el número de vueltas en la bobina y la razón a la que el flujo que atraviesa la bobina está cambiando.

Ley de Lenz Esta ley establece que un efecto inducido es siempre de naturaleza tal que se opone a la causa que lo produce.

13



Formas de onda senoidales alternas

13.1 INTRODUCCIÓN

Hasta este punto, el análisis se ha limitado a redes de cd, es decir, redes en las que las corrientes o los voltajes están fijos en magnitud excepto por los efectos transitorios. Ahora nos concentraremos en el análisis de redes donde la magnitud de la fuente varía de una forma definida. De interés particular es el voltaje variable en el tiempo que se encuentra comercialmente disponible en grandes cantidades y por lo general se denomina *voltaje de ca*. (Las letras *ca* son una abreviatura de *corriente alterna.*) Para ser rigurosos, diremos que la terminología *voltaje de ca* o *corriente de ca* no es suficiente para describir el tipo de señal que se estará analizando. Cada forma de onda de la figura 13.1 es una **forma de onda alterna** disponible a partir de fuentes comerciales. El término *alterna* indica solamente que la forma de onda varía entre dos niveles que se definen dentro de una secuencia de tiempo establecida (Figura 13.1). Y para ser

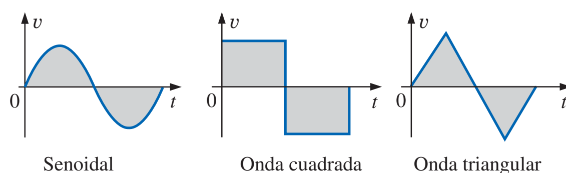
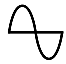


FIGURA 13.1
Formas de onda alternas.

absolutamente correctos, los términos *senoidal*, *onda cuadrada* u *onda triangular* también deberán aplicarse. El patrón de interés particular es la **forma de onda senoidal de ca** para el voltaje de la figura 13.1. Dado que este tipo de señal se encuentra en la amplia mayoría de los casos, las frases abreviadas *voltaje de ca* y *corriente de ca* son comúnmente aplicadas sin prestarse a confusión. Para los otros patrones de la figura 13.1, el término descriptivo siempre estará presente, pero con frecuencia la abreviatura *ca* es eliminada, dando por resultado la denominación de formas de onda *de onda cuadrada* o *de onda triangular*.



Uno de los motivos importantes para concentrarse en el voltaje senoidal de ca es que se trata del voltaje generado por los servicios públicos en todo el mundo. Otras razones incluyen su aplicación en sistemas eléctricos, electrónicos, de comunicación e industriales. Además, los capítulos siguientes mostrarán que la forma de onda en sí misma posee varias características que dan por resultado una respuesta única cuando se aplica a los elementos eléctricos básicos. La amplia diversidad de teoremas y métodos presentados para las redes de cd también será aplicada a los sistemas senoidales de ca. Aunque la aplicación de señales senoidales elevará el nivel matemático requerido, una vez que se entienda la notación presentada en el capítulo 14, la mayoría de los conceptos introducidos en los capítulos de cd podrán aplicarse a las redes de ca con un mínimo de dificultad añadida.

El cada vez mayor número de sistemas computacionales utilizados en la comunidad industrial requiere, cuando menos, una pequeña introducción a la terminología utilizada con formas de onda de pulso y la respuesta de algunas configuraciones fundamentales para la aplicación de tales señales. El capítulo 24 atenderá tal propósito.

13.2 CARACTERÍSTICAS Y DEFINICIONES DEL VOLTAJE SENOIDAL DE ca

Generación

Los voltajes senoidales de ca están disponibles a partir de una diversidad de fuentes. La fuente más común es el típico contacto eléctrico doméstico, el cual proporciona un voltaje de ca que se origina en una planta de energía; tal planta de energía, por lo regular, se alimenta mediante energía hidráulica, aceite, gas o fusión nuclear. En todo caso, un *generador de ca* (también llamado *alternador*), como se muestra en la figura 13.2(a), es el componente principal en el proceso de conversión de energía.

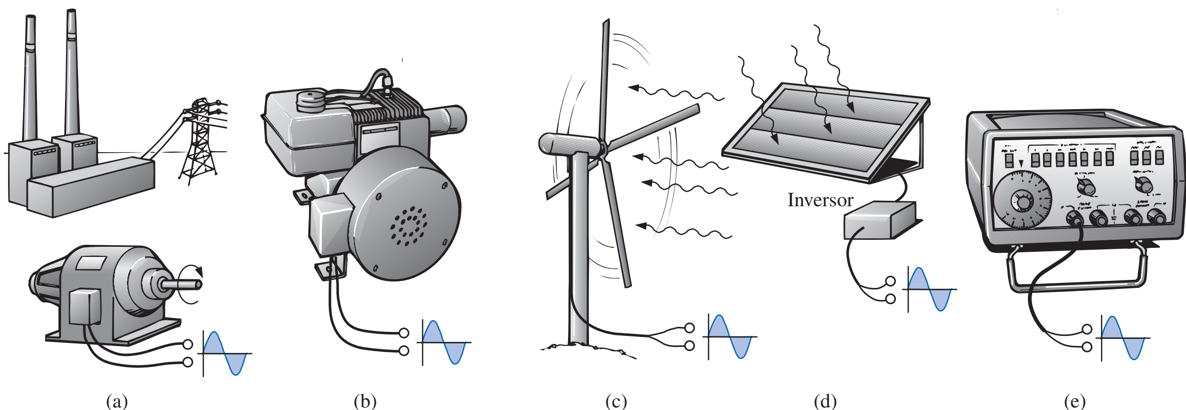
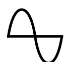


FIGURA 13.2
Distintas fuentes de energía de ca: (a) planta generadora; (b) generador portátil de ca; (c) estación de energía eólica; (d) panel solar; (e) generador de funciones.

La potencia que llega al eje, desarrollada por una de las fuentes de energía referidas, hará girar un *rotor* (construido de polos magnéticos alternos) dentro de un conjunto de devanados alojados dentro del *estator* (la parte estacionaria del dínamo) e inducirá un voltaje en los devanados del estator, según lo define la ley de Faraday,



$$e = N\frac{d\phi}{dt}$$

Mediante un adecuado diseño del generador, se desarrolla un voltaje senoidal de ca que puede ser transformado a niveles más altos para distribuirlo a través de las líneas de alimentación hacia el consumidor. Para ubicaciones aisladas donde no se han instalado líneas de alimentación, se dispone de generadores portátiles de ca [Figura 13.2(b)] que funcionan a base de gasolina. Sin embargo, al igual que las plantas de energía más grandes, un generador de ca es una parte integral del diseño.

En un esfuerzo por conservar los recursos naturales mundiales, la energía eólica y la energía solar están recibiendo un mayor interés en las diversas zonas del mundo que cuentan con tales fuentes de energía disponibles en un nivel y duración que hacen viable el proceso de conversión. Las hélices giratorias de la estación de energía eólica [Figura 13.2(c)] están conectadas directamente al eje de un generador de ca para proporcionar el voltaje de ca descrito líneas arriba. Mediante energía luminosa absorbida en forma de *fotones*, las celdas solares [Figura 13.2(d)] puede generar voltajes de cd. Mediante un encapsulado electrónico denominado *inversor*, el voltaje de cd puede ser convertido a uno de naturaleza senoidal. Embarcaciones, vehículos recreativos, etc., hacen uso frecuente del proceso de inversión en áreas aisladas.

Voltajes senoidales de ca con características que pueden ser controladas por el usuario están disponibles a partir de *generadores de funciones*, como el de la figura 13.2(e). Al configurar los distintos interruptores y controlar la posición de las perillas en la carátula del instrumento, es posible generar voltajes senoidales con diferentes valores pico y diferentes velocidades de repetición. El generador de funciones desempeña un papel integral en la investigación de la diversidad de teoremas, métodos de análisis y temas que se presentarán en los capítulos siguientes.

Definiciones

La forma de onda senoidal de la figura 13.3, con su notación adicional correspondiente, será utilizada como un modelo para definir algunos términos básicos

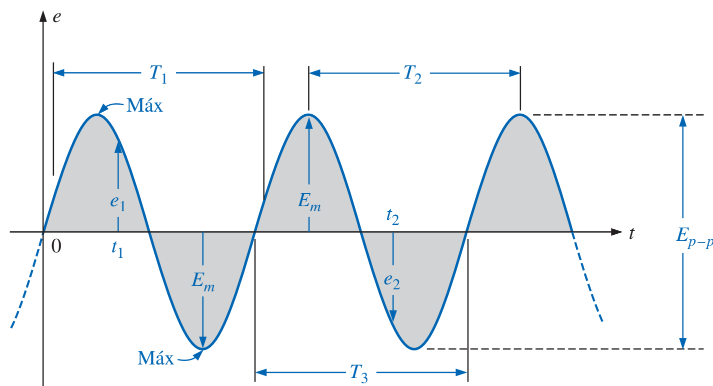
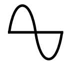


FIGURA 13.3
Parámetros importantes para un voltaje senoidal.

relacionados a continuación. Sin embargo, estos términos pueden aplicarse a cualquier forma de onda alternante. Es importante recordar, a medida que se avance a través de las distintas definiciones, que la escala vertical se encuentra en volts o ampere y la escala horizontal *siempre* está en unidades de tiempo.

Forma de onda: Trayectoria trazada por una cantidad, tal como el voltaje en la figura 13.3, graficada como función de alguna variable como el tiempo (igual que líneas arriba), posición, grados, radianes, temperatura, etcétera.



Valor instantáneo: Magnitud de una forma de onda en algún instante en el tiempo; denotada por letras minúsculas (e_1, e_2).

Amplitud pico: Valor máximo de una forma de onda medido a partir de su *valor promedio* o *medio*, denotado por letras mayúsculas (como E_m para fuentes de voltaje y V_m para la caída de voltaje en la carga). Para la forma de onda de la figura 13.3, el valor promedio es cero volts, y E_m es como lo define la figura.

Valor pico: Valor máximo instantáneo de una función medido a partir del nivel de cero volts. Para la forma de onda de la figura 13.3, la amplitud pico y el valor pico son iguales, dado que el valor promedio de la función es cero volts.

Valor pico a pico: Denotado por $E_{p\text{-}p}$ o $V_{p\text{-}p}$, es el voltaje completo entre los picos negativos y positivos de la forma de onda, es decir, la suma de la magnitud de los picos positivos y negativos.

Forma de onda periódica: Forma de onda que se repite continuamente después del mismo intervalo de tiempo. La forma de onda de la figura 13.3 es una forma de onda periódica.

Periodo (T): Intervalo de tiempo entre repeticiones sucesivas de una forma de onda periódica (el periodo $T_1 = T_2 = T_3$ en la figura 13.3), siempre que puntos similares sucesivos de la forma de onda periódica se utilicen para determinar T.

Ciclo: Parte de una forma de onda contenida en *un periodo*. Los ciclos dentro de T_1, T_2 y T_3 de la figura 13.3 pueden parecer diferentes en la figura 13.4, pero todos están limitados por un periodo y, por tanto, satisfacen la definición de ciclo.

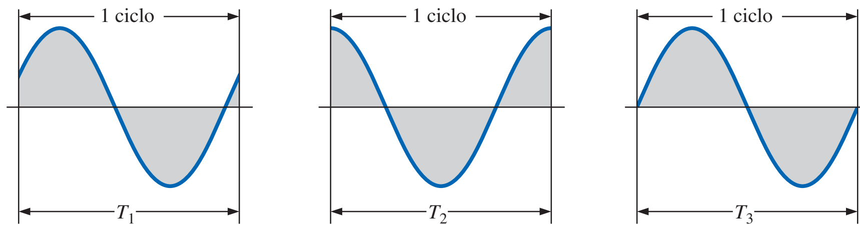


FIGURA 13.4
Definición del ciclo y del periodo de una forma de onda senoidal.

Frecuencia (f): Número de ciclos que suceden en un segundo. La frecuencia de la forma de onda de la figura 13.5(a) es de 1 ciclo por segundo, y la de la figura 13.5(b) es de 2½ ciclos por segundo. Si una forma de onda de aspecto similar tiene un periodo de 0.5 s [Figura 13.5(c)], la frecuencia será de 2 ciclos por segundo.

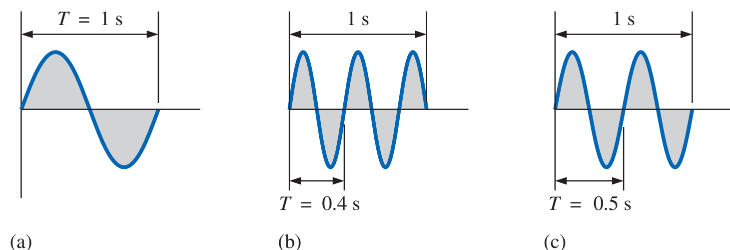
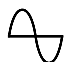


FIGURA 13.5
Demostración del efecto de una frecuencia cambiante sobre el periodo de una forma de onda senoidal.



La unidad de medición para la frecuencia es el *hertz* (Hz), donde:

$$1 \text{ hertz (Hz)} = 1 \text{ ciclo por segundo (c/s)} \tag{13.1}$$

La unidad hertz se deriva del apellido de Heinrich Rudolph Hertz (Figura 13.6), quien realizó las primeras investigaciones en el área de corrientes y voltajes alternos y su efecto sobre los elementos básicos *R*, *L* y *C*. La frecuencia estándar para América del Norte es de 60 Hz, mientras que para Europa es predominantemente de 50 Hz.

Como sucede con todos los estándares, cualquier variación de la norma ocasionará dificultades. En 1993 la ciudad de Berlín, Alemania, recibió toda su energía de plantas orientales, cuya frecuencia de salida variaba entre 50.03 y 51 Hz. El resultado de esto fue que los relojes se adelantaban hasta cuatro minutos al día. Las alarmas se desconectaban demasiado rápido, las videocaseteras se apagaban antes del final del programa, etc., obligando a que los relojes continuamente se reajustaran. Sin embargo, en 1994, cuando la energía se vinculó con el resto de Europa, el estándar preciso de 50 Hz fue restablecido y todo mundo pudo estar nuevamente en tiempo.

Utilizando una escala logarítmica (descrita con todo detalle en el capítulo 23), es posible escalar un espectro de frecuencias desde 1 Hz hasta 1000 GHz sobre el mismo eje, como se muestra en la figura 13.7. Algunos términos localizados en los distintos espectros con probabilidad le resultarán familiares al lector debido a su experiencia diaria. Observe que el intervalo audible (oído humano) abarca sólo de 15 Hz a 20 kHz, pero la transmisión de señales de radio puede encontrarse entre 3 kHz y 300 GHz. El uniforme proceso de definición de los intervalos del espectro de radio-frecuencia desde VLF hasta EHF resulta evidente a partir de la longitud de las barras incluidas en la figura (aunque tenga presente que se trata de una escala logarítmica, por lo que las frecuencias contenidas dentro de cada segmento son muy diferentes). También se incluyen otras frecuencias de interés particular (televisión, banda civil, microondas, etc.) como referencia. Aunque es numéricamente sencillo hablar acerca de frecuencias en el intervalo de megahertz y gigahertz, tenga presente que una frecuencia de 100 MHz, por ejemplo, representa una forma de onda senoidal que cubre 100,000,000 ciclos en sólo un segundo, lo cual es un número increíble cuando se compara con los 60 Hz de nuestras fuentes de energía convencionales. El nuevo procesador Pentium 4 fabricado por Intel puede correr a una velocidad de 1.5 GHz. Intente imaginar un producto capaz de manejar 1,500,000,000,000 de instrucciones en sólo un segundo, otro logro increíble.

Dado que la frecuencia está inversamente relacionada con el periodo, es decir, cuando una se incrementa el otro disminuye en una magnitud similar, es posible relacionar ambos mediante la siguiente ecuación:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \begin{aligned} f &= \text{Hz} \\ T &= \text{segundos (s)} \end{aligned} \tag{13.2}$$

o

$$T = \frac{1}{f} \tag{13.3}$$

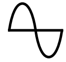
Alemán
(Hamburgo, Berlín, Karlsruhe)
(1857-1894)
Físico
Profesor de física, Karlsruhe Polytechnic y Universidad de Bonn



Cortesía de
Smithsonian Institution
Fotografía núm. 66,606

Estimulado por las primeras predicciones del físico inglés James Clerk Maxwell, Heinrich Hertz produjo *ondas electromagnéticas* en su laboratorio de Karlsruhe Polytechnic recién cumplidos los 30 años de edad. Los rudimentarios *transmisor* y *receptor* fueron, en esencia, los primeros en transmitir y recibir ondas de radio. Fue capaz de medir la *longitud de onda* de las ondas electromagnéticas y confirmó que la *velocidad de propagación* se encuentra en el mismo orden de magnitud que la luz. Además, demostró que las propiedades *reflectivas* y *refractivas* de las ondas electromagnéticas son las mismas que las asociadas con las ondas de calor y de luz. Verdaderamente fue desafortunado que tan ingenioso y emprendedor individuo muriera a la temprana edad de 37 años debido a una enfermedad ósea.

FIGURA 13.6
Heinrich Rudolph Hertz.



Microondas
Horno de microondas
EHF
30 GHz – 300 GHz (Frecuencias extremadamente altas)
SHF
3 GHz – 30 GHz (Frecuencias súper altas)
UHF
300 MHz – 3 GHz (Frecuencias ultra altas)
VHF
30 MHz – 300 MHz (Frecuencias muy altas)
HF
3 MHz – 30 MHz (Frecuencias altas)
MF
300 kHz – 3 MHz (Frecuencias medias)
LF
30 kHz – 300 kHz (Frecuencias bajas)
VLF
3 kHz – 30 kHz (Frecuencias muy bajas)
RADIO FRECUENCIAS (ESPECTRO)
3 kHz – 300 GHz
Infrarrojo
AUDIO FRECUENCIAS
15 Hz – 20 kHz

1 Hz | 10 Hz | 100 Hz | 1 kHz | 10 kHz | 100 kHz | 1 MHz | 10 MHz | 100 MHz | 1 GHz | 10 GHz | 100 GHz | 1000 GHz | f (escala logarítmica)

FM
88 MHz – 108 MHz

TV
Canales de televisión (2 – 6)
54 MHz – 88 MHz
Canales de televisión (7 – 13)
174 MHz – 216 MHz
Canales de televisión (14 – 83)
470 MHz – 890 MHz

CB
26.9 MHz – 27.4 MHz

Horno de microondas
2.45 GHz

Onda corta
1.5 MHz – 30 MHz

Radiolocalizadores
Radiolocalizadores VHF
30 MHz – 50 MHz
Radiolocalizadores UHF
405 MHz – 512 MHz

FIGURA 13.7
Áreas de aplicación de bandas de frecuencia específicas.



EJEMPLO 13.1 Encuentre el periodo de una forma de onda periódica con una frecuencia de:
a. 60 Hz.
b. 1000 Hz.

Soluciones:

a. $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60 \text{ Hz}} \cong 0.01667 \text{ s}$ o bien **16.67 ms**

(un valor recurrente dado que 60 Hz es tan común).

b. $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000 \text{ Hz}} = 10^{-3} \text{ s} = \mathbf{1\ ms}$

EJEMPLO 13.2 Determine la frecuencia de la forma de onda de la figura 13.8.

Solución: A partir de la figura, $T = (25 \text{ ms} - 5 \text{ ms}) = 20 \text{ ms}$, y

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \times 10^{-3} \text{ s}} = \mathbf{50\ Hz}$$

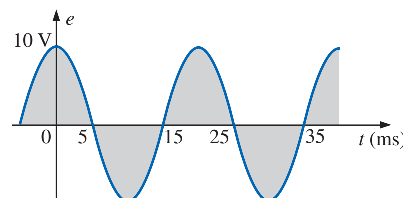


FIGURA 13.8
Ejemplo 13.2.

EJEMPLO 13.3 El **osciloscopio** es un instrumento que despliega formas de onda como las descritas líneas arriba. En la figura 13.9 aparece un patrón senoidal en el osciloscopio con las sensibilidades vertical y horizontal indicadas. La sensibilidad vertical define el voltaje asociado con cada división vertical de la pantalla. Prácticamente todas las pantallas de osciloscopio están divididas en un patrón cuadriculado de líneas separadas por 1 cm en las direcciones vertical y horizontal. La sensibilidad horizontal define el periodo asociado con cada división horizontal de la pantalla.

Para el patrón de la figura 13.9 y las sensibilidades asociadas, determine el periodo, la frecuencia y el valor pico de la forma de onda.

Solución: Un ciclo abarca cuatro divisiones. El periodo es, por tanto,

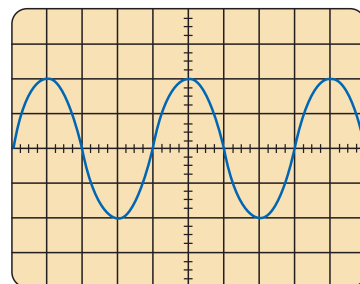
$$T = 4 \not{\text{div.}} \left(\frac{50\ \mu\text{s}}{\not{\text{div.}}} \right) = \mathbf{200\ \mu s}$$

y la frecuencia es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{200 \times 10^{-6} \text{ s}} = \mathbf{5\ kHz}$$

La altura vertical por encima del eje horizontal contiene dos divisiones. Por tanto,

$$V_m = 2 \not{\text{div.}} \left(\frac{0.1 \text{ V}}{\not{\text{div.}}} \right) = \mathbf{0.2\ V}$$



Sensibilidad vertical = 0.1 V/divisiones
Sensibilidad horizontal = 50 μs/divisiones

FIGURA 13.9
Ejemplo 13.3.

Dirección y polaridades definidas

En el siguiente análisis, veremos que es necesario establecer un conjunto de polaridades para el voltaje senoidal de ca y una dirección para la corriente senoidal de ca. En cada caso, la polaridad y la dirección de la corriente estarán por un instante en la parte positiva de la forma de onda senoidal. Esto se muestra en la figura 13.10 junto con los símbolos para el voltaje y la corriente de ca senoidales. Se emplea una letra minúscula por cada uno para indicar que la cantidad es dependiente del tiempo; es decir, su magnitud cambiará con el tiempo.

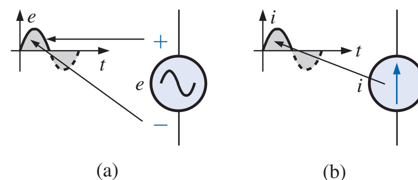
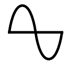


FIGURA 13.10
(a) Fuentes de voltaje de ca senoidales; (b) fuentes de corriente senoidales.



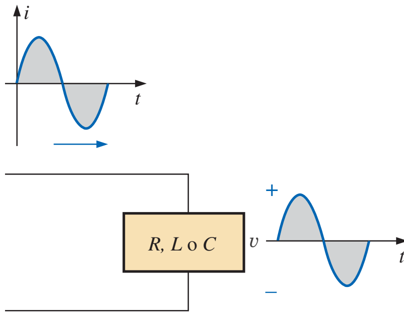


FIGURA 13.11
La onda senoidal es la única forma de onda alterna cuyo aspecto no se ve afectado por las características de respuesta de un resistor, inductor o capacitor puro.

La necesidad de definir polaridades y dirección de corriente se hará por completo evidente cuando consideremos redes de ca con múltiples fuentes. Observe en la última oración la ausencia del término *senoidal* después de la frase *redes de ca*. Esta frase será utilizada con mayor frecuencia a medida que avancemos; se deberá entender *senoidal* a menos que se indique otra cosa.

13.3 LA ONDA SENOIDAL

Los términos definidos en la sección anterior pueden aplicarse a cualquier tipo de forma de onda periódica, ya sea continua o discontinua. Sin embargo, la forma de onda senoidal es de particular importancia dado que se presta fácilmente para los cálculos matemáticos y los fenómenos físicos asociados con los circuitos eléctricos. Considere la fuerza de la siguiente aseveración:

La forma de onda senoidal es la única forma de onda alterna cuyo aspecto no se ve afectado por las características de respuesta de los elementos R, L y C.

En otras palabras, si el voltaje (o la corriente) en un resistor, bobina o capacitor es de naturaleza senoidal, la corriente resultante (o voltaje, respectivamente) de cada uno también tendrá características senoidales, como se muestra en la figura 13.11. Si una onda cuadrada o una onda triangular se aplicaran, éste no sería el caso.

La unidad de medición para el eje horizontal de la figura 13.12 es el *grado*. Una segunda unidad de medición utilizada con frecuencia es el **radián** (rad). Éste se define mediante un cuadrante de un círculo, tal como en la figura 13.13, donde la distancia sobre la circunferencia es igual al radio del círculo.

Si definimos a x como el número de intervalos de r (el radio) alrededor de la circunferencia del círculo, entonces:

$$C = 2\pi r = x \cdot r$$

y vemos que:

$$x = 2\pi$$

Por tanto, existen 2π radianes alrededor de un círculo de 360º, como se muestra en la figura 13.14, y

$$\boxed{2\pi \text{ rad} = 360°} \qquad \textbf{(13.4)}$$

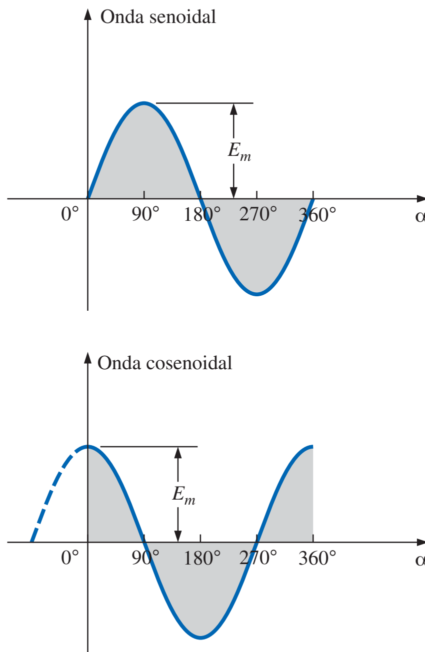


FIGURA 13.12
Onda senoidal y onda cosenoidal con el eje horizontal en grados.

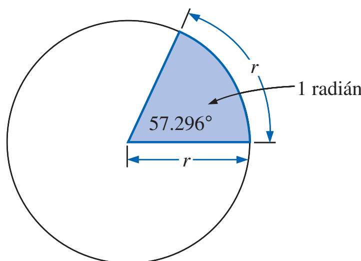


FIGURA 13.13
Definición del radián.

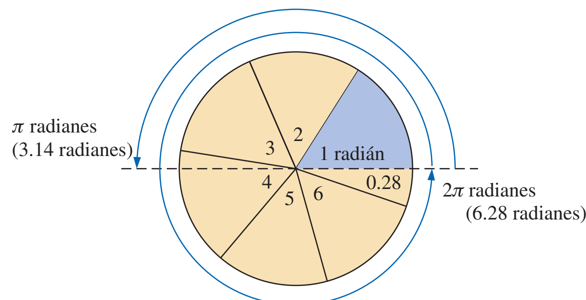
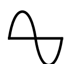


FIGURA 13.14
Existen 2π radianes en un círculo completo de 360°.



con: $$1 \text{ rad} = 57.296° \cong 57.3° \qquad (13.5)$$

Varias fórmulas eléctricas contienen un múltiplo de π. Por este motivo, en ocasiones es preferible medir los ángulos en radianes en lugar de hacerlo en grados.

La cantidad de π es la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro.

La magnitud π se ha determinado hasta un extenso número de cifras decimales, principalmente como un intento para ver si se presenta una secuencia repetitiva de números; lo cual no ha sucedido. Un ejemplo de este esfuerzo aparece a continuación:

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433 \ldots$$

Aunque la aproximación $\pi \cong 3.14$ se aplica con frecuencia, todos los cálculos en este libro utilizarán la función π según lo proporcionan las calculadoras científicas.

Para 180° y 360°, las dos unidades de medición se relacionan como se muestra en la figura 13.14. Las ecuaciones de conversión entre las dos son las siguientes:

$$\text{Radianes} = \left(\frac{\pi}{180°}\right) \times (\text{grados}) \qquad (13.6)$$

$$\text{Grados} = \left(\frac{180°}{\pi}\right) \times (\text{radianes}) \qquad (13.7)$$

Al aplicar estas ecuaciones encontramos:

$$\textbf{90°:} \quad \text{Radianes} = \frac{\pi}{180°}(90°) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \textbf{ rad}$$

$$\textbf{30°:} \quad \text{Radianes} = \frac{\pi}{180°}(30°) = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}} \textbf{ rad}$$

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}} \textbf{ rad:} \quad \text{Grados} = \frac{180°}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \textbf{60°}$$

$$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}} \textbf{ rad:} \quad \text{Grados} = \frac{180°}{\pi}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \textbf{270°}$$

Al usar el radián como la unidad de medición para la abscisa, obtendremos una onda senoidal, como se muestra en la figura 13.15.

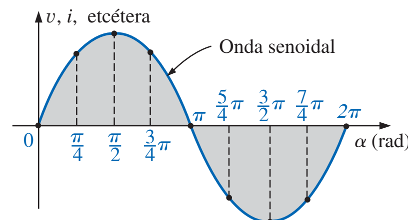
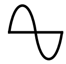


FIGURA 13.15
Gráfica de una onda senoidal en función de los radianes.

Resulta de particular interés que la forma de onda senoidal pueda obtenerse a partir de la longitud de la *proyección vertical* de un vector radial rotando en un movimiento circular uniforme sobre un punto fijo. Iniciando como se muestra en la figura 13.16(a) y realizando la gráfica de la amplitud (por encima y por debajo de cero) sobre las coordenadas trazadas a la derecha [Figuras de la 13.16(b) a la (i)], trazaremos toda una forma de onda senoidal una vez que el vector radial haya completado una rotación de 360° alrededor del centro.

La velocidad con que el vector radial rota sobre el centro, llamada **velocidad angular**, puede determinarse a partir de la siguiente ecuación:

$$\text{Velocidad angular} = \frac{\text{distancia (grados o radianes)}}{\text{tiempo (segundos)}} \qquad (13.8)$$



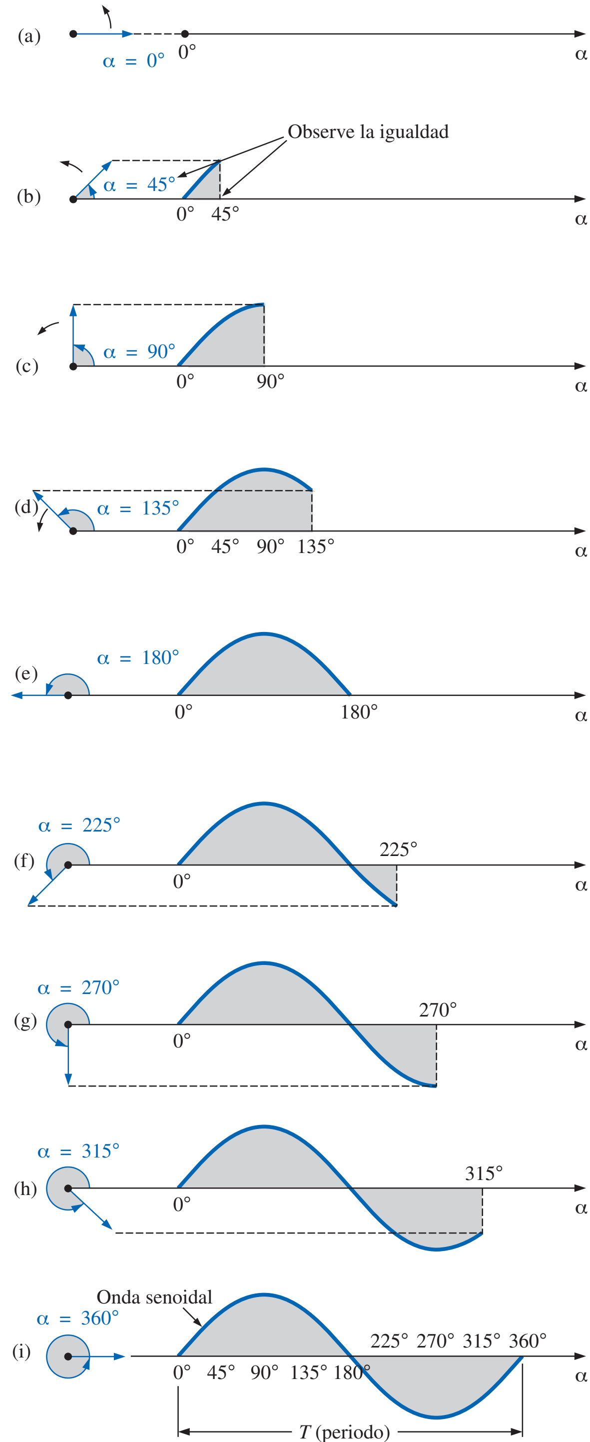
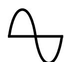


FIGURA 13.16

Generación de una forma de onda senoidal mediante la proyección vertical de un vector en rotación.



Al sustituir en la ecuación (13.8) y asignar la letra griega omega (ω) a la velocidad angular tenemos:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \tag{13.9}$$

y

$$\alpha = \omega t \tag{13.10}$$

Dado que normalmente ω se proporciona en radianes por segundo, el ángulo α obtenido mediante la ecuación (13.10) está, por lo general, en radianes. Si se requiere α en grados, debe aplicarse la ecuación (13.7). La importancia de recordar lo anterior se hará evidente en los ejemplos siguientes.

En la figura 13.16, el tiempo requerido para completar una revolución es igual al periodo (T) de la forma de onda senoidal de la figura 13.16(i). Los radianes subtendidos en este intervalo de tiempo son 2π. Al sustituir tenemos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(rad/s)} \tag{13.11}$$

Esta ecuación establece que mientras más pequeño sea el periodo de la forma senoidal de la figura 13.16(i), o más pequeño sea el intervalo de tiempo antes de que se genere un ciclo completo, mayor será la velocidad angular del vector radial en rotación. Desde luego, esta aseveración concuerda con lo aprendido hasta aquí. Ahora podemos dar un paso adelante y aplicar el hecho de que la frecuencia de la forma de onda generada está relacionada inversamente con el periodo de la propia forma de onda; es decir, $f = 1/T$. De esta manera,

$$\omega = 2\pi f \quad \text{(rad/s)} \tag{13.12}$$

Esta ecuación establece que mientras mayor sea la frecuencia de la forma de onda generada, mayor deberá ser la velocidad angular. Las ecuaciones (13.11) y (13.12) están verificadas de cierta forma mediante la figura 13.17, donde para el mismo vector radial, ω = 100 rad/s y 500 rad/s.

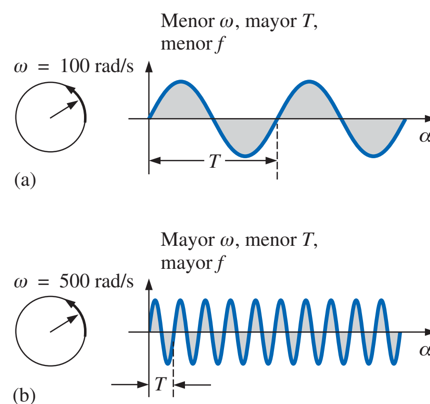


FIGURA 13.17
Demostración del efecto de ω sobre la frecuencia y el periodo.

EJEMPLO 13.4 Determine la velocidad angular de una onda senoidal con frecuencia de 60 Hz.

Solución:

$$\omega = 2\pi f = (2\pi)(60 \text{ Hz}) \cong \mathbf{377 \text{ rad/s}}$$

(un valor recurrente debido al predominio de los 60 Hz.)

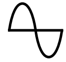
EJEMPLO 13.5 Determine la frecuencia y el periodo de la onda senoidal de la figura 13.17(b).

Solución: Dado que $\omega = 2\pi/T$,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{500 \text{ rad/s}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{500 \text{ rad/s}} = \mathbf{12.57 \text{ ms}}$$

y

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{12.57 \times 10^{-3} \text{ s}} = \mathbf{79.58 \text{ Hz}}$$



EJEMPLO 13.6 Dado $\omega = 200$ rad/s, determine cuánto le tomará a la forma de onda senoidal recorrer un ángulo de 90°.

Solución: Ecuación (13.10): $\alpha = \omega t$, y

$$t = \frac{\alpha}{\omega}$$

Sin embargo, α deberá sustituirse como $\pi/2$ (= 90°) dado que ω está en radianes por segundo:

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\pi/2 \text{ rad}}{200 \text{ rad/s}} = \frac{\pi}{400} \text{ s} = \mathbf{7.85 \text{ ms}}$$

EJEMPLO 13.7 Encuentre el ángulo que recorre una forma de onda senoidal de 60 Hz después de un lapso de 5 ms.

Solución: Ecuación (13.11): $\alpha = \omega t$, o

$$\alpha = 2\pi f t = (2\pi)(60 \text{ Hz})(5 \times 10^{-3} \text{s}) = \mathbf{1.885 \text{ rad}}$$

Si no se tiene cuidado, la respuesta podría interpretarse como 1.885°. Sin embargo,

$$\alpha\ (°) = \frac{180°}{\pi \text{ rad}}(1.885 \text{ rad}) = \mathbf{108°}$$

13.4 FORMATO GENERAL PARA EL VOLTAJE Y LA CORRIENTE SENOIDALES

El formato matemático básico para la forma de onda senoidal es:

$$A_m \text{ sen } \alpha \qquad \textbf{(13.13)}$$

donde A_m es el valor pico de la forma de onda y α es la unidad de medición para el eje horizontal, como se muestra en la figura 13.18.

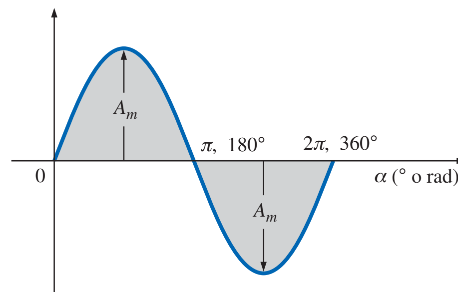
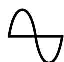


FIGURA 13.18
Función senoidal básica.

La ecuación $\alpha = \omega t$ establece que el ángulo α a través del cual pasará el vector en rotación de la figura 13.16 está determinado por la velocidad angular del vector en rotación y por el tiempo que el vector rota. Por ejemplo, para una velocidad angular particular (ω fija), mientras más tiempo se permita al vector radial girar (es decir, cuanto mayor sea el valor de t), mayor será el número de grados o radianes a través de los que pasará el vector. Al relacionar esta aseveración con la forma de onda senoidal, para una velocidad angular particular, a



mayor tiempo, mayor el número de ciclos mostrados. Para un intervalo de tiempo fijo, a mayor velocidad angular, mayor el número de ciclos generados.

Debido a la ecuación (13.10), el formato general de una onda senoidal puede también escribirse como:

$$\boxed{A_m \operatorname{sen} \omega t} \qquad \textbf{(13.14)}$$

con ωt como la unidad de medición horizontal.

Para cantidades eléctricas como la corriente y el voltaje, el formato general es:

$$i = I_m \operatorname{sen} \omega t = I_m \operatorname{sen} \alpha$$
$$e = E_m \operatorname{sen} \omega t = E_m \operatorname{sen} \alpha$$

donde las mayúsculas con el subíndice m representan la amplitud, y las minúsculas i y e representan el valor instantáneo de corriente o voltaje, respectivamente, en cualquier tiempo t. Este formato es particularmente importante porque presenta al voltaje o a la corriente senoidales como funciones del tiempo, el cual es la escala horizontal del osciloscopio. Recuerde que la sensibilidad horizontal de un osciloscopio se encuentra en tiempo por división y no en grados por centímetro.

EJEMPLO 13.8 Dado $e = 5 \operatorname{sen} \alpha$, determine e en $\alpha = 40°$ y $\alpha = 0.8\pi$.

Solución: Para $\alpha = 40°$,

$$e = 5 \operatorname{sen} 40° = 5(0.6428) = \mathbf{3.214\ V}$$

Para $\alpha = 0.8\pi$,

$$\alpha\ (°) = \frac{180°}{\pi}(0.8\pi) = 144°$$

y
$$e = 5 \operatorname{sen} 144° = 5(0.5878) = \mathbf{2.939\ V}$$

La conversión a grados no será requerida para la mayoría de las calculadoras científicas actuales dado que éstas pueden efectuar la función de forma directa. Primero, asegúrese de que la calculadora se encuentra en el modo RAD; luego, simplemente ingrese la medida en radianes y utilice la tecla trigonométrica apropiada (sen, cos, tan, etcétera).

El ángulo en el que un nivel de voltaje particular se alcanza puede determinarse al reacomodar la ecuación:

$$e = E_m \operatorname{sen} \alpha$$

de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{e}{E_m}$$

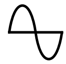
lo cual puede escribirse como:

$$\boxed{\alpha = \operatorname{sen}^{-1} \frac{e}{E_m}} \qquad \textbf{(13.15)}$$

De forma similar, para un nivel de corriente particular,

$$\boxed{\alpha = \operatorname{sen}^{-1} \frac{i}{I_m}} \qquad \textbf{(13.16)}$$

La función sen^{-1} se encuentra disponible en todas las calculadoras científicas.



EJEMPLO 13.9

a. Determine el ángulo en el que la magnitud de la función senoidal $v = 10$ sen $377t$ es de 4 V.
b. Determine el momento en que se alcanza la magnitud.

Soluciones:

a. Ecuación (13.15):

$$\alpha_1 = \text{sen}^{-1}\frac{v}{E_m} = \text{sen}^{-1}\frac{4\text{ V}}{10\text{ V}} = \text{sen}^{-1} 0.4 = \mathbf{23.578^\circ}$$

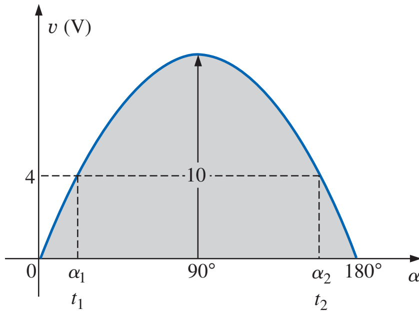


FIGURA 13.19
Ejemplo 13.9.

Sin embargo, la figura 13.19 muestra que la magnitud de 4 V (positiva) se alcanzará en dos puntos entre 0° y 180°. La segunda intersección está determinada por:

$$\alpha_2 = 180^\circ - 23.578^\circ = \mathbf{156.422^\circ}$$

Por tanto, en general, tenga presente que las ecuaciones (13.15) y (13.16) proporcionarán un ángulo con una magnitud entre 0° y 90°.

b. Ecuación (13.10): $\alpha = \omega t$, por lo cual $t = \alpha/\omega$. Sin embargo, α debe encontrarse en radianes. De esta forma,

$$\alpha\text{ (rad)} = \frac{\pi}{180^\circ}(23.578^\circ) = 0.411\text{ rad}$$

y
$$t_1 = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{0.411\text{ rad}}{377\text{ rad/s}} = \mathbf{1.09\text{ ms}}$$

Para la segunda intersección,

$$\alpha\text{ (rad)} = \frac{\pi}{180^\circ}(156.422^\circ) = 2.73\text{ rad}$$

$$t_2 = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{2.73\text{ rad}}{377\text{ rad/s}} = \mathbf{7.24\text{ ms}}$$

La onda senoidal también puede trazarse en función del *tiempo* sobre el eje horizontal. El periodo para cada intervalo puede determinarse a partir de $t = \alpha/\omega$, pero el camino más directo es simplemente encontrar el periodo T a partir de $T = 1/f$ y descomponerlo en los intervalos requeridos. Esta última técnica será demostrada en el ejemplo 13.10.

Antes de revisar el ejemplo, observe en particular la relativa simplicidad de la ecuación matemática que puede representar una forma de onda senoidal. Cualquier forma de onda alterna cuyas características difieran de las de la onda senoidal no podrá ser representada mediante un único término, sino que podría requerir dos, cuatro, seis o quizá un número infinito de términos para quedar representada con precisión. En el capítulo 25 se puede encontrar una descripción adicional de las formas de onda no senoidales.

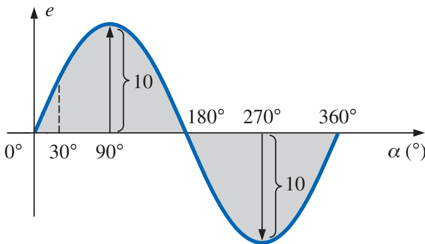


FIGURA 13.20
Ejemplo 13.10, eje horizontal en grados.

EJEMPLO 13.10 Trace $e = 10$ sen $314t$ con la abscisa:

a. el ángulo (α) en grados.
b. el ángulo (α) en radianes.
c. el tiempo (t) en segundos.

Soluciones:

a. Vea la figura 13.20. (Observe que no se requirieron cálculos.)
b. Vea la figura 13.21. (Una vez comprendida la relación entre grados y radianes, tampoco hay necesidad de realizar cálculos.)

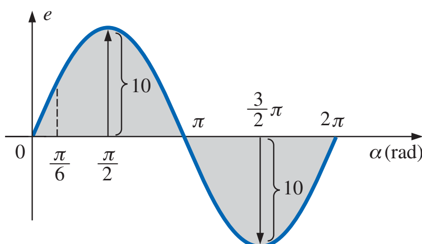
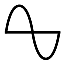


FIGURA 13.21
Ejemplo 13.10, eje horizontal en radianes.



c. 360°: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{314} = 20\text{ ms}$

180°: $\dfrac{T}{2} = \dfrac{20\text{ ms}}{2} = 10\text{ ms}$

90°: $\dfrac{T}{4} = \dfrac{20\text{ ms}}{4} = 5\text{ ms}$

30°: $\dfrac{T}{12} = \dfrac{20\text{ ms}}{12} = 1.67\text{ ms}$

Vea la figura 13.22.

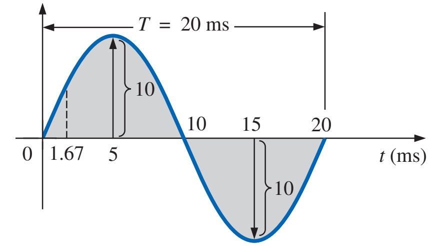


FIGURA 13.22
Ejemplo 13.10, eje horizontal en milisegundos.

EJEMPLO 13.11 Dada $i = 6 \times 10^{-3}$ sen $1000t$, determine i en $t = 2$ ms.

Solución:

$$\alpha = \omega t = 1000t = (1000\text{ rad/s})(2 \times 10^{-3}\text{ s}) = 2\text{ rad}$$

$$\alpha\ (°) = \frac{180°}{\pi\text{ rad}}(2\text{ rad}) = 114.59°$$

$$i = (6 \times 10^{-3})(\text{sen } 114.59°)$$
$$= (6\text{ mA})(0.9093) = \mathbf{5.46\ mA}$$

13.5 RELACIONES DE FASE

Hasta ahora, hemos considerado únicamente ondas senoidales que tienen máximos en $\pi/2$ y $3\pi/2$, con un valor de cero en 0, π y 2π, como se muestra en la figura 13.21. Si la forma de onda se desplaza a la derecha o a la izquierda de 0°, la expresión deriva en:

$$A_m \text{ sen}(\omega t \pm \theta) \tag{13.17}$$

donde θ es el ángulo en grados o radianes que la forma de onda ha sido desplazada.

Si la forma de onda pasa a través del eje horizontal con una pendiente de *tendencia positiva* (incrementándose con el tiempo) *antes* de 0°, como se muestra en la figura 13.23, la expresión es:

$$A_m \text{ sen}(\omega t + \theta) \tag{13.18}$$

Y $\omega t = \alpha = 0°$, la magnitud está determinada por A_m sen θ. Si la forma de onda pasa a través del eje horizontal con una pendiente de tendencia positiva *después* de 0°, como se muestra en la figura 13.24, la expresión es:

$$A_m \text{ sen}(\omega t - \theta) \tag{13.19}$$

Y en $\omega t = \alpha = 0°$, la magnitud es A_m sen$(-\theta)$, lo cual, mediante una identidad trigonométrica, es $-A_m$ sen θ.

Si la forma de onda cruza el eje horizontal con una pendiente de tendencia positiva de 90° ($\pi/2$) antes, como se muestra en la figura 13.25, se denomina *onda cosenoidal*; es decir,

$$\text{sen}(\omega t + 90°) = \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t \tag{13.20}$$

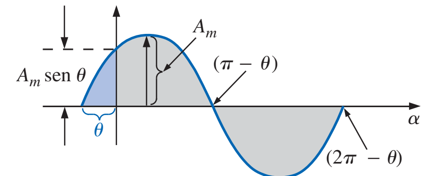


FIGURA 13.23
Definición del desplazamiento de fase para una función senoidal que cruza el eje horizontal con una pendiente positiva antes de 0°.

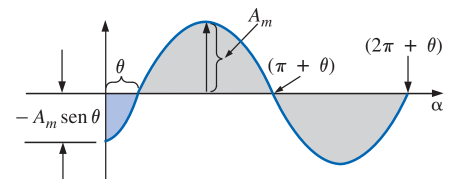


FIGURA 13.24
Definición del desplazamiento de fase para una función senoidal que cruza el eje horizontal con una pendiente positiva después de 0°.

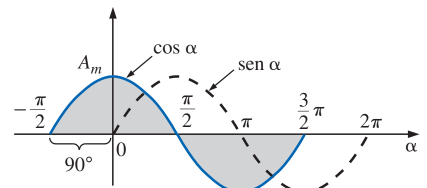
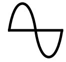


FIGURA 13.25
Relación de fase entre una onda senoidal y una onda cosenoidal.



o bien:

$$\text{sen}\ \omega t = \cos(\omega t - 90°) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \textbf{(13.21)}$$

Los términos *adelantar* y *retrasar* se utilizan para indicar la relación entre dos formas de onda senoidales de la *misma frecuencia* graficadas sobre el mismo conjunto de ejes. En la figura 13.25, la curva del coseno se dice que *adelanta* a la curva del seno por 90°, y la curva del seno se dice que se *retrasa* con respecto a la curva del coseno por 90°. Los 90° son referidos como el ángulo de fase entre las dos formas de onda. Para expresarlo en el lenguaje que se aplica comúnmente: las formas de onda están *fuera de fase* por 90°. Observe que el ángulo de fase entre las dos formas de onda se mide entre aquellos dos puntos que cada una cruza sobre el eje horizontal con la *misma pendiente*. Si ambas formas de onda cruzan el eje en el mismo punto con la misma pendiente, se dice que están *en fase*.

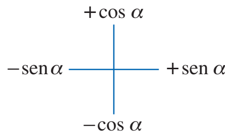


FIGURA 13.26
Herramienta gráfica para encontrar la relación entre funciones específicas de seno y coseno.

La relación geométrica entre las distintas formas de las funciones de seno y coseno pueden obtenerse a partir de la figura 13.26. Por ejemplo, comenzando en la posición sen α, vemos que cos α se encuentra a 90º adicionales en dirección contraria a las manecillas del reloj. Por tanto, $\cos \alpha = \text{sen}(\alpha + 90°)$. Para $-\text{sen}\ \alpha$ debemos recorrer 180° en dirección contraria a las manecillas del reloj (o en dirección de las manecillas del reloj) de forma que $-\text{sen}\ \alpha = \text{sen}(\alpha \pm 180°)$, y así sucesivamente, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \text{sen}(\alpha + 90°) \\ \text{sen}\ \alpha &= \cos(\alpha - 90°) \\ -\text{sen}\ \alpha &= \text{sen}(\alpha \pm 180°) \\ -\cos \alpha &= \text{sen}(\alpha + 270°) = \text{sen}(\alpha - 90°) \\ &\text{etcétera} \end{aligned} \qquad \textbf{(13.22)}$$

Además, debemos tener presente que:

$$\begin{aligned} \text{sen}(-\alpha) &= -\text{sen}\ \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \end{aligned} \qquad \textbf{(13.23)}$$

Si una expresión senoidal se presenta como:

$$e = -E_m\ \text{sen}\ \omega t$$

el signo negativo estará asociado con la parte senoidal de la expresión, no con el valor pico E_m. En otras palabras, la expresión, si no es por conveniencia, deberá escribirse como:

$$e = E_m(-\text{sen}\ \omega t)$$

Dado que:

$$-\text{sen}\ \omega t = \text{sen}(\omega t \pm 180°)$$

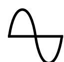
la expresión también puede escribirse como:

$$e = E_m\ \text{sen}(\omega t \pm 180°)$$

revelando que un signo negativo puede reemplazarse por un cambio de 180º en el ángulo de fase (+ o −); es decir,

$$\begin{aligned} e = -E_m\ \text{sen}\ \omega t &= E_m\ \text{sen}(\omega t + 180°) \\ &= E_m\ \text{sen}(\omega t - 180°) \end{aligned}$$

Una gráfica de cada expresión mostrará claramente su equivalencia. Por tanto, existen dos representaciones matemáticas correctas para las funciones.



La **relación de fase** entre dos formas de onda indica cuál de éstas se adelanta o retrasa con respecto a la otra, y por cuántos grados o radianes.

EJEMPLO 13.12 ¿Cuál es la relación de fase entre las formas de onda senoidal de cada uno de los siguientes conjuntos?

a. $v = 10\ \text{sen}(\omega t + 30°)$
   $i = 5\ \text{sen}(\omega t + 70°)$
b. $i = 15\ \text{sen}(\omega t + 60°)$
   $v = 10\ \text{sen}(\omega t - 20°)$
c. $i = 2\cos(\omega t + 10°)$
   $v = 3\ \text{sen}(\omega t - 10°)$
d. $i = -\text{sen}(\omega t + 30°)$
   $v = 2\ \text{sen}(\omega t + 10°)$
e. $i = -2\cos(\omega t - 60°)$
   $v = 3\ \text{sen}(\omega t - 150°)$

Soluciones:

a. Vea la figura 13.27.
   ***i* adelanta a *v* por 40°, o *v* está retrasado con respecto a *i* por 40°.**

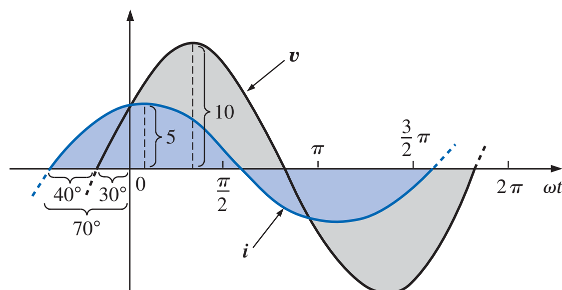


FIGURA 13.27
Ejemplo 13.12; i adelanta a v por 40°.

b. Vea la figura 13.28.
   ***i* adelanta a *v* por 80°, o *v* está retrasado con respecto a *i* por 80°.**

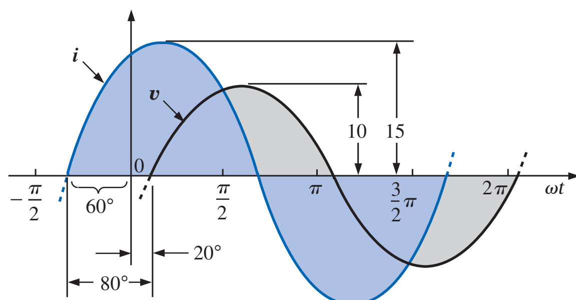
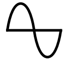


FIGURA 13.28
Ejemplo 13.12; i adelanta a v por 80º.



c. Vea la figura 13.29.

$$i = 2\cos(\omega t + 10°) = 2\,\text{sen}(\omega t + 10° + 90°)$$
$$= 2\,\text{sen}(\omega t + 100°)$$

***i* adelanta a *v* por 110°, o *v* está retrasado con respecto a *i* por 110°.**

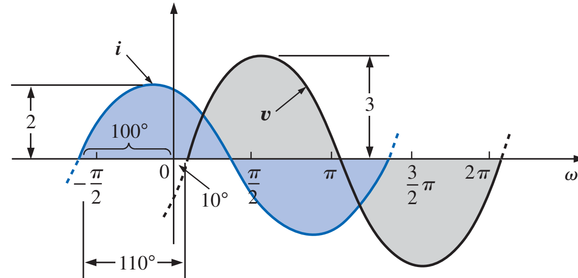


FIGURA 13.29
Ejemplo 13.12; i adelanta a v por 110º.

d. Vea la figura 13.30.

$$-\text{sen}(\omega t + 30°) = \text{sen}(\omega t + 30° - 180°)$$
$$= \text{sen}(\omega t - 150°)$$

Observar

***v* adelanta a *i* por 160°, o *i* está retrasada con respecto a *v* por 160°.**

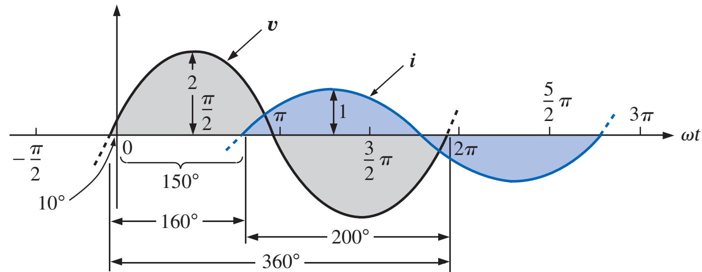


FIGURA 13.30
Ejemplo 13.12; v adelanta a i por 160º.

O mediante:

$$-\text{sen}(\omega t + 30°) = \text{sen}(\omega t + 30° + 180°)$$
$$= \text{sen}(\omega t + 210°)$$

Observar

***i* adelanta a *v* por 200°, o *v* está retrasado con respecto a *i* por 200°.**

e. Vea la figura 13.31.

$$i = -2\cos(\omega t - 60°) = 2\cos(\omega t - 60° - 180°)$$
$$= 2\cos(\omega t - 240°)$$

Por elección propia

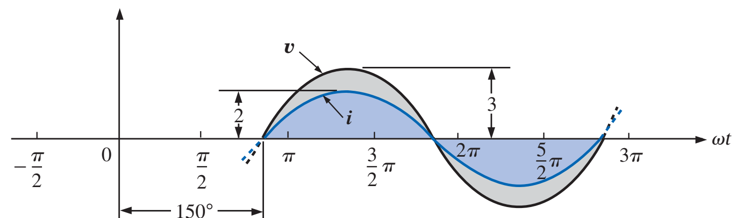
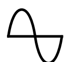


FIGURA 13.31
Ejemplo 13.12; v e i están en fase.



Sin embargo, $\cos \alpha = \text{sen}(\alpha + 90°)$

por lo que: $$2 \cos(\omega t - 240°) = 2 \text{ sen}(\omega t - 240° + 90°)$$
$$= 2 \text{ sen}(\omega t - 150°)$$

***v* e *i* están en fase.**

Mediciones de fase

El procedimiento de conexión para utilizar un osciloscopio y medir ángulos de fase se cubre con mayor detalle en la sección 15.13. Sin embargo, la ecuación para determinar el ángulo de fase puede presentarse utilizando la figura 13.32. Primero, observe que cada función senoidal tiene la misma frecuencia, permitiendo el uso de cualquier forma de onda para determinar el periodo. Para la forma de onda seleccionada en la figura 13.32, el periodo incluye 5 divisiones en 0.2 ms/división. El desplazamiento de fase entre las formas de onda (independientemente de cuál se encuentre adelantada o retrasada) es de 2 divisiones. Dado que el periodo completo representa un ciclo de 360°, puede formarse la siguiente relación [a partir de la cual es posible obtener la ecuación (13.24)]:

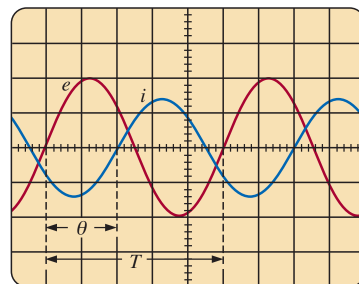
$$\frac{360°}{T \text{ (número de divisiones)}} = \frac{\theta}{\text{desplazamiento de fase (número de divisiones)}}$$

y
$$\theta = \frac{\text{desplazamiento de fase (número de divisiones)}}{T \text{ (número de divisiones)}} \times 360° \qquad \textbf{(13.24)}$$

Sustituir en la ecuación (13.24) resultará en:

$$\theta = \frac{(2 \text{ div.})}{(5 \text{ div.})} \times 360° = 144°$$

y e adelanta a i por 144°.



Sensibilidad vertical = 2 V/divisiones
Sensibilidad horizontal = 0.2 ms/divisiones

FIGURA 13.32
Cálculo del ángulo de fase entre formas de onda utilizando un osciloscopio de trazo doble.

13.6 VALOR PROMEDIO

Aunque el concepto de **valor promedio** es importante en la mayoría de los campos técnicos, a menudo su verdadero significado no se comprende bien. En la figura 13.33(a), por ejemplo, podría requerirse la altura promedio de la arena para determinar el volumen de arena disponible. La altura promedio de la arena es la altura obtenida si la distancia de un extremo al otro se mantiene mientras el volumen se nivela, como se muestra en la figura 13.33(b). El área bajo del montículo de la figura 13.33(a) será entonces igual al área bajo la forma rectangular de la figura 13.33(b) según lo determina $A = b \times h$. Evidentemente, la profundidad (hacia dentro de la página) de la arena deberá ser la misma para las figuras 13.33(a) y (b) para que las conclusiones anteriores tengan significado.

En la figura 13.33 la distancia se midió de un extremo al otro. En la figura 13.34(a) la distancia se extiende más allá del extremo de la pila original de la figura 13.33. La situación podría ser la de un jardinero que quisiera conocer la altura promedio de la arena si la distribuye sobre una distancia como la definida en la figura 13.34(a). El resultado de una distancia mayor es como el mostrado en la figura 13.34(b). La altura promedio ha disminuido en comparación con la figura 13.33. Por tanto, resulta evidente que mientras mayor sea la distancia, menor será el valor promedio.

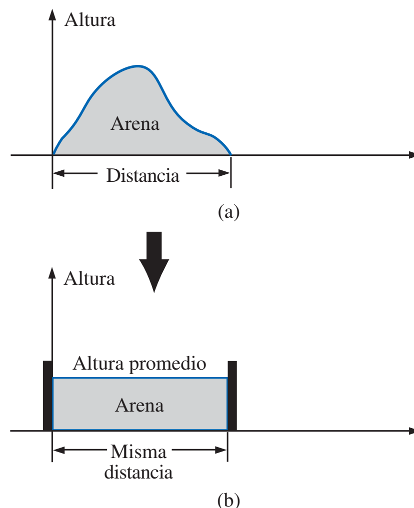
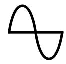


FIGURA 13.33
Definición de valor promedio.



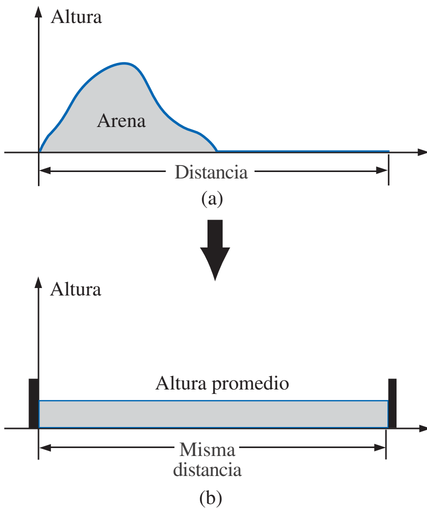


FIGURA 13.34
Efecto de la distancia (longitud) sobre el valor promedio.

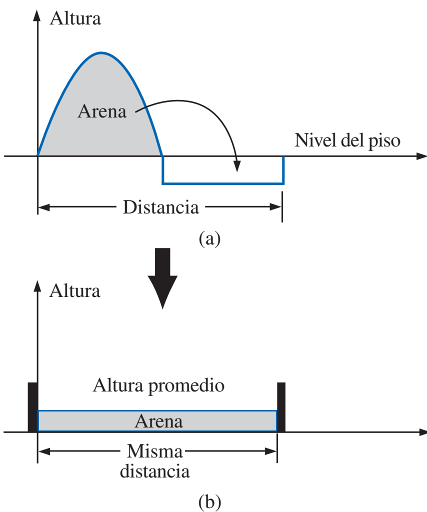


FIGURA 13.35
Efecto de las depresiones (excursiones negativas) sobre el valor promedio.

Si el parámetro de distancia incluye una depresión, como se muestra en la figura 13.35(a), alguna porción de la arena será utilizada para llenar la depresión, dando por resultado incluso un valor promedio menor para el jardinero, como se muestra en la figura 13.35(b). Para una forma de onda senoidal, la depresión podría tener la misma apariencia que el montículo de arena (durante un ciclo completo), dando por resultado un valor promedio a nivel del piso (o cero volts para un voltaje senoidal durante un periodo completo).

Después de recorrer una distancia considerable en automóvil, algunos conductores buscan calcular su velocidad promedio del recorrido completo. Esto, por lo general, se realiza dividiendo las millas recorridas entre las horas requeridas para cubrir esa distancia. Por ejemplo, si una persona recorrió 245 millas en 5 horas, la velocidad promedio fue de 245 mi/5 h, o 49 mi/h. Esta misma distancia podría haberse recorrido a distintas velocidades durante varios intervalos de tiempo, como se muestra en la figura 13.36.

Al calcular el área total bajo la curva para las 5 h dividiéndola entre 5 h (el tiempo total del recorrido), obtendremos el mismo resultado de 49 mi/h; es decir,

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{área bajo la curva}}{\text{longitud de la curva}} \qquad \textbf{(13.25)}$$

$$\begin{aligned}\text{Velocidad promedio} &= \frac{A_1 + A_2}{5\text{ h}}\\ &= \frac{(60\text{ mi/h})(2\text{ h}) + (50\text{ mi/h})(2.5\text{ h})}{5\text{ h}}\\ &= \frac{245}{5}\text{ mi/h}\\ &= \mathbf{49\text{ mi/h}}\end{aligned}$$

La ecuación (13.25) puede ser ampliada para incluir cualquier cantidad variable, como corriente o voltaje, si dejamos que G denote el valor promedio, como sigue:

$$G\text{ (valor promedio)} = \frac{\text{suma algebraica de áreas}}{\text{longitud de la curva}} \qquad \textbf{(13.26)}$$

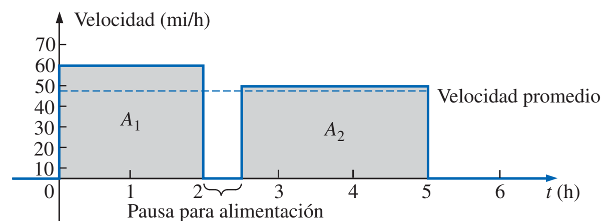
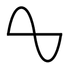


FIGURA 13.36
Gráfica de la velocidad en función del tiempo para una excursión en automóvil.

La suma *algebraica* de las áreas deberá ser determinada, dado que algunas contribuciones de área estarán por debajo del eje horizontal. A las áreas por encima del eje se les asignará un signo positivo, y las que se ubiquen por debajo del eje recibirán un signo negativo. Entonces, un valor promedio positivo estará por encima del eje, y un valor negativo, por debajo de éste.

El valor promedio de *cualquier* corriente o voltaje será el valor indicado en un medidor de cd. En otras palabras, durante un ciclo completo, el valor promedio



es el valor de cd equivalente. En el análisis de circuitos electrónicos que se considerará en un curso posterior, se aplicarán tanto fuentes de cd como de ca sobre la misma red. Entonces será necesario conocer o determinar los componentes de cd (o valor promedio) y ca del voltaje o de la corriente en distintas partes del sistema.

EJEMPLO 13.13 Determine el valor promedio de las formas de onda de la figura 13.37.

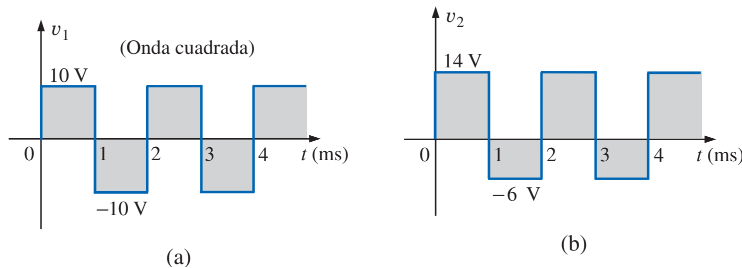


FIGURA 13.37
Ejemplo 13.13.

Soluciones:

a. Por inspección, el área localizada encima del eje es igual al área por debajo del eje durante un ciclo, dando por resultado un valor promedio de cero volts. Al utilizar la ecuación (13.26):

$$G = \frac{(10\text{ V})(1\text{ ms}) - (10\text{ V})(1\text{ ms})}{2\text{ ms}}$$

$$= \frac{0}{2\text{ ms}} = \mathbf{0\ V}$$

b. Al utilizar la ecuación (13.26):

$$G = \frac{(14\text{ V})(1\text{ ms}) - (6\text{ V})(1\text{ ms})}{2\text{ ms}}$$

$$= \frac{14\text{ V} - 6\text{ V}}{2} = \frac{8\text{ V}}{2} = \mathbf{4\ V}$$

como se muestra en la figura 13.38.

En realidad, la forma de onda de la figura 13.37(b) es simplemente la onda cuadrada de la figura 13.37(a) con un desplazamiento de cd de 4 V; es decir,

$$v_2 = v_1 + 4\text{ V}$$

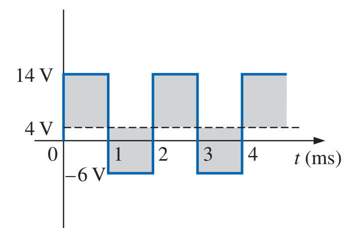


FIGURA 13.38
Definición del valor promedio para la forma de onda de la figura 13.37(b).

EJEMPLO 13.14 Encuentre los valores promedio de las siguientes formas de onda durante un ciclo completo:

a. Figura 13.39.
b. Figura 13.40.

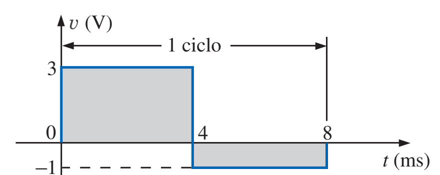
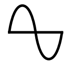


FIGURA 13.39
Ejemplo 13.14, inciso (a).



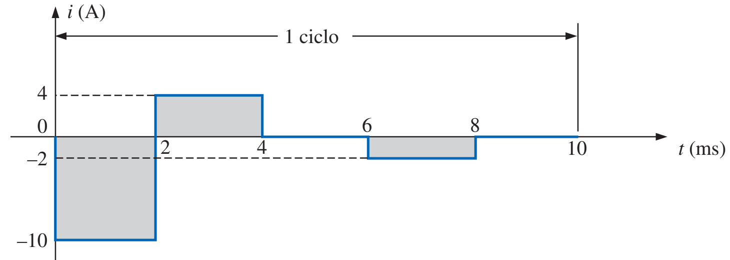


FIGURA 13.40
Ejemplo 13.14, inciso (b).

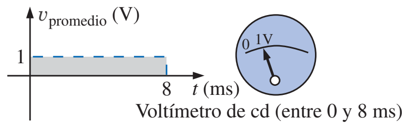


FIGURA 13.41
Respuesta de un medidor de cd a la forma de onda de la figura 13.39.

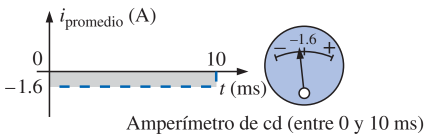


FIGURA 13.42
Respuesta de un medidor de cd a la forma de onda de la figura 13.40.

Soluciones:

a. $G = \dfrac{+(3\text{ V})(4\text{ ms}) - (1\text{ V})(4\text{ ms})}{8\text{ ms}} = \dfrac{12\text{ V} - 4\text{ V}}{8} = \mathbf{1\ V}$

Observe la figura 13.41.

b. $G = \dfrac{-(10\text{ V})(2\text{ ms}) + (4\text{ V})(2\text{ ms}) - (2\text{ V})(2\text{ ms})}{10\text{ ms}}$

$= \dfrac{-20\text{ V} + 8\text{ V} - 4\text{ V}}{10} = -\dfrac{16\text{ V}}{10} = \mathbf{-1.6\ V}$

Observe la figura 13.42.

En el ejemplo anterior encontramos el área bajo las curvas utilizando una simple fórmula geométrica. Sin embargo, si hubiésemos encontrado una onda senoidal o cualquier otra forma inusual, tendríamos que haber calculado el área por algún otro medio. Es posible obtener una buena aproximación del área intentando reproducir la forma de la onda original utilizando varios rectángulos pequeños u otras formas familiares, cuyas áreas ya conozcamos mediante simples fórmulas geométricas. Por ejemplo,

el área del pulso positivo (o negativo) de una onda senoidal es $2A_m$.

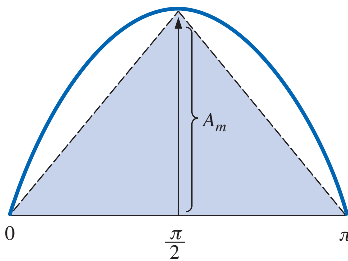


FIGURA 13.43
Aproximación a la apariencia del pulso positivo de una forma de onda senoidal mediante dos triángulos rectángulos.

Al aproximar esta forma de onda mediante dos triángulos (Figura 13.43), obtenemos (utilizando *área* = 1/2 *base* × *altura* para el área de un triángulo) una idea tosca del área real.

$$\text{Área sombreada} = 2\left(\frac{1}{2}bh\right) = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)\overbrace{\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{b}\overbrace{(A_m)}^{h}\right] = \frac{\pi}{2}A_m$$
$$\cong 1.58A_m$$

Una aproximación más cercana podría ser un rectángulo con dos triángulos similares (Figura 13.44):

$$\text{Área} = A_m\frac{\pi}{3} + 2\left(\frac{1}{2}\,bh\right) = A_m\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\,A_m = \frac{2}{3}\pi A_m$$
$$= 2.094A_m$$

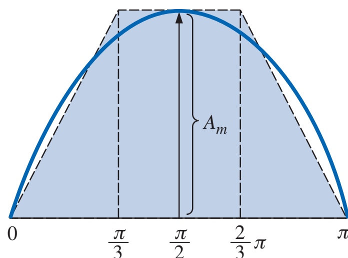
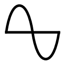


FIGURA 13.44
Ésta es una mejor aproximación a la apariencia del pulso positivo de una forma de onda senoidal.

lo cual, desde luego, está más cercano al área real. Si se utilizara un número infinito de formas, se obtendría la respuesta exacta de $2A_m$. Para formas de onda irregulares, este método puede ser especialmente útil cuando se busca información tal como el valor promedio.

El proceso de cálculo que genera la solución exacta de $2A_m$ se conoce como *integración*. La integración se presenta aquí sólo para hacer este método identificable para el lector; no es necesario tener habilidad en su uso para continuar



con este texto. Sin embargo, es una herramienta matemática útil y deberá ser aprendida. Para encontrar el área bajo el pulso positivo de una onda senoidal utilizando integración tenemos que:

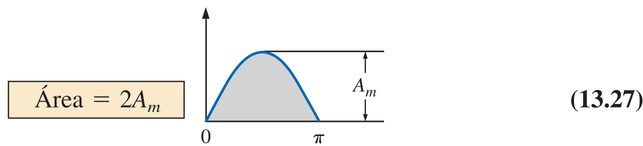
$$\text{Área} = \int_0^{\pi} A_m \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$$

donde $\int$ es el símbolo de integración, 0 y π son los límites de integración, A_m sen α es la función que se integrará, y $d\alpha$ indica que estamos integrando con respecto a α.

Al integrar obtenemos:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= A_m[-\cos \alpha]_0^{\pi} \\ &= -A_m(\cos \pi - \cos 0°) \\ &= -A_m[-1 - (+1)] = -A_m(-2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Área} = 2A_m} \qquad \textbf{(13.27)}$$

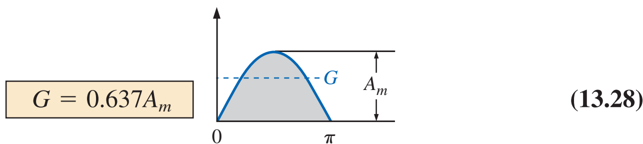


Dado que conocemos el área bajo el pulso positivo (o negativo), podemos determinar fácilmente el valor promedio de la región positiva (o negativa) de un pulso de onda senoidal mediante la aplicación de la ecuación (13.26):

$$G = \frac{2A_m}{\pi}$$

y

$$\boxed{G = 0.637A_m} \qquad \textbf{(13.28)}$$



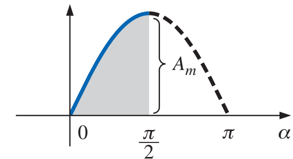


FIGURA 13.45
Cálculo del valor promedio de la mitad del pulso positivo de una forma de onda senoidal.

Para la forma de onda de la figura 13.45,

$$G = \frac{(2A_m/2)}{\pi/2} = \frac{2A_m}{\pi} \quad \text{(promedia lo mismo que para un pulso completo)}$$

EJEMPLO 13.15 Determine el valor promedio de la forma de onda senoidal de la figura 13.46.

Solución: Por inspección resulta evidente que:

el valor promedio de una forma de onda senoidal pura durante un ciclo completo es cero.

Ecuación (13.26):

$$G = \frac{+2A_m - 2A_m}{2\pi} = \mathbf{0\ V}$$

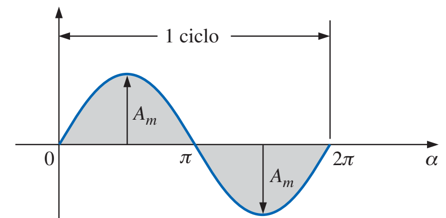


FIGURA 13.46
Ejemplo 13.15.

EJEMPLO 13.16 Determine el valor promedio de la forma de onda de la figura 13.47.

Solución: El valor pico a pico de la función senoidal es 16 mV + 2 mV = 18 mV. Por tanto, la amplitud pico de la forma de onda senoidal es 18 mV/2 = 9 mV. Contando hacia abajo 9 mV a partir de 2 mV (o 9 mV desde −16 mV) da por resultado un nivel promedio o de cd de −7 mV, como indica la línea punteada de la figura 13.47.

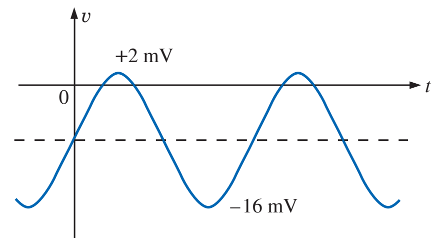
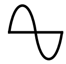


FIGURA 13.47
Ejemplo 13.16.



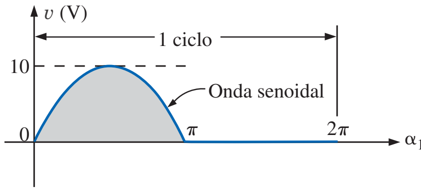


FIGURA 13.48
Ejemplo 13.17.

EJEMPLO 13.17 Determine el valor promedio de la forma de onda de la figura 13.48.

Solución:

$$G = \frac{2A_m + 0}{2\pi} = \frac{2(10\text{ V})}{2\pi} \cong \mathbf{3.18\text{ V}}$$

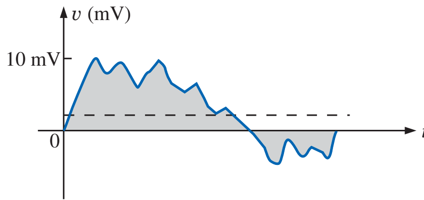


FIGURA 13.49
Ejemplo 13.18.

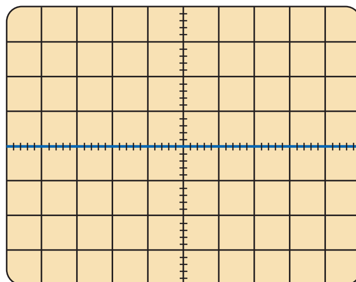
EJEMPLO 13.18 Para la forma de onda de la figura 13.49, determine si el valor promedio es positivo o negativo, y encuentre su valor aproximado.

Solución: A partir de la apariencia de la forma de onda, determinamos que el valor promedio es positivo y se encuentra cercano a 2 mV. Ocasionalmente habrán de emitirse juicios como éste.

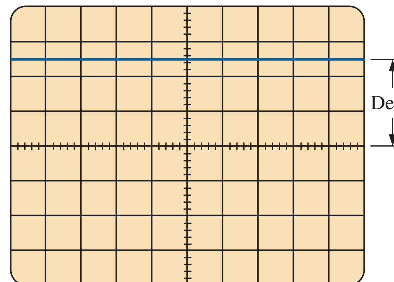
Instrumentación

El nivel de cd o valor promedio de cualquier forma de onda puede encontrarse utilizando un multímetro digital (DMM) o un **osciloscopio**. Para circuitos puramente de cd, sólo establezca el DMM en cd, y lea los niveles de voltaje o corriente. Los osciloscopios son limitados a niveles de voltaje utilizando la secuencia de pasos enumerados a continuación:

1. Primero seleccione GND (tierra) de la lista de opciones DC-GND-AC asociada con cada canal vertical. La opción GND impide que cualquier señal, a la que pueda encontrarse conectada la punta del osciloscopio, ingrese al osciloscopio y éste responda con sólo una línea horizontal. Establezca la línea resultante en el centro del eje vertical sobre el eje horizontal, como se muestra en la figura 13.50(a).



(a)

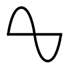


Sensibilidad vertical = 50 mV/divisiones

(b)

FIGURA 13.50
Utilización del osciloscopio para medir voltajes de cd : (a) establecimiento de la condición GND; (b) desplazamiento vertical resultante de un voltaje de cd cuando se desplaza a la opción CD.

2. Aplique la punta del osciloscopio al voltaje que se medirá (si aún no se ha conectado), y cambie a la opción CD. Si un voltaje de CD se encuentra presente, la línea horizontal se desplazará hacia arriba o hacia abajo, como se demuestra en la figura 13.50(b). Al multiplicar el desplazamiento por la sensibilidad vertical se obtendrá el voltaje de cd. Un desplazamiento hacia arriba será un voltaje positivo (mayor potencial en la punta positiva o roja del osciloscopio), mientras que un desplazamiento hacia abajo será un voltaje negativo (menor potencial en la punta positiva o roja del osciloscopio).



En general,

$$V_{cd} = \begin{pmatrix}\text{desplazamiento vertical} \\ \text{en divisiones}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{sensibilidad vertical} \\ \text{en V/divisiones}\end{pmatrix} \qquad \textbf{(13.29)}$$

Para la forma de onda de la figura 13.50(b),

$$V_{cd} = (2.5 \text{ div.})(50 \text{ mV/div.}) = \mathbf{125\ mV}$$

El osciloscopio también puede utilizarse para medir el nivel de cd o nivel promedio de cualquier forma de onda empleando la siguiente secuencia:

1. Mediante la opción GND, reinicie la línea horizontal a la mitad de la pantalla.
2. Cambie a CA (todos los componentes de cd de la señal a la que se encuentra conectada la punta quedarán imposibilitados de entrar al osciloscopio, sólo los componentes alternantes o con cambios serán desplegados). Observe la ubicación de algún punto definitivo sobre la forma de onda, tal como la parte inferior de la forma de onda rectificada de media onda de la figura 13.51(a); es decir, observe su posición sobre la escala vertical. Para el futuro, cuando utilice la opción CA, tenga presente que la computadora distribuirá la forma de onda por encima y por debajo del eje horizontal de manera que el valor promedio sea cero; es decir, el área por encima del eje será igual al área por debajo de éste.
3. Luego cambie a CD (para permitir que tanto los componentes de cd como los de ca de la forma de onda ingresen al osciloscopio), y observe el desplazamiento en el nivel elegido del punto 2, como se muestra en la figura 13.51(b). La ecuación (13.29) puede utilizarse entonces para determinar el valor promedio o valor de cd de la forma de onda. Para la forma de onda de la figura 13.51(b), el valor promedio es aproximadamente de:

$$V_{promedio} = V_{cd} = (0.9 \text{ divisiones})(5 \text{ V/divisiones}) = \mathbf{4.5\ V}$$

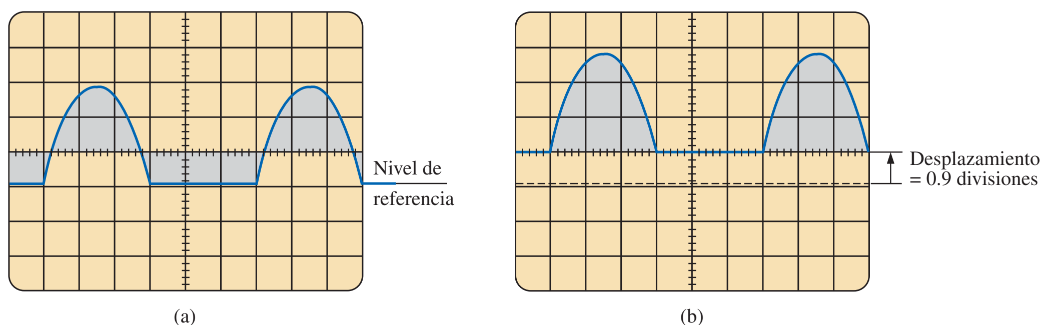
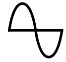


FIGURA 13.51
Determinación del valor promedio de una forma de onda no senoidal utilizando el osciloscopio: (a) canal vertical en el modo de ca; (b) canal vertical en el modo de cd.

El procedimiento perfilado líneas arriba puede aplicarse a cualquier forma de onda alterna como la mostrada en la figura 13.49. En algunos casos el valor promedio requerirá mover la posición inicial de la forma de onda bajo la opción de CA a una región diferente de la pantalla o seleccionar una mayor escala de voltaje. Los DMM pueden tomar la lectura del nivel promedio o nivel de cd de cualquier forma de onda mediante la simple selección de la escala apropiada.



13.7 VALORES EFECTIVOS (rms)

Esta sección comenzará a relacionar las cantidades de cd y ca con la potencia entregada a una carga. Ello nos ayudará a determinar la amplitud de una corriente senoidal de ca requerida para entregar la misma potencia como una corriente de cd particular. Con frecuencia surge la pregunta: ¿cómo es posible que una cantidad de ca senoidal entregue potencia neta si, durante un ciclo completo, la corriente neta en cualquier dirección es cero (valor promedio = 0)? Podría parecer que la potencia entregada durante la parte positiva de la forma de onda senoidal se cancela durante la parte negativa, y dado que ambas son iguales en magnitud, la potencia neta entregada es cero. Sin embargo, debe comprenderse que *independientemente de la dirección*, la corriente de cualquier magnitud a través de un resistor entregará potencia *a ese resistor*. En otras palabras, durante las partes positiva y negativa de una corriente senoidal de ca, la potencia se entrega en *cada instante del tiempo* al resistor. La potencia entregada en cada instante, naturalmente, variará con la magnitud de la corriente senoidal de ca, pero existirá flujo neto durante los pulsos positivos o negativos con flujo neto durante todo el ciclo. El flujo neto de potencia será igual al doble del entregado por las regiones positivas o negativas de la cantidad senoidal.

Es posible obtener una relación fija entre los voltajes y las corrientes de ca y cd a partir de la configuración experimental mostrada en la figura 13.52. Un resistor dentro de una tina de agua está conectado mediante interruptores a una fuente de cd y a una fuente de ca. Si el interruptor 1 se cierra, se establecerá una corriente de cd I, determinada por la resistencia R y el voltaje de la batería E, a través del resistor R. La temperatura alcanzada por el agua está determinada por la potencia de cd disipada en forma de calor por el resistor.

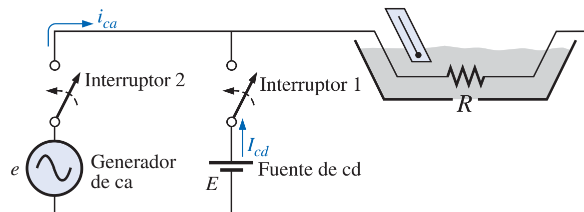


FIGURA 13.52
Configuración experimental para establecer una relación entre cantidades de cd y de ca.

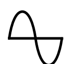
Si el interruptor 2 se cierra y el interruptor 1 se mantiene abierto, la corriente de ca a través del resistor tendrá un valor pico de I_m. La temperatura alcanzada entonces por el agua es determinada por la potencia de ca disipada en forma de calor por el resistor. La entrada de ca se varía hasta que la temperatura sea la misma que la alcanzada por la entrada de cd. Cuando esto se logra, la potencia eléctrica promedio entregada al resistor R por la fuente de ca es la misma que la entregada por la fuente de cd.

La potencia entregada por la fuente de ca en cualquier instante es:

$$P_{\text{ca}} = (i_{\text{ca}})^2 R = (I_m \operatorname{sen} \omega t)^2 R = (I_m^2 \operatorname{sen}^2 \omega t) R$$

pero:

$$\operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) \qquad \text{(identidad trigonométrica)}$$



Por tanto,

$$P_{ca} = I_m^2\left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)\right]R$$

y

$$P_{ca} = \frac{I_m^2 R}{2} - \frac{I_m^2 R}{2}\cos 2\omega t \qquad \textbf{(13.30)}$$

La *potencia promedio* entregada por la fuente de ca es únicamente el primer término, dado que el valor promedio de una onda cosenoidal es igual a cero aunque la onda pueda tener el doble de la frecuencia de la forma de onda de corriente de entrada original. Al igualar la potencia promedio entregada por el generador de ca con la entregada por la fuente de cd,

$$P_{\text{promedio(ca)}} = P_{cd}$$

$$\frac{I_m^2 R}{2} = I_{cd}^2 R \quad \text{e} \quad I_m = \sqrt{2}I_{cd}$$

o bien:

$$I_{cd} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707I_m$$

lo cual, expresado en palabras, establece que:

el valor equivalente de cd de una corriente o un voltaje senoidales es 1/$\sqrt{2}$ o 0.707 de su valor máximo.

El valor de cd equivalente se denomina **valor efectivo** de la cantidad senoidal.

En resumen,

$$I_{ec(cd)} = I_{\text{efectivo}} = 0.707I_m \qquad \textbf{(13.31)}$$

o bien:

$$I_m = \sqrt{2}I_{\text{efectivo}} = 1.414I_{\text{efectivo}} \qquad \textbf{(13.32)}$$

y

$$E_{\text{efectivo}} = 0.707E_m \qquad \textbf{(13.33)}$$

o

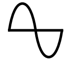
$$E_m = \sqrt{2}E_{\text{efectivo}} = 1.414E_{\text{efectivo}} \qquad \textbf{(13.34)}$$

Como un simple ejemplo numérico, se requeriría una corriente de ca con valor pico de $\sqrt{2}(10) = 14.14$ A para entregar la misma potencia al resistor de la figura 13.52 que una corriente de cd de 10 A. El valor efectivo de cualquier cantidad graficada como una función del tiempo puede calcularse utilizando la siguiente ecuación derivada del experimento recién descrito:

$$I_{\text{efectivo}} = \sqrt{\frac{\int_0^T i^2(t)\,dt}{T}} \qquad \textbf{(13.35)}$$

o bien:

$$I_{\text{efectivo}} = \sqrt{\frac{\text{área }(i^2(t))}{T}} \qquad \textbf{(13.36)}$$



lo cual establece que para calcular el valor efectivo, primero debe elevarse al cuadrado la función $i(t)$. Después de que $i(t)$ se eleva al cuadrado, el área bajo la curva se encuentra mediante integración; siendo entonces dividida entre T, la longitud del ciclo o el periodo de la forma de onda, para obtener el valor promedio o valor *medio* del cuadrado de la forma de onda. El paso final es tomar la *raíz cuadrada* del valor medio. Este procedimiento genera otro nombre para el valor efectivo, el de **valor rms** (del inglés *root-mean-square* **raíz cuadrático medio**). De hecho, dado que el término rms es el más utilizado en las comunidades educativas e industriales, se empleará a lo largo de este texto.

EJEMPLO 13.19 Encuentre los valores rms de la forma de onda senoidal en cada parte de la figura 13.53.

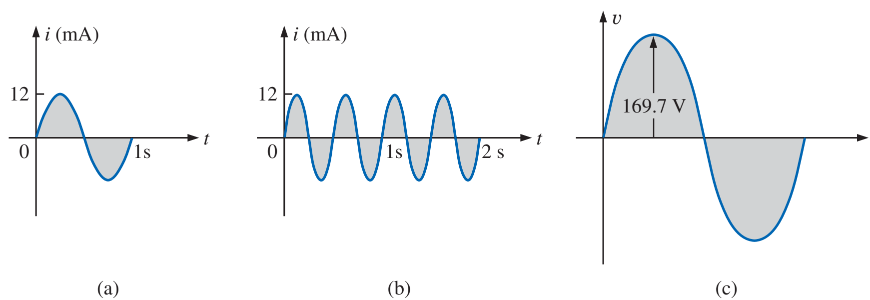


FIGURA 13.53
Ejemplo 13.19.

Solución: Para la parte (a), $I_{rms} = 0.707(12 \times 10^{-3}\text{ A}) = $ **8.484 mA**. Para la parte (b), nuevamente $I_{rms} = $ **8.484 mA**. Observe que la frecuencia no modificó el valor efectivo en la parte (b) en comparación con la parte (a). Para la parte (c), $V_{rms} = 0.707(169.73\text{ V}) \cong$ **120 V**, el mismo que está disponible en un contacto doméstico.

EJEMPLO 13.20 La fuente de cd de 120 V que aparece en la figura 13.54(a) entrega 3.6 W a la carga. Determine el valor pico del voltaje aplicado (E_m) y la corriente (I_m) si la fuente de ca [Figura 13.54(b)] entrega la misma potencia a la carga.

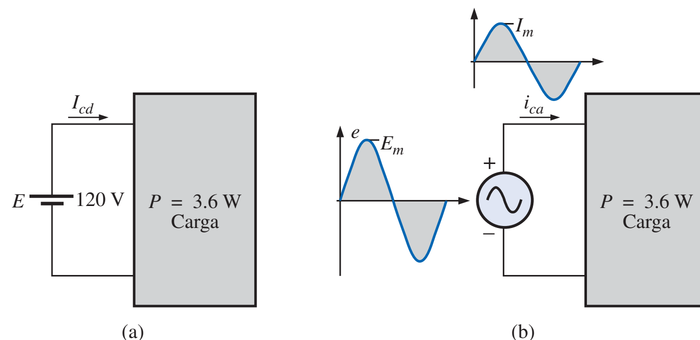
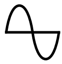


FIGURA 13.54
Ejemplo 13.20.



Solución:

$$P_{cd} = V_{cd} I_{cd}$$

e
$$I_{cd} = \frac{P_{cd}}{V_{cd}} = \frac{3.6\text{ W}}{120\text{ V}} = 30\text{ mA}$$

$$I_m = \sqrt{2} I_{cd} = (1.414)(30\text{ mA}) = \mathbf{42.42\ mA}$$

$$E_m = \sqrt{2} E_{cd} = (1.414)(120\text{ V}) = \mathbf{169.68\ V}$$

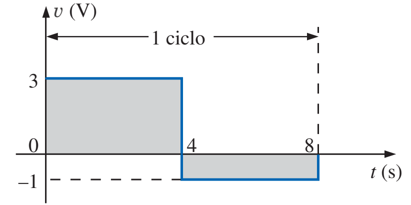


FIGURA 13.55
Ejemplo 13.21.

EJEMPLO 13.21 Encuentre el valor efectivo o rms de la forma de onda de la figura 13.55.

Solución:
v^2 (Figura 13.56):

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(9)(4) + (1)(4)}{8}} = \sqrt{\frac{40}{8}} = \mathbf{2.236\ V}$$

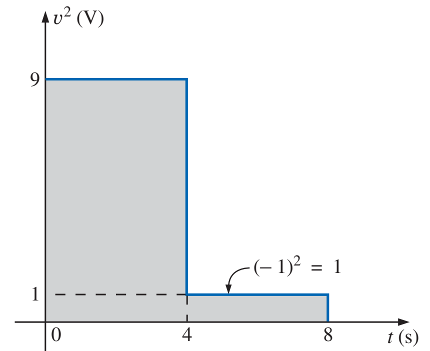


FIGURA 13.56
La forma de onda del cuadrado de la figura 13.55.

EJEMPLO 13.22 Calcule el valor rms del voltaje de la figura 13.57.

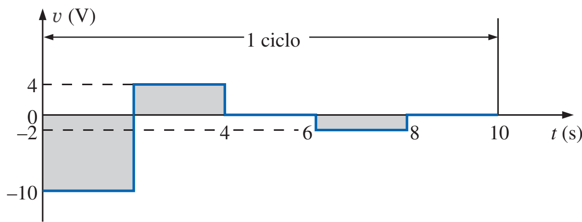


FIGURA 13.57
Ejemplo 13.22.

Solución:
v^2 (Figura 13.58):

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(100)(2) + (16)(2) + (4)(2)}{10}} = \sqrt{\frac{240}{10}}$$

$$= \mathbf{4.899\ V}$$

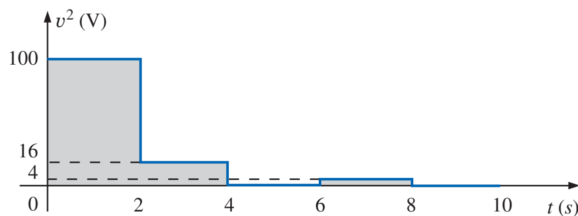
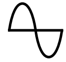


FIGURA 13.58
La forma de onda del cuadrado de la figura 13.57.



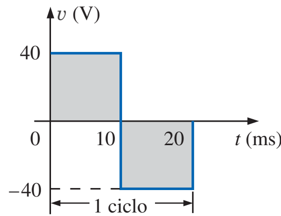


FIGURA 13.59
Ejemplo 13.23.

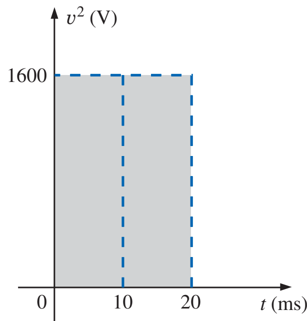


FIGURA 13.60
La forma de onda del cuadrado de la figura 13.59.

EJEMPLO 13.23 Determine los valores promedio y rms de la onda cuadrada de la figura 13.59.

Solución: Por inspección, el valor promedio es cero.

v^2 (Figura 13.60):

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{(1600)(10 \times 10^{-3}) + (1600)(10 \times 10^{-3})}{20 \times 10^{-3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{32{,}000 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}}} = \sqrt{1600}$$

$$V_{\text{rms}} = \mathbf{40\ V}$$

(el valor máximo de la forma de onda de la figura 13.60.)

Las formas de onda que aparecieron en estos ejemplos son las mismas que las utilizadas en los ejemplos de valor promedio. Podría resultar interesante comparar los valores promedio y rms de estas formas de onda.

Los valores rms de cantidades senoidales tales como el voltaje y la corriente serán representados por E e I. Estos símbolos son los mismos que los utilizados para voltajes y corrientes de cd. Para evitar confusión, el valor pico de una forma de onda tendrá siempre un subíndice m asociado: I_m sen ωt. *Advertencia:* al calcular el valor rms del pulso positivo de una onda senoidal, observe que el cuadrado del área *no* es simplemente $(2A_m)^2 = 4A_m^2$; sino que deberá calcularse mediante una integración completamente nueva. Éste será siempre el caso para cualquier forma de onda que no sea rectangular.

Cuando una forma de onda tiene tanto una componente de cd como una de ca, que puede ser originada por una fuente como la de la figura 13.61, surge una situación única. La combinación aparece frecuentemente en el análisis de redes electrónicas donde están presentes niveles tanto de ca como de cd dentro del mismo sistema.

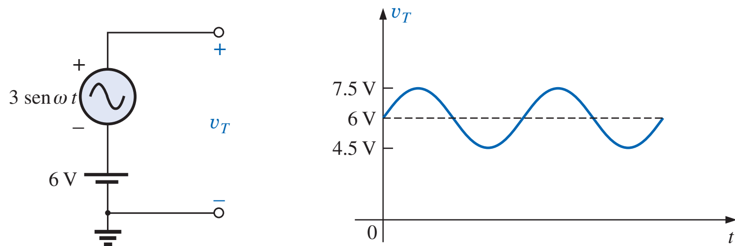


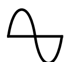
FIGURA 13.61
Generación y muestra de una forma de onda que tiene un componente de cd y de ca.

Surge la pregunta, ¿cuál es el valor rms del voltaje v_T? Podríamos estar tentados a asumir simplemente que es la suma de los valores rms de cada componente de la forma de onda; es decir, $V_{T_{\text{rms}}} = 0.7071(1.5\ \text{V}) + 6\ \text{V} = 1.06\ \text{V} + 6\ \text{V} = 7.06\ \text{V}$. Sin embargo, el valor rms en realidad se determina mediante:

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_{\text{cd}}^2 + V_{\text{ca(rms)}}^2} \qquad \textbf{(13.37)}$$

lo cual, para el ejemplo anterior, es:

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{(6\ \text{V})^2 + (1.06\ \text{V})^2}$$
$$= \sqrt{37.124}\ \text{V}$$
$$\cong \mathbf{6.1\ V}$$



El resultado es sensiblemente menor que el de la solución anterior. El desarrollo de la ecuación (13.37) puede localizarse en el capítulo 25.

Instrumentación

Resulta importante observar si el DMM en uso es un medidor *de rms verdadero* o simplemente un medidor donde el valor promedio se calibra (como se describe en la siguiente sección) para indicar el nivel rms. Un medidor *de rms verdadero* tomará lectura del valor efectivo de cualquier forma de onda (tal como en las figuras 13.49 y 13.61) y no estará limitado sólo a formas de onda senoidales. Dado que la etiqueta medidor *de rms verdadero* normalmente no se coloca en la carátula del dispositivo, resulta prudente verificar el manual para ver si puede encontrar formas de onda distintas a las senoidales puras. Para cualquier tipo de medidor rms, asegúrese de verificar el manual y ver su gama de frecuencias de aplicación. En la mayoría será menor de 1 kHz.

13.8 MEDIDORES E INSTRUMENTOS DE ca

El galvanómetro de d'Arsonval empleado en los medidores de cd puede utilizarse también para medir voltajes y corrientes senoidales si el *puente rectificador* de la figura 13.62 se coloca entre la señal que se medirá y el movimiento de lectura promedio.

El puente rectificador, compuesto por cuatro diodos (interruptores electrónicos), convertirá la señal de entrada de valor promedio cero a una señal que tenga un valor promedio sensible al valor pico de la señal de entrada. En la mayoría de los textos de electrónica, este proceso de conversión está descrito de manera muy eficiente. Fundamentalmente, la conducción se permite a través de los diodos de tal forma que sea posible convertir la entrada senoidal de la figura 13.63(a) a una que tenga la apariencia de la figura 13.63(b). La parte negativa de la entrada se ha "invertido" a causa de la configuración del puente. La forma de onda resultante de la figura 13.63(b) se denomina *forma de onda rectificada de onda completa*.

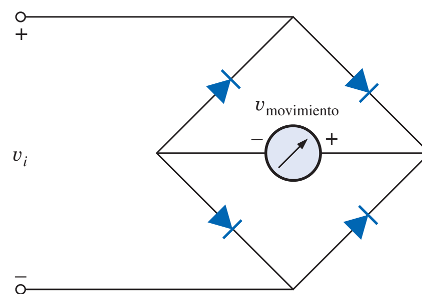


FIGURA 13.62
Puente rectificador de onda completa.

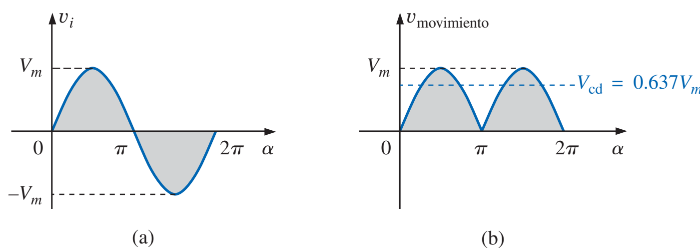


FIGURA 13.63
(a) Entrada senoidal; (b) señal rectificada de onda completa.

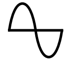
El valor promedio cero de la figura 13.63(a) ha sido reemplazado por un patrón que tiene un valor promedio determinado por:

$$G = \frac{2V_m + 2V_m}{2\pi} = \frac{4V_m}{2\pi} = \frac{2V_m}{\pi} = 0.637V_m$$

El movimiento del indicador estará entonces relacionado directamente con el valor pico de la señal por el factor 0.637.

Al formar la razón entre el nivel rms y el nivel de cd resulta en:

$$\frac{V_{rms}}{V_{cd}} = \frac{0.707V_m}{0.637V_m} \cong 1.11$$



mostrando que la indicación de escala es de 1.11 veces el nivel de cd medido por el galvanómetro; es decir,

$$\boxed{\text{Indicación del medidor} = 1.11 \text{ (valor promedio o cd)}} \quad \textit{onda completa} \quad \textbf{(13.38)}$$

Algunos medidores de ca utilizan un arreglo de rectificador de media onda que da por resultado la forma de onda de la figura 13.64, la cual tiene la mitad del valor promedio de la figura 13.63(b) durante un ciclo completo. El resultado es:

$$\boxed{\text{Indicación del medidor} = 2.22 \text{ (valor promedio o cd)}} \quad \textit{media onda} \quad \textbf{(13.39)}$$

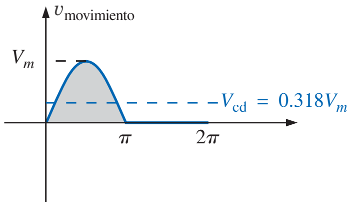


FIGURA 13.64
Señal rectificada de media onda.

Un segundo galvanómetro, denominado **galvanómetro de electrodinamómetro** (Figura 13.65), puede medir cantidades de ca y cd sin un cambio en los circuitos internos. El galvanómetro puede, de hecho, leer el valor efectivo de cualquier forma de onda periódica o no periódica debido a que la inversión en la dirección de la corriente invierte los campos de las bobinas estacionarias y móviles, por lo que el giro del indicador siempre es en la escala superior.

El **VOM**, presentado en el capítulo 2, puede utilizarse para medir tanto voltajes de cd como de ca empleando un galvanómetro de d'Arsonval y las redes adecuadas. Es decir, cuando el medidor se utiliza para mediciones de cd, el disco selector establecerá la resistencia en serie adecuada para la escala seleccionada y permitirá que el nivel de cd apropiado pase directamente al galvanómetro. Para mediciones de ca, el disco selector introducirá una red que utiliza un rectificador de onda completa o de media onda para establecer un nivel de cd. Como se analizó, cada selección se calibra adecuadamente para indicar la cantidad deseada en la carátula del instrumento.

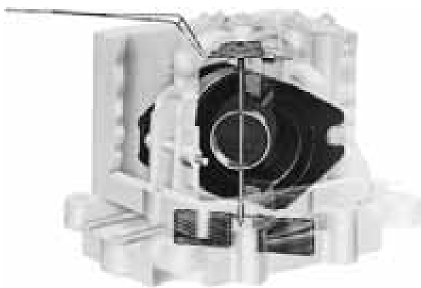


FIGURA 13.65
Galvanómetro de electrodinamómetro.
(Cortesía de Weston Instruments, Inc.)

EJEMPLO 13.24 Determine la lectura de cada medidor para cada situación de la figura 13.66(a) y (b).

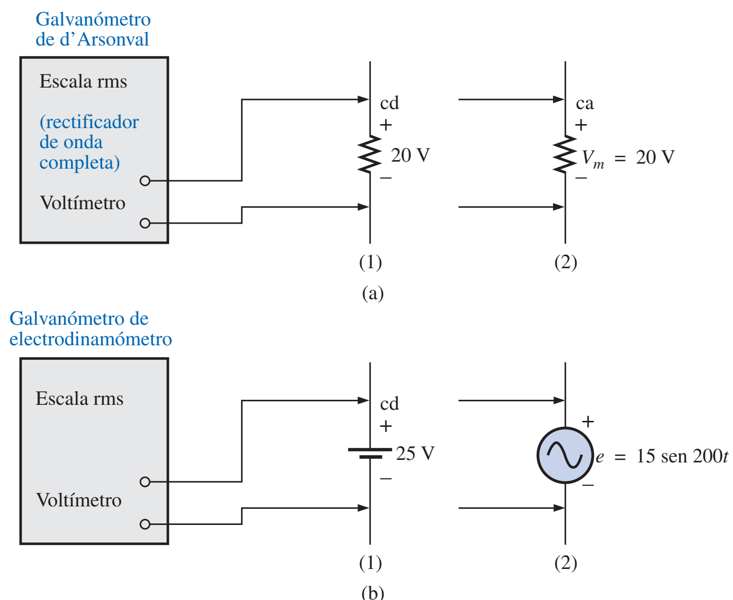
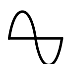


FIGURA 13.66
Ejemplo 13.24.



Solución: Para la figura 13.66(a), situación (1): Mediante la ecuación (13.38),

$$\text{Indicación del medidor} = 1.11(20\text{ V}) = \mathbf{22.2\text{ V}}$$

Para la figura 13.66(a), situación (2):

$$V_{\text{rms}} = 0.707V_m = 0.707(20\text{ V}) = \mathbf{14.14\text{ V}}$$

Para la figura 13.66(b), situación (1):

$$V_{\text{rms}} = V_{\text{cd}} = \mathbf{25\text{ V}}$$

Para la figura 13.66(b), situación (2):

$$V_{\text{rms}} = 0.707V_m = 0.707(15\text{ V}) \cong \mathbf{10.6\text{ V}}$$

La mayoría de los multímetros digitales (DMM) utiliza un sistema de rectificación de onda completa para convertir la señal de entrada de ca a una señal con un valor promedio. De hecho, para el DMM de la figura 2.27, se emplea el mismo factor de escala de la ecuación (13.38); es decir, el valor promedio se escala mediante un factor de 1.11 para obtener el valor rms. Sin embargo, en los medidores digitales no existen partes móviles como en los galvanómetros de d'Arsonval o de electrodinamómetro para mostrar el nivel de señal; en lugar de ello, el valor promedio se detecta mediante un circuito integrado (CI) multiprocesador, el cual a su vez determina los dígitos que deben aparecer en la pantalla digital.



FIGURA 13.67
Contador de frecuencia. (Cortesía de Tektronix, Inc.)

Los medidores digitales pueden utilizarse también para medir señales no senoidales, pero el factor de escala de cada forma de onda de entrada debe conocerse primero (es proporcionado normalmente por el fabricante en el manual de operación). Por ejemplo, el factor de escala para un DMM promedio en la escala rms de ca producirá una indicación para una entrada de onda cuadrada que será de 1.11 veces el valor pico. Para una entrada triangular, la respuesta será de 0.555 veces el valor pico. Evidentemente, la respuesta para una entrada de onda senoidal será de 0.707 veces el valor pico.

En todo caso, es recomendable leer siempre (al menos brevemente) el manual de operación de cualquier instrumento si piensa utilizarlo de forma regular.

Para mediciones de frecuencia, el **contador de frecuencia** de la figura 13.67 proporciona una lectura digital de ondas senoidales, cuadradas y triangulares desde 5 Hz hasta 100 Mhz para niveles de entrada desde 30 mV hasta 42 V. Observe la relativa simplicidad del panel y el alto nivel de precisión disponible.



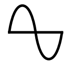
FIGURA 13.68
Amp-Clamp®. (Cortesía de Simpson Instruments, Inc.)

El **Amp-Clamp®** de la figura 13.68 es un instrumento que puede medir corriente alterna en el intervalo de ampere sin tener que abrir el circuito. El lazo se abre al apretar el "disparador", entonces se coloca alrededor del conductor que transporta corriente. Mediante una acción de transformador, el nivel de corriente en unidades rms se presenta con la escala apropiada. La precisión de este instrumento es de ±3% de la escala completa a 60 Hz, y sus escalas tienen valores máximos que van desde 6 hasta 300 A. La adición de dos puntas, vea la figura, permite usarlo como voltímetro y como ohmímetro.

Uno de los instrumentos más versátiles e importantes en la industria electrónica es el **osciloscopio**, el cual ya fue presentado en este capítulo. El osciloscopio proporciona una exhibición de la forma de onda en un tubo de rayos catódicos para permitir la detección de irregularidades y la determinación de cantidades tales como magnitud, frecuencia, periodo, componente de cd, etc. El osciloscopio analógico de la figura 13.69 puede desplegar dos formas de onda al mismo tiempo (canal dual) utilizando una interfase innovadora (panel frontal). Emplea botones de menú para establecer las escalas vertical y horizontal eligiendo de entre varias opciones que aparecen en la pantalla. También puede almacenar hasta cuatro configuraciones de medición para usos futuros.



FIGURA 13.69
Osciloscopio de canal dual. (Cortesía de Tektronix, Inc.)



Un estudiante acostumbrado a ver televisión puede confundirse cuando se encuentra por primera vez con un osciloscopio. Existe, al menos inicialmente, el supuesto de que el osciloscopio genera la forma de onda en la pantalla, de forma similar a una transmisión de televisión. Sin embargo, es importante entender claramente que:

un osciloscopio desplegará sólo aquellas señales generadas externamente y conectadas a las terminales de entrada del osciloscopio. La ausencia de una señal externa simplemente dará por resultado una línea horizontal en la pantalla del osciloscopio.

La mayoría de los osciloscopios actuales tiene un interruptor o selector con las opciones CD/GND/CA, como se muestra en la figura 13.70(a), que con frecuencia se ignora o se toma a la ligera en etapas tempranas de utilización del instrumento. El efecto de cada una de estas posiciones es fundamentalmente como el mostrado en la figura 13.70(b). En el modo CD, las componentes de cd y ca de la señal de entrada podrán pasar directamente a la pantalla. En la posición CA, la entrada de cd se bloquea mediante el capacitor, pero la parte de ca de la señal podrá pasar a la pantalla. En la posición GND se evita que la señal de entrada llegue a la pantalla del osciloscopio mediante una conexión directa a tierra, lo cual reduce el trazo en el osciloscopio a una sola línea horizontal.

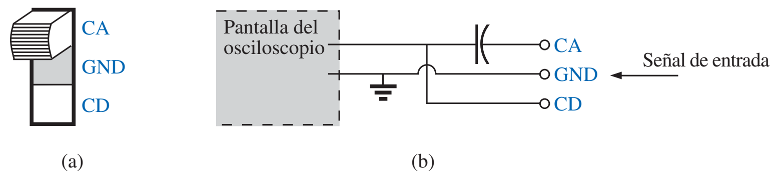


FIGURA 13.70
Interruptor CA-GND-CD para el canal vertical de un osciloscopio.

13.9 APLICACIONES

(120 V a 60 Hz) contra (220 V a 50 Hz)

En el continente americano la alimentación de ca más común es de 120 V a 60 Hz, mientras que en Europa y los países del Este es de 220 V a 50 Hz. La elección del valor rms y de la frecuencia evidentemente se hizo de forma cuidadosa debido al importante impacto en el diseño y la operación de tantos sistemas.

El hecho de que la diferencia en la frecuencia sea sólo de 10 Hz muestra que existió un acuerdo sobre las frecuencias en general que deberían utilizarse para la generación y distribución de energía. La historia sugiere que la cuestión de la selección de frecuencia se centró originalmente en la frecuencia que no presentara *parpadeo en las lámparas incandescentes* disponibles en esos tiempos. Sin embargo, técnicamente no existiría una diferencia observable entre 50 o 60 ciclos por segundo con base en este criterio. Otro factor importante en las etapas de diseño inicial fue el efecto de la frecuencia en el tamaño de los transformadores, los cuales juegan un papel muy importante en la generación y distribución de energía. Al trabajar con las ecuaciones fundamentales del diseño de transformadores, veremos que el *tamaño del transformador es inversamente proporcional a la frecuencia*. El resultado de esto es que los transformadores que operan a 50 Hz deben ser mayores (sobre una base puramente matemática, cerca de 17% más grandes) que los que operan a 60 Hz. Por tanto, el lector verá que los transformadores destinados al mercado internacional —donde pueden operar a 50 o 60 Hz— están diseñados alrededor de la frecuencia de 50 Hz. Sin

embargo, en la otra cara de la moneda, frecuencias mayores resultan en preocupaciones acerca de arcos eléctricos, incremento en las pérdidas en el núcleo del transformador debido a corrientes parásitas y pérdidas por histéresis (Capítulo 19), y fenómenos de efecto de superficie (Capítulo 19). En alguna parte del análisis debemos considerar el hecho de que 60 Hz es un múltiplo exacto de los 60 segundos que hay en un minuto y de 60 minutos en una hora. Dado que la sincronización precisa es una parte crítica del diseño tecnológico, ¿acaso fue este un motivo importante en la elección final? Existe también la cuestión de si los 50 Hz son resultado de la cercana afinidad de este valor con el sistema métrico. Tenga presente que las potencias de 10 son muy importantes en el sistema métrico, con 100 cm en un metro, 100°C en el punto de ebullición del agua, etc. Observe que 50 Hz es exactamente la mitad de este número especial. Con todo, pareciera que ambas posiciones tienen un argumento que podría servir para defender su elección. Sin embargo, en el análisis final, también debemos considerar si la diferencia es simplemente de naturaleza política.

La diferencia en voltaje entre América del Norte y Europa es una cuestión distinta en el sentido de que está cercana al 100%. Sin embargo, nuevamente, existen argumentos válidos para ambas partes. No hay duda de que voltajes elevados como 220 V *generan preocupaciones sobre seguridad* mayores que las generadas para voltajes de 120 V. De cualquier manera, cuando se suministran mayores voltajes existirá menor corriente en el cable para la misma demanda de potencia, permitiendo el uso de conductores más pequeños —un ahorro de dinero—. Además, los motores, compresores, etcétera, encontrados en los aparatos domésticos comunes y en toda la comunidad industrial *podrán ser de menor tamaño*. Sin embargo, mayores voltajes también acarrean la preocupación sobre los efectos de arcos eléctricos, requisitos de aislamiento y, debido a consideraciones de seguridad, mayores costos de instalación. Con todo, en general, los viajeros internacionales pueden prepararse para enfrentar la mayoría de las situaciones adquiriendo un transformador que pueda convertir el voltaje desde su nivel local al del país que piensan visitar. La mayor parte del equipo (a excepción de los relojes, naturalmente) puede trabajar adecuadamente en 50 y 60 Hz en muchas de las travesías. Cualquier unidad que no opere en su frecuencia de diseño simplemente deberá “trabajar un poco más fuerte” para realizar su cometido. El principal problema para el viajero no es el transformador en sí, sino la amplia variedad de conectores que se utilizan de un país a otro. Cada país tiene su propio diseño de conector “hembra” en la pared. En un viaje de tres semanas, esto podría representar de seis a diez conectores diferentes del tipo mostrado en la figura 13.71. Para una alimentación de 60 Hz, 120 V, el conector es bastante estándar en apariencia con sus dos terminales en placa (y posiblemente una conexión a tierra).

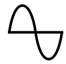


FIGURA 13.71
Variedad de conectores para una conexión de 220 V, 50 Hz.

En cualquier caso, tanto los 120 V a 60 Hz como los 220 V a 50 Hz evidentemente cubren las necesidades del consumidor. Se trata de un debate que podría continuar de manera indefinida sin un vencedor final.

Cuestiones de seguridad (altos voltajes y cd contra ca)

Tenga presente que cualquier red “viva” debe ser tratada con un nivel calculado de respeto. La electricidad, en sus distintas formas, no debe temerse sino utilizarse con cierta conciencia de sus efectos secundarios potencialmente peligrosos. Es conocido que la electricidad y el agua no se mezclan (nunca se deberán utilizar cables de extensión o conectar televisiones o radios dentro de los baños) dado que 120 V en una capa de agua de cualquier altura (desde un charco hasta una tina completa) pueden ser *letales*. Sin embargo, son menos conocidos otros efectos de voltajes de cd y ca. En general, a medida que el voltaje y la corriente se incrementen, la atención sobre la seguridad deberá



aumentar de forma exponencial. Por ejemplo, bajo condiciones secas, la mayoría de los seres humanos podrán sobrevivir a un choque de 120 V de ca como el obtenido cuando se cambia un foco de luz, encendiendo un interruptor, etc. La mayoría de los electricistas han experimentado tales sacudidas muchas veces en sus carreras. Sin embargo, pregunte a un electricista cómo se siente ser golpeado por 220 V, y la respuesta (si es que ha sido desafortunado para tener tal experiencia) será completamente diferente. ¿Cuántas veces ha escuchado acerca de un operador de excavadora que al golpear una línea de 220 V tuvo un ataque cardiaco fatal? Recuerde que el operador se encuentra sentado en un contenedor metálico sobre tierra húmeda que proporciona una trayectoria excelente para que la corriente resultante fluya de la línea a tierra. Si sólo es durante un periodo breve, con el mejor ambiente (zapatos de suela de hule, etc.), en una situación de la que es posible escapar rápidamente, la mayoría de los seres humanos también podrán sobrevivir a un choque de 220 V. Sin embargo, como se mencionó, es algo que no se olvidará con rapidez. Para voltajes superiores a 220 V rms, las probabilidades de sobrevivir caen exponencialmente ante el incremento del voltaje. Se requiere de sólo 10 mA de corriente constante a través del corazón para ponerlo en desfibrilación. Por tanto, en general, asegúrese siempre de que la energía se encuentra desconectada cuando trabaje en reparaciones de equipo eléctrico. No asuma que tirando de un interruptor de pared se desconectará la energía. Tire del interruptor del circuito principal y verifique las líneas con un voltímetro antes de trabajar en el sistema. Dado que el voltaje es un fenómeno de dos puntos, no intente hacerse el héroe y trabaje con sólo una línea a la vez, ¡los accidentes suceden!

También debe estar consciente de que la reacción a los voltajes de cd es muy diferente de la reacción a los voltajes de ca. Probablemente haya visto en películas o en tiras cómicas que las personas no son capaces de soltar un cable *energizado*. Ello es muestra de la principal diferencia que hay entre los dos tipos de voltaje. Como se mencionó, si una persona llega a tocar una línea “energizada” de 120 V de ca, seguramente recibirá un buen piquete, pero *podrá soltarse*. Pero si la línea resulta estar “energizada” de 120 V de cd, con probabilidad no podrá soltarse y pudiera sucederle una calamidad. El tiempo juega un papel importante cuando esto sucede debido a que mientras mayor tiempo se encuentre sujeto al voltaje de cd, la resistencia del cuerpo disminuirá hasta que pueda establecerse una corriente fatal. La razón de que sea posible soltar una línea de ca se comprende mejor al analizar cuidadosamente el voltaje de 120 V rms, 60 Hz en la figura 13.72. Dado que el voltaje oscila, existirá un periodo en que esté cercano a cero o por debajo de, digamos, 20 V y cambie su dirección. Aunque este intervalo de tiempo es muy pequeño, se presenta cada 8.3 ms y ofrece una ventana para *escaparse*.

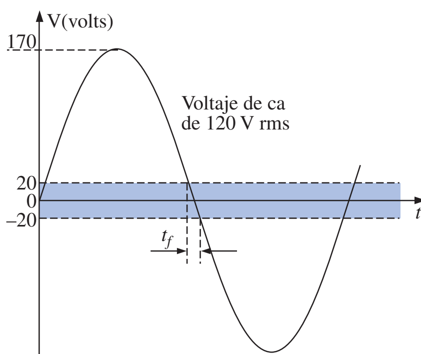
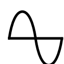


FIGURA 13.72
Intervalo de tiempo cuando el voltaje senoidal es cercano a cero volts.

Ahora que estamos conscientes de los peligros adicionales de los voltajes de cd, resulta importante mencionar que bajo condiciones equivocadas, incluso voltajes tan bajos de 12 V como el de una batería de automóvil pueden ser muy peligrosos. Si el lector se encuentra trabajando en un automóvil bajo condiciones húmedas, o si por algún motivo transpira excesivamente, o lo que sería peor, si portara cualquier anillo que pudiera alojar humedad y salinidad junto a la piel, al tocar la terminal positiva de la batería puede iniciarse un proceso en el que la resistencia corporal comience a disminuir y ocasionarle una lesión seria. Éste es uno de los motivos por el que rara vez se observará a un electricista profesional portar algún anillo o joyería, no vale la pena correr el riesgo.

Antes de abandonar este tema sobre cuestiones de seguridad, también debemos tomar conciencia de los peligros de las fuentes de alta frecuencia. Ya conocemos lo que 2.45 GHz a 120 V pueden hacer por un trozo de carne dentro de un horno de microondas; por ello, como se argumentó en el capítulo 5, es muy importante que el sello alrededor del horno sea lo más hermético posible. Sin



embargo, no siempre asuma que todo es perfecto en el diseño, por lo que no acostumbre a observar el proceso de cocinado dentro del microondas a seis pulgadas de distancia de la puerta con regularidad. Primero busque otra cosa que hacer y verifique la comida sólo cuando el proceso de cocinado esté completo. Si alguna vez visita el edificio del Empire State, advertirá que no se podrá acercar a la antena localizada sobre el domo debido a las señales de alta frecuencia que se emiten con gran potencia. También observe los grandes letreros de MANTÉNGASE ALEJADO cercanos a las torres de transmisión de radio en las estaciones de radio locales. Pararse a diez pies de distancia de un transmisor de AM que trabaja a 540 kHz podría ser desastroso. Simplemente el sostener (¡no debe intentarse!) una lámpara fluorescente cerca de la torre podría encenderla debido a la excitación de las moléculas dentro del tubo.

En resumen, por tanto, trate cualquier situación con altos voltajes o corrientes de ca, altos niveles de energía de cd y altas frecuencias, con extremo cuidado.

Ahorradores de focos

Desde la invención del foco, los consumidores han demandado formas de prolongar su vida útil. El autor recuerda todavía los tiempos en que se le enseñó a apagar siempre la luz al abandonar una habitación, y a no jugar con el interruptor porque costaba un centavo (cuando un centavo tenía cierto valor) cada vez que se encendía o apagaba. En la actualidad, gracias a un diseño avanzado, se dispone de focos que están garantizados para funcionar varios años. Cuestan más, pero no existe la necesidad de reemplazarlos a menudo, y a lo largo del tiempo esto redunda en ahorros financieros. Para algunas personas, simplemente es cuestión de tener que pagar bastante por un solo foco.

Por curiosidad, medí en frío la resistencia de cd de un foco estándar de 60 W, la cual fue de 14 Ω. Olvidando cualquier efecto inductivo debido al filamento y al alambre, esto implica una corriente de 120 V/14 Ω = 8.6 A cuando la luz se enciende por primera vez. Ello francamente constituye una corriente fuerte como para que el filamento la absorba cuando se considera que la corriente normal de operación es de 60 W/120 V = 0.5 A. Por fortuna la corriente sólo dura unos cuantos milisegundos, como se muestra en la figura 13.73(a), antes de que el foco se caliente, ocasionando que la resistencia del filamento se incremente rápidamente y obligue a la corriente a bajar a niveles razonables. Sin embargo, con el tiempo, golpear al foco con 8.6 A cada vez que se enciende el interruptor cobrará su efecto sobre el filamento y éste finalmente agotará sus características naturales y se abrirá. Se puede saber con facilidad si un foco no funciona sacudiéndolo simplemente y escuchando la resonancia del filamento roto cuando golpea el interior del foco. Asumiendo una corriente inicial de 8.6 A para un solo foco, si el interruptor de luz controla cuatro focos de 60 W en la misma habitación, el pico de corriente a través del interruptor podría llegar a 4(8.6 A) = 34.4 A como se muestra en la figura 13.73(b), lo cual probablemente excederá el nivel predeterminado del interruptor de seguridad (por lo general, de 20 A) para el circuito. Sin embargo, la ventaja decisiva es que el pico durará solo unos cuantos milisegundos, y los interruptores de seguridad del circuito no están diseñados para reaccionar tan rápido. Incluso los interruptores de corriente por falla de tierra (GFCI) de seguridad que se instalan en los baños están especificados típicamente a un tiempo de respuesta de 5 ms. Sin embargo, al observar el nivel general e imaginarse todos estos picos en la línea generados por un sector residencial, ciertamente se asume que constituyen un problema que la compañía de luz tiene que enfrentar con regularidad.

Una forma de eliminar esta corriente de arranque es colocar un inductor en serie con el foco para limitar los picos en la línea. Este método, de hecho, conduce a una forma de prolongar la vida de un foco mediante el uso de reductores

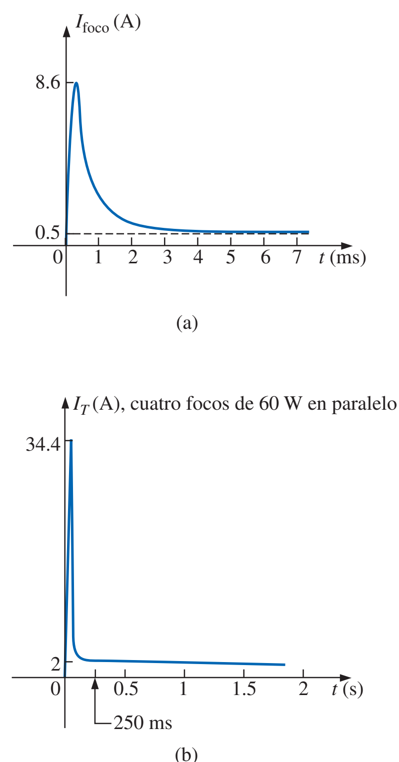
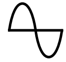


FIGURA 13.73
Picos de corriente: (a) un solo foco de 60 W; (b) cuatro focos de 60 W en paralelo.



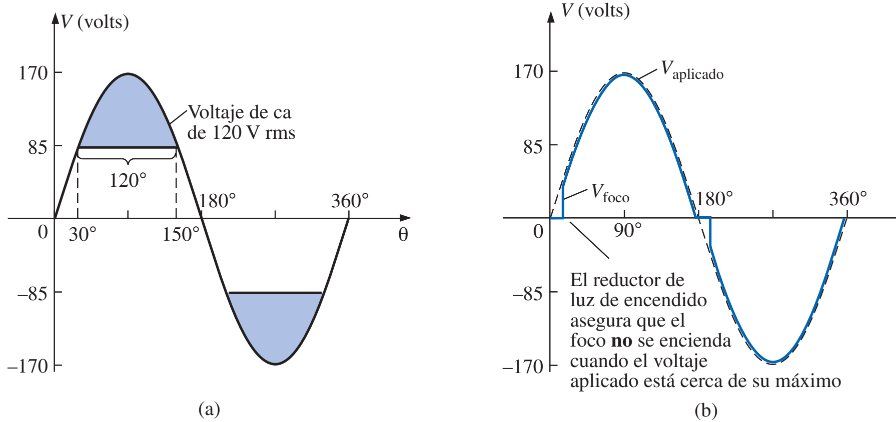
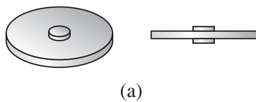
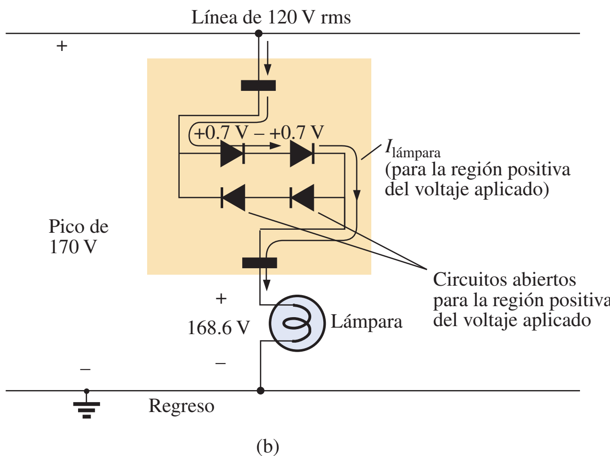


FIGURA 13.74
Voltaje de encendido: (a) igual o mayor que un medio del valor pico; (b) cuando se utiliza el reductor de luz.

de luz. Todo reductor de luz bien diseñado (como el descrito en el capítulo 12) tiene un inductor en la línea para suprimir los picos de corriente. El resultado de esto es tanto la capacidad de controlar el nivel de energía como una vida más larga para el foco. Si el interruptor se deja en la posición de voltaje completo, puede utilizarse como un interruptor regular y la vida del foco se prolongará. De hecho, en la actualidad muchos reductores de luz utilizan triacs diseñados para encenderse sólo cuando el voltaje aplicado pasa a través de cero. Al observar la onda senoidal completa de la figura 13.74(a), encontramos que el voltaje se encuentra al menos a 85 V, que es la mitad de su valor máximo para dos tercios completos de cada ciclo, o cerca de 67% del tiempo. La posibilidad, por tanto, de encender un foco con al menos 85 V en la línea es mucho mejor que 2 a 1, por lo que puede esperarse que la corriente de un foco





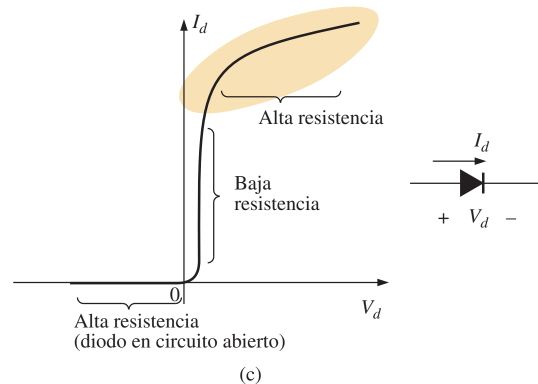
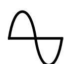


FIGURA 13.75
Ahorrador de focos: (a) apariencia externa; (b) operación básica; (c) características del diodo a niveles de corriente altos.



de 60 W sea al menos de 85 V/14 Ω = 6 A 67% del tiempo, lo cual excede el valor especificado de 0.5 A por 1100%. Si utilizamos un reductor de luz con un triac diseñado para encenderse sólo cuando el voltaje aplicado pase a través de cero o poco después, como se muestra en la figura 13.74(b), el voltaje aplicado se incrementará desde cerca de cero volts, dando tiempo al foco para que se caliente antes de que se aplique el voltaje completo.

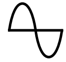
Otra oferta comercial para prolongar la vida de los focos es el pequeño disco circular que se muestra en la figura 13.75(a), el cual se inserta entre el foco y el portalámparas. Se proporcionan los contactos en ambos lados para permitir la conducción a través de la red simple de diodos mostrada en la figura 13.75(b). El lector recordará, de uno de los primeros capítulos de este libro, que el voltaje en los diodos en el estado de encendido es de 0.7 V, como se muestra para cada diodo en la figura 13.75(b) para la parte positiva del voltaje de entrada. El resultado es que el voltaje al foco se reduce en 1.4 V a lo largo del ciclo, disminuyendo la potencia entregada al foco. En la mayoría de las situaciones la iluminación tenue no es un problema, y el foco durará más debido simplemente a que no se encuentra presionado a trabajar a su límite. Sin embargo, el ahorro real en el dispositivo es la forma en la que éste puede ayudar a eliminar los picos de corriente a través del foco. En la figura 13.75(c) se muestran las características reales de un diodo para el intervalo completo de corrientes a través de él. La región vertical se utiliza en la mayoría de las aplicaciones en circuitos electrónicos. En cuanto a corrientes excesivas, las características del diodo se nivelan como se muestra. Esta región se caracteriza por tener una resistencia mayor (comparada con la tan pequeña resistencia de la región vertical) que entra en juego cuando el foco se enciende por primera vez. En otras palabras, cuando el foco se encienda por primera vez, la corriente será tan alta que el diodo ingresará en su región de alta resistencia y, por la ley de Ohm, se limitará la corriente pico, prolongando de esta forma la vida del foco. Los dos diodos que apuntan en sentido contrario son para la parte negativa del voltaje de alimentación.

Cada día aparecen en el mercado métodos nuevos para prolongar la vida de un foco; sin embargo, una fórmula garantizada es regresar a la vieja filosofía de apagar las luces al abandonar una habitación, y "¡No jugar con el interruptor de la luz!"

13.10 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

La facilidad de captura de OrCAD ofrece una diversidad de fuentes de voltaje y corriente de ca. Sin embargo, para los propósitos de este texto la fuente de voltaje **VSIN** y la fuente de corriente **ISIN** resultan ser las más apropiadas porque cuentan con una lista de atributos que cubrirán las áreas de interés actuales. Bajo la biblioteca **SOURCE** se registran otras fuentes, pero no cuentan con todo el intervalo anterior, o están dedicadas sólo a un tipo de análisis. En ocasiones, se utilizará **ISRC** debido a que tiene un símbolo de flecha similar al que aparece en el texto, y puede utilizarse para cd, ca y algunos análisis transitorios. El símbolo para **ISIN** es simplemente una onda senoidal que utiliza los signos más y menos para indicar la dirección. Las fuentes **VAC**, **IAC**, **VSRC** e **ISRC** son las adecuadas si se desea la magnitud y la fase de una cantidad específica o si se busca una gráfica transitoria contra la frecuencia. Sin embargo, estas fuentes no proporcionarán una respuesta transitoria en función del tiempo incluso si se da la frecuencia y la información transitoria para la simulación.



Para todas las fuentes senoidales, la magnitud **(VAMPL)** es el valor pico de la forma de onda y no el valor rms. Esto quedará claro cuando se desee una gráfica de una cantidad y la magnitud calculada por PSpice sea el valor pico de la respuesta transitoria. Sin embargo, para una respuesta de ca puramente de estado estacionario, la magnitud proporcionada podrá ser el valor rms, y la salida leerse como el valor rms. Sólo cuando se desee una gráfica quedará claro que PSpice acepta toda magnitud de ca como el valor pico de la forma de onda. Naturalmente, el ángulo de fase es el mismo si la magnitud es el pico o el valor rms.

Antes de analizar el mecanismo para obtener las distintas fuentes recuerde que:

El **análisis transitorio** *proporciona una salida de ca o cd en función del tiempo, mientras que para obtener una gráfica en función de la frecuencia se utiliza el* **barrido de CA.**

Para obtener cualquiera de las fuentes mencionadas, aplique la siguiente secuencia: **Place part** tecla-**Place part** cuadro de diálogo-**Source-**(ingresar tipo de fuente). Una vez seleccionada la fuente de ca **VSIN** aparecerá en el esquema con **VOFF**, **VAMPL** y **FREQ**. Siempre especifique **VOFF** como 0 V (a menos que un valor específico sea parte del análisis), y proporcione un valor para la amplitud y la frecuencia. Las cantidades restantes de **PHASE**, **AC**, **DC**, **DF** y **TD** pueden ingresarse mediante doble clic sobre el símbolo de fuente para obtener el editor de propiedades, **Property Editor**, aunque **PHASE**, **DF** (factor amortiguador) y **TD** (retraso de tiempo) tienen un valor predeterminado de 0 s. Para añadir un ángulo de fase, simplemente haga clic en **PHASE**, ingrese el ángulo de fase en el cuadro inferior y entonces seleccione **Apply**. Si desea desplegar un factor tal como un ángulo de fase de 60°, sólo haga clic en **PHASE** seguido de **Display** para obtener el cuadro de diálogo **Display Properties**. Luego seleccione **Name and Value** seguido por **OK** y **Apply**, y abandone el cuadro de diálogo **Properties Editor (X)** para ver **PHASE=60** junto a la fuente **VSIN**. El siguiente capítulo incluirá el uso de la fuente de ca dentro de un circuito simple.

Electronics Workbench

Para EWB, la fuente de voltaje de ca está disponible a partir de dos fuentes, el depósito de partes **Sources** y **Function Generator** (generador de funciones). La principal diferencia entre estas dos fuentes es que el ángulo de fase puede establecerse cuando se utiliza **Sources**, mientras que no puede establecerse mediante **Function Generador**.

Bajo **Sources**, la fuente de voltaje de ca es la cuarta opción sobre la columna izquierda de la barra de herramientas. Al seleccionarla y ubicarla, presentará los valores predeterminados para amplitud, frecuencia y fase. Todos los parámetros de la fuente pueden cambiarse haciendo doble clic sobre el símbolo de fuente para obtener el cuadro de diálogo **AC Voltage**. **Voltage Amplitude** (amplitud del voltaje) y **Voltage RMS** están interrelacionados por lo que cuando cambie uno, el otro se modificará en consecuencia. Para el valor predeterminado de **1V**, el valor rms automáticamente se presenta como **0.71** (no 0.7071 debido a la precisión de centésimas). Observe que la unidad de medición está controlada por las flechas de desplazamiento localizadas a la derecha de la etiqueta predeterminada y no puede establecerse utilizando el teclado. La etiqueta puede modificarse mediante el simple cambio del encabezado de **Label** e insertando la etiqueta deseada. Después de que se hayan realizado todos los cambios en el cuadro de diálogo **AC Voltage** haga clic en **OK**, y éstos se presentarán junto al símbolo de fuente de voltaje de ca. En la figura 13.76 la etiqueta se modificó a **Vs** y la amplitud a 10 V mientras la frecuencia y el ángulo de fase se dejaron con su valor predeterminado. Resulta particularmente importante observar que:

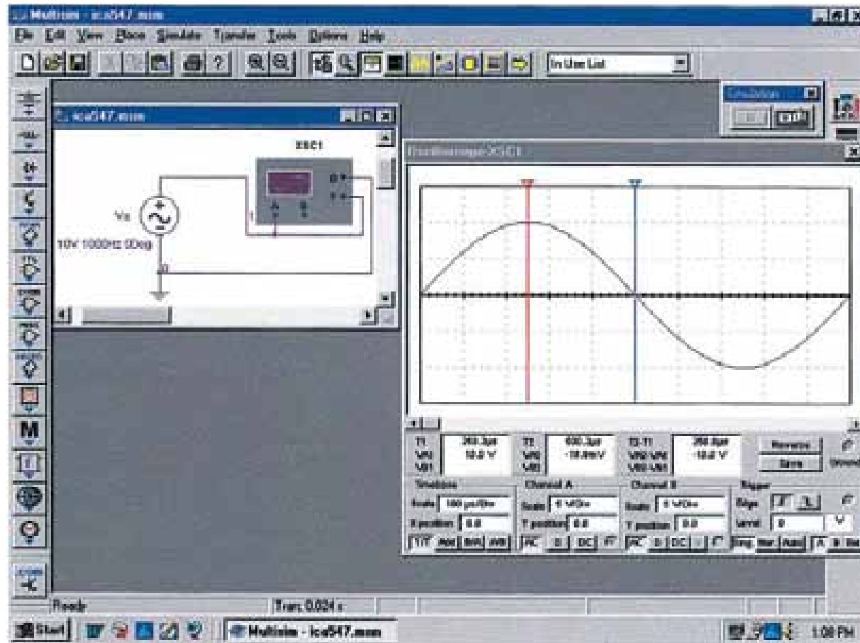


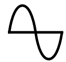
FIGURA 13.76
Utilización del osciloscopio para desplegar la fuente de voltaje de ca senoidal disponible en el depósito de herramientas ***Sources*** *de Electronics Workbench.*

para todo análisis de frecuencia (es decir, donde la frecuencia cambiará), la **AC Magnitude** ***de la fuente de ca debe establecerse bajo*** **Analysis Setup** ***en el cuadro de diálogo*** **AC Voltage*****. Al no realizar esto se obtendrán resultados ligados a los valores predeterminados en lugar de al valor establecido bajo el encabezado*** **Value.**

Para observar el voltaje senoidal establecido en la figura 13.76, se puede seleccionar un osciloscopio en la barra de herramientas de **Instrument** a la derecha de la pantalla. Es la cuarta opción hacia abajo y tiene la apariencia mostrada en la figura 13.76 al seleccionarla. Advierta que se trata de un osciloscopio de canal dual con un canal **A** y un canal **B**. Cuenta con una conexión a tierra **(G)** y una conexión de disparador **(T)**. Las conexiones para observar la fuente de voltaje de ca sobre el canal **A** se proporcionan en la figura 13.76. Observe que el control de disparo también está conectado al canal **A** para control de sincronización. La pantalla que aparece en la figura 13.76 puede desplegarse haciendo doble clic sobre el símbolo del osciloscopio en la pantalla. Tiene todos los controles principales de un osciloscopio de laboratorio típico. Cuando se selecciona **Simulate-Run** o **1** en el interruptor de simulación **Simulate Switch**, el voltaje de ca aparece en la pantalla. Al cambiar la base de tiempo **Time base** a 100 μs/divisiones, se obtendrá la imagen de la figura 13.76 dado que existen 10 divisiones a través de la pantalla y $10(100\ \mu\text{s}) = 1$ ms (el periodo de la señal aplicada). Los cambios en **Time base** se realizan simplemente haciendo clic sobre el valor predeterminado para obtener las flechas de desplazamiento en el mismo cuadro. Sin embargo, es importante recordar que:

no deberán realizarse cambios en la configuración del osciloscopio o en cualquier red hasta que la simulación se termine inhabilitando la opción **Simulate-Run** ***o colocando el interruptor de simulación*** **Simulate** ***en el modo de 0.***

Las opciones dentro de la base de tiempo están establecidas mediante las barras de desplazamiento y no pueden ser modificadas; nuevamente, estas opciones



coinciden con las que están disponibles en el osciloscopio de un laboratorio típico. La sensibilidad vertical del canal **A** se estableció automáticamente por el programa en 5 V/divisiones, lo que da por resultado dos cuadros verticales para el valor pico en la forma que muestra la figura 13.76. Observe las teclas de **AC** y **DC** debajo del canal **A**. Dado que no existe componente de cd en la señal aplicada, cualquiera de las dos señales presentará la misma imagen. El control de disparo **Trigger** se establece en la transición positiva en un nivel de 0 V. **T1** y **T2** se refieren a las posiciones del cursor sobre el eje de tiempo horizontal. Al hacer clic sobre el triángulo rojo pequeño localizado en la parte superior de la línea roja en el extremo izquierdo de la pantalla, y arrastrando el triángulo, se puede mover la línea roja vertical a cualquier posición sobre el eje. En la figura 13.76 se movió al valor pico de la forma de onda en ¼ del periodo total o 0.25 ms = 250 μs. Observe el valor de **T1** (250.3 μs) y el valor correspondiente de **VA1** (10.0V). Al mover el otro cursor con un triángulo azul al tope de la mitad del periodo total o 0.5 ms = 500 μs, vemos que el valor en **T2** (500.3 μs) es -18.9 mV (**VA2**), lo cual es aproximadamente 0 V para una forma de onda con un valor pico de 10 V. La precisión está controlada por el número de puntos de información requeridos para configurar la simulación. Mientras más puntos de información se tengan, la probabilidad de alcanzar un nivel elevado de precisión para la cantidad deseada será mayor. Sin embargo, un mayor número de puntos de información también prolongará el tiempo en que se ejecuta la simulación. El tercer cuadro a la derecha ofrece la diferencia entre **T2** y **T1** como 250 μs y la diferencia entre sus magnitudes (**VA2-VA1**) como -10 V, con el signo negativo debido a que **VA1** es mayor que **VA2**.

Como se mencionó, también es posible obtener un voltaje de ca a partir de **Function Generator** (el generador de funciones), que es la segunda opción en la barra de herramientas **Instrument**. Su símbolo aparece en la figura 13.77 con conexiones positivas, negativas y de tierra. Al hacer doble clic sobre el símbolo de la gráfica del generador aparecerá el cuadro de diálogo **Function**

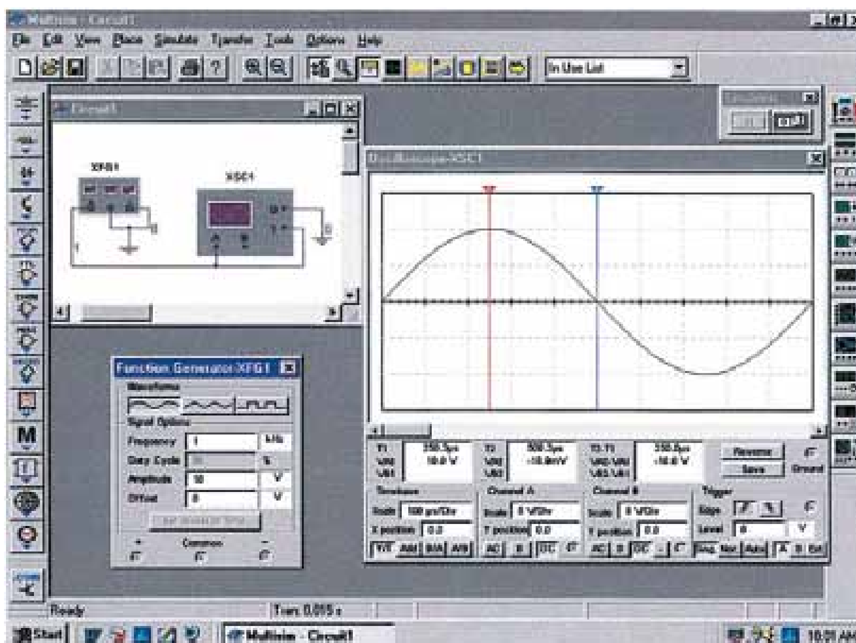
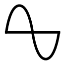


FIGURA 13.77
Utilización del generador de funciones para colocar una forma de onda de voltaje de ca senoidal en la pantalla del osciloscopio.



Generator-XFG1, en el cual se pueden realizar algunas selecciones. Para este ejemplo, seleccione la forma de onda senoidal. La frecuencia se establece en **Frequency** en 1 kHz, la amplitud se establece en 10 V en **Amplitude**, y **Offset** se deja en 0 V. Observe que no hay opción para establecer el ángulo de fase como sucedió para la fuente anterior. Al hacer doble clic sobre el osciloscopio se generará el osciloscopio sobre el que se puede establecer nuevamente una base de tiempo, **Timebase**, de 100 μs/divisiones con una sensibilidad vertical de 5 V/divisiones. Seleccione **1** en el interruptor de simulación y aparecerá la forma de onda de la figura 13.77. Al seleccionar **Singular** bajo **Trigger** se obtendrá una imagen fija; luego establezca el interruptor **Simulate** en **0** para terminar la simulación. Colocar los cursores en la misma posición muestra que las formas de onda de las figuras 13.76 y 13.77 son iguales.

Para la mayoría de los análisis de EWB que aparecen en este texto, será utilizada la secuencia **AC_VOLTAGE_SOURCE** bajo **Sources**. Sin embargo, con tan limitada introducción a EWB, parece adecuado presentar el uso de **Function Generator** debido a su cercana relación con la experiencia de laboratorio.

C++

Cálculo del valor promedio de una forma de onda La ausencia de configuraciones de red para analizar en este capítulo limita fuertemente el contenido con respecto a la utilización de programas de cómputo. Sin embargo, la puerta está abierta para aplicar un lenguaje con el cual escribir programas que puedan ser útiles al poner en práctica algunos de los conceptos presentados en el capítulo. En particular, examinaremos el programa en C++ de la figura 13.78, diseñado para calcular el valor promedio de una forma de onda de pulso que tenga hasta 5 niveles diferentes.

Encabezado
Directriz del preprocesador
Cuerpo del programa
Define la forma y el nombre de las variables
Obtiene el número de niveles
Instrucción para iterativa
Cálculo de V_{prom}
Despliega resultados

```
//C++ Cálculo del promedio de una forma de onda de voltaje

# include  <iostream.h>           //necesario para entrada/salida

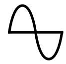
main ( )
{
        float Vave;             //valor promedio de la forma de onda
        float Vlevel;           //nivel de voltaje durante el tiempo Tlevel
        float VTsum = 0;        //utilizado para sumar los productos voltaje-tiempo
        float T = 0;            //tiempo total de la forma de onda
        float Tlevel;           //duración en tiempo de Vlevel
        int levels;             //el número de niveles en la forma de onda
        int count;              //contador del ciclo

        cout << "¿Cuántos niveles desea ingresar (1..5) ?";
        cin >> levels;       //obtener del usuario el número de niveles

        for (count = 1; count <= levels; count++)  //comienza ciclo
        {
                cout << "\n";
                cout << "Ingrese el nivel de voltaje " << count << ":";
                cin >> Vlevel;  //obtener del usuario el voltaje
                cout << "Ingrese el tiempo para el nivel " << count << ": ";
                cin >> Tlevel;  //obtener del usuario el tiempo
                VTsum + = Vlevel * Tlevel;   //añadir producto a VTsum
                T += Tlevel;    //añadir Tlevel al tiempo total de la forma de onda
        }
        Vave = VTsum / T;        //calcular valor promedio
        cout << "\n";
        cout << "El valor promedio de la forma de onda es ";
        cout << Vave << "volts.\n";
}
```

FIGURA 13.78

Programa en C++ diseñado para calcular el valor promedio de una forma de onda con hasta cinco pulsos negativos o positivos.



El programa empieza con un encabezado y una directriz del preprocesador. Recuerde que el archivo de encabezado *iostream.h* establece el trayecto de entrada-salida entre el programa y el sistema operativo. Observe que la parte de *main* (   ) se extiende hasta el final del programa, según se identifica por las llaves {   }. Dentro de esta región se realizarán todos los cálculos y se mostrarán los resultados.

Dentro de la parte de *main* (   ) del programa, se definen todas las variables que se emplearán en los cálculos como de punto flotante (valores decimales) o enteros (números sin decimales). Los comentarios a la derecha identifican cada variable. A esto lo sigue un mensaje con la pregunta acerca de cuántos niveles se encontrarán en la forma de onda utilizando *cout* (mensaje de salida). La instrucción *cin* (ingresar un valor) permite ingresar una respuesta del usuario.

Luego, se emplea la instrucción de ciclo *for* para establecer un nivel fijo de repeticiones de la secuencia que aparece entre los paréntesis (   ) para un número de ciclos definidos por la variable *levels*. El formato de esta instrucción *for* es tal que la primera entrada dentro de los paréntesis (   ) es el valor inicial de la variable *count* (1 en este caso), seguido por un punto y coma y luego por una expresión de verificación que determina cuántas veces se repetirá la secuencia siguiente. En otras palabras, si *levels* es 5, entonces el primer paso a través de la instrucción *for* resultará en la comparación de 1 contra 5, y la expresión de verificación será satisfecha ya que 5 es mayor o igual a 1 (< =). En el siguiente paso, *count* se incrementará a 2, y se realizará la misma verificación. Eventualmente *count* será igual a 5, la expresión de verificación no será satisfecha y el programa avanzará a la siguiente instrucción que es *Vave* = *VT sum*/*T*. La última parte *count*++ de la instrucción *for* simplemente incrementa la variable *count* después de cada iteración. La primera línea dentro del estatuto *for* hace que se salte un renglón, seguido por la pregunta acerca del nivel de voltaje para el primer intervalo de tiempo. La pregunta incluirá el estado actual de la variable *count* seguido por dos puntos. En C++ todas las salidas de caracteres deben desplegarse con comillas (lo cual no es necesario para valores numéricos). Sin embargo, observe la ausencia de las comillas para *cout* dado que será un valor numérico. A continuación, el usuario ingresa el primer nivel de voltaje mediante *cin*, seguido por una petición del intervalo de tiempo. En este caso no se proporcionan unidades ya que simplemente se mide como un incremento del todo, es decir, si el periodo total es 5 μs y el primer intervalo es 2 μs, entonces sólo se ingresa un 2.

Luego se calcula el área bajo el pulso para establecer la variable *VTsum*, la cual inicialmente se estableció en 0. En la siguiente iteración el valor de *VTsum* será el obtenido en la primera iteración más el área nueva. En otras palabras, *VTsum* es un almacenamiento para el área total acumulada. De forma similar, *T* es la suma acumulada de los intervalos de tiempo.

Con posterioridad a una respuesta FALSE (falso) de la expresión de verificación de la instrucción *for*, el programa procederá a calcular el valor promedio de la forma de onda utilizando los valores acumulados del área y el tiempo. Luego se salta una línea; y se despliega el valor promedio con las instrucciones *cout* restantes. Se añadieron corchetes en el margen izquierdo del programa como ayuda para identificar sus distintos componentes.

Ahora ya contamos con un programa que puede calcular el valor promedio de cualquier forma de onda de pulso que tenga hasta cinco pulsos positivos o negativos. Este programa puede almacenarse y simplemente volverse a cargar cuando se necesite. Operaciones como las anteriores no están disponibles ni en PSpice ni en cualquier otro paquete de software comercial. Generar un programa pequeño con valor de por vida sólo requirió el conocimiento de cierto lenguaje y algunos minutos.

Dos ejecuciones mostrarán claramente lo que se desplegará y la apariencia que tendrá la salida. La forma de onda de la figura 13.79 tiene cinco niveles y

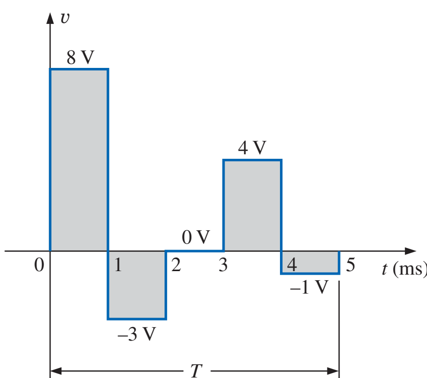
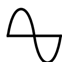


FIGURA 13.79
Forma de onda con cinco pulsos a ser analizados mediante el programa en C++ de la figura 13.78.




```
¿Cuántos niveles desea ingresar (1..5) ? 5

Ingrese el nivel de voltaje 1: 8
Ingrese el tiempo para el nivel 1: 1

Ingrese el nivel de voltaje 2: -3
Ingrese el tiempo para el nivel 2: 1

Ingrese el nivel de voltaje 3: 0
Ingrese el tiempo para el nivel 3: 1

Ingrese el nivel de voltaje 4: 4
Ingrese el tiempo para el nivel 4: 1

Ingrese el nivel de voltaje 5: -1
Ingrese el tiempo para el nivel 5: 1

El valor promedio de la forma de onda es 1.6 volts.
```

FIGURA 13.80
Resultados de salida para la forma de onda de la figura 13.79.

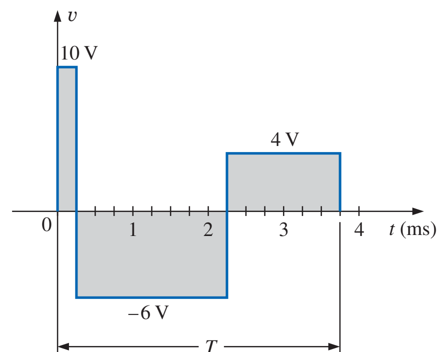


FIGURA 13.81
Forma de onda con tres pulsos a ser analizados mediante el programa en C++ de la figura 13.78.

```
¿Cuántos niveles desea ingresar (1..5) ? 3

Ingrese el nivel de voltaje 1: 10
Ingrese el tiempo para el nivel 1: .25

Ingrese el nivel de voltaje 2: -6
Ingrese el tiempo para el nivel 2: 2

Ingrese el nivel de voltaje 3: 4
Ingrese el tiempo para el nivel 3: 1.5

El valor promedio de la forma de onda es -0.933333 volts.
```

FIGURA 13.82
Resultados de salida para la forma de onda de la figura 13.81.

se ingresó como se muestra en el archivo de salida de la figura 13.80. Como se indica, el valor promedio es de 1.6 V. La forma de onda de la figura 13.81 tiene sólo tres pulsos, y el intervalo de tiempo para cada pulso es diferente. Observe cómo se ingresaron los intervalos de tiempo. Cada intervalo se captura como un multiplicador de la unidad estándar de medición para el eje horizontal. La variable *levels* será igual a 3, requiriendo con esto sólo tres iteraciones de la instrucción *for*. El resultado es un valor negativo de −0.933 V, como se muestra en el archivo de salida de la figura 13.82.

PROBLEMAS

SECCIÓN 13.2 Características y definiciones del voltaje senoidal de ca

1. Para la forma de onda periódica de la figura 13.83:
  a. Encuentre el periodo *T*.
  b. ¿Cuántos ciclos se muestran?
  c. ¿Cuál es la frecuencia?
  ***d.** Determine la amplitud positiva y el valor pico a pico (¡piense!).

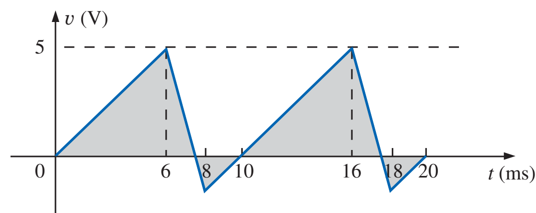
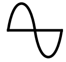


FIGURA 13.83
Problema 1.



2. Repita el problema 1 para la forma de onda periódica de la figura 13.84.

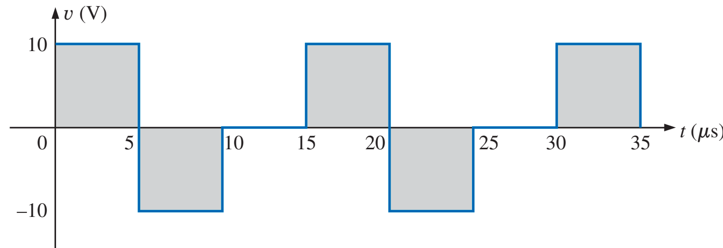


FIGURA 13.84
Problemas 2, 9 y 47.

3. Determine el periodo y la frecuencia para la forma de onda de diente de sierra mostrada en la figura 13.85.

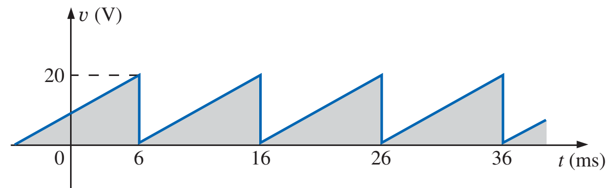


FIGURA 13.85
Problemas 3 y 48.

4. Encuentre el periodo de una forma de onda periódica cuya frecuencia es:
a. 25 Hz. **b.** 35 MHz.
c. 55 kHz. **d.** 1 Hz.

5. Encuentre la frecuencia de una forma de onda repetitiva cuyo periodo es:
a. 1/60 s. **b.** 0.01 s.
c. 34 ms. **d.** 25 μs.

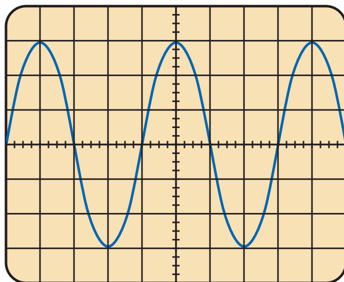
6. Encuentre el periodo de una forma de onda senoidal que completa 80 ciclos en 24 ms.

7. Si una forma de onda periódica tiene frecuencia de 20 Hz, ¿cuánto tiempo (en segundos) le tomará completar cinco ciclos?

8. ¿Cuál es la frecuencia de una forma de onda periódica que completa 42 ciclos en 6 s?

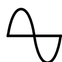
9. Trace una onda cuadrada periódica, como la que aparece en la figura 13.84, con frecuencia de 20,000 Hz y valor pico de 10 mV.

10. Para el patrón de osciloscopio de la figura 13.86:
a. Determine la amplitud pico.
b. Encuentre el periodo.
c. Calcule la frecuencia.
Trace de nuevo el patrón de osciloscopio si se añade un nivel de cd de +25 mV a la forma de onda de entrada.



Sensibilidad vertical = 50 mV/divisiones
Sensibilidad horizontal = 10 μs/divisiones

FIGURA 13.86
Problema 10.



SECCIÓN 13.3 La onda senoidal

11. Convierta los siguientes grados a radianes:
a. 45° **b.** 60°
c. 120° **d.** 270°
e. 178° **f.** 221°

12. Convierta los siguientes radianes a grados:
a. $\pi/4$ **b.** $\pi/6$
c. $\frac{1}{10}\pi$ **d.** $\frac{7}{6}\pi$
e. 3π **f.** 0.55π

13. Encuentre la velocidad angular de una forma de onda con periodo de:
a. 2 s. **b.** 0.3 ms.
c. 4 μs. **d.** $\frac{1}{26}$ s.

14. Encuentre la velocidad angular de una forma de onda con frecuencia de:
a. 50 Hz. **b.** 600 Hz.
c. 2 kHz. **d.** 0.004 MHz.

15. Encuentre la frecuencia y el periodo de ondas senoidales que tengan velocidad angular de:
a. 754 rad/s. **b.** 8.4 rad/s.
c. 6000 rad/s. **d.** $\frac{1}{16}$ rad/s.

16. Dado que $f = 60$ Hz, determine cuánto tiempo le tomará a la forma de onda senoidal recorrer un ángulo de 45°.

17. Si una forma de onda senoidal recorre un ángulo de 30° en 5 ms, determine la velocidad angular de la forma de onda.

SECCIÓN 13.4 Formato general para el voltaje y la corriente senoidales

18. Encuentre la amplitud y la frecuencia de las siguientes ondas:
a. 20 sen 377t. **b.** 5 sen 754t.
c. 10^6 sen 10,000t. **d.** 0.001 sen 942t.
e. -7.6 sen 43.6t. **f.** $(\frac{1}{42})$ sen 6.283t.

19. Trace 5 sen 754t con la abscisa el:
a. ángulo en grados.
b. ángulo en radianes.
c. tiempo en segundos.

20. Trace 10^6 sen 10,000t con la abscisa el:
a. ángulo en grados.
b. ángulo en radianes.
c. tiempo en segundos.

21. Trace -7.6 sen 43.6t con la abscisa el:
a. ángulo en grados.
b. ángulo en radianes.
c. tiempo en segundos.

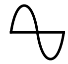
22. Si $e = 300$ sen 157t, ¿cuánto tiempo (en segundos) le tomará a esta forma de onda completar 1/2 ciclo?

23. Dado que $i = 0.5$ sen α, determine i en $\alpha = 72°$.

24. Dado que $v = 20$ sen α, determine v en $\alpha = 1.2\pi$.

***25.** Dado que $v = 30 \times 10^{-3}$ sen α, determine los ángulos en que v será igual a 6 mV.

***26.** Si $v = 40$ V en $\alpha = 30°$ y $t = 1$ ms, determine la expresión matemática para el voltaje senoidal.



SECCIÓN 13.5 Relaciones de fase

27. Trace sen(377t + 60°) con la abscisa el:
   a. ángulo en grados.
   b. ángulo en radianes.
   c. tiempo en segundos.

28. Trace las siguientes formas de onda:
   a. 50 sen(ωt + 0°) **b.** −20 sen(ωt + 2°)
   c. 5 sen(ωt + 60°) **d.** 4 cos ωt
   e. 2 cos(ωt + 10°) **f.** −5 cos(ωt + 20°)

29. Encuentre la relación de fase entre las formas de onda de cada conjunto:
   a. v = 4 sen(ωt + 50°)
   i = 6 sen(ωt + 40°)
   b. v = 25 sen(ωt − 80°)
   $i = 5 \times 10^{-3}$ sen(ωt − 10°)
   c. v = 0.2 sen(ωt − 60°)
   i = 0.1 sen(ωt + 20°)
   d. v = 200 sen(ωt − 210°)
   i = 25 sen(ωt − 60°)

***30.** Repita el problema 29 para los siguientes conjuntos:
   a. v = 2 cos(ωt − 30°) **b.** v = −1 sen(ωt + 20°)
   i = 5 sen(ωt + 60°) i = 10 sen(ωt − 70°)
   c. v = −4 cos(ωt + 90°)
   i = −2 sen(ωt + 10°)

31. Escriba la expresión analítica para las formas de onda de la figura 13.87 con el ángulo de fase en grados.

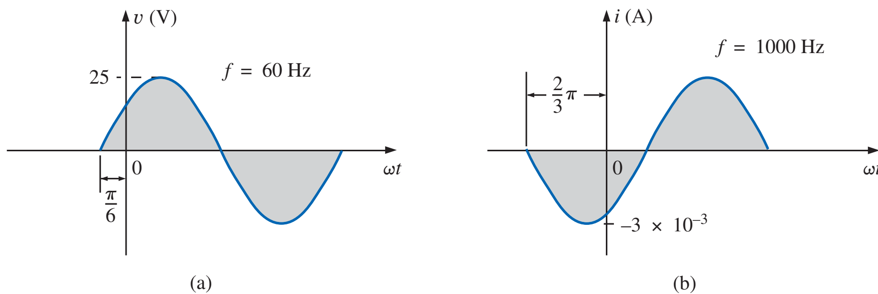


FIGURA 13.87
Problema 31.

32. Repita el problema 31 para las formas de onda de la figura 13.88.

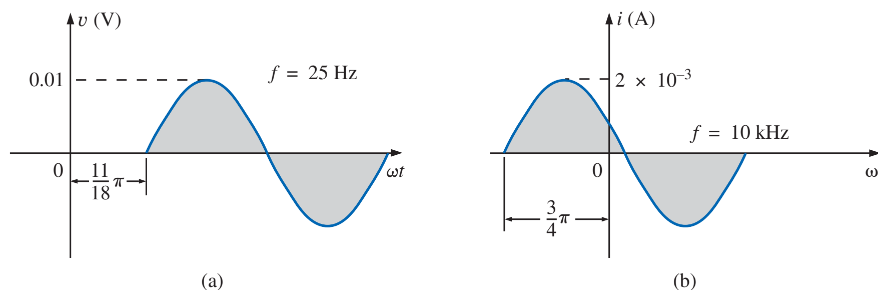
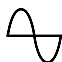


FIGURA 13.88
Problema 32.



***33.** El voltaje senoidal $v = 200 \text{ sen}(2\pi 1000t + 60°)$ se trazó en la figura 13.89. Determine el tiempo t_1.

***34.** La corriente senoidal $i = 4 \text{ sen}(50{,}000t - 40°)$ se trazó en la figura 13.90. Determine el tiempo t_1.

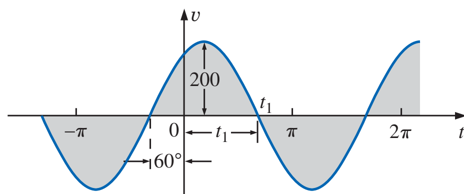


FIGURA 13.89
Problema 33.

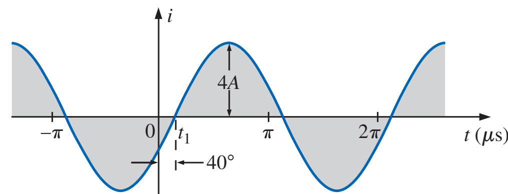


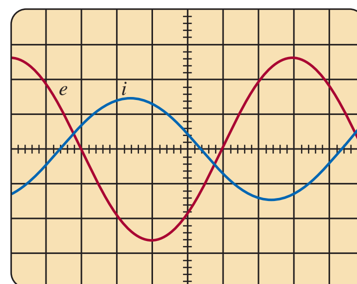
FIGURA 13.90
Problema 34.

***35.** Determine el retraso de fase en milisegundos entre las siguientes dos formas de onda:

$$v = 60 \text{ sen}(1800t + 20°)$$
$$i = 1.2 \text{ sen}(1800t - 20°)$$

36. Para la imagen de osciloscopio de la figura 13.91:

a. Determine el periodo de cada forma de onda.
b. Determine la frecuencia de cada forma de onda.
c. Encuentre el valor rms de cada forma de onda.
d. Determine el desplazamiento de fase entre las dos formas de onda e identifique cuál se encuentra adelantada y cuál retrasada.



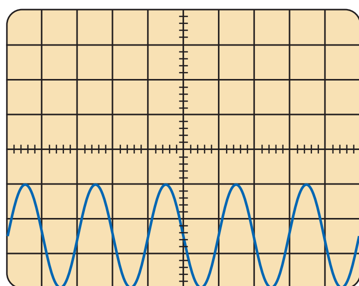
Sensibilidad vertical = 0.5 V/divisiones
Sensibilidad horizontal = 1 ms/divisiones

FIGURA 13.91
Problema 36.

SECCIÓN 13.6 Valor promedio

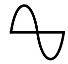
37. Para la forma de onda de la figura 13.92:

a. Determine el periodo.
b. Encuentre la frecuencia.
c. Determine el valor promedio.
d. Trace la imagen de osciloscopio resultante si el canal vertical se cambia de CD a CA.

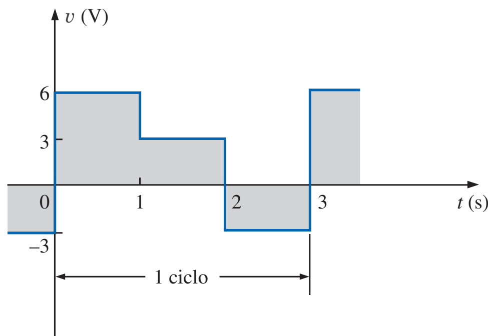


Sensibilidad vertical = 10 mV/divisiones
Sensibilidad horizontal = 0.2 ms/divisiones

FIGURA 13.92
Problema 37.



38. Encuentre el valor promedio para las formas de onda periódicas de la figura 13.93 sobre un ciclo completo.



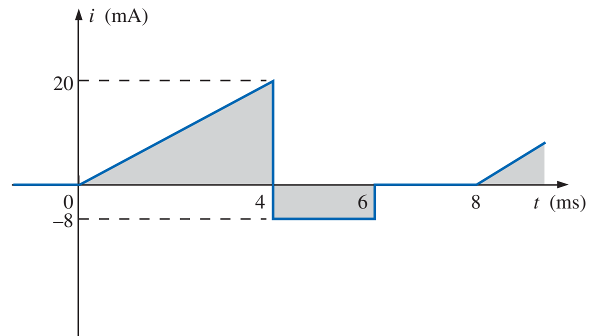
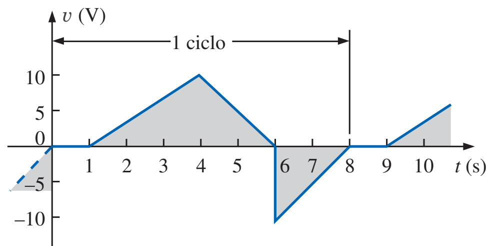


FIGURA 13.93
Problema 38.

39. Encuentre el valor promedio para las formas de onda periódicas de la figura 13.94 sobre un ciclo completo.



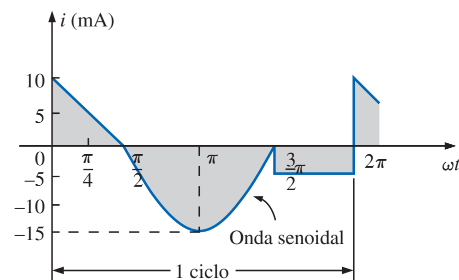


FIGURA 13.94
Problema 39.

*40. **a.** Mediante el método de aproximación, utilizando formas geométricas que le sean familiares, encuentre el área bajo la curva de la figura 13.95 desde cero hasta 10 s. Compare su solución con el área real de 5 volt-segundos (V·s).

b. Encuentre el valor promedio de la forma de onda desde cero hasta 10 s.

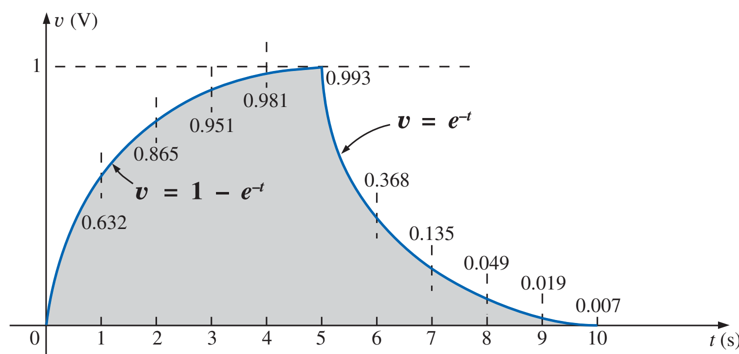
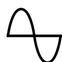
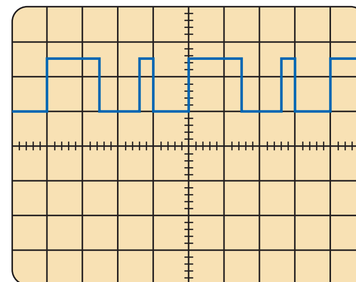


FIGURA 13.95
Problema 40.



***41.** Para la forma de onda de la figura 13.96:
  a. Determine el periodo.
  b. Encuentre la frecuencia.
  c. Determine el valor promedio.
  d. Trace la imagen de osciloscopio resultante si el canal vertical se cambia de CD a CA.



Sensibilidad vertical = 10 mV/divisiones
Sensibilidad horizontal = 10 μs/divisiones

FIGURA 13.96
Problema 41.

SECCIÓN 13.7 Valores efectivos (rms)

42. Encuentre los valores rms de las siguientes formas de onda senoidales:
  a. $v = 20 \text{ sen } 754t$
  b. $v = 7.07 \text{ sen } 377t$
  c. $i = 0.006 \text{ sen}(400t + 20°)$
  d. $i = 16 \times 10^{-3} \text{ sen}(377t - 10°)$

43. Escriba las expresiones senoidales para los voltajes y corrientes que tienen los siguientes valores rms a la frecuencia de 60 Hz con desplazamiento de fase igual a cero:
  a. 1.414 V **b.** 70.7 V
  c. 0.06 A **d.** 24 μA

44. Encuentre el valor rms para la forma de onda periódica de la figura 13.97 sobre un ciclo completo.

45. Encuentre el valor rms para la forma de onda periódica de la figura 13.98 sobre un ciclo completo.

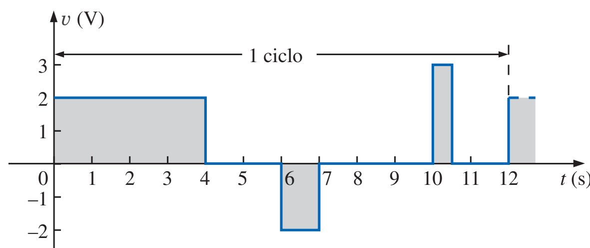


FIGURA 13.97
Problema 44.

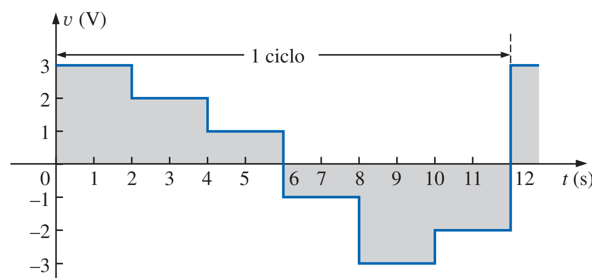


FIGURA 13.98
Problema 45.

46. ¿Cuál es el valor rms y el valor promedio de la onda cuadrada que aparece en la figura 13.99?

47. ¿Cuál es el valor rms y el valor promedio de la forma de onda mostrada en la figura 13.84?

48. ¿Cuál es el valor promedio de la forma de onda que aparece en la figura 13.85?

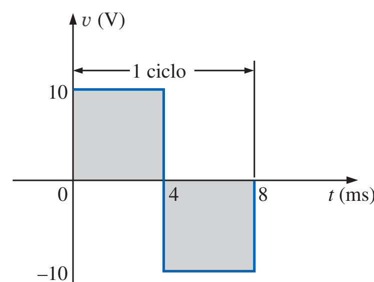
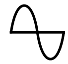
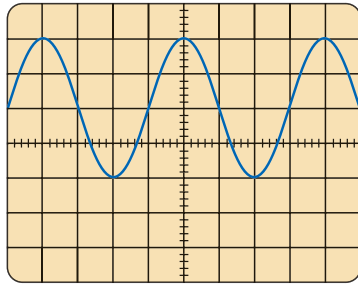


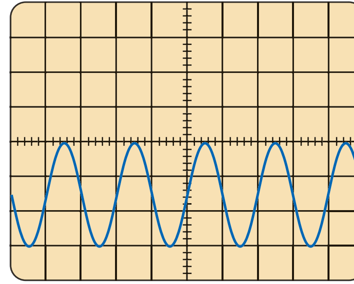
FIGURA 13.99
Problema 46.



49. Para cada forma de onda de la figura 13.100, determine el periodo, la frecuencia, el valor promedio y el valor rms.



Sensibilidad vertical = 20 mV/divisiones
Sensibilidad horizontal = 10 μs/divisiones
(a)

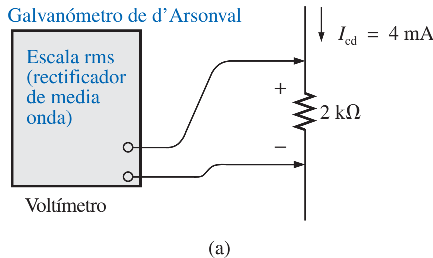


Sensibilidad vertical = 0.2 V/divisiones
Sensibilidad horizontal = 50 μs/divisiones
(b)

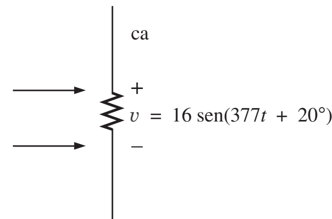
FIGURA 13.100
Problema 49.

SECCIÓN 13.8 Medidores e instrumentos de ca

50. Determine la lectura del medidor para cada situación de la figura 13.101.



(a)



(b)

FIGURA 13.101
Problema 50.

SECCIÓN 13.10 Análisis por computadora

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

51. Dada una función senoidal, escriba un programa para determinar el valor rms, la frecuencia y el periodo.

52. Dadas dos funciones senoidales, escriba un programa para determinar el desplazamiento de fase entre las dos formas de onda e indicar cuál está adelantada y cuál retrasada.

53. Dada una forma de onda de pulso alterna, escriba un programa para determinar los valores promedio y rms de la forma de onda durante un ciclo completo.

GLOSARIO

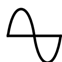
Amp-Clamp® Instrumento tipo abrazadera que permite mediciones de corriente no invasivas y puede utilizarse como un voltímetro o un ohmímetro convencionales.

Amplitud pico Valor máximo de una forma de onda medido a partir de su valor promedio o medio, denotado por letras mayúsculas.

Ciclo Parte de la forma de onda contenida en un periodo.

Contador de frecuencia Instrumento que proporcionará una visualización digital de la frecuencia o el periodo de una señal periódica que varía en el tiempo.

Forma de onda Trayectoria trazada por una cantidad, graficada como función de alguna variable como posición, tiempo, grados, temperatura, radianes, etcétera.



Forma de onda alterna Forma de onda que oscila por encima y por debajo de un nivel de referencia definido.

Forma de onda periódica Forma de onda que se repite continuamente después de un intervalo de tiempo definido.

Forma de onda senoidal de ca Forma de onda alterna de características únicas que oscila con igual amplitud por encima y por debajo de un eje dado.

Frecuencia (f) Número de ciclos de una forma de onda periódica que ocurren en un segundo.

Galvanómetro de electrodinamómetro Instrumentos que pueden medir cantidades tanto de ca como de cd sin un cambio en sus circuitos internos.

Osciloscopio Instrumento que desplegará, mediante el uso de un tubo de rayos catódicos, las características de una señal que varía en el tiempo.

Periodo (T) Intervalo de tiempo entre repeticiones sucesivas de una forma de onda periódica.

Radián (rad) Unidad de medición utilizada para definir un segmento particular de un círculo. Un radián es aproximadamente igual a 57.3°; 2π rad equivalen a 360°.

Relación de fase Indicación de cuál de dos formas de onda se adelanta o retrasa con respecto a la otra, y por cuántos grados o radianes.

Valor efectivo Valor de cd equivalente de cualquier voltaje o corriente alternante.

Valor instantáneo Magnitud de una forma de onda en cualquier instante, denotada por letras minúsculas.

Valor pico Valor máximo de una forma de onda, denotado por letras mayúsculas.

Valor pico a pico Magnitud de la excursión total de una señal desde el pico negativo hasta el positivo. Suma de los valores absolutos de los valores pico positivo y negativo.

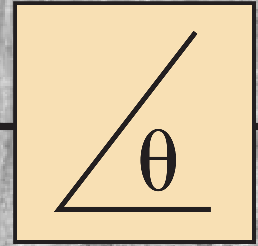
Valor promedio Nivel de una forma de onda definido mediante la condición de que el área incluida por la curva situada encima de este nivel sea exactamente igual al área incluida por la curva debajo de este nivel.

Valor (rms) (raíz cuadrático medio) Valor efectivo o la raíz cuadrada del valor cuadrático medio de una forma de onda.

Velocidad angular Velocidad con la que un vector radial que proyecta una función senoidal rota sobre su eje.

VOM Multímetro con la capacidad de medir resistencia y niveles de corriente y voltaje de ca y cd.

14



Los elementos básicos y los fasores

14.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analizará la respuesta de los elementos básicos R, L y C a un voltaje o una corriente senoidales, con especial énfasis en la forma en que la frecuencia afectará las características "de oposición" de cada elemento. Luego se presentará la notación fasorial para establecer un método de análisis que permita una correspondencia directa con varios de los métodos, teoremas y conceptos presentados en los capítulos de cd.

14.2 LA DERIVADA

Con el objetivo de comprender la respuesta de los elementos básicos R, L y C a una señal senoidal, es necesario analizar el concepto de la **derivada** con cierto detalle. Pero el lector no tiene que volverse experto en la técnica matemática, sino simplemente comprender el impacto de una relación definida por una derivada.

Recuerde, de la sección 10.12, que la derivada dx/dt está definida como la razón de cambio de x con respecto al tiempo. Si x no cambia en un instante particular, $dx = 0$, y la derivada será cero. Para la forma de onda senoidal, dx/dt será cero solamente en los picos positivos y negativos ($\omega t = \pi/2$ y $\frac{3}{2}\pi$ en la figura 14.1), dado que x no cambia en esos instantes. La derivada dx/dt es en realidad la pendiente de la gráfica en cualquier instante.

Una revisión minuciosa de la forma de onda senoidal también indicará que el cambio más grande en x ocurre en los instantes $\omega t = 0$, π, y 2π. La derivada, por tanto, es un máximo en estos puntos. En 0 y 2π, x se incrementa a su mayor tasa, y la derivada posee un signo positivo dado que x se incrementa con el tiempo. En π, dx/dt disminuye a la misma tasa que se incrementó de 0 a 2π, pero la derivada posee signo negativo dado que x disminuye con el tiempo. Como la tasa de cambio en 0, π y 2π es la misma, la magnitud de la derivada en estos puntos será también la misma. Para distintos valores de ωt entre estos máximos y mínimos, la derivada existirá y tendrá valores que van del mínimo al máximo, incluidos éstos. Una gráfica de la derivada en la figura 14.2 muestra que:

la derivada de una onda senoidal es una onda cosenoidal.

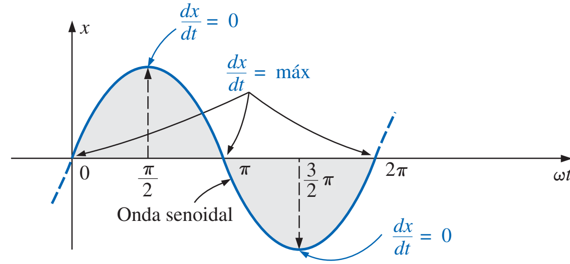


FIGURA 14.1
Definición de los puntos en una forma de onda senoidal que tienen derivadas máximas y mínimas.

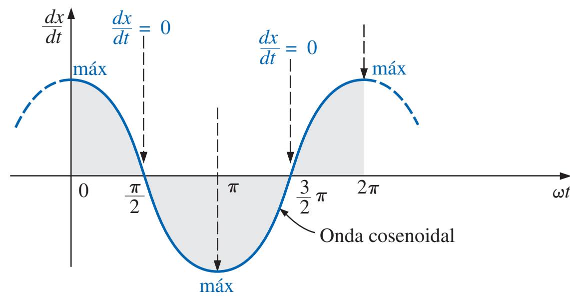


FIGURA 14.2
Derivada de la onda senoidal de la figura 14.1.

El valor pico de la onda cosenoidal está relacionado directamente con la frecuencia de la forma de onda original. A mayor frecuencia, más pronunciada será la pendiente en el eje horizontal y mayor el valor de dx/dt, como se muestra en la figura 14.3 para dos frecuencias diferentes.

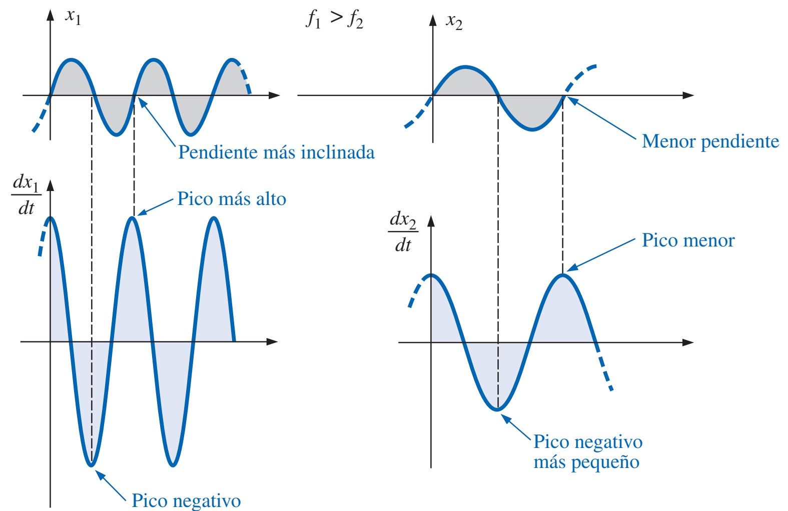


FIGURA 14.3
Efecto de la frecuencia sobre el valor pico de la derivada.

Observe en la figura 14.3 que aun cuando ambas formas de onda (x_1 y x_2) tienen el mismo valor pico, la función senoidal con la frecuencia más alta genera el mayor valor pico para la derivada. Además, advierta que:

la derivada de una onda senoidal tiene los mismos periodo y frecuencia que la forma de onda senoidal original.

Para el voltaje senoidal:

$$e(t) = E_m \operatorname{sen}(\omega t \pm \theta)$$

la derivada puede encontrarse directamente por diferenciación (cálculo) para generar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,e(t) &= \omega E_m \cos(\omega t \pm \theta)\\ &= 2\pi f E_m \cos(\omega t \pm \theta)\end{aligned} \quad \textbf{(14.1)}$$

La mecánica del proceso de diferenciación no se expondrá o analizará aquí, tampoco se requerirá para continuar con el texto. Sin embargo, observe que el valor pico de la derivada, $2\pi f E_m$, es una función de la frecuencia de *e(t)*, y que la derivada de la onda senoidal es una onda cosenoidal.

14.3 RESPUESTA DE LOS ELEMENTOS BÁSICOS *R, L* Y *C* A UN VOLTAJE O UNA CORRIENTE SENOIDALES

Ahora que estamos familiarizados con las características de la derivada de una función senoidal, podemos analizar la respuesta de los elementos básicos *R*, *L* y *C* a un voltaje o una corriente senoidales.

Resistor

Para frecuencias de líneas de alimentación y frecuencias de hasta unos cientos de kilohertz, la resistencia, para todo propósito práctico, no es afectada por la frecuencia del voltaje o la corriente senoidales aplicados. Para esta región de frecuencia, el resistor *R* de la figura 14.4 puede manejarse como una constante, y se podrá aplicar la ley de Ohm de la siguiente forma. Para $v = V_m \operatorname{sen} \omega t$,

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m \operatorname{sen} \omega t}{R} = \frac{V_m}{R} \operatorname{sen} \omega t = I_m \operatorname{sen} \omega t$$

donde:

$$I_m = \frac{V_m}{R} \quad \textbf{(14.2)}$$

Además, para una *i* dada,

$$v = iR = (I_m \operatorname{sen} \omega t)R = I_m R \operatorname{sen} \omega t = V_m \operatorname{sen} \omega t$$

donde:

$$V_m = I_m R \quad \textbf{(14.3)}$$

Una gráfica de v e i en la figura 14.5 muestra que:

para un elemento puramente resistivo, el voltaje y la corriente a través del elemento se encuentran en fase, con sus valores pico relacionados mediante la ley de Ohm.

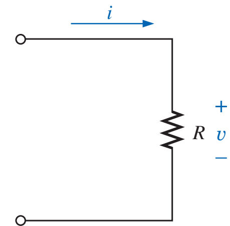


FIGURA 14.4
Determinación de la respuesta senoidal para un elemento resistivo.

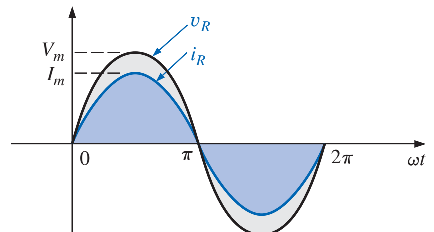


FIGURA 14.5
El voltaje y la corriente de un elemento resistivo se encuentran en fase.

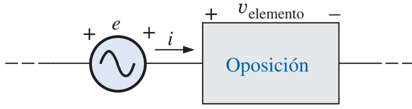


FIGURA 14.6
Definición de la oposición de un elemento al flujo de carga a través del elemento.

Inductor

Para la configuración en serie de la figura 14.6, el voltaje v_{elemento} del elemento ubicado en el recuadro se opone a la fuente e, y por ello reduce la magnitud de la corriente i. La magnitud del voltaje en el elemento está determinada por la oposición del elemento al flujo de carga, o corriente i. Para un elemento resistivo, encontramos que la oposición es su resistencia y que v_{elemento} e i están determinados por $v_{\text{elemento}} = iR$.

En el capítulo 12 encontramos que el voltaje en un inductor está relacionado directamente con la razón de cambio de la corriente a través de la bobina. Por consiguiente, a mayor frecuencia, mayor será la razón de cambio de la corriente a través de la bobina, y más grande la magnitud del voltaje. Además, en el mismo capítulo encontramos que la inductancia de una bobina determinará la razón de cambio del flujo de enlace de una bobina para un cambio particular en la corriente a través de la misma. Mientras más alta sea la inductancia, mayor será la razón de cambio de los enlaces del flujo y mayor el voltaje resultante en la bobina.

Por tanto, el voltaje inductivo estará directamente relacionado con la frecuencia (o, con mayor precisión, con la velocidad angular de la corriente senoidal de ca a través de la bobina) y con la inductancia de la bobina. Para valores crecientes de f en la figura 14.7, la magnitud de v_L se incrementará como se describió antes.

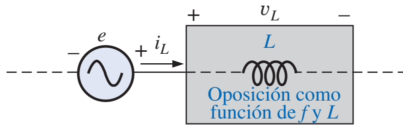


FIGURA 14.7
Definición de los parámetros que determinan la oposición de un elemento inductivo al flujo de carga.

Utilizando las similitudes entre las figuras 14.6 y 14.7, encontramos que incrementos en los niveles de v_L están directamente relacionados con incrementos en los niveles de oposición en la figura 14.6. Dado que v_L se incrementará tanto con ω $(= 2\pi f)$ y L, como con L, la oposición de un elemento inductivo es como se define en la figura 14.7.

Ahora verificaremos algunas de las conclusiones anteriores utilizando un método más matemático y luego definiremos algunas cantidades importantes que serán utilizadas en las secciones y capítulos siguientes.

Para el inductor de la figura 14.8, recordamos del capítulo 12 que:

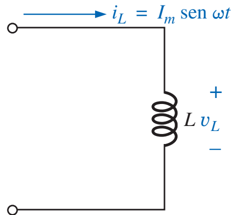


FIGURA 14.8
Investigación de la respuesta senoidal de un elemento inductivo.

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

y, al aplicar diferenciación,

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt}(I_m \operatorname{sen} \omega t) = \omega I_m \cos \omega t$$

Por tanto, $$v_L = L\frac{di_L}{dt} = L(\omega I_m \cos \omega t) = \omega L I_m \cos \omega t$$

o bien: $$v_L = V_m \operatorname{sen}(\omega t + 90°)$$

donde: $$V_m = \omega L I_m$$

Observe que el valor pico de v_L está directamente relacionado con ω $(= 2\pi f)$ y L como se anticipó en el análisis anterior.

La gráfica de v_L e i_L en la figura 14.9 muestra que:

para un inductor, v_L adelanta a i_L por 90°, o está retrasada con respecto a v_L por 90°.

Si un ángulo de fase está incluido en la expresión senoidal de i_L, tal como:

$$i_L = I_m \operatorname{sen}(\omega t \pm \theta)$$

entonces: $$v_L = \omega L I_m \operatorname{sen}(\omega t \pm \theta + 90°)$$

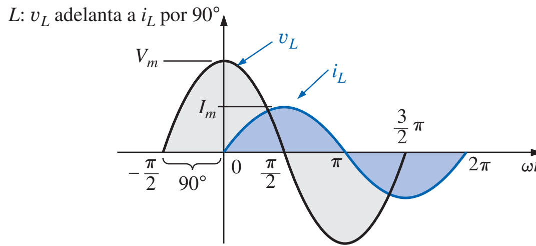


FIGURA 14.9
Para un inductor puro, el voltaje en la bobina adelanta a la corriente que pasa por la bobina por 90°.

La oposición establecida por un inductor en una red de ca senoidal podrá encontrarse ahora aplicando la ecuación (4.1):

$$\text{Efecto} = \frac{\text{causa}}{\text{oposición}}$$

la cual, para los propósitos de este texto, puede escribirse como:

$$\text{Oposición} = \frac{\text{causa}}{\text{efecto}}$$

Al sustituir valores tenemos:

$$\text{Oposición} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{\omega L I_m}{I_m} = \omega L$$

revelando que la oposición establecida por un inductor dentro de la red senoidal de ca está relacionada directamente con el producto de la velocidad angular ($\omega = 2\pi f$) y la inductancia, lo que comprueba las conclusiones anteriores.

La cantidad ωL, denominada **reactancia** (proveniente de *reacción*) de un inductor, se representa simbólicamente por X_L y se mide en ohms; es decir,

$$X_L = \omega L \qquad \text{(ohms, } \Omega) \qquad \textbf{(14.4)}$$

En el formato de la ley de Ohm, su magnitud puede determinarse a partir de:

$$X_L = \frac{V_m}{I_m} \qquad \text{(ohms, } \Omega) \qquad \textbf{(14.5)}$$

La reactancia inductiva es la oposición al flujo de corriente, la cual resulta en el intercambio continuo de energía entre la fuente y el campo magnético del inductor. En otras palabras, la reactancia inductiva, a diferencia de la resistencia (la cual disipa energía en forma de calor), no disipa energía eléctrica (ignorando los efectos de la resistencia interna del inductor).

Capacitor

Regresemos ahora a la configuración en serie de la figura 14.6 e insertemos el capacitor como el elemento de interés. Sin embargo, para el capacitor determinaremos i para un voltaje particular en el elemento. Cuando este método alcance su conclusión, la relación entre el voltaje y la corriente será conocida y el voltaje de oposición (v_{elemento}) podrá determinarse para cualquier corriente senoidal i.

La investigación sobre el inductor mostró que el voltaje inductivo en una bobina se opone al cambio instantáneo en la corriente a través de la bobina. Para redes capacitivas, el voltaje en el capacitor está limitado por la razón a la que puede depositarse la carga en, o liberarse por, las placas del capacitor durante las fases de carga y descarga, respectivamente. En otras palabras, un cambio instantáneo en el voltaje en un capacitor es opuesto por el hecho de que existe un elemento de tiempo requerido para depositar carga sobre (o liberar carga desde) las placas de un capacitor, y $V = Q/C$.

Dado que la capacitancia es una medida de la razón a la que el capacitor almacena carga sobre sus placas,

para un cambio particular en el voltaje en el capacitor, a mayor valor de capacitancia, mayor será la corriente capacitiva resultante.

Además, la ecuación fundamental que relaciona el voltaje en un capacitor con la corriente de un capacitor [$i = C(dv/dt)$] indica que:

para una capacitancia en particular, mientras mayor sea la razón de cambio de voltaje en el capacitor, mayor será la corriente capacitiva.

Por supuesto, un incremento en la frecuencia corresponderá a un incremento en la razón de cambio del voltaje en el capacitor y con un incremento en la corriente del capacitor.

La corriente de un capacitor, por tanto, está relacionada directamente con la frecuencia (o, de nuevo más específicamente, con la velocidad angular) y con la capacitancia del capacitor. Un incremento en cualquier cantidad dará por resultado un incremento en la corriente del capacitor. Sin embargo, para la configuración básica de la figura 14.10, estamos interesados en determinar la oposición del capacitor según se encuentra relacionada con la resistencia de un resistor y ωL para el inductor. Dado que un incremento en la corriente corresponde a una disminución en la oposición, e i_C es proporcional a ω y C, la oposición de un capacitor estará inversamente relacionada con ω (= $2\pi f$) y C.

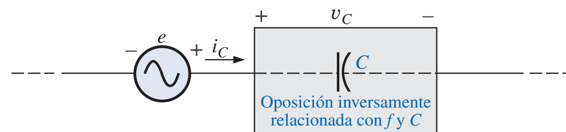


FIGURA 14.10
Definición de los parámetros que determinan la oposición de un elemento capacitivo al flujo de carga.

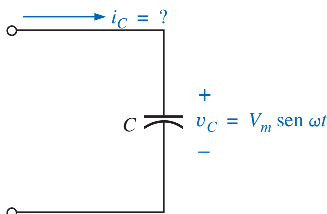


FIGURA 14.11
Investigación de la respuesta senoidal de un elemento capacitivo.

Ahora verificaremos, de la misma forma que hicimos con el inductor, algunas de las conclusiones anteriores utilizando un enfoque más matemático.

Para el capacitor de la figura 14.11, recordamos del capítulo 10 que:

$$i_C = C\,\frac{dv_C}{dt}$$

y, al aplicar la diferenciación,

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{d}{dt}(V_m \text{ sen } \omega t) = \omega V_m \cos \omega t$$

Por tanto,

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = C(\omega V_m \cos \omega t) = \omega C V_m \cos \omega t$$

o bien: $$i_C = I_m \operatorname{sen}(\omega t + 90°)$$

donde: $$I_m = \omega C V_m$$

Observe que el valor pico de i_C está directamente relacionado con ω $(= 2\pi f)$ y C, como se anticipó.

La gráfica de v_C e i_C en la figura 14.12 muestra que:

para un capacitor en donde i_C sobrepasa a v_C por 90°,* o v_C se retrasa por 90° con respecto a i_C.

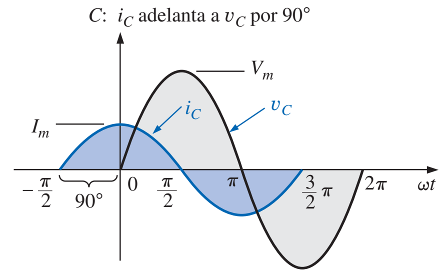


FIGURA 14.12
La corriente de un elemento puramente capacitivo adelanta al voltaje en el elemento por 90°.

Si el ángulo de fase está incluido en la expresión senoidal para v_C, tal como:

$$v_C = V_m \operatorname{sen}(\omega t \pm \theta)$$

entonces: $$i_C = \omega C V_m \operatorname{sen}(\omega t \pm \theta + 90°)$$

Al aplicar:

$$\text{Oposición} = \frac{\text{causa}}{\text{efecto}}$$

y al sustituir valores, obtenemos:

$$\text{Oposición} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_m}{\omega C V_m} = \frac{1}{\omega C}$$

lo cual concuerda con los resultados obtenidos líneas arriba.

La cantidad $1/\omega C$, denominada la **reactancia** de un capacitor, se representa simbólicamente por X_C y puede medirse en ohms; es decir,

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{(ohms, } \Omega\text{)} \qquad \textbf{(14.6)}$$

En formato de la ley de Ohm, su magnitud puede determinarse a partir de:

$$X_C = \frac{V_m}{I_m} \quad \text{(ohms, } \Omega\text{)} \qquad \textbf{(14.7)}$$

La reactancia capacitiva es la oposición al flujo de carga, la cual da por resultado el intercambio continuo de energía entre la fuente y el campo eléctrico del capacitor. Al igual que el inductor, el capacitor *no* disipa energía de ninguna forma (ignorando los efectos de la resistencia de fuga).

En los circuitos recién considerados, la corriente se entregaba en el circuito inductivo, y el voltaje en el circuito capacitivo. Esto se realizó con el fin de evitar el uso de integración para encontrar las cantidades desconocidas. En el circuito inductivo,

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

* En ocasiones se utiliza la frase mnemotécnica "*ELI* el hombre *ICE*" (del inglés "*ELI* the *ICE* man") para recordar la relación entre el voltaje y la corriente de un inductor y de un capacitor. Observe que el *L* (inductor) tiene la *E* antes de la *I* (*e* adelanta a *i* por 90°), y el *C* (capacitor) tiene la *I* antes de la *E* (*i* adelanta a *e* por 90°).

pero: $$i_L = \frac{1}{L}\int v_L\,dt \qquad \textbf{(14.8)}$$

En el circuito capacitivo,

$$i_C = C\,\frac{dv_C}{dt}$$

pero: $$v_C = \frac{1}{C}\int i_C\,dt \qquad \textbf{(14.9)}$$

En breve, deberemos considerar un método para analizar circuitos de ca que nos permitirá resolver cualquier cantidad desconocida con una entrada senoidal sin tener que utilizar integración directa o diferenciación.

Es posible determinar si una red con uno o más elementos es predominantemente capacitiva o inductiva observando la relación de fase entre el voltaje y la corriente de entrada.

Si la corriente de fuente adelanta al voltaje aplicado, la red es predominantemente capacitiva, y si el voltaje aplicado adelanta a la corriente de fuente, la red es en su mayoría inductiva.

Dado que ahora contamos con una ecuación para la reactancia de un inductor o un capacitor, no será necesario utilizar derivadas o integrales en los ejemplos que se considerarán. Con la simple aplicación de la ley de Ohm, $I_m = E_m/X_L$ (o X_C), y teniendo presente la relación de fase entre el voltaje y la corriente para cada elemento, será suficiente para completar los ejemplos.

EJEMPLO 14.1 Se indica el voltaje en un resistor. Encuentre la expresión senoidal para la corriente si el resistor es de 10 Ω. Trace las curvas para v e i.

a. $v = 100$ sen $377t$
b. $v = 25$ sen$(377t + 60°)$

Soluciones:

a. Ecuación (14.2): $I_m = \dfrac{V_m}{R} = \dfrac{100\text{ V}}{10\ \Omega} = 10\text{ A}$

(v e i están en fase), dando por resultado:

$$i = \mathbf{10\ sen\ 377}\boldsymbol{t}$$

Las curvas están trazadas en la figura 14.13.

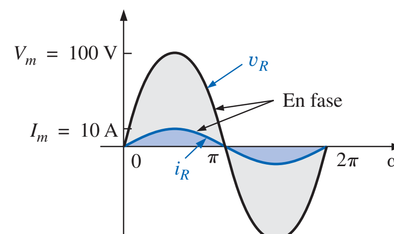


FIGURA 14.13
Ejemplo 14.1(a).

b. Ecuación (14.2): $I_m = \frac{V_m}{R} = \frac{25\text{ V}}{10\ \Omega} = 2.5\text{ A}$

(v e i están en fase), dando por resultado:

$$i = \mathbf{2.5\ sen(377}\boldsymbol{t}\mathbf{ + 60°)}$$

Las curvas están trazadas en la figura 14.14.

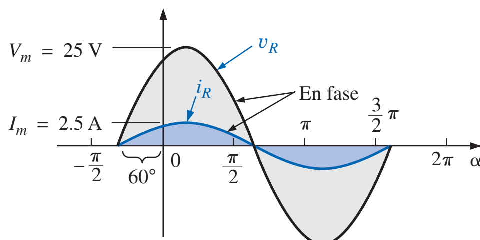


FIGURA 14.14
Ejemplo 14.1(b).

EJEMPLO 14.2 Se proporciona la corriente a través de un resistor de 5 Ω. Encuentre la expresión senoidal para el voltaje en el resistor para $i = 40$ sen $(377t + 30°)$.

Solución: Ecuación (14.3): $V_m = I_mR = (40\text{ A})(5\ \Omega) = 200\text{ V}$

(v e i están en fase), dando por resultado:

$$v = \mathbf{200\ sen(377}\boldsymbol{t}\mathbf{ + 30°)}$$

EJEMPLO 14.3 Se proporciona la corriente a través de una bobina de 0.1 H. Encuentre la expresión senoidal para el voltaje en la bobina. Trace las curvas v e i.

a. $i = 10$ sen $377t$
b. $i = 7$ sen$(377t - 70°)$

Soluciones:

a. Ecuación (14.4): $X_L = \omega L = (377\text{ rad/s})(0.1\text{ H}) = 37.7\ \Omega$
   Ecuación (14.5): $V_m = I_mX_L = (10\text{ A})(37.7\ \Omega) = 377\text{ V}$

   y sabemos que para una bobina v adelanta a i por 90°. Por tanto,

$$v = \mathbf{377\ sen(377}\boldsymbol{t}\mathbf{ + 90°)}$$

   Las curvas están trazadas en la figura 14.15.

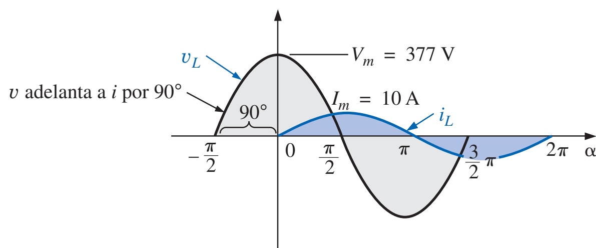


FIGURA 14.15
Ejemplo 14.3(a).

b. X_L adelanta a 37.7 Ω.

$$V_m = I_m X_L = (7\text{ A})(37.7\ \Omega) = 263.9\text{ V}$$

y sabemos que para una bobina v adelanta a i por 90°. Por tanto,

$$v = 263.9 \text{ sen}(377t - 70° + 90°)$$

y

$$v = \mathbf{263.9\ sen(377}\boldsymbol{t}\ \mathbf{+ 20°)}$$

Las curvas están trazadas en la figura 14.16.

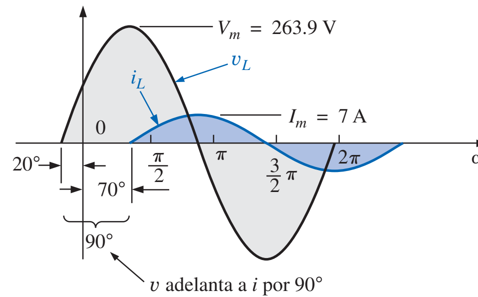


FIGURA 14.16
Ejemplo 14.3(b).

EJEMPLO 14.4 A continuación se presenta el voltaje en una bobina de 0.5 H. ¿Cuál es la expresión senoidal para la corriente?

$$v = 100 \text{ sen } 20t$$

Solución:

$$X_L = \omega L = (20\text{ rad/s})(0.5\text{ H}) = 10\ \Omega$$

$$I_m = \frac{V_m}{X_L} = \frac{100\text{ V}}{10\ \Omega} = 10\text{ A}$$

y sabemos que i se encuentra retrasada con respecto a v por 90°. Por tanto,

$$i = \mathbf{10\ sen(20}\boldsymbol{t}\ \mathbf{- 90°)}$$

EJEMPLO 14.5 A continuación se proporciona el voltaje en un capacitor de 1 μF. ¿Cuál es la expresión senoidal para la corriente? Trace las curvas de i y v.

$$v = 30 \text{ sen } 400t$$

Solución:

Ecuación (14.6): $$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(400\text{ rad/s})(1 \times 10^{-6}\text{ F})} = \frac{10^6\ \Omega}{400} = 2500\ \Omega$$

Ecuación (14.7): $$I_m = \frac{V_m}{X_C} = \frac{30\text{ V}}{2500\ \Omega} = 0.0120\text{ A} = 12\text{ mA}$$

y sabemos que i se encuentra retrasada con respecto a v por 90°. Por tanto,

$$i = \mathbf{12 \times 10^{-3}\ sen(400}\boldsymbol{t}\ \mathbf{+ 90°)}$$

Las curvas están trazadas en la figura 14.17.

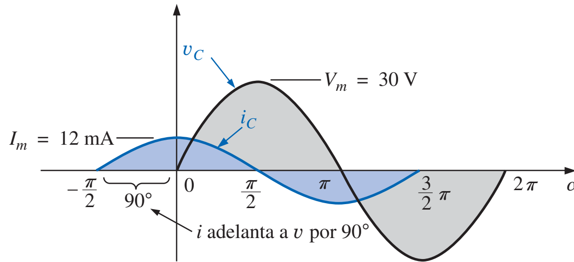


FIGURA 14.17
Ejemplo 14.5.

EJEMPLO 14.6 Se proporciona la corriente a través de un capacitor de 100 μF. Encuentre la expresión senoidal para el voltaje en el capacitor.

$$i = 40 \text{ sen}(500t + 60°)$$

Solución:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(500 \text{ rad/s})(100 \times 10^{-6} \text{ F})} = \frac{10^6\ \Omega}{5 \times 10^4} = \frac{10^2\ \Omega}{5} = 20\ \Omega$$

$$V_m = I_m X_C = (40 \text{ A})(20\ \Omega) = 800 \text{ V}$$

y sabemos que para un capacitor, v se encuentra retrasado con respecto a i por 90°. Por tanto,

$$v = 800 \text{ sen}(500t + 60° - 90°)$$

y $$v = \mathbf{800\ sen(500}t\ \mathbf{- 30°)}$$

EJEMPLO 14.7 Para los siguientes pares de voltajes y corrientes, determine si el elemento involucrado es un capacitor, un inductor o un resistor, y calcule el valor de C, L o R si se proporciona suficiente información (Figura 14.18):

a. $v = 100 \text{ sen}(\omega t + 40°)$
   $i = 20 \text{ sen}(\omega t + 40°)$
b. $v = 1000 \text{ sen}(377t + 10°)$
   $i = 5 \text{ sen}(377t - 80°)$
c. $v = 500 \text{ sen}(157t + 30°)$
   $i = 1 \text{ sen}(157t + 120°)$
d. $v = 50 \cos(\omega t + 20°)$
   $i = 5 \text{ sen}(\omega t + 110°)$

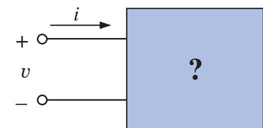


FIGURA 14.18
Ejemplo 14.7.

Soluciones:

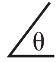
a. Dado que v e i están *en fase*, el elemento es un *resistor*, y

$$R = \frac{V_m}{I_m} = \frac{100 \text{ V}}{20 \text{ A}} = \mathbf{5\ \Omega}$$

b. Dado que v *adelanta a* i por 90°, el elemento es un *inductor*, y

$$X_L = \frac{V_m}{I_m} = \frac{1000 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 200\ \Omega$$

de manera que $X_L = \omega L = 200\ \Omega$ o



$$L = \frac{200\ \Omega}{\omega} = \frac{200\ \Omega}{377\ \text{rad/s}} = \mathbf{0.531\ H}$$

c. Dado que *i adelanta a v* por 90°, el elemento es un *capacitor*, y

$$X_C = \frac{V_m}{I_m} = \frac{500\ \text{V}}{1\ \text{A}} = 500\ \Omega$$

de manera que $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = 500\ \Omega$ o

$$C = \frac{1}{\omega 500\ \Omega} = \frac{1}{(157\ \text{rad/s})(500\ \Omega)} = \mathbf{12.74\ \mu F}$$

d. $v = 50\cos(\omega t + 20°) = 50\ \text{sen}(\omega t + 20° + 90°)$
$= 50\ \text{sen}(\omega t + 110°)$

Dado que v e i están *en fase*, el elemento es un *resistor*, y

$$R = \frac{V_m}{I_m} = \frac{50\ \text{V}}{5\ \text{A}} = \mathbf{10\ \Omega}$$

Efectos de cd y de alta y baja frecuencias sobre *L* y *C*

Para circuitos de cd, la frecuencia es cero, y la reactancia de una bobina es:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(0)L = 0\ \Omega$$

El uso de la equivalencia de corto circuito para el inductor dentro de circuitos de cd (Capítulo 12) se valida ahora. A frecuencias muy altas, $X_L\uparrow = 2\pi f\uparrow L$ es muy grande, y para ciertas aplicaciones prácticas el inductor puede reemplazarse por un circuito abierto. En forma de ecuación,

$$\boxed{X_L = 0\ \Omega} \quad \text{cd, } f = 0\ \text{Hz} \qquad \textbf{(14.10)}$$

y

$$\boxed{X_L \Rightarrow \infty\ \Omega \quad \text{cuando } f \Rightarrow \infty\ \text{Hz}} \qquad \textbf{(14.11)}$$

El capacitor puede reemplazarse por una equivalencia de circuito abierto en circuitos de cd puesto que $f = 0$, y

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(0)C} \Rightarrow \infty\ \Omega$$

nuevamente justificando nuestra acción previa (Capítulo 10). A frecuencias muy altas, para capacitancias finitas,

$$X_C\downarrow = \frac{1}{2\pi f\uparrow C}$$

es muy pequeña, y para ciertas aplicaciones prácticas el capacitor puede ser reemplazado por un corto circuito. En forma de ecuación:

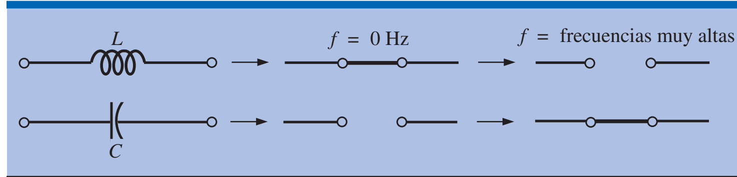
$$\boxed{X_C \Rightarrow \infty\ \Omega \quad \text{cuando } f \Rightarrow 0\ \text{Hz}} \qquad \textbf{(14.12)}$$

y

$$\boxed{X_C \cong 0\ \Omega} \quad f = \text{frecuencias muy altas} \qquad \textbf{(14.13)}$$

En la tabla 14.1 se repasan las conclusiones precedentes.

TABLA 14.1
Efecto de bajas y altas frecuencias sobre el modelo de circuito de un inductor y un capacitor.



Mediciones de ángulo de fase entre el voltaje aplicado y la corriente de fuente

Una vez familiarizados con las relaciones de fase y comprendida la forma en que los elementos afectan la relación de fase entre el voltaje aplicado y la corriente resultante, la utilización del osciloscopio para medir el ángulo de fase puede ser presentada. Recuerde de análisis anteriores que el osciloscopio puede ser utilizado solamente para desplegar niveles de voltaje en función del tiempo. Sin embargo, ahora que se ha comprendido que el voltaje en un resistor está en fase con la corriente que pasa por el resistor, podemos considerar el ángulo de fase asociado con el voltaje en cualquier resistor ser, en realidad, el ángulo de fase de la corriente. Por ejemplo, suponga que deseamos encontrar el ángulo de fase introducido por el sistema desconocido de la figura 14.19(a). En la figura 14.19(b), se añadió un resistor a las terminales de entrada y se conectaron los dos canales de un trazo dual (la mayoría de los osciloscopios actuales pueden desplegar dos señales al mismo tiempo) según se muestra. Un canal desplegará el voltaje de entrada v_i, mientras que el otro desplegará v_R como se muestra en la figura 14.19(c). No obstante, como se observó, dado que v_R e i_R están en fase, el ángulo de fase que aparece en la figura 14.19(c) es también el ángulo de fase entre v_i e i_i. Por tanto, puede añadirse un resistor de "muestreo" (un resistor de magnitud tal que no afectará de forma adversa las características de entrada del sistema) para determinar el ángulo de fase introducido por el sistema y la magnitud de la corriente resultante. Los detalles de las conexiones que deberán realizarse y la forma en que se determina el ángulo de fase se dejarán como ejercicio de laboratorio.

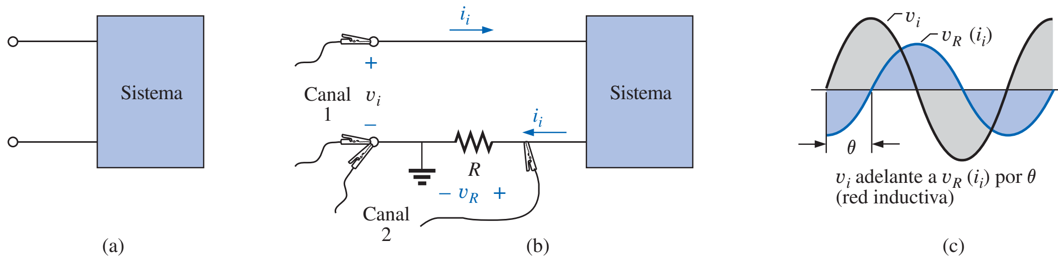


FIGURA 14.19
Utilización de un osciloscopio para determinar el ángulo de fase entre el voltaje aplicado y la corriente de fuente.

14.4 RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LOS ELEMENTOS BÁSICOS

El análisis de la sección 14.3 se limitó a una frecuencia aplicada particular. ¿Cuál será el efecto de la variación de la frecuencia sobre el nivel de oposición presentada por un elemento resistivo, inductivo o capacitivo? Tengamos presente a partir de la pasada sección que la reactancia inductiva se incrementa con la frecuencia mientras que la reactancia capacitiva disminuye. Sin embargo, ¿cuál será el patrón de este incremento o esta disminución en la oposición? ¿Continúa de forma indefinida en la misma trayectoria? Dado que las señales aplicadas pueden tener frecuencias que van desde unos cuantos hertz hasta megahertz, es importante estar consciente del efecto de la frecuencia sobre el nivel de oposición.

R

Hasta ahora hemos asumido que la resistencia de un resistor es independiente de la frecuencia aplicada. Sin embargo, en la práctica, cada elemento resistivo posee valores de capacitancia parásita e inductancia de terminales que son sensibles a la frecuencia aplicada. No obstante, los valores capacitivos e inductivos involucrados son, por lo general, tan pequeños que su efecto real no se observa sino hasta el intervalo de megahertz. En la figura 14.20 se proporcionan las curvas de resistencia en función de la frecuencia para varios resistores de composición de carbón. Observe que los valores de resistencia menores parecen verse menos afectados por el valor de frecuencia. El resistor de 100 Ω es esencialmente estable hasta aproximadamente 300 MHz, mientras que el resistor de 100 kΩ inicia su declive radical en cerca de 15 MHz.

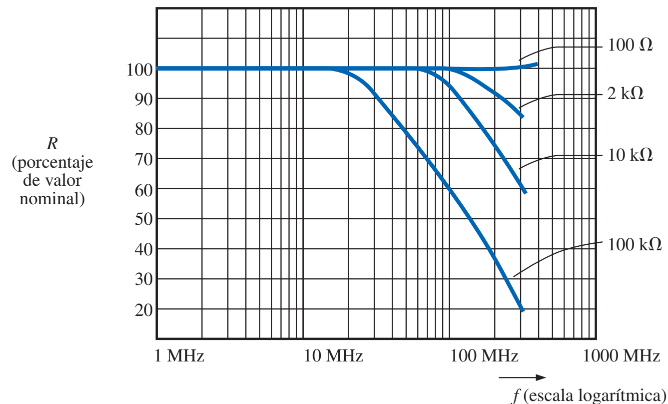


FIGURA 14.20
Curvas típicas de resistencia en función de la frecuencia para resistores de composición de carbón.

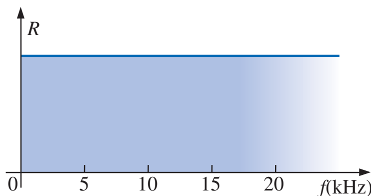


FIGURA 14.21
R en función de f para el intervalo de interés.

Por tanto, la frecuencia ejerce cierto impacto sobre la resistencia de un elemento, pero para nuestro intervalo actual de frecuencias de interés, asumiremos la gráfica de resistencia en función de la frecuencia de la figura 14.21 (similar a la de la figura 14.20 hasta 15 MHz), la cual básicamente especifica que el valor de resistencia de un resistor es independiente de la frecuencia.

L

Para inductores, la ecuación:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi L f$$

está relacionada directamente con la ecuación de la línea recta:

$$y = mx + b = (2\pi L)f + 0$$

con una pendiente (m) de $2\pi L$ y una intercepción en y (b) de cero. X_L es la variable y y f es la variable x como se ilustra en la figura 14.22.

Mientras mayor sea la inductancia, mayor será la pendiente ($m = 2\pi L$) para el mismo intervalo de frecuencia, como se observa en la figura 14.22. Tenga presente, según lo vuelve a enfatizar la figura 14.22, que la oposición de un inductor a frecuencias muy bajas se aproxima a la de un corto circuito, mientras que a frecuencias muy altas la reactancia se aproxima a la de un circuito abierto.

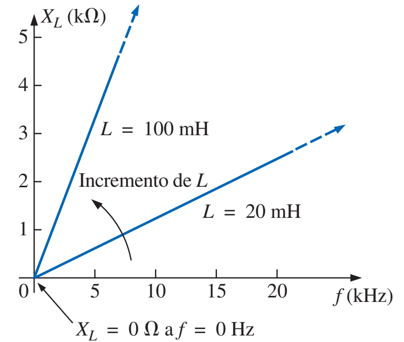


FIGURA 14.22
X_L en función de la frecuencia.

Para el capacitor, la ecuación de reactancia:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

puede escribirse como: $$X_C f = \frac{1}{2\pi C}$$

lo cual coincide con el formato básico de una hipérbola,

$$yx = k$$

con $y = X_C$, $x = f$, y la constante $k = 1/(2\pi C)$.

Cuando $f = 0$ Hz, la reactancia del capacitor es tan grande, como se muestra en la figura 14.23, que puede reemplazarse por un circuito abierto equivalente. A medida que la frecuencia se incremente, la reactancia disminuirá, hasta que al final un corto circuito equivalente sea adecuado. Observe que un incremento en la capacitancia ocasionará que la reactancia disminuya de manera más rápida con la frecuencia.

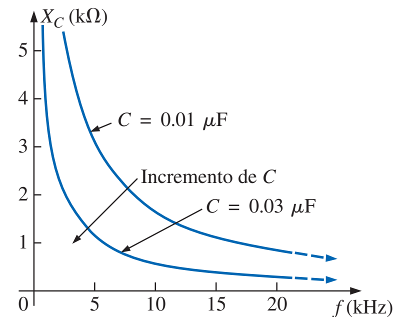


FIGURA 14.23
X_C en función de la frecuencia.

En resumen, por tanto, a medida que la frecuencia aplicada se incremente, la resistencia de un resistor permanecerá constante, la reactancia de un inductor se incrementará linealmente, y la reactancia de un capacitor disminuirá de forma no lineal.

EJEMPLO 14.8 ¿A qué frecuencia la reactancia de un inductor de 200 mH coincidirá con el valor de resistencia de un resistor de 5 kΩ?

Solución: La resistencia permanecerá constante en 5 kΩ para el intervalo de frecuencia del inductor. Por tanto,

$$R = 5000\ \Omega = X_L = 2\pi fL = 2\pi Lf$$
$$= 2\pi(200 \times 10^{-3}\ \text{H})f = 1.257f$$

y $$f = \frac{5000\ \text{Hz}}{1.257} \cong \mathbf{3.98\ kHz}$$

EJEMPLO 14.9 ¿A qué frecuencia un inductor de 5 mH tendrá la misma reactancia que un capacitor de 0.1 μF?

Solución:

$$X_L = X_C$$

$$2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC}$$

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$$

y $$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(5 \times 10^{-3}\ \text{H})(0.1 \times 10^{-6}\ \text{F})}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{5 \times 10^{-10}}} = \frac{1}{(2\pi)(2.236 \times 10^{-5})}$$

$$f = \frac{10^5 \text{ Hz}}{14.05} \cong \mathbf{7.12\ kHz}$$

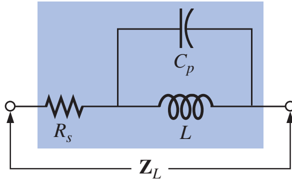


FIGURA 14.24
Equivalente práctico de un inductor.

También debe tenerse presente que los inductores comerciales no son elementos ideales. En otras palabras, las características en las terminales de una inductancia variarán debido a distintos factores, como frecuencia, temperatura y corriente. En la figura 14.24 aparece un equivalente real de un inductor. La resistencia en serie R_s representa las pérdidas por cobre (la resistencia de las muchas vueltas del delgado alambre de cobre); las pérdidas por corrientes parásitas (las cuales serán descritas en el capítulo 19 y son pérdidas debidas a pequeñas corrientes circulares en el núcleo cuando se aplica un voltaje de ca); y las pérdidas por histéresis (que también serán descritas en el capítulo 19 y son pérdidas debidas a pérdidas de núcleo creadas por el campo que se invierte rápidamente dentro del núcleo). La capacitancia C_p es la capacitancia parásita que existe entre los devanados del inductor. En la mayoría de los inductores, la construcción es tal que, por lo general, a mayor inductancia, es menor la frecuencia a la que el elemento parásito se vuelve relevante. Es decir, para inductores en el intervalo de milihenrys (lo cual es muy común), las frecuencias cercanas a 100 kHz pueden tener cierto efecto sobre las características ideales del elemento. Para inductores en el intervalo de microhenrys, una frecuencia de 1 MHz puede introducir efectos negativos. Esto no implica que los inductores pierdan su efecto a estas frecuencias, sino que no podrán ser considerados ideales (elementos puramente inductivos).

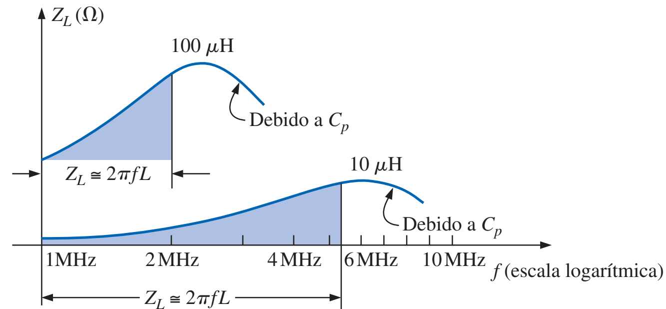


FIGURA 14.25
Z_L en función de la frecuencia para el equivalente práctico del inductor de la figura 14.24.

La figura 14.25 es una gráfica de la magnitud de la impedancia Z_L mostrada en la figura 14.24 en función de la frecuencia. Observe que hasta cerca de 2 MHz la impedancia se incrementa prácticamente de forma lineal con la frecuencia, indicando con claridad que el inductor de 100 μH es básicamente ideal. Sin embargo, por encima de 2 MHz todos los factores que contribuyen a R_s comienzan a incrementarse, mientras que la reactancia debida al elemento capacitivo C_p será más pronunciada. El nivel descendente de la reactancia capacitiva comenzará a presentar un efecto de corto en los devanados del inductor y reducirá el efecto inductivo general. Finalmente, si la frecuencia continúa incrementándose, los efectos capacitivos superarán los efectos inductivos, y el elemento comenzará en realidad a comportarse de una forma capacitiva. Observe las similitudes de esta región con las curvas de la figura 14.23. También advierta que los valores decrecientes de inductancia (disponibles con menos vueltas y, por tanto, con menores valores de C_p) no presentarán el efecto

degradante hasta que se apliquen frecuencias más altas. Por consiguiente, en general, la frecuencia de aplicación para una bobina se vuelve importante a mayores frecuencias. Los inductores pierden sus características ideales y, de hecho, comienzan a actuar como elementos capacitivos con mayores pérdidas a frecuencias muy altas.

El capacitor, al igual que el inductor, no es ideal a frecuencias más altas. De hecho, se puede definir un punto de transición donde las características del capacitor serán en realidad inductivas. En la figura 14.26 se presenta el modelo equivalente completo para un capacitor. La resistencia R_s, definida por la resistividad del dieléctrico (típicamente 10^{12} $\Omega \cdot$m o mayor) y la resistencia del encapsulado, determinará el nivel de la corriente de fuga que se espera durante el ciclo de descarga. En otras palabras, un capacitor cargado puede descargarse tanto a través del encapsulado como a través del dieléctrico a una razón determinada por la resistencia de cada trayectoria. Dependiendo del capacitor, el tiempo de descarga puede prolongarse desde unos cuantos segundos, para algunos capacitores electrolíticos, hasta horas (capacitores de papel) o quizá días (capacitores de poliestireno). Por tanto, de forma inversa, es evidente que los capacitores electrolíticos tendrán mucho menores valores de R_s que los de papel o poliestireno. La resistencia R_p refleja la pérdida de energía a medida que los átomos se realinean continuamente dentro del dieléctrico debido al voltaje alterno de ca aplicado. Se presenta fricción molecular a causa del movimiento de los átomos según respondan al campo eléctrico alterno aplicado. Sin embargo, resulta interesante observar que la permitividad relativa disminuirá con frecuencias crecientes pero al final tendrá un cambio total y comenzará a incrementarse a frecuencias muy altas. La inductancia L_s incluye la inductancia de las terminales del capacitor y cualquier efecto inductivo introducido por el diseño del capacitor. El lector debe estar consciente de que la inductancia de las terminales es cercana a 0.05 μH por centímetro o 0.2 μH para un capacitor con dos terminales de 2 cm, un nivel que puede llegar a ser importante a altas

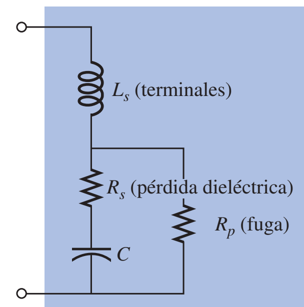


FIGURA 14.26
Equivalente práctico de un capacitor.

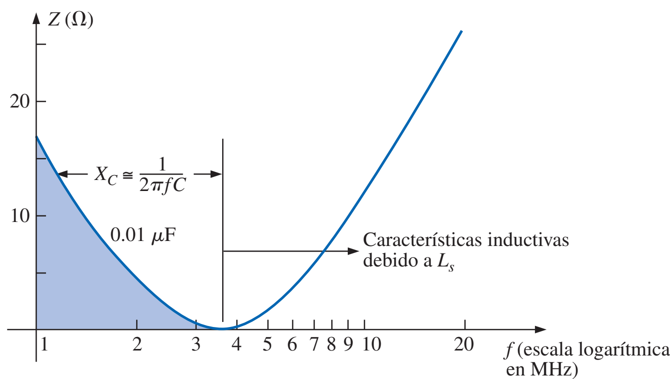


FIGURA 14.27
Características de impedancia de un capacitor de película metalizada de 0.01 μF en función de la frecuencia.

frecuencias. De igual forma que el inductor, el capacitor se comportará bastante ideal para el intervalo de frecuencias bajo o medio, como se muestra en la gráfica de la figura 14.27 para un capacitor de película metalizada de 0.01 μF con terminales de 2 cm. Sin embargo, como la frecuencia se incrementa, y la reactancia X_s se hace más grande, finalmente se alcanzará una frecuencia donde la reactancia de la bobina será igual a la del capacitor (una condición de resonancia que se describirá en el capítulo 20). Cualquier incremento adicional en la frecuencia simplemente dará por resultado que X_s sea mayor que X_C, y el elemento se comportará como un inductor. Por tanto, en general, la frecuencia

de aplicación para elementos capacitivos resulta importante dado que se presenta un punto con frecuencias mayores donde el elemento asumirá características inductivas. Esto indica también que la frecuencia de aplicación definirá el tipo de capacitor (o inductor) que será aplicado: los capacitores electrolíticos están limitados a frecuencias de hasta 10 kHz, mientras que los de cerámica o mica pueden manejar frecuencias superiores a 10 MHz.

El intervalo de temperaturas de operación esperado puede tener un impacto importante sobre el tipo de capacitor seleccionado para una aplicación en particular. Los capacitores electrolíticos, de tantalio, y algunos de cerámica de alta-*k* son muy sensibles a temperaturas frías. De hecho, la mayoría de los capacitores electrolíticos pierden 20% de su capacitancia de temperatura ambiente a 0°C (punto de congelación del agua). Temperaturas más altas (hasta 100°C o 212°F) parecen tener menor impacto en general que las temperaturas frías, pero los capacitores de cerámica de alta-*k* pueden perder hasta 30% de su valor de capacitancia a 100°C en comparación con la temperatura ambiente. Con práctica y experiencia, el lector sabrá qué tipo de capacitor se emplea en cada aplicación, y las complicaciones surgirán sólo en caso deque se presenten frecuencias muy elevadas, temperaturas extremas, o corrientes o voltajes muy altos.

14.5 POTENCIA PROMEDIO Y FACTOR DE POTENCIA

En cualquier carga dentro de una red senoidal de ca, el voltaje y la corriente a través de la carga variarán con una naturaleza senoidal. Entonces surge la pregunta, ¿cómo varía la potencia hacia la carga determinada por el producto $v \cdot i$ como también qué valor fijo puede asignarse a la potencia dado que ésta varía con el tiempo?

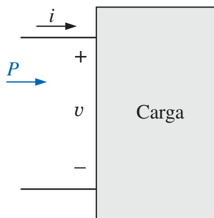


FIGURA 14.28
Determinación de la potencia entregada en una red senoidal de ca.

Si tomamos el caso general ilustrado en la figura 14.28 y utilizamos las siguientes ecuaciones para v e i:

$$v = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta_v)$$

$$i = I_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta_i)$$

entonces la potencia estará definida por:

$$\begin{aligned} p = vi &= V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta_v) I_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta_i) \\ &= V_m I_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta_v) \operatorname{sen}(\omega t + \theta_i) \end{aligned}$$

Utilizando la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2}$$

la función sen $(\omega t + \theta_v)$ se convierte en sen $(\omega t + \theta_i)$

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(\omega t + \theta_v) \operatorname{sen}(\omega t + \theta_i) \\ &= \frac{\cos[(\omega t + \theta_v) - (\omega t + \theta_i)] - \cos[(\omega t + \theta_v) + (\omega t + \theta_i)]}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta_v - \theta_i) - \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}{2} \end{aligned}$$

de manera que:

$$p = \overbrace{\left[\frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i)\right]}^{\text{valor fijo}} - \overbrace{\left[\frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\right]}^{\text{variable en el tiempo (función de } t)}$$

En la figura 14.29 se muestra una gráfica de v, i y p sobre el mismo conjunto de ejes.

Observe que el segundo factor en la ecuación anterior es una onda cosenoidal con amplitud de $V_m I_m/2$ y frecuencia al doble que la de la corriente o el

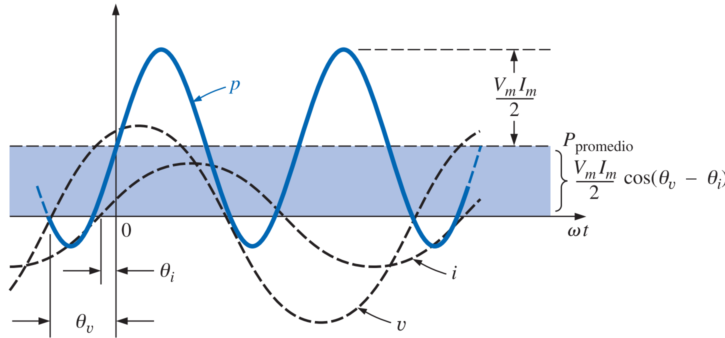


FIGURA 14.29
Definición de potencia promedio para una red de ca senoidal.

voltaje. El valor promedio de este término es cero durante un ciclo, no generando transferencia neta de energía en cualquier dirección.

Sin embargo, el primer término en la ecuación anterior posee magnitud constante (no dependiente del tiempo) y por ello proporcionará cierta transferencia neta de energía. Este término se denomina **potencia promedio**, la razón por la cual resulta obvio a partir de la figura 14.29. La potencia promedio, o **potencia real** como se le llama en ocasiones, es la potencia entregada a, y disipada por, la carga. Esto corresponde a los cálculos de potencia realizados para las redes de cd. El ángulo $(\theta_v - \theta_i)$ es el ángulo de fase entre v e i. Dado que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$,

la magnitud de la potencia promedio entregada es independiente de si v adelanta a i o i adelanta v.

Al definir a θ como igual a $|\theta_v - \theta_i|$, donde $|\quad|$ indica que sólo la magnitud es importante y que el signo es irrelevante, tenemos:

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos\theta \qquad \text{(watts, W)} \tag{14.14}$$

donde P es la potencia promedio en watts. Esta ecuación también puede escribirse como:

$$P = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)\cos\theta$$

o, dado que: $\quad V_{efectivo} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad$ y $\quad I_{efectivo} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

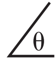
La ecuación (14.14) se convierte en:

$$P = V_{efectivo} I_{efectivo} \cos\theta \tag{14.15}$$

Apliquemos ahora las ecuaciones (14.14) y (14.15) a los elementos básicos R, L y C.

Resistor

En un circuito puramente resistivo, dado que v e i están en fase, $|\theta_v - \theta_i| = \theta = 0°$, y $\cos\theta = \cos 0° = 1$, de manera que:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} = V_{\text{efectivo}} I_{\text{efectiva}} \quad \text{(W)} \tag{14.16}$$

O, dado que: $I_{\text{efectiva}} = \dfrac{V_{\text{efectivo}}}{R}$

entonces:

$$P = \frac{V^2_{\text{efectivo}}}{R} = I^2_{\text{efectiva}} R \quad \text{(W)} \tag{14.17}$$

Inductor

En un circuito puramente inductivo, dado que v adelanta a i por 90°, $|\theta_v - \theta_i| = \theta = |-90°| = 90°$. Por tanto,

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos 90° = \frac{V_m I_m}{2}(0) = \mathbf{0\ W}$$

La potencia promedio o potencia disipada por el inductor ideal (sin resistencia asociada) es cero watts.

Capacitor

En un circuito puramente capacitivo, dado que i adelanta a v por 90°, $|\theta_v - \theta_i| = \theta = |-90°| = 90°$. Por tanto,

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(90°) = \frac{V_m I_m}{2}(0) = \mathbf{0\ W}$$

La potencia promedio o potencia disipada por el capacitor ideal (sin resistencia asociada) es cero watts.

EJEMPLO 14.10 Encuentre la potencia promedio disipada en una red cuya corriente y voltaje de entrada son los siguientes:

$$i = 5 \text{ sen}(\omega t + 40°)$$
$$v = 10 \text{ sen}(\omega t + 40°)$$

Solución: Dado que v e i están en fase, el circuito aparece como puramente resistivo en las terminales de entrada. Por tanto,

$$P = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{(10\text{ V})(5\text{ A})}{2} = \mathbf{25\ W}$$

o bien: $$R = \frac{V_m}{I_m} = \frac{10\text{ V}}{5\text{ A}} = 2\ \Omega$$

y $$P = \frac{V^2_{\text{efectiva}}}{R} = \frac{[(0.707)(10\text{ V})]^2}{2} = \mathbf{25\ W}$$

o bien: $$P = I^2_{\text{efectiva}} R = [(0.707)(5\text{ A})]^2(2) = \mathbf{25\ W}$$

Para el siguiente ejemplo, el circuito consta de una combinación de resistencias y reactancias que producen diferentes ángulos de fase entre la corriente y el voltaje desde 0° o 90°.

EJEMPLO 14.11 Determine la potencia promedio entregada a las redes que tienen los siguientes voltajes y corrientes de entrada:

a. $v = 100 \text{ sen}(\omega t + 40°)$
   $i = 20 \text{ sen}(\omega t + 70°)$

b. $v = 150 \text{ sen}(\omega t - 70°)$
   $i = 3 \text{ sen}(\omega t - 50°)$

Soluciones:

a. $V_m = 100, \quad \theta_v = 40°$
   $I_m = 20, \quad \theta_i = 70°$
   $\theta = |\theta_v - \theta_i| = |40° - 70°| = |-30°| = 30°$
   y

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = \frac{(100 \text{ V})(20 \text{ A})}{2} \cos(30°) = (1000 \text{ W})(0.866)$$

$$= \mathbf{866 \text{ W}}$$

b. $V_m = 150 \text{ V}, \quad \theta_v = -70°$
   $I_m = 3 \text{ A}, \quad \theta_i = -50°$
   $\theta = |\theta_v - \theta_i| = |-70° - (-50°)|$
   $= |-70° + 50°| = |-20°| = 20°$
   y

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = \frac{(150 \text{ V})(3 \text{ A})}{2} \cos(20°) = (225 \text{ W})(0.9397)$$

$$= \mathbf{211.43 \text{ W}}$$

Factor de potencia

En la ecuación $P = (V_m I_m/2)\cos \theta$, el factor que tiene control importante sobre el nivel de potencia entregado es $\cos \theta$. Sin importar lo grande que sea la corriente, o el voltaje, cuando $\cos \theta = 0$, la potencia es cero; si $\cos \theta = 1$, la potencia entregada es un máximo. Dado que tiene tal control, la expresión fue denominada **factor de potencia** y se define mediante:

$$\text{Factor de potencia} = F_p = \cos \theta \quad \textbf{(14.18)}$$

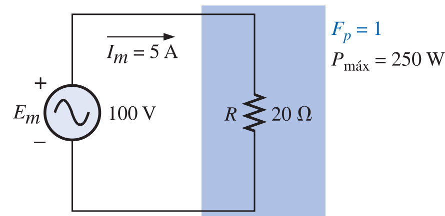


FIGURA 14.30
Carga puramente resistiva con $F_p = 1$.

Para una carga puramente resistiva como la que se muestra en la figura 14.30, el ángulo de fase entre v e i es de 0° y $F_p = \cos \theta = \cos 0° = 1$.La potencia entregada es un máximo de $(V_m I_m/2) \cos \theta = ((100 \text{ V})(5 \text{ A})/2) \cdot (1) = 250$ W.

Para una carga puramente reactiva (inductiva o capacitiva) como la de la figura 14.31, el ángulo de fase entre v e i es de 90° y $F_p = \cos \theta = \cos 90° = 0$. La potencia entregada es entonces el valor mínimo de cero watts, **aun cuando la corriente tenga el mismo valor pico** que el encontrado en la figura 14.30.

Para las situaciones donde la carga es una combinación de elementos resistivos y reactivos, el factor de potencia variará entre 0 y 1. Mientras más resistiva sea la impedancia total, más cercano será el factor de potencia a 1; mientras más reactiva sea la impedancia total, más cercano será el factor de potencia a 0.

En términos de la potencia promedio y el voltaje y la corriente en las terminales,

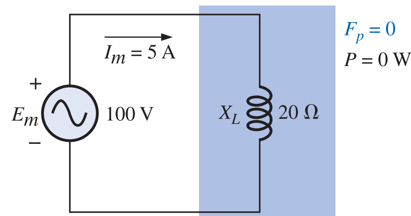


FIGURA 14.31
Carga puramente inductiva con $F_p = 0$.

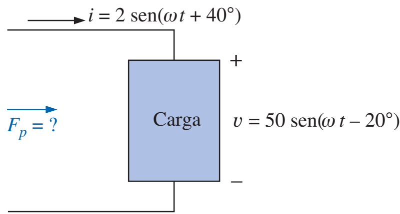


FIGURA 14.32
Ejemplo 14.12(a).

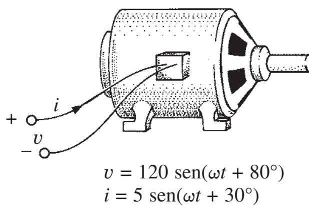


FIGURA 14.33
Ejemplo 14.12(b).

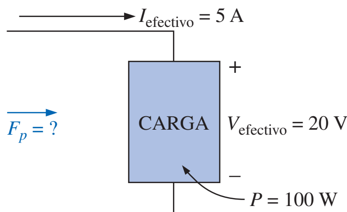


FIGURA 14.34
Ejemplo 14.12(c).

$$F_p = \cos\theta = \frac{P}{V_{\text{efectivo}} I_{\text{efectiva}}} \qquad \textbf{(14.19)}$$

Los términos *adelanto* y *atraso* se escriben, por lo general, en conjunto con el factor de potencia. *Estos términos son definidos por la corriente a través de la carga.* Si la corriente adelanta al voltaje en una carga, la carga tendrá un **factor de potencia adelantado**. Si la corriente se encuentra atrasada con respecto al voltaje en la carga, la carga tendrá un **factor de potencia atrasado**. En otras palabras,

las redes capacitivas tienen factores de potencia adelantados, y las redes inductivas tienen factores de potencia atrasados.

La importancia del factor de potencia en los sistemas de distribución se analiza en el capítulo 19 de este texto. De hecho, una sección completa está dedicada a la corrección del factor de potencia.

EJEMPLO 14.12 Determine los factores de potencia de las siguientes cargas, e indique si son de atraso o de adelanto:

a. Figura 14.32.
b. Figura 14.33.
c. Figura 14.34.

Soluciones:

a. $F_p = \cos\theta = \cos|40° - (-20°)| = \cos 60° = \textbf{0.5 adelantado}$
b. $F_p = \cos\theta = |80° - 30°| = \cos 50° = \textbf{0.6428 atrasado}$
c. $F_p = \cos\theta = \dfrac{P}{V_{\text{efectivo}} I_{\text{efectiva}}} = \dfrac{100\text{ W}}{(20\text{ V})(5\text{ A})} = \dfrac{100\text{ W}}{100\text{ W}} = \mathbf{1}$
La carga es resistiva, y F_p no es de atraso ni de adelanto.

14.6 NÚMEROS COMPLEJOS

En el análisis de redes de cd, vimos que era necesario determinar la suma algebraica de voltajes y corrientes. Dado que lo mismo sucede para las redes de ca, surge la pregunta, ¿cómo determinaremos la suma algebraica de dos o más voltajes (o corrientes) que varían de forma senoidal? Aunque una solución sería encontrar la suma algebraica sobre una base de punto a punto (como se muestra en la sección 14.12), éste sería un proceso largo y tedioso en el que la precisión estaría directamente relacionada con la escala utilizada.

El propósito de este capítulo es presentar un sistema de **números complejos** que, al relacionarlos con la forma de onda senoidal de ca, resultará en una técnica para encontrar la suma algebraica de formas de onda senoidales que es rápida, directa y precisa. En los siguientes capítulos, la técnica se ampliará para permitir el análisis de redes senoidales de ca en una forma muy similar a la aplicada para redes de cd. Entonces los métodos y teoremas, tal como se describieron para redes de cd, podrán aplicarse a redes senoidales de ca con poca dificultad.

Un **número complejo** representa un punto en un plano bidimensional ubicado con referencia a dos ejes distintos. Este punto puede también determinar un vector radial trazado desde el origen hasta el punto. El eje horizontal se denomina eje *real*, mientras que el eje vertical se denomina eje *imaginario*. Ambos están identificados en la figura 14.35. Cada número desde cero hasta ±∞ puede ser representado por algún punto a lo largo del eje real. Antes del desarrollo

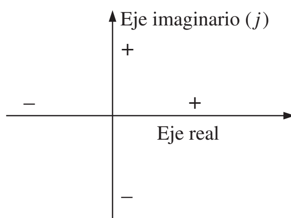


FIGURA 14.35
Definición de los ejes real e imaginario de un plano complejo.

de este sistema de números complejos, se creía que cualquier número que no estuviera sobre el eje real no existía, de ahí el término *imaginario* para el eje vertical.

En el plano complejo, el eje real u horizontal representa todos los números positivos situados a la derecha del eje imaginario y todos los números negativos localizados a la izquierda del eje imaginario. Todos los números positivos imaginarios se representan por encima del eje real, y todos los números imaginarios negativos por debajo del eje real. El símbolo j (o en ocasiones i) se utiliza para denotar el componente imaginario.

Para representar un número complejo se emplean dos formas: **rectangular** y **polar**. Cada forma puede representar un punto en el plano o un vector radial trazado desde el origen hasta ese punto.

14.7 FORMA RECTANGULAR

El formato para la **forma rectangular** es:

$$\mathbf{C} = X + jY \tag{14.20}$$

como se muestra en la figura 14.36. La letra **C** fue elegida a partir de la palabra "complejo". La notación en **negrita** es para cualquier número con magnitud y dirección; la *itálica* es sólo para magnitud.

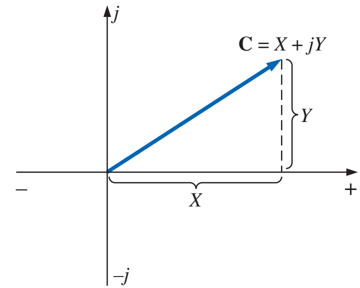


FIGURA 14.36
Definición de la forma rectangular.

EJEMPLO 14.13 Trace los siguientes números complejos en el plano complejo:

a. $\mathbf{C} = 3 + j4$.
b. $\mathbf{C} = 0 - j6$.
c. $\mathbf{C} = -10 - j20$.

Soluciones:

a. Vea la figura 14.37.
b. Vea la figura 14.38.
c. Vea la figura 14.39.

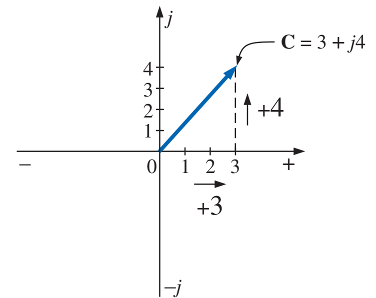


FIGURA 14.37
Ejemplo 14.13(a).

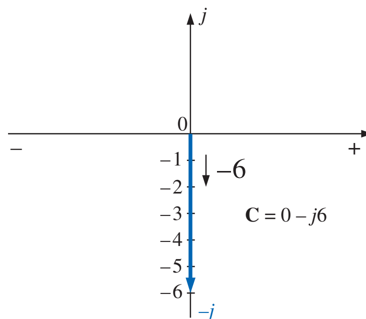


FIGURA 14.38
Ejemplo 14.13(b).

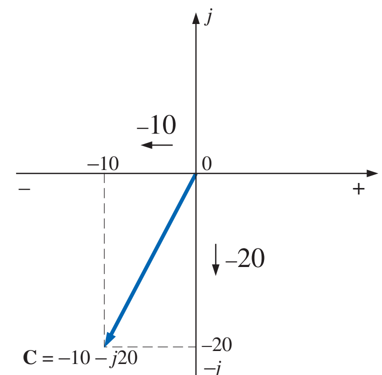


FIGURA 14.39
Ejemplo 14.13(c).

14.8 FORMA POLAR

El formato de la **forma polar** es:

$$\mathbf{C} = Z \angle \theta \tag{14.21}$$

con la letra Z elegida a partir de la secuencia X, Y, Z;



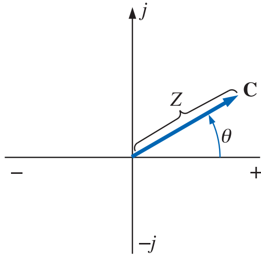


FIGURA 14.40
Definición de la forma polar.

donde Z indica únicamente magnitud y θ **se mide siempre en dirección contraria a las manecillas del reloj a partir del *eje real positivo***, como se muestra en la figura 14.40. Los ángulos medidos en dirección de las manecillas del reloj a partir del eje real positivo deberán tener un signo negativo asociado.

Un signo negativo en frente de la forma polar presenta el efecto mostrado en la figura 14.41. Observe que ello da por resultado un número complejo en oposición directa con el número complejo con signo positivo.

$$-\mathbf{C} = -Z\angle\theta = Z\angle\theta \pm 180^\circ \tag{14.22}$$

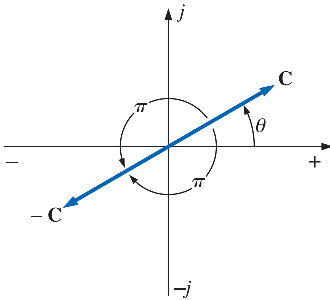


FIGURA 14.41
Demostración del efecto de un signo negativo sobre la forma polar.

EJEMPLO 14.14 Trace los siguientes números complejos en el plano complejo:

a. $\mathbf{C} = 5\angle 30^\circ$.
b. $\mathbf{C} = 7\angle -120^\circ$.
c. $\mathbf{C} = -4.2\angle 60^\circ$.

Soluciones:

a. Vea la figura 14.42.
b. Vea la figura 14.43.
c. Vea la figura 14.44.

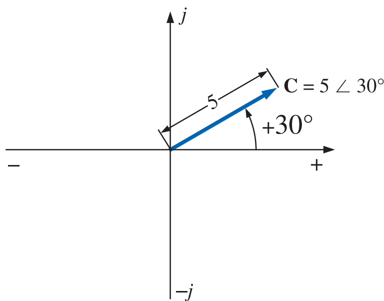


FIGURA 14.42
Ejemplo 14.14(a).

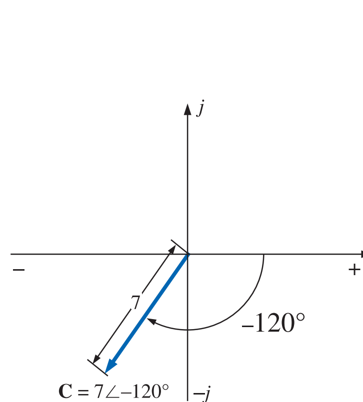


FIGURA 14.43
Ejemplo 14.14(b).

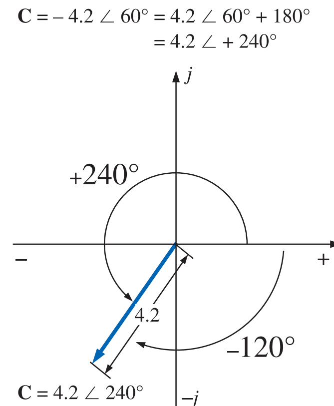


FIGURA 14.44
Ejemplo 14.14(c).

14.9 CONVERSIÓN ENTRE FORMAS

Las dos formas de representación de números complejos están relacionadas mediante las siguientes ecuaciones, como se ilustra en la figura 14.45.

Rectangular a polar

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{14.23}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X} \tag{14.24}$$

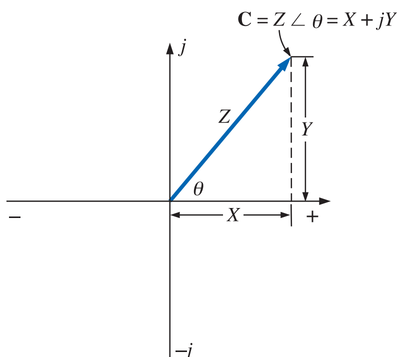


FIGURA 14.45
Conversión entre formas.

Polar a rectangular

$$X = Z \cos \theta \qquad \textbf{(14.25)}$$

$$Y = Z \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(14.26)}$$

EJEMPLO 14.15 Convierta lo siguiente de forma rectangular a polar:

$$\mathbf{C} = 3 + j\,4 \qquad \text{(Figura 14.46)}$$

Solución:

$$Z = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13^\circ$$

y $\qquad \mathbf{C = 5 \angle 53.13^\circ}$

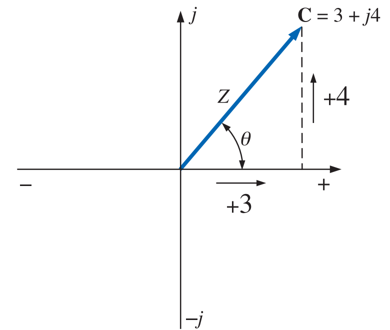


FIGURA 14.46
Ejemplo 14.15.

EJEMPLO 14.16 Convierta lo siguiente de forma polar a rectangular:

$$\mathbf{C} = 10 \angle 45^\circ \qquad \text{(Figura 14.47)}$$

Solución:

$$X = 10 \cos 45^\circ = (10)(0.707) = 7.07$$

$$Y = 10 \operatorname{sen} 45^\circ = (10)(0.707) = 7.07$$

y $\qquad \mathbf{C = 7.07 + j7.07}$

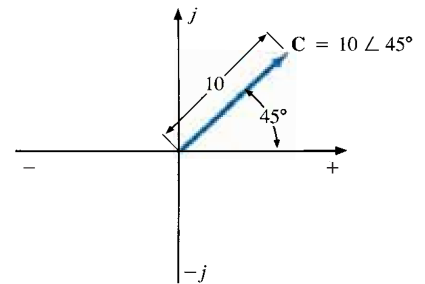


FIGURA 14.47
Ejemplo 14.16.

Si el número complejo apareciera en el segundo, tercero o cuarto cuadrantes, simplemente conviértalo dentro de ese cuadrante, y determine con cuidado el ángulo adecuado que se asociará con la magnitud del vector.

EJEMPLO 14.17 Convierta lo siguiente de forma rectangular a polar:

$$\mathbf{C} = -6 + j\,3 \qquad \text{(Figura 14.48)}$$

Solución:

$$Z = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = \sqrt{45} = 6.71$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 26.57^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 26.57^\circ = 153.43^\circ$$

y $\qquad \mathbf{C = 6.71 \angle 153.43^\circ}$

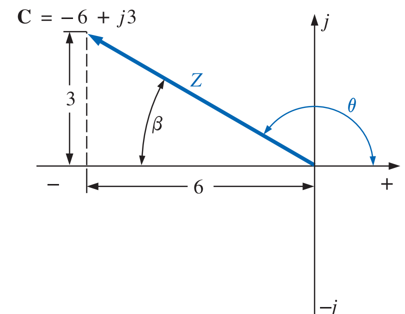


FIGURA 14.48
Ejemplo 14.17.

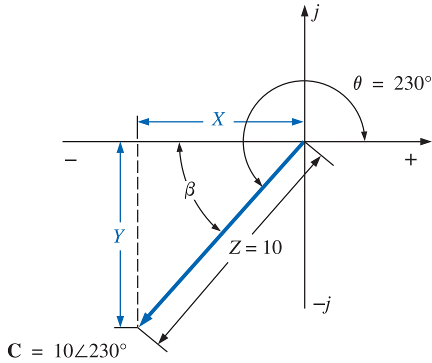


FIGURA 14.49
Ejemplo 14.18.

EJEMPLO 14.18 Convierta lo siguiente de forma polar a rectangular:

$$\mathbf{C} = 10\ \angle 230^\circ \qquad \text{(Figura 14.49)}$$

Solución:

$$X = Z\cos\beta = 10\cos(230^\circ - 180^\circ) = 10\cos 50^\circ$$
$$= (10)(0.6428) = 6.428$$
$$Y = Z\,\text{sen}\,\beta = 10\,\text{sen}\,50^\circ = (10)(0.7660) = 7.660$$

y
$$\mathbf{C} = \mathbf{-6.428 - \mathit{j}7.660}$$

14.10 OPERACIONES MATEMÁTICAS CON NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos se prestan fácilmente para efectuar las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y división. Antes de considerar estas operaciones se deben comprender algunas reglas básicas y definiciones.

Primero analicemos el símbolo j asociado con los números imaginarios. Por definición,

$$j = \sqrt{-1} \qquad \textbf{(14.27)}$$

Por lo que,

$$j^2 = -1 \qquad \textbf{(14.28)}$$

y
$$j^3 = j^2 j = -1j = -j$$

con:
$$j^4 = j^2 j^2 = (-1)(-1) = +1$$
$$j^5 = j$$

y así sucesivamente. Además,

$$\frac{1}{j} = (1)\left(\frac{1}{j}\right) = \left(\frac{j}{j}\right)\left(\frac{1}{j}\right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1}$$

y
$$\frac{1}{j} = -j \qquad \textbf{(14.29)}$$

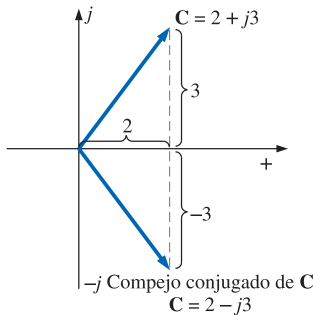


FIGURA 14.50
Definición del complejo conjugado de un número complejo en forma rectangular.

Complejo conjugado

El **conjugado** o **complejo conjugado** de un número complejo puede calcularse cambiando simplemente el signo de la parte imaginaria en la forma rectangular o mediante el uso del negativo del ángulo en la forma polar. Por ejemplo, el conjugado de:

$$\mathbf{C} = 2 + j3$$

es
$$2 - j3$$

como se muestra en la figura 14.50. El conjugado de:

$$\mathbf{C} = 2\ \angle 30^\circ$$

es
$$2\ \angle -30^\circ$$

como se muestra en la figura 14.51.

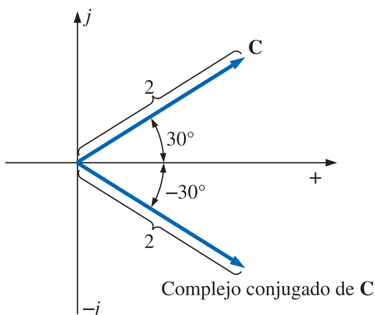


FIGURA 14.51
Definición del complejo conjugado de un número complejo en forma polar.

Recíproco

El **recíproco** de un número complejo es 1 dividido entre el número complejo. Por ejemplo, el recíproco de:

$$\mathbf{C} = X + jY$$

es:

$$\frac{1}{X + jY}$$

y de $Z \angle\theta$,

$$\frac{1}{Z \angle\theta}$$

Ahora ya estamos preparados para considerar las cuatro operaciones básicas de *suma, resta, multiplicación* y *división* con números complejos.

Suma

Para sumar dos o más números complejos, simplemente sume las partes real e imaginaria de forma independiente. Por ejemplo, si:

$$\mathbf{C}_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

entonces:

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = (\pm X_1 \pm X_2) + j(\pm Y_1 \pm Y_2) \qquad \mathbf{(14.30)}$$

En realidad no es necesario memorizar esta ecuación. Solamente coloque un número encima del otro y considere las partes real e imaginaria de forma separada, como se muestra en el ejemplo 14.19.

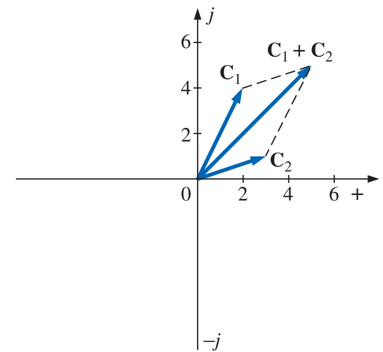


FIGURA 14.52
Ejemplo 14.19(a).

EJEMPLO 14.19

a. Sume $\mathbf{C}_1 = 2 + j4$ y $\mathbf{C}_2 = 3 + j1$.
b. Sume $\mathbf{C}_1 = 3 + j6$ y $\mathbf{C}_2 = -6 + j3$.

Soluciones:

a. Mediante la ecuación (14.30),

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = (2 + 3) + j(4 + 1) = \mathbf{5 + j5}$$

Observe la figura 14.52. Un método alternativo es:

$$\begin{array}{c} 2 + j4 \\ \underline{3 + j1} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{5 + j5} \end{array}$$

b. Mediante la ecuación (14.30),

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = (3 - 6) + j(6 + 3) = \mathbf{-3 + j9}$$

Observe la figura 14.53. Un método alternativo es:

$$\begin{array}{c} 3 + j6 \\ \underline{-6 + j3} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{-3 + j9} \end{array}$$

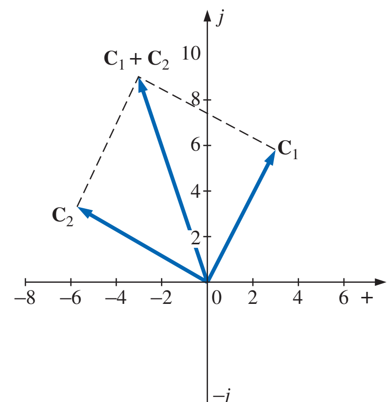


FIGURA 14.53
Ejemplo 14.19(b).

Resta

En la resta, las partes real e imaginaria nuevamente se consideran de forma independiente. Por ejemplo, si:

$$\mathbf{C}_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

entonces:

$$\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 = [\pm X_2 - (\pm X_2)] + j[\pm Y_1 - (\pm Y_2)] \qquad \textbf{(14.31)}$$

Tampoco es necesario memorizar la ecuación si se utiliza el método alternativo del ejemplo 14.20.

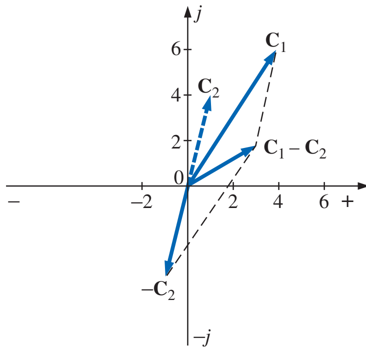


FIGURA 14.54
Ejemplo 14.20(a).

EJEMPLO 14.20

a. Reste $\mathbf{C}_2 = 1 + j4$ de $\mathbf{C}_1 = 4 + j6$.
b. Reste $\mathbf{C}_2 = -2 + j5$ de $\mathbf{C}_1 = +3 + j3$.

Soluciones:

a. Mediante la ecuación (14.31),

$$\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 = (4 - 1) + j(6 - 4) = \mathbf{3 + j2}$$

Observe la figura 14.54. Un método alternativo es:

$$\begin{array}{c} 4 + j6 \\ \underline{-(1 + j4)} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{3 + j2} \end{array}$$

b. Mediante la ecuación (14.31),

$$\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 = [3 - (-2)] + j(3 - 5) = \mathbf{5 - j2}$$

Observe la figura 14.55. Un método alternativo es:

$$\begin{array}{c} 3 + j3 \\ \underline{-(-2 + j5)} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbf{5 - j2} \end{array}$$

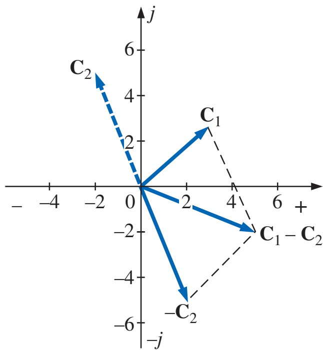


FIGURA 14.55
Ejemplo 14.20(b).

La suma o la resta no podrán realizarse en forma polar a menos que los números complejos tengan el mismo ángulo θ o a menos que éstos difieran sólo por múltiplos de 180°.

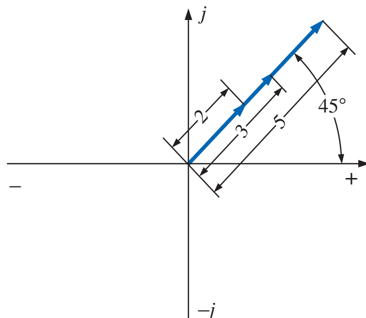


FIGURA 14.56
Ejemplo 14.21(a).

EJEMPLO 14.21

a. $2\,\angle 45° + 3\,\angle 45° = \mathbf{5\,\angle 45°}$

Observe la figura 14.56. O bien:

b. $2\,\angle 0° - 4\,\angle 180° = \mathbf{6\,\angle 0°}$

Observe la figura 14.57.

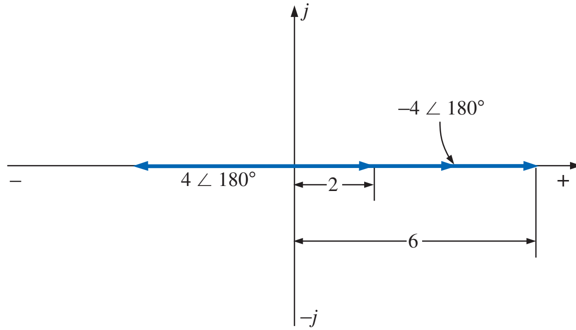


FIGURA 14.57
Ejemplo 14.21(b).

Multiplicación

Para multiplicar dos números complejos en forma *rectangular*, multiplique las partes real e imaginaria de uno de los números por las partes real e imaginaria del otro, una por una. Por ejemplo, si:

$$\mathbf{C}_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = X_2 + jY_2$$

entonces: $\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2$:

$$\begin{array}{r} X_1 + jY_1 \\ \underline{X_2 + jY_2} \\ X_1X_2 + jY_1X_2 \\ \underline{+ jX_1Y_2 + j^2Y_1Y_2} \\ X_1X_2 + j(X_1Y_1X_2 + X_1Y_2) + Y_1Y_2(-1) \end{array}$$

y

$$\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 = (X_1X_2 - Y_1Y_2) + j(Y_1X_2 + X_1Y_2) \qquad \textbf{(14.32)}$$

En el ejemplo 14.22(b), obtenemos una solución sin tener que memorizar la ecuación (14.32). Simplemente lleve el factor *j* cuando se multiplique cada parte de un vector con las partes real e imaginaria del otro.

EJEMPLO 14.22

a. Encuentre $\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2$ si:

$$\mathbf{C}_1 = 2 + j3 \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = 5 + j10$$

b. Encuentre $\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2$ si:

$$\mathbf{C}_1 = -2 - j3 \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = +4 - j6$$

Soluciones:

a. Utilizando el formato anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 &= [(2)(5) - (3)(10)] + j[(3)(5) + (2)(10)] \\ &= \mathbf{-20 + j35} \end{aligned}$$

b. Sin utilizar el formato obtenemos:

$$\begin{array}{l} -2 - j3 \\ \underline{+4 - j6} \\ -8 - j12 \\ \underline{\quad + j12 + j^2 18} \\ -8 + j(-12 + 12) - 18 \end{array}$$

y

$$\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 = \mathbf{-26 = 26 \angle 180^\circ}$$



En forma *polar*, las magnitudes se multiplican y los ángulos se suman de forma algebraica. Por ejemplo, para:

$$\mathbf{C}_1 = Z_1 \angle\theta_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = Z_2 \angle\theta_2$$

escribimos:

$$\boxed{\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 = Z_1 Z_2 \,\underline{/\theta_1 + \theta_2}} \tag{14.33}$$

EJEMPLO 14.23

a. Encuentre $\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2$ si:

$$\mathbf{C}_1 = 5 \angle 20^\circ \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = 10 \angle 30^\circ$$

b. Encuentre $\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2$ si:

$$\mathbf{C}_1 = 2 \angle -40^\circ \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = 7 \angle +120^\circ$$

Soluciones:

a. $\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 = (5 \angle 20^\circ)(10 \angle 30^\circ) = (5)(10) \,\underline{/20^\circ + 30^\circ} = \mathbf{50 \angle 50^\circ}$

b. $\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 = (2 \angle -40^\circ)(7 \angle +120^\circ) = (2)(7) \,\underline{/-40^\circ + 120^\circ}$
$= \mathbf{14 \angle +80^\circ}$

Para multiplicar un número complejo en forma rectangular por un número real se requiere que tanto la parte real como la parte imaginaria sean multiplicadas por el número real. Por ejemplo,

$$(10)(2 + j3) = 20 + j30$$

y $$50 \angle 0^\circ(0 + j6) = j300 = 300 \angle 90^\circ$$

División

Para dividir dos números complejos en forma *rectangular*, multiplique el numerador y el denominador por el conjugado del denominador y agrupe las partes real e imaginaria resultantes. Es decir, si:

$$\mathbf{C}_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = X_2 + jY_2$$

entonces:
$$\frac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_2} = \frac{(X_1 + jY_1)(X_2 - jY_2)}{(X_2 + jY_2)(X_2 - jY_2)}$$
$$= \frac{(X_1X_2 + Y_1Y_2) + j(X_2Y_1 - X_1Y_2)}{X_2^2 + Y_2^2}$$

y
$$\boxed{\frac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_2} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{X_2^2 + Y_2^2} + j\frac{X_2Y_1 - X_1Y_2}{X_2^2 + Y_2^2}} \tag{14.34}$$

La ecuación no deberá ser memorizada si se utilizan los pasos descritos líneas arriba para obtenerla. Es decir, primero multiplicar el numerador por el complejo conjugado del denominador y separar los términos reales e imaginarios. Luego, dividir cada término entre la suma de cada término del denominador al cuadrado.

EJEMPLO 14.24

a. Encuentre $\mathbf{C}_1/\mathbf{C}_2$ si $\mathbf{C}_1 = 1 + j4$ y $\mathbf{C}_2 = 4 + j5$.

b. Encuentre $\mathbf{C}_1/\mathbf{C}_2$ si $\mathbf{C}_1 = -4 - j8$ y $\mathbf{C}_2 = +6 - j1$.

Soluciones:

a. Mediante la ecuación (14.34),

$$\frac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_2} = \frac{(1)(4) + (4)(5)}{4^2 + 5^2} + j\,\frac{(4)(4) - (1)(5)}{4^2 + 5^2}$$

$$= \frac{24}{41} + \frac{j\,11}{41} \cong \mathbf{0.585 + \mathit{j}\,0.268}$$

b. Utilizando un método alternativo obtenemos:

$$\begin{array}{l} -4 - j8 \\ \underline{+6 + j1} \\ -24 - j48 \\ \underline{\quad - j4 - j^2 8} \\ -24 - j52 + 8 = -16 - j52 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +6 - j1 \\ \underline{+6 + j1} \\ 36 + j6 \\ \underline{\quad - j6 - j^2 1} \\ 36 + 0 + 1 \quad = 37 \end{array}$$

y $$\frac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_2} = \frac{-16}{37} - \frac{j52}{37} = \mathbf{-0.432 - \mathit{j}1.405}$$

Para dividir un número complejo en forma rectangular entre un número real, tanto la parte real como la imaginaria deberán dividirse entre el número real. Por ejemplo,

$$\frac{8 + j10}{2} = 4 + j5$$

y $$\frac{6.8 - j0}{2} = 3.4 - j0 = 3.4\,\angle 0°$$

En forma *polar*, la división se logra dividiendo la magnitud del numerador entre la magnitud del denominador y restando el ángulo del denominador del ángulo del numerador. Es decir, para:

$$\mathbf{C}_1 = Z_1\,\angle\theta_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = Z_2\,\angle\theta_2$$

escribimos:

$$\frac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_2} = \frac{Z_1}{Z_2}\,\underline{/\theta_1 - \theta_2} \qquad \textbf{(14.35)}$$

EJEMPLO 14.25

a. Encuentre $\mathbf{C}_1/\mathbf{C}_2$ si $\mathbf{C}_1 = 15\,\angle 10°$ y $\mathbf{C}_2 = 2\,\angle 7°$.
b. Encuentre $\mathbf{C}_1/\mathbf{C}_2$ si $\mathbf{C}_1 = 8\,\angle 120°$ y $\mathbf{C}_2 = 16\,\angle -50°$.

Soluciones:

a. $$\frac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_2} = \frac{15\,\angle 10°}{2\,\angle 7°} = \frac{15}{2}\,\underline{/10° - 7°} = \mathbf{7.5\,\angle 3°}$$



b. $\dfrac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_2} = \dfrac{8 \angle 120^\circ}{16 \angle -50^\circ} = \dfrac{8}{16} \underline{/120^\circ - (-50^\circ)} = \mathbf{0.5 \angle 170^\circ}$

Podemos obtener el *recíproco* en la forma rectangular al multiplicar el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador:

$$\frac{1}{X + jY} = \left(\frac{1}{X + jY}\right)\left(\frac{X - jY}{X - jY}\right) = \frac{X - jY}{X^2 + Y^2}$$

y

$$\boxed{\frac{1}{X + jY} = \frac{X}{X^2 + Y^2} - j\frac{Y}{X^2 + Y^2}} \qquad \textbf{(14.36)}$$

En forma polar, el recíproco es:

$$\boxed{\frac{1}{Z \angle \theta} = \frac{1}{Z} \angle -\theta} \qquad \textbf{(14.37)}$$

A continuación se presenta un ejemplo de cierre utilizando las cuatro operaciones básicas.

EJEMPLO 14.26 Realice las siguientes operaciones, dejando la respuesta en forma polar o rectangular.

a. $\dfrac{(2 + j3) + (4 + j6)}{(7 + j7) - (3 - j3)} = \dfrac{(2 + 4) + j(3 + 6)}{(7 - 3) + j(7 + 3)}$

$$= \frac{(6 + j9)(4 - j10)}{(4 + j10)(4 - j10)}$$

$$= \frac{[(6)(4) + (9)(10)] + j[(4)(9) - (6)(10)]}{4^2 + 10^2}$$

$$= \frac{114 - j24}{116} = \mathbf{0.983 - j0.207}$$

b. $\dfrac{(50 \angle 30^\circ)(5 + j5)}{10 \angle -20^\circ} = \dfrac{(50 \angle 30^\circ)(7.07 \angle 45^\circ)}{10 \angle -20^\circ} = \dfrac{353.5 \angle 75^\circ}{10 \angle -20^\circ}$

$$= 35.35 \underline{/75^\circ - (-20^\circ)} = \mathbf{35.35 \angle 95^\circ}$$

c. $\dfrac{(2 \angle 20^\circ)^2(3 + j4)}{8 - j6} = \dfrac{(2 \angle 20^\circ)(2 \angle 20^\circ)(5 \angle 53.13^\circ)}{10 \angle -36.87^\circ}$

$$= \frac{(4 \angle 40^\circ)(5 \angle 53.13^\circ)}{10 \angle -36.87^\circ} = \frac{20 \angle 93.13^\circ}{10 \angle -36.87^\circ}$$

$$= 2 \underline{/93.13^\circ - (-36.87^\circ)} = \mathbf{2.0 \angle 130^\circ}$$

d. $3 \angle 27^\circ - 6 \angle -40^\circ = (2.673 + j1.362) - (4.596 - j3.857)$

$$= (2.673 - 4.596) + j(1.362 + 3.857)$$

$$= \mathbf{-1.923 + j5.219}$$

14.11 MÉTODOS POR COMPUTADORA Y CALCULADORA CON NÚMEROS COMPLEJOS

El proceso de conversión de una forma a otra o el manejo de operaciones largas con números complejos pueden requerir mucho tiempo y con frecuencia ser

frustrantes si un signo menos o un punto decimal perdidos invalidan la solución. Por fortuna, los tecnólogos de hoy cuentan con métodos aplicables por calculadora y computadora que vuelven el proceso bastante más sencillo y con mayores grados de confiabilidad y precisión.

Calculadoras

La calculadora TI-86 que aparece en la figura 14.58 es sólo una de las muchas calculadoras que pueden convertir de una forma a la otra y realizar extensos cálculos con números complejos de manera concisa y ordenada. No se incluirán aquí todos los detalles del uso de una calculadora específica debido a que cada una tiene su propio formato y secuencia de pasos. No obstante, sí se incluirán las operaciones básicas con la calculadora TI-86, principalmente para demostrar la facilidad con que se pueden realizar las conversiones, y el formato para operaciones más complejas.



FIGURA 14.58
Calculadora científica TI-86. (Cortesía de Texas Instruments, Inc.)

En la calculadora TI-86, primero debe accederse a la segunda función CPLX desde el teclado, la cual genera un menú en la parte inferior de la pantalla que incluye conj, real, imag, abs y angle. Si elegimos la tecla MORE (más), aparecerán, ▶ Rec y ▶ Pol como opciones (en el proceso de conversión). Para convertir de una forma a otra, simplemente ingrese la forma actual en paréntesis con una coma entre los componentes para la forma rectangular y un símbolo de ángulo para la forma polar. Siga este formato con la operación a ser desarrollada, y presione la tecla ENTER —el resultado aparecerá en la pantalla en el formato deseado.

EJEMPLO 14.27 Este ejemplo es sólo para propósitos de demostración. No se espera que todos los lectores cuenten con la calculadora TI-86. Solamente se desea demostrar la capacidad de las calculadoras actuales.

Utilizando la calculadora TI-86, realice las siguientes conversiones:

a. $3 - j4$ a forma polar.
b. $0.006 \angle 20.6^\circ$ a forma rectangular.

Soluciones:

a. La pantalla de la calculadora TI-86 para el inciso (a) es la siguiente:

(3, −4) ▶ Pol (ENTER)
(5.000E0∠−53.130E0)

CÁLCULO 14.1

b. La pantalla de la calculadora TI-86 para el inciso (b) es la siguiente:

(0.006∠20.6) ▶ Rec (ENTER)
(5.616E−3, 2.111E−3)

CÁLCULO 14.2

EJEMPLO 14.28 Utilizando la calculadora TI-86, realice las operaciones que desee de las requeridas en el inciso (c) del ejemplo 14.26, y compare las soluciones.

Solución: Ahora debemos tener presente la jerarquía de las operaciones matemáticas. En otras palabras, ¿en qué secuencia realizará la calculadora las operaciones deseadas? En la mayoría de los casos, la secuencia será la misma



que la utilizada en los cálculos realizados a mano, aunque es necesario estar familiarizado con la configuración de los paréntesis para asegurar el orden correcto de las operaciones. Para este ejemplo, la pantalla de la calculadora TI-86 será la siguiente:

$((2\angle 20)^2*(3,4))/(8,-6)$▶ Pol (ENTER)
$(2.000E0\angle 130.000E0)$

CÁLCULO 14.3

lo cual coincide exactamente con la solución anterior.

Alemán-estadounidense
(Breslau, Alemania; Yonkers y Schenectady, NY, EUA)
(1865-1923)
Matemático científico inventor
Profesor de Ingeniería Eléctrica y Electrofísica
Union College
Director de departamento
General Electric Co.



Cortesía de
Hall of History Foundation,
Schenectady, New York

A pesar de poseer aproximadamente 200 patentes y ser reconocido en todo el mundo por sus contribuciones al estudio de las pérdidas por histéresis y transitorios eléctricos, Charles Proteus Steinmetz es mejor conocido por su contribución al estudio de redes de ca. Su "Symbolic Method of Alternating-current Calculations" ("Método simbólico para cálculos de corriente alterna") proporcionó un enfoque para el análisis de redes de ca que eliminó bastante de la confusión y la frustración experimentadas por los ingenieros de aquellos días cuando realizaban la transición de sistemas de cd a ca. El enfoque de Steinmetz (a partir del cual se postula la notación fasorial en este texto) permitió un análisis directo de sistemas de ca utilizando muchos de los teoremas y métodos de análisis desarrollados para sistemas de cd. En 1897 escribió el trabajo épico *Theory and Calculation of Alternating Current Phenomena* (*Teoría y cálculo del fenómeno de la corriente alterna*), el cual se convirtió en la "biblia" de los ingenieros en ejercicio. Al doctor Steinmetz se le llamaba cariñosamente "El doctor" en General Electric Company, donde trabajó por cerca de 30 años en varios proyectos importantes. Su reconocimiento como "genio multihabilidades" se apoya en el hecho de que mantuvo amistad activa con personalidades como Albert Einstein, Guglielmo Marconi (radio) y Thomas A. Edison, por nombrar sólo algunos. Fue presidente del American Institute of Electrical Engineers (AIEE) y de la National Association of Corporation Schools, y participó activamente en su comunidad local (Schenectady) como presidente de Board of Education y de la Commission on Parks and City Planning.

Charles Proteus Steinmetz.

Mathcad

El formato de Mathcad para números complejos será presentado ahora como preparación para los capítulos a seguir. Continuaremos utilizando j al definir un número complejo en forma rectangular aun cuando el resultado de Mathcad se presentará siempre con la letra i. El lector puede cambiar esto acudiendo al menú de **Format**, pero para esta presentación decidimos utilizar lo más posible los operadores predeterminados.

Al ingresar j para definir el componente imaginario de un número complejo, asegúrese de ingresarlo como $1j$; pero no coloque un operador de multiplicación entre el 1 y la j. Solo teclee 1 y luego j. Además, coloque la j después de la constante en lugar de hacerlo antes, como aparece en el material del texto.

Cuando Mathcad opere sobre un ángulo, asumirá que el ángulo se encuentra en radianes y no en grados. Adicionalmente, todos los resultados se presentarán en radianes y no en grados.

La primera operación que se desarrollará es la conversión de forma rectangular a forma polar. En la figura 14.59, el número rectangular $4 + j\,3$ se convierte a forma polar utilizando Mathcad. Primero se definen X y Y utilizando el operador de dos puntos. Luego se escribe la ecuación para la magnitud de la forma polar en términos de las dos variables recién definidas. La magnitud de la forma polar se revelará al escribir nuevamente la variable y utilizar el signo de igual. Tomará cierta práctica, pero tenga cuidado al escribir la ecuación para Z en el sentido de prestar atención particular a la ubicación del paréntesis antes de realizar la siguiente operación. La magnitud resultante es 5, como se esperaba.

Para el ángulo, se aplica primero la secuencia **View-Toolbars-Greek** para obtener la barra de herramientas de griego **Greek** que aparece en la figura 14.59; la cual puede moverse hacia cualquier ubicación con sólo hacer clic sobre la parte superior azul de la barra y desplazarla hasta la ubicación elegida. En la barra de herramientas se elige entonces $\tan^{-1}\theta$ se obtiene mediante la secuencia **Insert-*f*(*x*)-Insert Function** cuadro de diálogo-**trigonometric-atan-OK** en el cual se inserta Y/X. Luego, lleve el paréntesis de control a la parte exterior de la expresión completa y multiplique por la razón de $180/\pi$, seleccionando π de la barra de herramientas de **Calculator** (disponible mediante la misma secuencia que la barra de herramientas **Greek**). Multiplicar por el último factor de la ecuación asegurará que el ángulo esté en grados. Seleccionar de nuevo θ seguido por un signo de igual dará por resultado el ángulo correcto de 36.87°, como se muestra en la figura 14.59.

Ahora veremos dos maneras de obtener la forma polar de un número complejo. La primera alternativa está definida por las ecuaciones básicas presentadas en este capítulo, mientras que la segunda utiliza un formato especial. En todos los análisis de Mathcad proporcionados en este texto se utilizará el for-

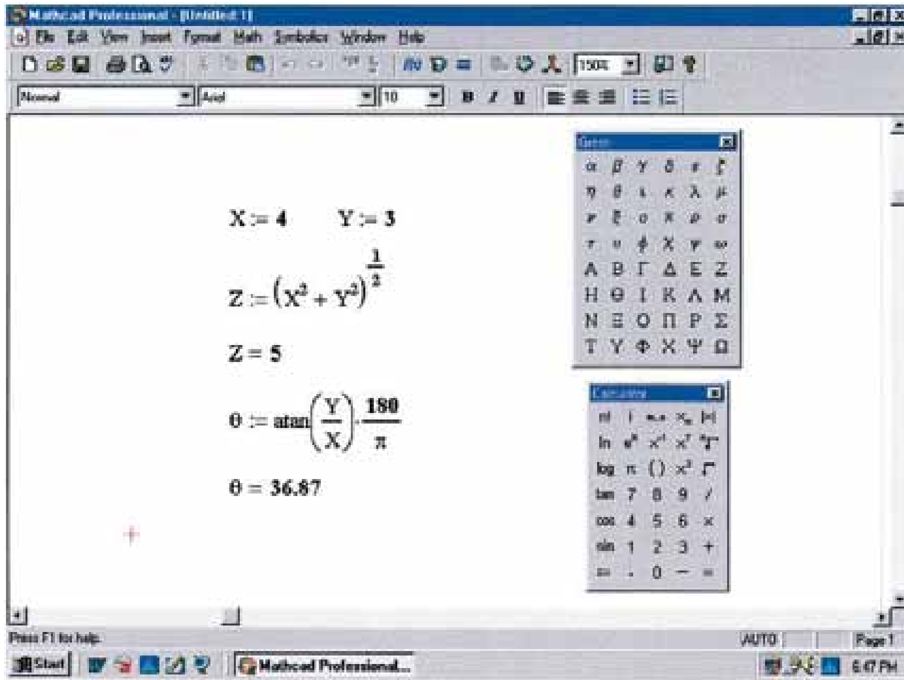


FIGURA 14.59
Utilización de Mathcad para convertir de forma rectangular a forma polar.

mato especial. Primero se define la magnitud de la forma polar seguida por la conversión del ángulo de 60° a radianes multiplicando por el factor de $\pi/180$ como se muestra en la figura 14.60. En este ejemplo, la medida angular resultante es $\pi/3$ radianes. Luego se define el formato rectangular mediante una parte real $X = Z \cos \theta$ y una parte imaginaria $Y = Z \operatorname{sen} \theta$. Tanto el seno como el coseno se obtienen mediante la secuencia **Insert-*f*(*x*)-trigonometric-cos (o sen)-OK**. Observe la multiplicación por j, la cual se ingresó realmente como $1j$. Al ingresar C nuevamente seguida por un signo igual se obtendrá la conversión correcta de la figura 14.60.

El siguiente formato está basado en la relación matemática $e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$. Tanto Z y θ son como las definidas antes, pero ahora el número complejo se escribe como se muestra en la figura 14.60 utilizando la notación recién presentada. Observe que tanto Z como θ son parte de este formato de definición. La e^x se obtiene directamente de la barra de herramientas de **Calculator**. Recuerde ingresar la j como $1j$ sin un signo de multiplicación entre el 1 y la j. No obstante, sí existe un operador de multiplicación colocado entre la j y θ. Nuevamente, cuando sea ingresada seguida por un signo de igual, aparecerá la forma rectangular que coincide con los resultados anteriores. Como se mencionó, será este último formato el que se utilice a lo largo del texto debido a su estructura más ordenada y a la ruta de ingreso más directa.

El último ejemplo utilizando Mathcad será una confirmación de los resultados del ejemplo 14.26(b) como se muestra en la figura 14.61. Primero se definen los tres números complejos, vea la figura. Luego se ingresa la ecuación

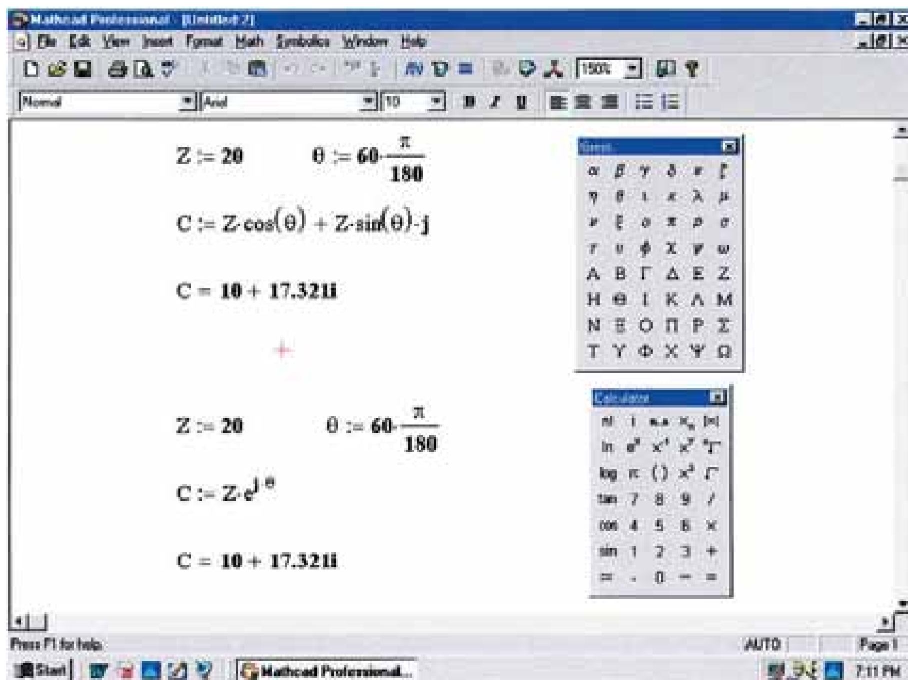


FIGURA 14.60
Utilización de Mathcad para convertir de forma polar a rectangular.

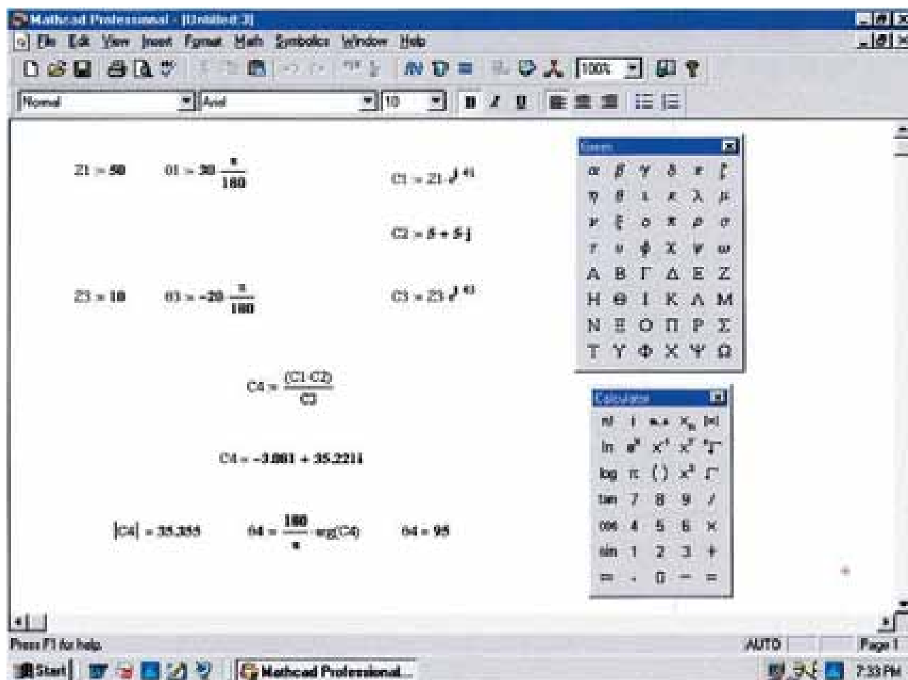


FIGURA 14.61
Utilización de Mathcad para confirmar los resultados del ejemplo 14.26(b).

para obtener el resultado deseado utilizando C_4, y finalmente se solicitan los resultados. Observe la relativa simplicidad de la ecuación para C_4 ahora que las otras variables se han definido. Sin embargo, como se muestra, el resultado inmediato está en la forma rectangular utilizando la característica de magnitud de la calculadora y la función **arg** de **Insert-*f*(*x*)-Complex Numbers-arg**. En los capítulos siguientes se presentarán otros ejemplos sobre el uso de Mathcad con números complejos.

14.12 FASORES

Como se observó en los inicios de este capítulo, la suma de voltajes y corrientes senoidales será requerida con frecuencia en el análisis de circuitos de ca. Un método largo pero válido de realizar esta operación es colocar ambas formas de onda senoidales sobre el mismo conjunto de ejes y añadir algebraicamente las magnitudes en cada punto sobre la abcisa, como se muestra para $c = a + b$ en la figura 14.62. Sin embargo, este proceso puede resultar largo, tedioso, y con una precisión limitada. Un método más corto utiliza el vector radial en rotación que aparece en la figura 13.16. Este *vector radial*, que tiene *magnitud constante* (longitud) con *un extremo fijo en el origen* se denomina **fasor** cuando se aplica a circuitos eléctricos. Durante su desarrollo rotacional de la onda senoidal, el fasor tendrá, en el instante $t = 0$, las posiciones mostradas en la figura 14.63(a) para cada forma de onda de la figura 14.63(b).

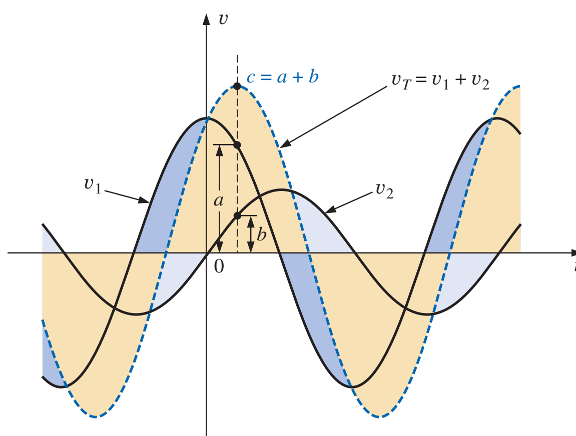


FIGURA 14.62
Suma de dos formas de onda senoidales sobre una base de punto por punto.

Observe en la figura 14.63(b) que v_2 cruza a través del eje horizontal en $t = 0$ s, requiriendo que el vector radial de la figura 14.63(a) esté sobre el eje horizontal para asegurar una proyección vertical de cero volts en $t = 0$ s. Su longitud en la figura 14.63(a) es igual al valor pico de la senoidal según lo requiere el vector radial de la figura 13.16. La otra senoidal habrá pasado a través de 90° de su rotación para el momento en que $t = 0$ s se alcanzó y, por tanto, tiene su proyección vertical máxima como se muestra en la figura 14.63(a). Dado que

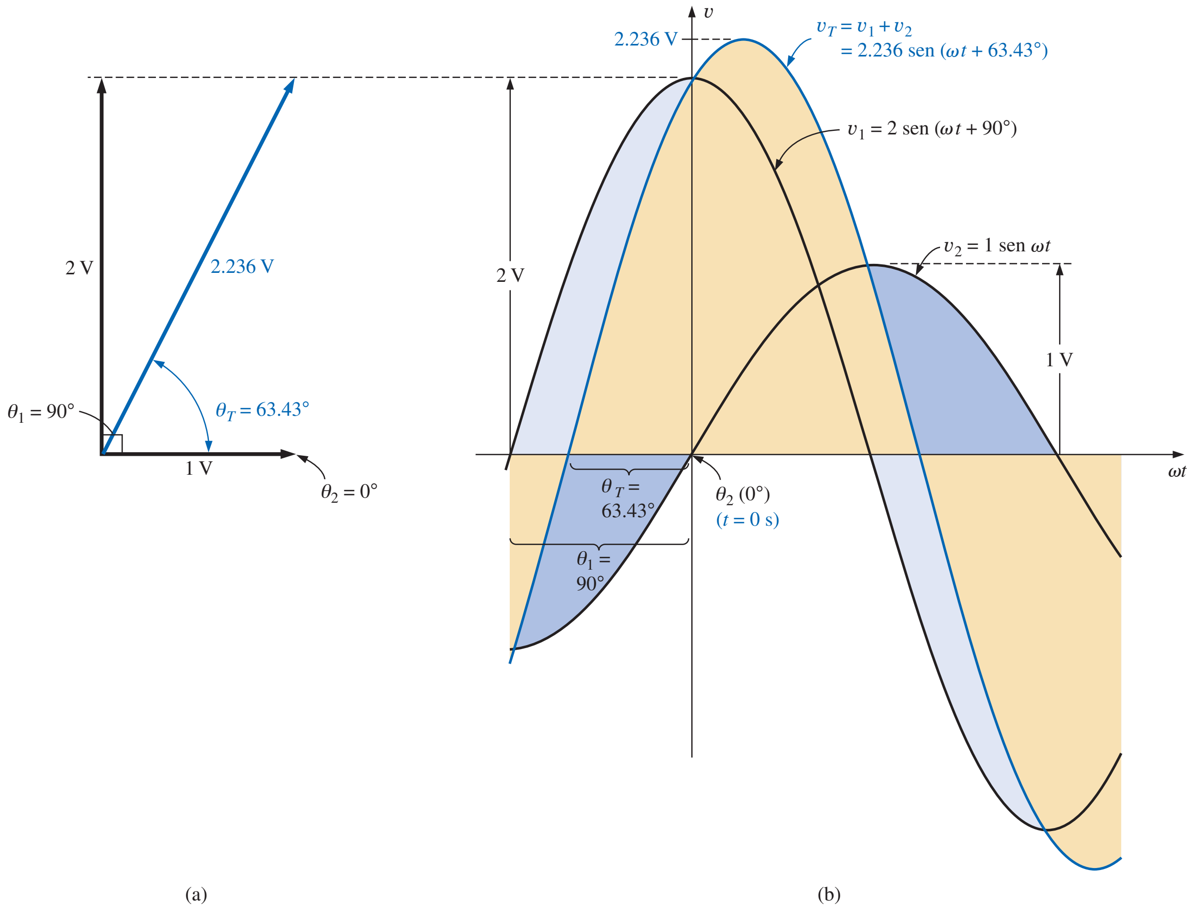


FIGURA 14.63

(a) Representación fasorial para las formas de onda senoidales de la figura 14.63(b); (b) cálculo de la suma de dos formas de onda senoidales de v_1 y v_2.

la proyección vertical es un máximo, el valor pico de la senoidal que generará también se alcanza en $t = 0$ s, como se muestra en la figura 14.63(b). Observe asimismo que $v_T = v_1$ en $t = 0$ s dado que $v_2 = 0$ V en este instante.

Utilizando el álgebra de vectores descrita en la sección 14.10 se puede mostrar [vea la figura 14.63(a)] que:

$$1 \text{ V} \angle 0° + 2 \text{ V} \angle 90° = 2.236 \text{ V} \angle 63.43°$$

En otras palabras, si convertimos v_1 y v_2 a la forma fasorial por medio de:

$$v = V_m \text{ sen}(\omega t \pm \theta) \Rightarrow V_m \angle \pm\theta$$

y los sumamos utilizando álgebra de números complejos, podemos encontrar la forma fasorial para v_T con muy poca dificultad. El fasor puede convertirse entonces al dominio del tiempo y graficarse sobre el mismo conjunto de ejes, como se muestra en la figura 14.63(b). La figura 14.63(a), que muestra las magnitudes y posiciones relativas de los distintos fasores, se denomina **diagrama fasorial**. En realidad es una “foto instantánea” de los vectores radiales en rotación en $t = 0$ s.

Por tanto, en el futuro, si se requiere la suma de dos senoidales, deberán convertirse primero al dominio del fasor y encontrar la suma utilizando álgebra compleja. El resultado puede convertirse entonces al dominio del tiempo.

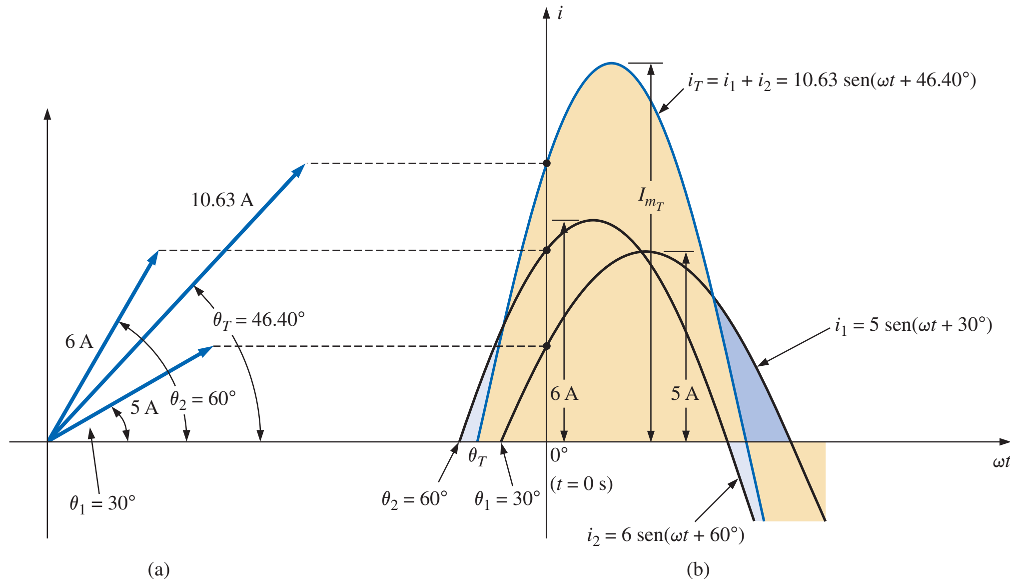


FIGURA 14.64
Suma de dos corrientes senoidales con ángulos de fase distintos a 90°.

La figura 14.64 ilustra la situación de dos funciones senoidales que tienen ángulos de fase distintos de 0° y 90°. Observe nuevamente que la altura vertical de las funciones en la figura 14.64(b) en $t = 0$ s está determinada por las posiciones rotacionales de los vectores radiales de la figura 14.64(a).

Dado que se utilizan valores rms, en lugar de valores pico, de forma casi exclusiva en el análisis de circuitos de ca, ahora el fasor será redefinido para propósitos prácticos y de uniformidad como teniendo una magnitud igual al *valor rms* de la onda senoidal que representa. El ángulo asociado con el fasor permanecerá como se describió anteriormente —el ángulo de fase.

En general, para todos los análisis siguientes, el formato de fasor de un voltaje o corriente senoidal será:

$$\mathbf{V} = V \angle\theta \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = I \angle\theta$$

donde V e I son valores rms y θ es el ángulo de fase. Debe señalarse que en la notación fasorial, la onda senoidal siempre es la referencia, y la frecuencia no se representa.

El álgebra de fasores para cantidades senoidales es aplicable únicamente para formas de onda que tienen la misma frecuencia.

EJEMPLO 14.29 Convierta lo siguiente del dominio del tiempo al dominio del fasor:

Dominio del tiempo	Dominio del fasor
a. $\sqrt{2}(50)$ sen ωt	$\mathbf{50 \angle 0°}$
b. 69.6 sen$(\omega t + 72°)$	$(0.707)(69.6) \angle 72° = \mathbf{49.21 \angle 72°}$
c. 45 cos ωt	$(0.707)(45) \angle 90° = \mathbf{31.82 \angle 90°}$



EJEMPLO 14.30 Escriba la expresión senoidal para los siguientes fasores cuando la frecuencia es de 60 Hz:

Dominio del tiempo	Dominio del fasor
a. $\mathbf{I} = 10\ \angle 30°$	$i = \sqrt{2}(10)\ \text{sen}(2\pi 60t + 30°)$
	e $i = \mathbf{14.14\ sen(377}\boldsymbol{t}\ \mathbf{+\ 30°)}$
b. $\mathbf{V} = 115\ \angle -70°$	$v = \sqrt{2}(115)\ \text{sen}(377t - 70°)$
	y $v = \mathbf{162.6\ sen(377}\boldsymbol{t}\ \mathbf{-\ 70°)}$

EJEMPLO 14.31 Encuentre el voltaje de entrada para el circuito de la figura 14.65 si:

$$\left.\begin{aligned} v_a &= 50\ \text{sen}(377t + 30°) \\ v_b &= 30\ \text{sen}(377t + 60°) \end{aligned}\right\} f = 60\ \text{Hz}$$

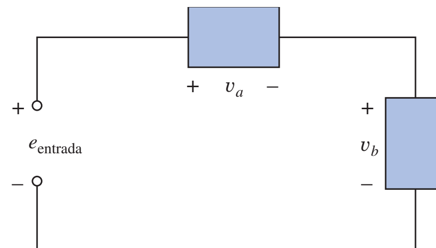


FIGURA 14.65
Ejemplo 14.31.

Solución: Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff tenemos:

$$e_{\text{entrada}} = v_a + v_b$$

Al convertir del dominio del tiempo al dominio del fasor resulta:

$$v_a = 50\ \text{sen}(377t + 30°) \Rightarrow \mathbf{V}_a = 35.35\ \text{V}\ \angle 30°$$
$$v_b = 30\ \text{sen}(377t + 60°) \Rightarrow \mathbf{V}_b = 21.21\ \text{V}\ \angle 60°$$

Al convertir de la forma polar a la rectangular para la suma resulta:

$$\mathbf{V}_a = 35.35\ \text{V}\ \angle 30° = 30.61\ \text{V} + j\,17.68\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_b = 21.21\ \text{V}\ \angle 60° = 10.61\ \text{V} + j\,18.37\ \text{V}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{entrada}} = \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b &= (30.61\ \text{V} + j\,17.68\ \text{V}) + (10.61\ \text{V} + j\,18.37\ \text{V}) \\ &= 41.22\ \text{V} + j\,36.05\ \text{V} \end{aligned}$$

Al convertir de la forma rectangular a la polar resulta:

$$\mathbf{E}_{\text{entrada}} = 41.22\ \text{V} + j\,36.05\ \text{V} = 54.76\ \text{V}\ \angle 41.17°$$

Al convertir del dominio del fasor al dominio del tiempo obtenemos:

$$\mathbf{E}_{\text{entrada}} = 54.76\ \text{V}\ \angle 41.17° \Rightarrow e_{\text{entrada}} = \sqrt{2}(54.76)\ \text{sen}(377t + 41.17°)$$

y $$e_{\text{entrada}} = \mathbf{77.43\ sen(377}\boldsymbol{t} \mathbf{\ +\ 41.17°)}$$

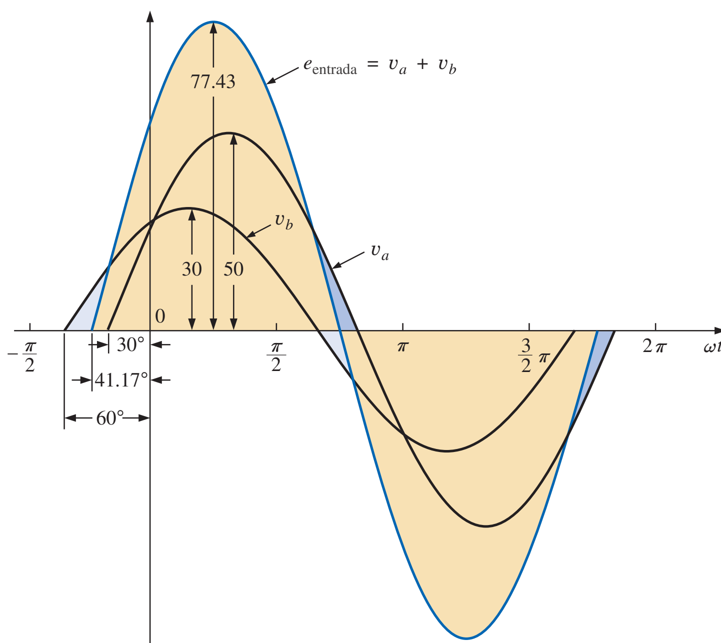


FIGURA 14.66
Solución del ejemplo 14.31.

En la figura 14.66 se muestra una gráfica de las tres formas de onda. Observe que, en cada instante del tiempo, la suma de las dos formas de onda se añade en e_{entrada}. En $t = 0$ ($\omega t = 0$), e_{entrada} es la suma de los dos valores positivos, mientras que en el valor de ωt, casi a la mitad entre $\pi/2$ y π, la suma del valor positivo de v_a y el valor negativo de v_b resulta en $e_{\text{entrada}} = 0$.

EJEMPLO 14.32 Determine la corriente i_2 para la red de la figura 14.67.

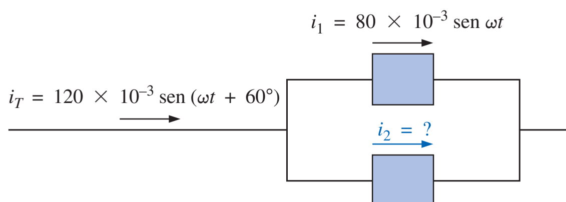


FIGURA 14.67
Ejemplo 14.32.

Solución: Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff se obtiene:

$$i_T = i_1 + i_2 \quad \text{o} \quad i_2 = i_T - i_1$$

Al convertir del dominio del tiempo al dominio del fasor resulta:

$$i_T = 120 \times 10^{-3} \operatorname{sen}(\omega t + 60°) \Rightarrow 84.84 \text{ mA} \angle 60°$$
$$i_1 = 80 \times 10^{-3} \operatorname{sen} \omega t \Rightarrow 56.56 \text{ mA} \angle 0°$$

Al convertir de la forma rectangular a la polar para la resta tenemos:

$$\mathbf{I}_T = 84.84 \text{ mA } \angle 60° = 42.42 \text{ mA} + j73.47 \text{ mA}$$
$$\mathbf{I}_1 = 56.56 \text{ mA } \angle 0° = 56.56 \text{ mA} + j0$$

Entonces:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_T - \mathbf{I}_1$$
$$= (42.42 \text{ mA} + j73.47 \text{ mA}) - (56.56 \text{ mA} + j0)$$

e
$$\mathbf{I}_2 = -14.14 \text{ mA} + j73.47 \text{ mA}$$

Al convertir de la forma rectangular a la polar tenemos:

$$\mathbf{I}_2 = 74.82 \text{ mA } \angle 100.89°$$

Al convertir del dominio del fasor al dominio del tiempo resulta:

$$\mathbf{I}_2 = 74.82 \text{ mA } \angle 100.89° \Rightarrow$$
$$i_2 = \sqrt{2}(74.82 \times 10^{-3}) \text{ sen}(\omega t + 100.89°)$$

e
$$i_2 = \mathbf{105.8 \times 10^{-3} \text{ sen}(\omega t + 100.89°)}$$

En la figura 14.68 aparece una gráfica de las tres formas de onda. Las formas de onda indican claramente que $i_T = i_1 + i_2$.

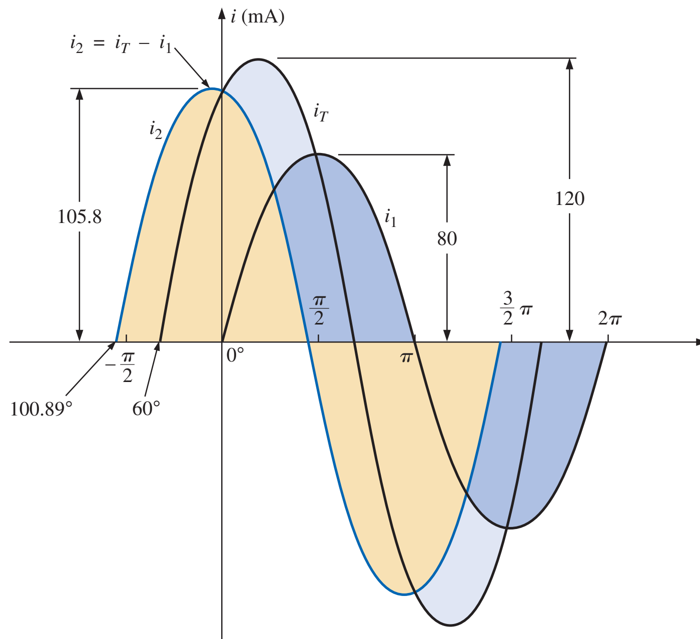


FIGURA 14.68
Solución al ejemplo 14.32.

14.13 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Capacitores y la respuesta en ca Ahora se analizará el más simple de los circuitos capacitivos de ca para presentar el proceso de configurar una fuente de ca y ejecutar una simulación transitoria de ca. La fuente de ca de la figura

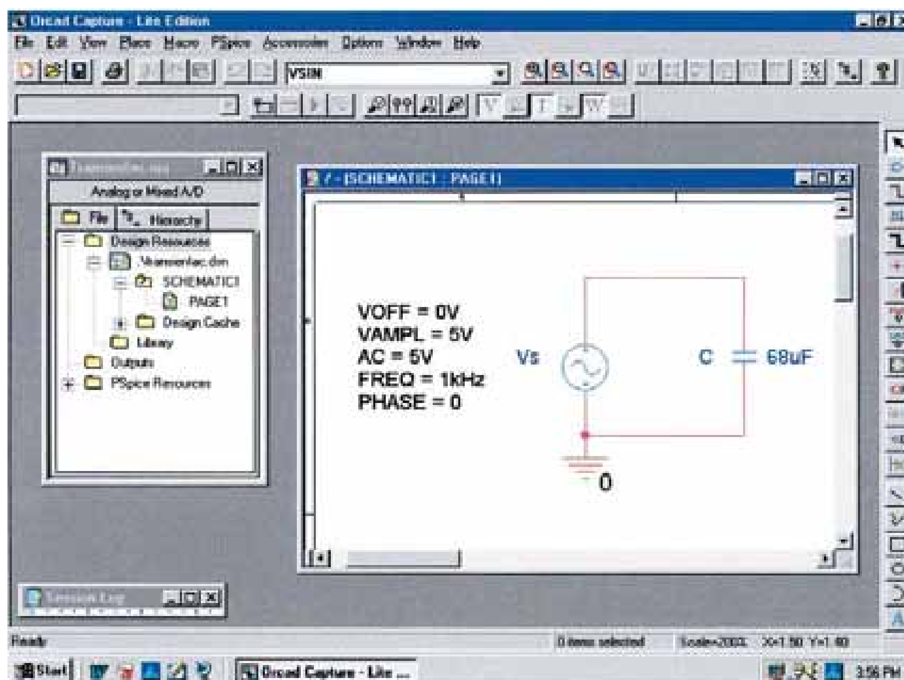


FIGURA 14.69
Utilización de PSpice para analizar la respuesta de un capacitor a una señal senoidal de ca.

14.69 se obtiene mediante la tecla **Place part SOURCE-VSIN-OK**. El nombre o el valor de cualquier parámetro pueden modificarse mediante un doble clic sobre el parámetro en la imagen o sobre el símbolo de fuente para obtener el cuadro de diálogo del editor de propiedades **Property Editor**. Dentro del cuadro de diálogo se establecieron los valores que aparecen en la figura 14.69, y bajo **Display** fueron seleccionados **Name and Value**. Después de seleccionar **Apply** y abandonar el cuadro de diálogo, los parámetros se presentarán como se muestra en la figura.

El proceso de simulación da inicio al seleccionar **New Simulation Profile**, y bajo **New Simulation**, ingresar **Transientac** para el nombre **Name** seguido de **Create**. En el cuadro de diálogo **Simulation Settings** se selecciona **Analysis**, y **Time Domain(Transient)** se elige bajo **Analysis type**. El tiempo límite de ejecución **Run to time** se establece en 3 ms para permitir un despliegue de tres ciclos de las formas de onda senoidales ($T = 1/f = 1/1000$ Hz = 1 ms). La opción **Start saving data after** se deja en 0 s, y **Maximum step size** será de 3 ms//1000 = 3 μs. Al hacer clic en **OK** y luego seleccionar el icono **Run PSpice** se obtendrá una gráfica con un eje horizontal que va de 0 a 3 ms.

Ahora debemos indicar a la computadora las formas de onda de nuestro interés. Primero, debemos observar la fuente de ca aplicada seleccionando **Trace-Add Trace-V(Vs:+)** seguido por **OK**. El resultado será el voltaje de ca de barrido en la región inferior de la pantalla de la figura 14.70. Vea que este voltaje tiene un valor pico de 5 V, y que aparecen tres ciclos en el marco de tiempo de 3 ms. Se puede añadir la corriente para el capacitor seleccionando **Trace-Add Trace** y eligiendo **I(C)** seguido por **OK**. La forma de onda resultante para **I(C)** aparecerá con un desplazamiento de fase de 90° con respecto al voltaje aplicado, con la corriente adelantada al voltaje (la corriente habrá llegado al pico cuando el voltaje cruce el eje de 0 V). Dado que el valor pico de

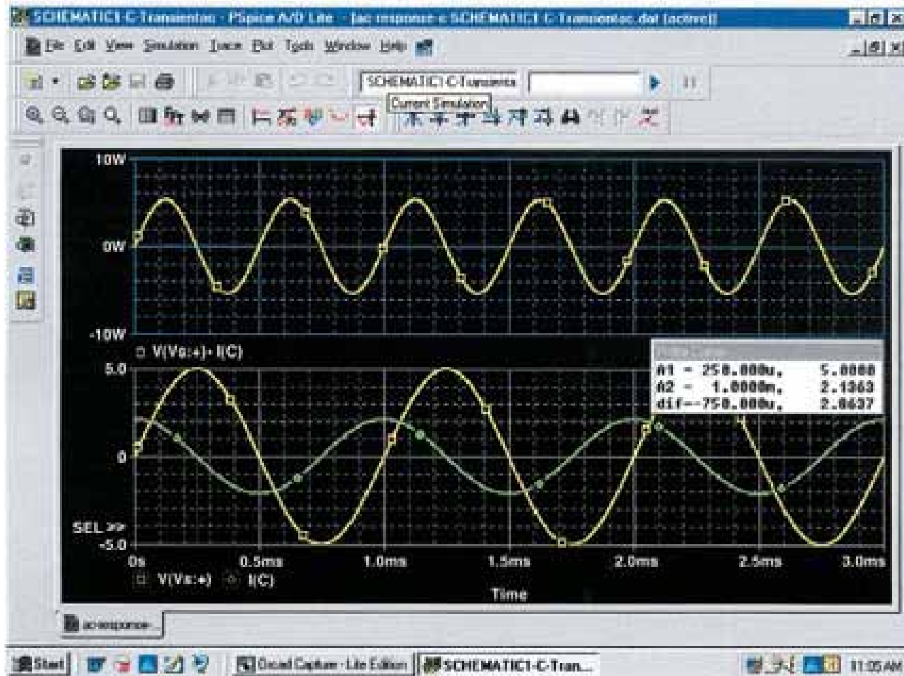


FIGURA 14.70
Gráfica del voltaje, la corriente y la potencia para el capacitor de la figura 14.69.

cada gráfica se encuentra en el mismo intervalo de magnitud, el número 5 que aparece en la escala vertical puede ser usado para ambas gráficas. Un análisis teórico daría por resultado $X_C = 2.34\ \Omega$, y el valor pico de $I_C = E/X_C = 5\ \text{V}/2.34\ \Omega = 2.136$ A, como se muestra en la figura 14.70.

Por motivos de interés y un poco de práctica, obtendremos la curva para la potencia entregada al capacitor sobre un mismo periodo. Primero seleccione **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace** para obtener el cuadro de diálogo **Add Traces**. Luego elija **V (Vs:+)** seguido por un * para multiplicación y termine seleccionando **I(C)**. El resultado será la expresión **V(Vs:+)*I(C)** con el formato de potencia: $p = vi$. Haga clic en **OK** y aparecerá la gráfica de la potencia en la parte superior de la figura 14.70. Observe que durante los tres ciclos completos, el área por encima del eje es igual al área por debajo, no existe transferencia neta de potencia durante el periodo de 3 ms. Asimismo advierta que la curva de potencia es senoidal (lo cual es muy interesante) con una frecuencia del doble de la señal aplicada. Utilizando el control de cursor, podemos determinar que la potencia máxima (valor pico de la forma de onda senoidal) es de 5.34 W. De hecho, los cursores se añadieron a las curvas inferiores para mostrar el valor pico de la senoidal aplicada y de la corriente resultante.

Después de seleccionar el icono **Toggle cursor**, haga clic izquierdo sobre el ratón para rodear el **V(Vs:+)** en la parte inferior de la gráfica con una línea punteada y mostrar que el cursor está proporcionando los niveles de esa cantidad. Cuando se coloca a ¼ del periodo total de 250 μs (**A1**), el valor pico es exactamente de 5 V, como se muestra en el cuadro de diálogo **Probe Cursor**.

Al colocar el cursor por encima del símbolo junto a **I(C)** en la parte inferior de la gráfica y haciendo clic derecho con el ratón se asignará el cursor derecho a la corriente. Al colocarlo exactamente en 1 ms **(A2)** se obtendrá un valor pico de 2.136 A para coincidir con la solución anterior. Con el propósito de poder distinguir mejor entre las formas de onda del voltaje y la corriente, se cambia el color y el grosor de las líneas de las gráficas. Coloque el cursor justo sobre la línea de la gráfica y dé un clic derecho. Luego aparecerá la opción **Properties**, al seleccionarla se presenta el cuadro de diálogo **Trace Properties** para elegir ahí el color amarillo con el grosor más ancho y mejorar la visibilidad sobre el fondo negro. Observe que se seleccionó amarillo para **Vs** y verde para **I(C)**. Asimismo, el eje y la cuadrícula se modificaron dándoles un color más visible mediante el mismo procedimiento.

Electronics Workbench

Dado que se empleó PSpice para analizar la respuesta de un elemento capacitivo ante un voltaje de ca, Electronics Workbench repetirá el análisis pero para un elemento inductivo. La fuente de voltaje de ca se obtuvo del depósito de partes para fuentes **Sources** como se describió en el capítulo 13, con los valores que aparecen en la figura 14.71 establecidos en el cuadro de diálogo **AC Voltage**. Dado que la respuesta transitoria de Electronics Workbench está limitada a una gráfica de voltaje en función del tiempo, una gráfica de la corriente del circuito requerirá la adición de un resistor de 1 Ω en serie con el elemento

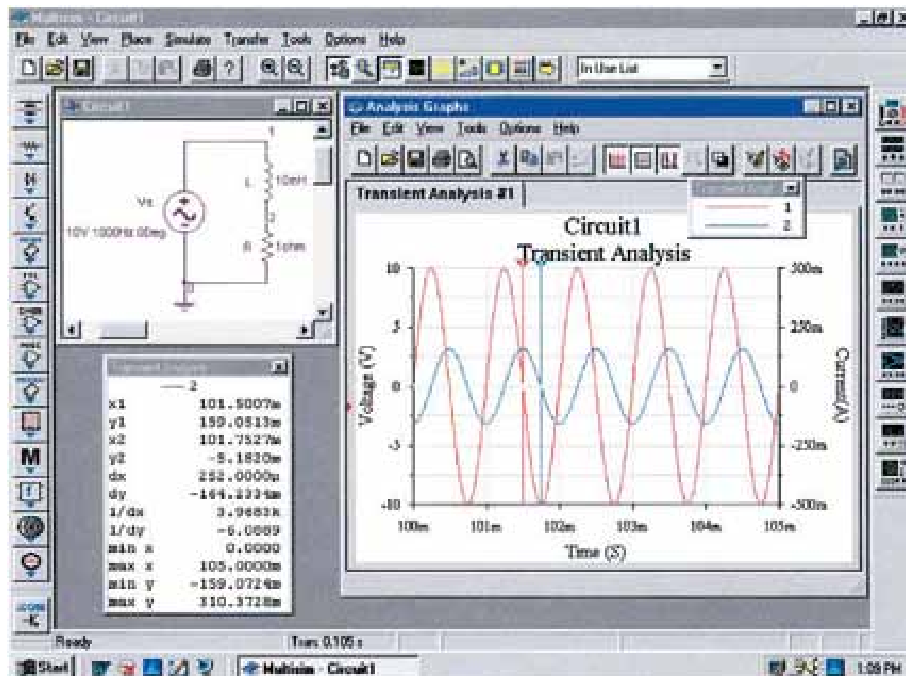


FIGURA 14.71
Uso de Electronics Workbench para analizar la respuesta de un elemento inductivo ante una señal senoidal de ca.



inductivo. La magnitud de la corriente a través del resistor y del inductor en serie estará determinada por:

$$|\,i_R\,| = \left|\frac{v_R}{R}\right| = \left|\frac{v_R}{1\Omega}\right| = |\,v_R\,| = |\,i_L\,|$$

mostrando que la corriente tendrá el mismo valor pico que el voltaje en el resistor gracias a la división entre 1. Al observarla en la gráfica, podrá considerarse simplemente como una gráfica de la corriente. En realidad, todos los inductores requieren una resistencia en serie, por lo que el resistor de 1 Ω cumple un propósito doble. La resistencia de 1 Ω es también tan pequeña en comparación con la reactancia de la bobina a la frecuencia de 1 kHz que su efecto sobre la impedancia o voltaje total en la bobina puede ignorarse.

Una vez construido el circuito, la secuencia **Simulate-Analyses-Transient Analysis** dará por resultado el cuadro de diálogo **Transient Analysis** en el que se establece el tiempo inicial **Start time** en 0 s y el tiempo final **End time** en 105 ms. Los 105 ms de **End time** se establecieron para darle a la red 100 ms y estabilizarla en su estado de equilibrio y 5 ms para cinco ciclos en el despliegue de salida. La opción **Minimum number of time points** se estableció en 10,000 para asegurar una adecuada presentación de las formas de onda que cambian tan rápido.

Luego se seleccionó el encabezado **Output variables** dentro del cuadro de diálogo, y se desplazaron los nodos **1** y **2** desde las variables en el circuito, **Variables in Circuit**, hacia las variables seleccionadas, **Selected variables**, para analizarlos utilizando la opción **Plot during simulation**. Al seleccionar **Simulate** se obtiene una forma de onda que va desde 0 s hasta 105 ms. Aunque planeamos guardar únicamente la respuesta que ocurra después de 100 ms, la computadora no lo sabe, y graficará la respuesta para el periodo completo. Esto se corrige mediante la selección de **Properties** en la barra de la parte superior de la gráfica (que se muestra como una etiqueta y un lápiz) para obtener el cuadro de diálogo **Graph Properties**. Elegir **Bottom Axis** permitirá establecer el intervalo **(Range)** desde un **Minimum of 0.100s=100ms** hasta un **Maximum of 0.105s=105ms**. Haga clic en **OK** y se presentará el periodo de la figura 14.71. La estructura de cuadrícula se añade mediante la opción **Show/Hide Grid**, y el color asociado con cada voltaje nodal se presentará si elegimos la tecla **Show/Hide Legend** cercana.

Se puede mejorar la escala para la gráfica de i_L acudiendo primero a **Traces** y estableciendo **Trace** en el número **2** que representa el voltaje en el resistor de 1 Ω. Cuando se selecciona **2**, el **Color** presentado será automáticamente cambiado a azul. En **Y Range**, seleccione **Right Axis** seguido de **OK**. Luego elija el encabezado de **Right Axis** e ingrese **Current(A)** en **Label**, habilite **Axis**, cambie el tamaño de la pluma en **Pen Size** a 1, y cambie el intervalo en **Range** de −500 mA a +500 mA. Por último, establezca **Total Ticks** en 8 con **Minor Ticks** en 2 para que coincida con el eje izquierdo **Left Axis**, y salga del cuadro de diálogo con **OK**. Se obtendrá la gráfica de la figura 14.71. Observe el nuevo eje a la izquierda y la etiqueta de **Current(A)**. Ahora podemos ver que la corriente tiene un pico aproximado de 160 mA. Para mayor detalle de los valores pico, simplemente haga clic en **Show/Hide Cursors** en la barra de herramientas superior. Aparecerá el cuadro de diálogo **Transient Analysis** con un **1** y una línea roja para indicar que se está trabajando sobre todo el voltaje de fuente en el nodo **1**. Para cambiar a la curva de corriente (la curva azul), simplemente lleve el cursor a cualquier punto sobre la curva azul y dé un clic izquierdo. Aparecerá una línea azul y el número **2** en el encabezado del cuadro de diálogo **Transient Analysis**. Hacer clic sobre el **1** en la pequeña flecha invertida superior le permitirá desplazar la línea roja vertical hacia cualquier punto horizontal

en la gráfica. Como se muestra en la figura 14.71, cuando el cursor se establece en 101.5 ms (**x1**), el valor pico de la curva de corriente es de 159.05 mA (**y1**). Un segundo cursor aparecerá en azul con un número **2** en la flecha invertida que también podrá moverse con un clic izquierdo sobre el número **2** en la parte superior de la línea. Si se establece en 101.75 ms (**x2**), tendrá un valor máximo de −5.18 mA (**y2**), el valor más pequeño disponible para los puntos de información calculados. Observe que la diferencia entre los valores de tiempo horizontal **dx** = 252 μs = 0.25 lo cual es ¼ del periodo de la onda (en 1 ms).

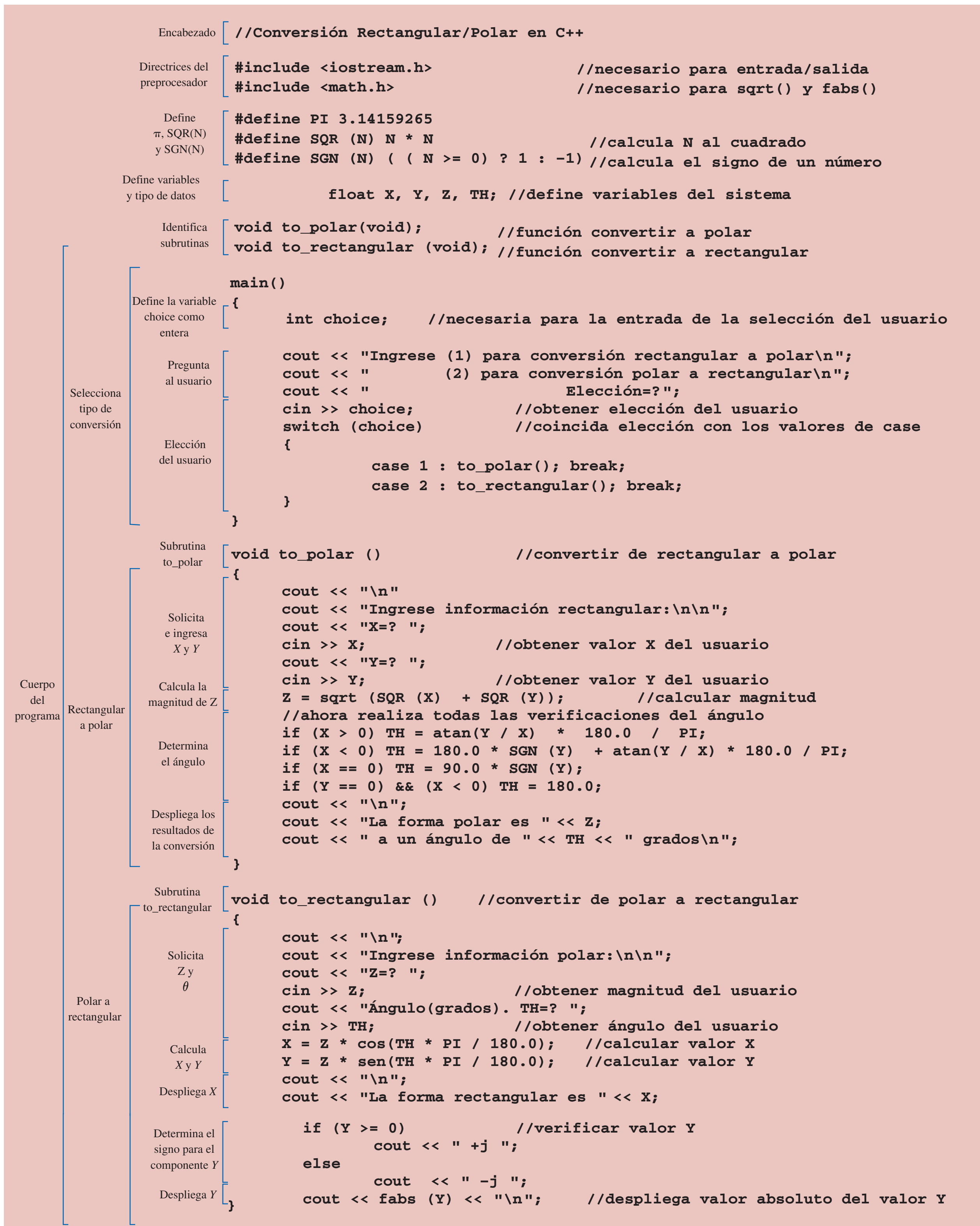
C++

La versatilidad del lenguaje de programación C++ se demuestra claramente en el siguiente programa diseñado para efectuar conversiones entre formas polares y rectangulares. Se proporcionan comentarios al lado derecho del programa para ayudar a identificar la función de líneas o secciones específicas. Recuerde que todos los comentarios ubicados a la derecha de las líneas diagonales paralelas // son ignorados por el compilador. En este caso debe añadirse el archivo *math.h* a la lista de directrices del preprocesador, como se muestra en la figura 14.72, para proporcionar las funciones matemáticas que serán utilizadas en el programa. Se puede conseguir una lista completa de operaciones en el manual de referencia del compilador. La directriz *#define* precisa el nivel de *PI* (π) que será empleado cuando se le requiera en el programa y especifica las operaciones a realizar cuando aparezcan *SQR*(*N*) y *SGN*(*N*). El *?* asociado con la directriz *SGN*(*N*) es un *operador condicional* que especifica +1 si *N* es mayor que o igual a 0, y −1 si no lo es.

Luego se ingresan las variables y se definen como del tipo punto flotante. El siguiente paso incluye el término *void* para indicar que la variable *to_polar* no devolverá un valor numérico específico cuando sea parte de una ejecución, sino que identifica una subrutina o cadena de palabras o caracteres. El *void* dentro de los paréntesis revela que las variables no tienen una lista de parámetros asociados para un posible uso en la aplicación.

Como se describió en los programas iniciales, *main* ( ) precisa el punto donde comenzará la ejecución, estando definido el cuerpo de *main* por las llaves que abren y cierran { }. Dentro de *main* se presenta una variable *choice* (elección) para manejar el número entero (1 o 2) que el usuario elegirá en respuesta a la pregunta presentada mediante *cout*. A través de *cin* el usuario responderá con 1 o 2, los cuales definirán la variable *choice*. *switch* es una respuesta condicional que seguirá un curso definido por la variable *choice*. Los posibles recorridos que puede seguir el programa mediante *switch* se agrupan entre llaves { }. Dado que un valor numérico determinará el curso, las opciones deben comenzar con la palabra *case*. En este caso, un 1 seguirá a la variable estructurada *to_polar*, y un 2 a la variable estructurada *to_rectangular*. La instrucción *break* indica simplemente el final del proceso de selección.

En una selección *to_polar* el programa avanzará a la subrutina *void to_polar* y convertirá el número a la forma polar. Las primeras seis líneas sólo crean saltos de línea y solicitan los valores de *X* y *Y*. La siguiente línea calcula la magnitud de la forma polar (*Z*) utilizando *SQR*(*N*), definida, y *sqrt* del archivo de encabezado *math.h*. Una instrucción *if* sensible a los valores de *X* y *Y* delimitará entonces la línea que determinará el ángulo de fase de la forma polar. *SGN*(*N*), según se indica en el comentario a la derecha de las diagonales, determinará el signo que será utilizado en la ecuación. La *a* que precede a la función tangente indica arco tangente o $\tan^{-1}$, mientras que *PI* es según se definió en la sección anterior del preprocesador. Observe también que los ángulos deben convertirse primero a radianes multiplicando por la razón de 180°/π. Una vez determinados, se despliega la forma polar utilizando instrucciones *cout*.




```
//Conversión Rectangular/Polar en C++

#include <iostream.h>                    //necesario para entrada/salida
#include <math.h>                        //necesario para sqrt() y fabs()

#define PI 3.14159265
#define SQR (N) N * N                     //calcula N al cuadrado
#define SGN (N) ( ( N >= 0) ? 1 : -1)    //calcula el signo de un número

          float X, Y, Z, TH; //define variables del sistema

void to_polar(void);            //función convertir a polar
void to_rectangular (void);     //función convertir a rectangular

main()
{
      int choice;    //necesaria para la entrada de la selección del usuario

      cout << "Ingrese (1) para conversión rectangular a polar\n";
      cout << "         (2) para conversión polar a rectangular\n";
      cout << "                         Elección=?";
      cin >> choice;           //obtener elección del usuario
      switch (choice)          //coincida elección con los valores de case
      {
              case 1 : to_polar(); break;
              case 2 : to_rectangular(); break;
      }
}

void to_polar ()                   //convertir de rectangular a polar
{
      cout << "\n"
      cout << "Ingrese información rectangular:\n\n";
      cout << "X=? ";
      cin >> X;                //obtener valor X del usuario
      cout << "Y=? ";
      cin >> Y;                //obtener valor Y del usuario
      Z = sqrt (SQR (X)  + SQR (Y));         //calcular magnitud
      //ahora realiza todas las verificaciones del ángulo
      if (X > 0) TH = atan(Y / X)  *  180.0  /  PI;
      if (X < 0) TH = 180.0 * SGN (Y)  + atan(Y / X) * 180.0 / PI;
      if (X == 0) TH = 90.0 * SGN (Y);
      if (Y == 0) && (X < 0) TH = 180.0;
      cout << "\n";
      cout << "La forma polar es " << Z;
      cout << " a un ángulo de " << TH << " grados\n";
}

void to_rectangular ()    //convertir de polar a rectangular
{
      cout << "\n";
      cout << "Ingrese información polar:\n\n";
      cout << "Z=? ";
      cin >> Z;                 //obtener magnitud del usuario
      cout << "Ángulo(grados). TH=? ";
      cin >> TH;                //obtener ángulo del usuario
      X = Z * cos(TH * PI / 180.0);   //calcular valor X
      Y = Z * sen(TH * PI / 180.0);   //calcular valor Y
      cout << "\n";
      cout << "La forma rectangular es " << X;

        if (Y >= 0)              //verificar valor Y
                cout << " +j ";
        else
                cout  << " -j ";
        cout << fabs (Y) << "\n";     //despliega valor absoluto del valor Y
}
```

FIGURA 14.72
Programa en C++ para conversiones de números complejos.

Seleccionar la variable estructurada *to_rectangular* ocasiona que el programa pase por alto la subrutina anterior y vaya directamente a la secuencia de conversión polar a rectangular. Nuevamente, las primeras seis líneas sólo solicitan los componentes de la forma polar. Luego se calculan las partes real e imaginaria y se despliegan los resultados. Observe la instrucción *if-else* requerida para asociar la *j* de signo adecuado con la parte imaginaria.

En un esfuerzo por identificar claramente los componentes principales del programa, se añadieron corchetes en el extremo izquierdo con una breve descripción de la función que realiza cada apartado. Como ya se mencionó, no se preocupe si le surgen algunas dudas sobre la estructura del programa o sobre comandos o instrucciones específicas. El propósito aquí es simplemente presentar el formato básico del lenguaje de programación C++ y no darle todos los detalles requeridos para que escriba sus propios programas.

En las figuras 14.73 y 14.74 se proporcionan dos corridas del programa, una para la conversión de polar a rectangular y otra para la conversión de rectangular a polar. Observe en cada caso el resultado de las instrucciones *cout* y *cin*, y en general el formato directo y completamente claro de la salida resultante.

```
Ingrese (1) para conversión rectangular a polar
        (2) para conversión polar a rectangular
                     Elección=? 2

Ingrese información polar:

Z=? 12
Ángulo(grados). TH=? 35

La forma rectangular es 9.829824 +j 6.882917
```

FIGURA 14.73
Conversión polar a rectangular utilizando el programa en C++ de la figura 14.72.

```
Ingrese (1) para conversión rectangular a polar
        (2) para conversión polar a rectangular
                            Elección=? 1

Ingrese información rectangular:
X=? -10
Y=? 20

La forma polar es 22.36068 a un ángulo de 116.565048 grados
```

FIGURA 14.74
Conversión rectangular a polar utilizando el programa en C++ de la figura 14.72.



PROBLEMAS

SECCIÓN 14.2 La derivada

1. Grafique la siguiente forma de onda en función del tiempo mostrando un ciclo claro y completo. Luego determine la derivada de la forma de onda utilizando la ecuación (14.1), y trace un ciclo completo de la derivada directamente bajo la forma de onda original. Compare la magnitud de la derivada en distintos puntos contra la pendiente de la función senoidal original.

$$v = 1 \text{ sen } 3.14t$$

2. Repita el problema 1 para la siguiente función senoidal y compare los resultados. En particular, determine la frecuencia de las formas de onda de los problemas 1 y 2 y compare la magnitud de la derivada.

$$v = 1 \text{ sen } 15.71t$$

3. ¿Cuál es la derivada de cada una de las siguientes expresiones senoidales?
   a. $10 \text{ sen } 377t$ **b.** $0.6 \text{ sen}(754t + 20°)$
   c. $\sqrt{2}\ 20 \text{ sen}(157t - 20°)$ **d.** $-200 \text{ sen}(t + 180°)$

SECCIÓN 14.3 Respuesta de los elementos básicos *R*, *L* y *C* a un voltaje o una corriente senoidales

4. El voltaje en un resistor de 5 Ω es como se indica. Encuentre la expresión senoidal para la corriente. Además, trace las formas de onda senoidal v e i sobre el mismo eje.
   a. $150 \text{ sen } 377t$ **b.** $30 \text{ sen}(377t + 20°)$
   c. $40 \cos(\omega t + 10°)$ **d.** $-80 \text{ sen}(\omega t + 40°)$
5. La corriente a través de un resistor de 7 kΩ es como se indica. Encuentre la expresión senoidal para el voltaje. Además, trace las formas de onda senoidal v e i sobre el mismo eje.
   a. $0.03 \text{ sen } 754t$
   b. $2 \times 10^{-3} \text{ sen}(400t - 120°)$
   c. $6 \times 10^{-6} \cos(\omega t - 2°)$
   d. $-0.004 \cos(\omega t - 90°)$
6. Determine la reactancia inductiva (en ohms) de una bobina de 2 H para:
   a. cd
   y para las siguientes frecuencias:
   b. 25 Hz **c.** 60 Hz
   d. 2000 Hz **e.** 100,000 Hz
7. Determine la inductancia de una bobina que tiene una reactancia de:
   a. 20 Ω en $f = 2$ Hz.
   b. 1000 Ω en $f = 60$ Hz.
   c. 5280 Ω en $f = 1000$ Hz.
8. Determine la frecuencia a la que una inductancia de 10 H presenta las siguientes reactancias inductivas:
   a. 50 Ω **b.** 3770 Ω
   c. 15.7 kΩ **d.** 243 Ω
9. La corriente a través de una reactancia inductiva de 20 Ω está dada. ¿Cuál es la expresión senoidal para el voltaje? Trace las formas de onda senoidal de v e i sobre el mismo eje.
   a. $i = 5 \text{ sen } \omega t$ **b.** $i = 0.4 \text{ sen}(\omega t + 60°)$
   c. $i = -6 \text{ sen}(\omega t - 30°)$ **d.** $i = 3 \cos(\omega t + 10°)$
10. La corriente a través de una bobina de 0.1 H está dada. ¿Cuál es la expresión senoidal para el voltaje?
    a. $30 \text{ sen } 30t$
    b. $0.006 \text{ sen } 377t$
    c. $5 \times 10^{-6} \text{ sen}(400t + 20°)$
    d. $-4 \cos(20t - 70°)$
11. El voltaje en una reactancia inductiva de 50 Ω está dado. ¿Cuál es la expresión senoidal para la corriente? Trace las formas de onda senoidal de v e i sobre el mismo conjunto de ejes.
    a. $50 \text{ sen } \omega t$ **b.** $30 \text{ sen}(\omega t + 20°)$
    c. $40 \cos(\omega t + 10°)$ **d.** $-80 \text{ sen}(377t + 40°)$
12. El voltaje en una bobina de 0.2 H está dado. ¿Cuál es la expresión senoidal para la corriente?
    a. $1.5 \text{ sen } 60t$
    b. $0.016 \text{ sen}(t + 4°)$
    c. $-4.8 \text{ sen}(0.05t + 50°)$
    d. $9 \times 10^{-3} \cos(377t + 360°)$
13. Determine la reactancia capacitiva (en ohms) de un capacitor de 5 μF para:
    a. cd
    y para las siguientes frecuencias:
    b. 60 Hz **c.** 120 Hz
    d. 1800 Hz **e.** 24,000 Hz
14. Determine la capacitancia en microfarads si un capacitor tiene una reactancia de:
    a. 250 Ω en $f = 60$ Hz.
    b. 55 Ω en $f = 312$ Hz.
    c. 10 Ω en $f = 25$ Hz.
15. Determine la frecuencia a la que un capacitor de 50 μF presenta las siguientes reactancias capacitivas:
    a. 342 Ω **b.** 684 Ω
    c. 171 Ω **d.** 2000 Ω
16. El voltaje en una reactancia capacitiva de 2.5 Ω está dado. ¿Cuál es la expresión senoidal para la corriente? Trace las formas de onda senoidal de v e i sobre el mismo conjunto de ejes.
    a. $100 \text{ sen } \omega t$ **b.** $0.4 \text{ sen}(\omega t + 20°)$
    c. $8 \cos(\omega t + 10°)$ **d.** $-70 \text{ sen}(\omega t + 40°)$
17. El voltaje en un capacitor de 1 μF está dado. ¿Cuál es la expresión senoidal para la corriente?
    a. $30 \text{ sen } 200t$ **b.** $90 \text{ sen } 377t$
    c. $-120 \text{ sen}(374t + 30°)$ **d.** $70 \cos(800t - 20°)$
18. La corriente a través de una reactancia capacitiva de 10 Ω está dada. Escriba la expresión senoidal para el voltaje. Trace las formas de onda senoidal de v e i sobre el mismo conjunto de ejes.
    a. $i = 50 \text{ sen } \omega t$ **b.** $i = 40 \text{ sen}(\omega t + 60°)$
    c. $i = -6 \text{ sen}(\omega t - 30°)$ **d.** $i = 3 \cos(\omega t + 10°)$
19. La corriente a través de un capacitor de 0.5 μF está dada. ¿Cuál es la expresión senoidal para el voltaje?
    a. $0.20 \text{ sen } 300t$ **b.** $0.007 \text{ sen } 377t$
    c. $0.048 \cos 754t$ **d.** $0.08 \text{ sen}(1600t - 80°)$

***20.** Para los siguientes pares de voltajes y corrientes, indique si el elemento involucrado es un capacitor, un inductor o un resistor, y encuentre el valor de C, L o R cuando se dé suficiente información:

a. $v = 550 \text{ sen}(377t + 40°)$
$i = 11 \text{ sen}(377t - 50°)$

b. $v = 36 \text{ sen}(754t + 80°)$
$i = 4 \text{ sen}(754t + 170°)$

c. $v = 10.5 \text{ sen}(\omega t + 13°)$
$i = 1.5 \text{ sen}(\omega t + 13°)$

***21.** Repita el problema 20 para los siguientes pares de voltajes y corrientes:

a. $v = 2000 \text{ sen } \omega t$
$i = 5 \cos \omega t$

b. $v = 80 \text{ sen}(157t + 150°)$
$i = 2 \text{ sen}(157t + 60°)$

c. $v = 35 \text{ sen}(\omega t - 20°)$
$i = 7 \cos(\omega t - 110°)$

SECCIÓN 14.4 Respuesta en frecuencia de los elementos básicos

22. Grafique X_L en función de la frecuencia para una bobina de 5 mH utilizando un intervalo de frecuencia de cero a 100 kHz sobre una escala lineal.

23. Grafique X_C en función de la frecuencia para un capacitor de 1 μF utilizando un intervalo de frecuencia de cero a 10 kHz sobre una escala lineal.

24. ¿En qué frecuencia la reactancia de un capacitor de 1 μF será igual a la resistencia de un resistor de 2 kΩ?

25. La reactancia de una bobina es igual a la resistencia de un resistor de 10 kΩ en una frecuencia de 5 kHz. Determine la inductancia de la bobina.

26. Determine en qué frecuencia un capacitor de 1 μF y un inductor de 10 mH tendrán la misma reactancia.

27. Determine la capacitancia requerida para establecer una reactancia capacitiva que coincida con la de una bobina de 2 mH en una frecuencia de 50 kHz.

SECCIÓN 14.5 Potencia promedio y factor de potencia

28. Encuentre la pérdida de potencia promedio en watts para cada conjunto del problema 20.

29. Encuentre la pérdida de potencia promedio en watts para cada conjunto del problema 21.

***30.** Encuentre la pérdida de potencia promedio y el factor de potencia para cada uno de los circuitos cuya corriente y voltaje de entrada son de la siguiente forma:

a. $v = 60 \text{ sen}(\omega t + 30°)$
$i = 15 \text{ sen}(\omega t + 60°)$

b. $v = -50 \text{ sen}(\omega t - 20°)$
$i = -2 \text{ sen}(\omega t + 40°)$

c. $v = 50 \text{ sen}(\omega t + 80°)$
$i = 3 \cos(\omega t + 20°)$

d. $v = 75 \text{ sen}(\omega t - 5°)$
$i = 0.08 \text{ sen}(\omega t - 35°)$

31. Si la corriente y el voltaje en un elemento son $i = 8 \text{ sen}(\omega t + 40°)$ y $v = 48 \text{ sen}(\omega t + 40°)$, respectivamente, calcule la potencia mediante I^2R, $(V_mI_m/2)\cos\theta$, y $VI\cos\theta$, y compare las respuestas.

32. Un circuito disipa 100 W (potencia promedio) con 150 V (voltaje efectivo de entrada) y 2 A (corriente efectiva de entrada). ¿Cuál es el factor de potencia? Repita el problema si la potencia es de 0 W; 300 W.

***33.** El factor de potencia de un circuito es de 0.5 atrasado. La potencia entregada en watts es de 500. Si el voltaje de entrada es de $50 \text{ sen}(\omega t + 10°)$, encuentre la expresión senoidal para la corriente de entrada.

34. En la figura 14.75, $e = 30 \text{ sen}(377t + 20°)$.

a. ¿Cuál es la expresión senoidal para la corriente?
b. Encuentre la pérdida de potencia en el circuito.
c. ¿Cuánto tiempo (en segundos) le toma a la corriente completar seis ciclos?

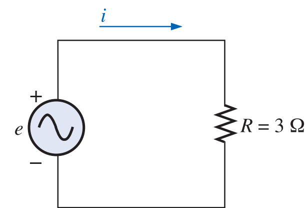


FIGURA 14.75
Problema 34.

35. En la figura 14.76 $e = 100 \text{ sen}(157t + 30°)$.

a. Encuentre la expresión senoidal para i.
b. Encuentre el valor de la inductancia L.
c. Encuentre la pérdida de potencia promedio por el inductor.

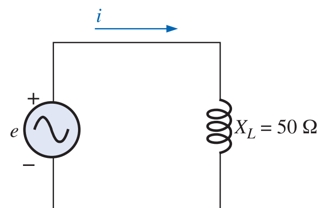


FIGURA 14.76
Problema 35.

36. En la figura 14.77, $i = 3 \text{ sen}(377t - 20°)$.

a. Encuentre la expresión senoidal para e.
b. Encuentre el valor de la capacitancia C en microfarads.
c. Encuentre la pérdida de potencia promedio en el capacitor.

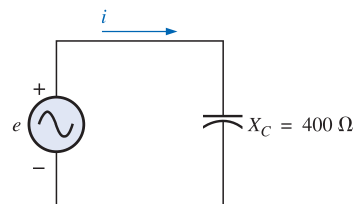


FIGURA 14.77
Problema 36.



***37.** Para la red de la figura 14.78 y la señal aplicada:
a. Determine i_1 e i_2.
b. Encuentre i_s.

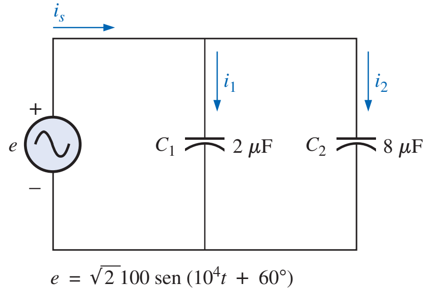


FIGURA 14.78
Problema 37.

***38.** Para la red de la figura 14.79 y la fuente aplicada:
a. Determine el voltaje de fuente v_s.
b. Encuentre las corrientes i_1 e i_2.

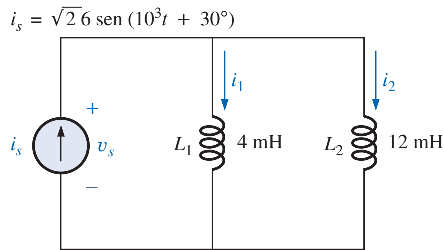


FIGURA 14.79
Problema 38.

SECCIÓN 14.9 Conversión entre formas

39. Convierta lo siguiente de la forma rectangular a la polar:
a. $4 + j3$ **b.** $2 + j2$
c. $3.5 + j16$ **d.** $100 + j800$
e. $1000 + j400$ **f.** $0.001 + j0.0065$
g. $7.6 - j9$ **h.** $-8 + j4$
i. $-15 - j60$ **j.** $+78 - j65$
k. $-2400 + j3600$
l. $5 \times 10^{-3} - j25 \times 10^{-3}$

40. Convierta lo siguiente de la forma polar a la rectangular:
a. $6 \angle 30°$ **b.** $40 \angle 80°$
c. $7400 \angle 70°$ **d.** $4 \times 10^{-4} \angle 8°$
e. $0.04 \angle 80°$ **f.** $0.0093 \angle 23°$
g. $65 \angle 150°$ **h.** $1.2 \angle 135°$
i. $500 \angle 200°$ **j.** $6320 \angle -35°$
k. $7.52 \angle -125°$ **l.** $0.008 \angle 310°$

41. Convierta lo siguiente de la forma rectangular a la polar:
a. $1 + j15$ **b.** $60 + j5$
c. $0.01 + j0.3$ **d.** $100 - j2000$
e. $-5.6 + j86$ **f.** $-2.7 - j38.6$

42. Convierta lo siguiente de la forma polar a la rectangular:
a. $13 \angle 5°$ **b.** $160 \angle 87°$
c. $7 \times 10^{-6} \angle 2°$ **d.** $8.7 \angle 177°$
e. $76 \angle -4°$ **f.** $396 \angle +265°$

SECCIÓN 14.10 Operaciones matemáticas con números complejos

Realice las siguientes operaciones.

43. Suma y resta (exprese sus respuestas en forma rectangular):
a. $(4.2 + j6.8) + (7.6 + j0.2)$
b. $(142 + j7) + (9.8 + j42) + (0.1 + j0.9)$
c. $(4 \times 10^{-6} + j76) + (7.2 \times 10^{-7} - j5)$
d. $(9.8 + j6.2) - (4.6 + j4.6)$
e. $(167 + j243) - (-42.3 - j68)$
f. $(-36.0 + j78) - (-4 - j6) + (10.8 - j72)$
g. $6 \angle 20° + 8 \angle 80°$
h. $42 \angle 45° + 62 \angle 60° - 70 \angle 120°$

44. Multiplicación [exprese sus respuestas en forma rectangular para los incisos del (a) al (d), y en forma polar para los del (e) al (h)]:
a. $(2 + j3)(6 + j8)$
b. $(7.8 + j1)(4 + j2)(7 + j6)$
c. $(0.002 + j0.006)(-2 + j2)$
d. $(400 - j200)(-0.01 - j0.5)(-1 + j3)$
e. $(2 \angle 60°)(4 \angle 22°)$
f. $(6.9 \angle 8°)(7.2 \angle -72°)$
g. $0.002 \angle 120°)(0.5 \angle 200°)(40 \angle -60°)$
h. $(540 \angle -20°)(-5 \angle 180°)(6.2 \angle 0°)$

45. División (exprese sus respuestas en forma polar):
a. $(42 \angle 10°)/(7 \angle 60°)$
b. $(0.006 \angle 120°)/(30 \angle -20°)$
c. $(4360 \angle -20°)/(40 \angle 210°)$
d. $(650 \angle -80°)/(8.5 \angle 360°)$
e. $(8 + j8)/(2 + j2)$
f. $(8 + j42)/(-6 + j60)$
g. $(0.05 + j0.25)/(8 - j60)$
h. $(-4.5 - j6)/(0.1 - j0.4)$

***46.** Realice las siguientes operaciones (exprese sus respuestas en forma rectangular):

a. $\dfrac{(4 + j3) + (6 - j8)}{(3 + j3) - (2 + j3)}$

b. $\dfrac{8 \angle 60°}{(2 \angle 0°) + (100 + j100)}$

c. $\dfrac{(6 \angle 20°)(120 \angle -40°)(3 + j4)}{2 \angle -30°}$

d. $\dfrac{(0.4 \angle 60°)^2(300 \angle 40°)}{3 + j9}$

e. $\left(\dfrac{1}{(0.02 \angle 10°)^2}\right)\left(\dfrac{2}{j}\right)^3\left(\dfrac{1}{6^2 - j\sqrt{900}}\right)$

***47.** **a.** Determine una solución para x e y si:

$$(x + j4) + (3x + jy) - j7 = 16 \angle 0°$$

b. Determine x si:

$$(10 \angle 20°)(x \angle -60°) = 30.64 - j25.72$$

c. Determine una solución para x e y si:

$$(5x + j10)(2 - jy) = 90 - j70$$

d. Determine θ si:

$$\frac{80 \angle 0°}{20 \angle \theta} = 3.464 - j2$$

SECCIÓN 14.12 Fasores

48. Exprese lo siguiente en forma de fasor:
a. $\sqrt{2}(100)$ sen$(\omega t + 30°)$
b. $\sqrt{2}(0.25)$ sen$(157t - 40°)$
c. 100 sen$(\omega t - 90°)$
d. 42 sen$(377t + 0°)$
e. $6 \times 10^{-6} \cos \omega t$
f. $3.6 \times 10^{-6} \cos(754t - 20°)$

49. Exprese los siguientes voltajes y corrientes fasoriales como ondas senoidales si la frecuencia es de 60 Hz.
a. $\mathbf{I} = 40\text{ A} \angle 20°$ **b.** $\mathbf{V} = 120\text{ V} \angle 0°$
c. $\mathbf{I} = 8 \times 10^{-3}\text{ A} \angle 120°$ **d.** $\mathbf{V} = 5\text{ V} \angle 90°$
e. $\mathbf{I} = 1200\text{ A} \angle -120°$ **f.** $\mathbf{V} = \frac{6000}{\sqrt{2}}\text{ V} \angle -180°$

50. Para el sistema de la figura 14.80, encuentre la expresión senoidal para el voltaje desconocido v_a si:

$$e_{\text{entrada}} = 60 \text{ sen}(377t + 20°)$$
$$v_b = 20 \text{ sen } 377t$$

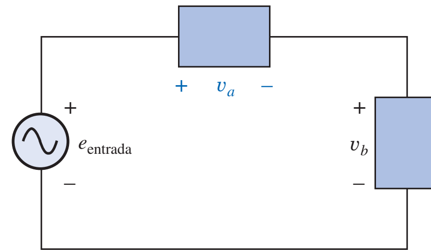


FIGURA 14.80
Problema 50.

51. Para el sistema de la figura 14.81, encuentre la expresión senoidal para la corriente desconocida i_1 si:

$$i_s = 20 \times 10^{-6} \text{ sen}(\omega t + 90°)$$
$$i_2 = 6 \times 10^{-6} \text{ sen}(\omega t - 60°)$$

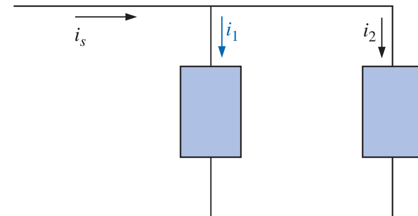


FIGURA 14.81
Problema 51.

52. Encuentre la expresión senoidal para el voltaje aplicado e para el sistema de la figura 14.82 si:

$$v_a = 60 \text{ sen}(\omega t + 30°)$$
$$v_b = 30 \text{ sen}(\omega t - 30°)$$
$$v_c = 40 \text{ sen}(\omega t + 120°)$$

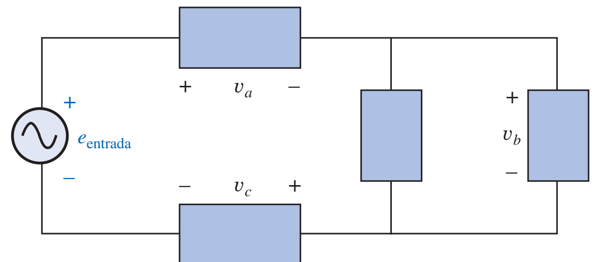


FIGURA 14.82
Problema 52.



53. Encuentre la expresión senoidal para la corriente i_s para el sistema de la figura 14.83 si:

$$i_1 = 6 \times 10^{-3} \text{ sen}(377t + 180°)$$
$$i_2 = 8 \times 10^{-3} \text{ sen } 377t$$
$$i_3 = 2i_2$$

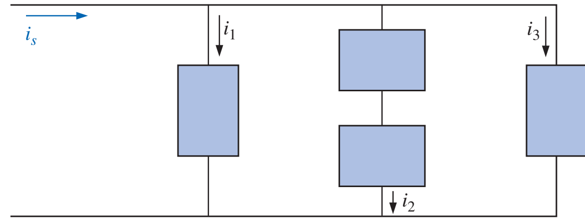


FIGURA 14.83
Problema 53.

SECCIÓN 14.13 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

54. Grafique i_C y v_C en función del tiempo para la red de la figura 14.69 para dos ciclos si la frecuencia es de 0.2 kHz.

55. Grafique la magnitud y el ángulo de fase de la corriente i_C en función de la frecuencia (100 Hz a 100 kHz) para la red de la figura 14.69.

56. Grafique la impedancia total de la configuración de la figura 14.26 en función de la frecuencia (100 kHz a 100 MHz) para los siguientes valores de parámetro: $C = 0.1\ \mu$F, $L_s = 0.2\ \mu$H, $R_s = 2$ MΩ, y $R_p = 100$ MΩ. ¿Para qué intervalo de frecuencia el capacitor es “capacitivo”?

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

57. Dada una función senoidal, escriba un programa para desplegar la derivada.

58. Dada la expresión senoidal para la corriente, determine la expresión para el voltaje en un resistor, un capacitor o un inductor, dependiendo del elemento involucrado. En otras palabras, el programa preguntará cuál elemento será investigado y luego solicitará la información pertinente para obtener la expresión matemática para el voltaje senoidal.

59. Escriba un programa para tabular la reactancia en función de la frecuencia para un inductor o un capacitor en un intervalo de frecuencia especificado.

60. Dada la expresión senoidal para el voltaje y la corriente de una carga, escriba un programa para determinar la potencia promedio y el factor de potencia.

61. Dadas dos funciones senoidales, escriba un programa para convertir cada función al dominio de fasor, sumarlas e imprimir la suma en los dominios del fasor y del tiempo.

GLOSARIO

Complejo conjugado Número complejo definido por el simple cambio de signo del componente imaginario de un número complejo en la forma rectangular.

Derivada Razón de cambio instantánea de una función con respecto al tiempo u otra variable.

Diagrama fasorial “Foto instantánea” de los fasores que representa un número de formas de onda senoidales en $t = 0$.

Factor de potencia (F_P) Indicador de qué tan reactivo o resistivo es un sistema eléctrico. Mientras mayor sea el factor de potencia, mayor será el componente resistivo.

Factores de potencia adelantado y atrasado Indicación de si una red es principalmente de naturaleza capacitiva o inductiva. Los factores de potencia adelantados están asociados con redes capacitivas, y los factores de potencia atrasados con redes inductivas.

Fasor Vector radial que tiene magnitud constante en un ángulo fijo desde el eje real positivo y representa un voltaje o corriente senoidal en el dominio de vector.

Forma polar Método para definir un punto en un plano complejo que incluye una sola magnitud para representar la distancia desde el origen, y un ángulo para reflejar la distancia en sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje real positivo.

Forma rectangular Método para definir un punto en un plano complejo que incluye la magnitud del componente real y la magnitud del componente imaginario, estando definido este último componente por una letra j asociada.

Número complejo Número que representa un punto en un plano bidimensional localizado con referencia a dos ejes distintos. Define un vector trazado desde el origen hasta ese punto.

Potencia promedio o **real** Potencia entregada a, y disipada por, la carga durante un ciclo completo.

Reactancia Oposición de un inductor o un capacitor al flujo de carga que se genera en el intercambio constante de energía entre el circuito y el campo magnético de un inductor o el campo eléctrico de un capacitor.

Recíproco Formato definido por 1 dividido entre el número complejo.

15

ca

Circuitos de ca en serie y en paralelo

15.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se utilizará el álgebra fasorial con el propósito de desarrollar un método rápido y directo para resolver circuitos de ca tanto en serie como en paralelo. La cercana relación que existe entre este método para resolver las incógnitas y el enfoque utilizado para circuitos de cd se hará evidente después de considerar unos cuantos ejemplos sencillos. Una vez que se establezca esta asociación, muchas de las reglas (regla del divisor de corriente, regla del divisor de voltaje, etc.) para circuitos de cd podrán aplicarse fácilmente a los circuitos de ca.

CIRCUITOS DE ca EN SERIE

15.2 IMPEDANCIA Y DIAGRAMA FASORIAL

Elementos resistivos

En el capítulo 14 vimos que para el circuito puramente resistivo de la figura 15.1, v e i se encuentran en fase, y que la magnitud:

$$I_m = \frac{V_m}{R} \quad \text{o} \quad V_m = I_m R$$

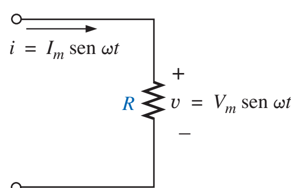


FIGURA 15.1
Circuito resistivo de ca.

En forma fasorial,

$$v = V_m \text{ sen } \omega t \Rightarrow \mathbf{V} = V \angle 0°$$

donde $V = 0.707V_m$.

Al aplicar la ley de Ohm y utilizar el álgebra fasorial tenemos:

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0°}{R \angle \theta_R} = \frac{V}{R} \underline{/0° - \theta_R}$$

Dado que i y v están en fase, el ángulo asociado con i también deberá ser de 0°. Para satisfacer esta condición, θ_R debe ser igual a 0°. Al sustituir $\theta_R = 0°$, observamos:

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0°}{R \angle 0°} = \frac{V}{R} \underline{/0° - 0°} = \frac{V}{R} \angle 0°$$

por lo que en el dominio del tiempo,

$$i = \sqrt{2}\left(\frac{V}{R}\right) \text{ sen } \omega t$$

El hecho de que $\theta_R = 0°$ se empleará en el siguiente formato de coordenadas polares para asegurar la adecuada relación de fase entre el voltaje y la corriente de un resistor:

$$\boxed{\mathbf{Z}_R = R \angle 0°} \qquad \textbf{(15.1)}$$

La cantidad romana en negrita $\mathbf{Z}_R$, que tiene tanto magnitud como un ángulo asociado, se denomina *impedancia* de un elemento resistivo. Se mide en ohms y es una medida de cuánto “impedirá” el elemento el flujo de carga a través de la red. El formato anterior probará ser una “herramienta” útil cuando las redes se vuelvan más complejas y las relaciones de fase menos obvias. Sin embargo, es importante observar que $\mathbf{Z}_R$ *no* es *un fasor*, aun cuando el formato $R\angle 0°$ es muy similar a la notación fasorial para corrientes y voltajes senoidales. El término *fasor* está reservado para cantidades que varían con el tiempo, y R y su ángulo asociado de 0° son cantidades fijas que no varían.

EJEMPLO 15.1 Utilizando álgebra compleja, encuentre la corriente i para el circuito de la figura 15.2. Trace las formas de onda de v e i.

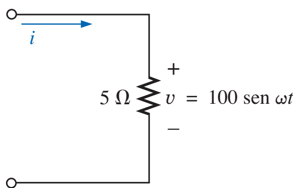


FIGURA 15.2
Ejemplo 15.1.

Solución: Vea la figura 15.3:

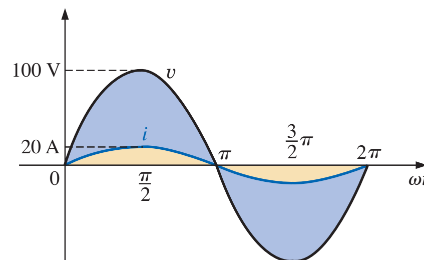


FIGURA 15.3
Formas de onda para el ejemplo 15.1.

$$v = 100 \text{ sen } \omega t \Rightarrow \text{forma fasorial } \mathbf{V} = 70.71 \text{ V } \angle 0°$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_R} = \frac{V \angle \theta}{R \angle 0°} = \frac{70.71 \text{ V } \angle 0°}{5\ \Omega \angle 0°} = 14.14 \text{ A } \angle 0°$$

e $$i = \sqrt{2}(14.14) \text{ sen } \omega t = \mathbf{20\ sen\ \omega t}$$

EJEMPLO 15.2 Utilizando álgebra compleja, encuentre el voltaje v para el circuito de la figura 15.4. Trace las formas de onda de v e i.

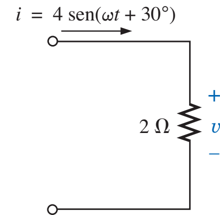


FIGURA 15.4
Ejemplo 15.2.

Solución: Vea la figura 15.5:

$$i = 4 \text{ sen}(\omega t + 30°) \Rightarrow \text{forma fasorial } \mathbf{I} = 2.828 \text{ A } \angle 30°$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_R = (I \angle \theta)(R \angle 0°) = (2.828 \text{ A } \angle 30°)(2\ \Omega \angle 0°)$$
$$= 5.656 \text{ V } \angle 30°$$

y $$v = \sqrt{2}(5.656) \text{ sen}(\omega t + 30°) = \mathbf{8.0\ sen(\omega t + 30°)}$$

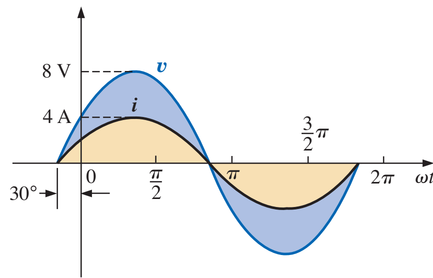


FIGURA 15.5
Formas de onda para el ejemplo 15.2.

En el análisis de redes con frecuencia resulta útil tener un **diagrama fasorial**, el cual muestra de un vistazo las *magnitudes* y *relaciones de fase* entre las distintas cantidades dentro de la red. Por ejemplo, los diagramas fasoriales de los circuitos considerados en los dos ejemplos anteriores serían como los mostrados en la figura 15.6. En ambos casos, resulta obvio de inmediato que v e i están en fase dado que los dos tienen el mismo ángulo de fase.

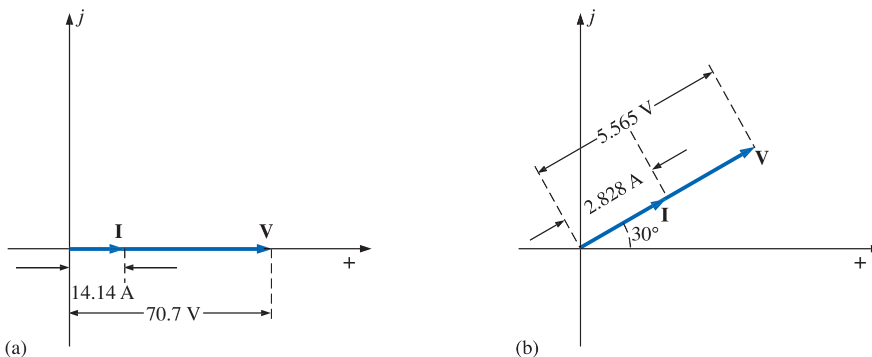


FIGURA 15.6
Diagramas fasoriales para los ejemplos 15.1 y 15.2.

Reactancia inductiva

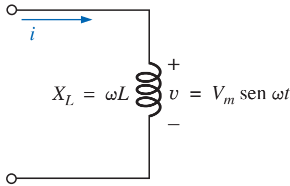


FIGURA 15.7
Circuito inductivo de ca.

En el capítulo 13 aprendimos que para el inductor puro de la figura 15.7, el voltaje adelanta a la corriente por 90°, y que la reactancia de la bobina X_L está determinada por ωL.

$$v = V_m \text{ sen } \omega t \Rightarrow \text{forma fasorial } \mathbf{V} = V \angle 0°$$

Mediante la ley de Ohm,

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0°}{X_L \angle \theta_L} = \frac{V}{X_L} \underline{/0° - \theta_L}$$

Dado que v adelanta a i por 90°, i debe tener un ángulo asociado de $-90°$. Para satisfacer esta condición, θ_L deberá ser igual a $+90°$. Al sustituir $\theta_L = 90°$, obtenemos:

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0°}{X_L \angle 90°} = \frac{V}{X_L} \underline{/0° - 90°} = \frac{V}{X_L} \angle -90°$$

por lo que, en el dominio del tiempo,

$$i = \sqrt{2}\left(\frac{V}{X_L}\right) \text{sen}(\omega t - 90°)$$

El hecho de que $\theta_L = 90°$ se empleará en el siguiente formato de coordenadas polares de reactancia inductiva para asegurar la adecuada relación de fase entre el voltaje y la corriente de un inductor.

$$\boxed{\mathbf{Z}_L = X_L \angle 90°} \qquad \textbf{(15.2)}$$

La cantidad romana en negrita $\mathbf{Z}_L$, que tiene tanto magnitud como un ángulo asociado, se denomina *impedancia* de un elemento inductivo. Se mide en ohms y es una medida de cuánto "controlará o impedirá" el elemento el nivel de corriente a través de la red (tenga siempre presente que los elementos inductivos son dispositivos de almacenamiento y no disipan como los resistores). El formato anterior, igual que el definido para el elemento resistivo, probará ser una "herramienta" útil en el análisis de redes de ca. Nuevamente, observe que $\mathbf{Z}_L$ no es una cantidad fasorial, por las mismas razones que las indicadas para el elemento resistivo.

EJEMPLO 15.3 Utilizando álgebra compleja, encuentre la corriente i para el circuito de la figura 15.8. Trace las curvas de v e i.

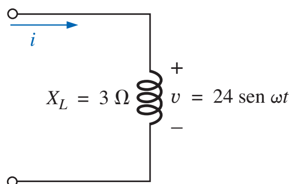


FIGURA 15.8
Ejemplo 15.3.

Solución: Vea la figura 15.9:

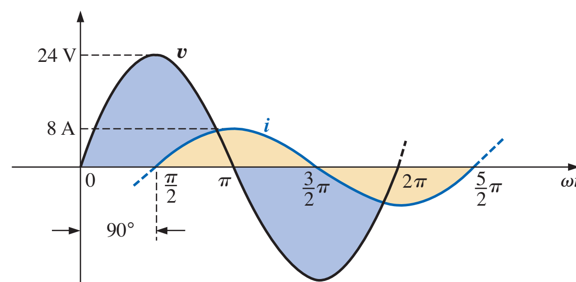


FIGURA 15.9
Formas de onda para el ejemplo 15.3.

$$v = 24 \text{ sen } \omega t \Rightarrow \text{forma fasorial } \mathbf{V} = 16.968 \text{ V} \angle 0°$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_L} = \frac{V \angle \theta}{X_L \angle 90°} = \frac{16.968 \text{ V} \angle 0°}{3\ \Omega \angle 90°} = 5.656 \text{ A} \angle -90°$$

e $$i = \sqrt{2}(5.656) \text{ sen}(\omega t - 90°) = \mathbf{8.0\ sen(\omega t - 90°)}$$

EJEMPLO 15.4 Utilizando álgebra compleja, encuentre el voltaje v para el circuito de la figura 15.10. Trace las curvas de v e i.

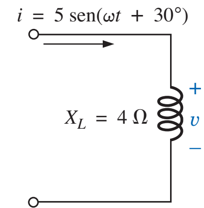


FIGURA 15.10
Ejemplo 15.4.

Solución: Vea la figura 15.11:

$$i = 5 \text{ sen}(\omega t + 30°) \Rightarrow \text{forma fasorial } \mathbf{I} = 3.535 \text{ A} \angle 30°$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_L = (I \angle \theta)(X_L \angle 90°) = (3.535 \text{ A} \angle 30°)(4\ \Omega \angle +90°)$$
$$= 14.140 \text{ V} \angle 120°$$

y $$v = \sqrt{2}(14.140) \text{ sen}(\omega t + 120°) = \mathbf{20\ sen(\omega t + 120°)}$$

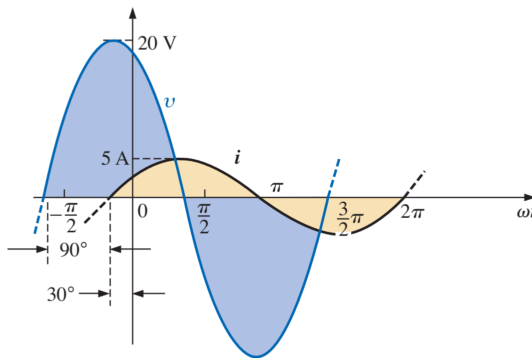


FIGURA 15.11
Formas de onda para el ejemplo 15.4.

Los diagramas fasoriales para los dos circuitos de los dos ejemplos anteriores se muestran en la figura 15.12. Ambos indican muy claramente que el voltaje adelanta a la corriente por 90°.

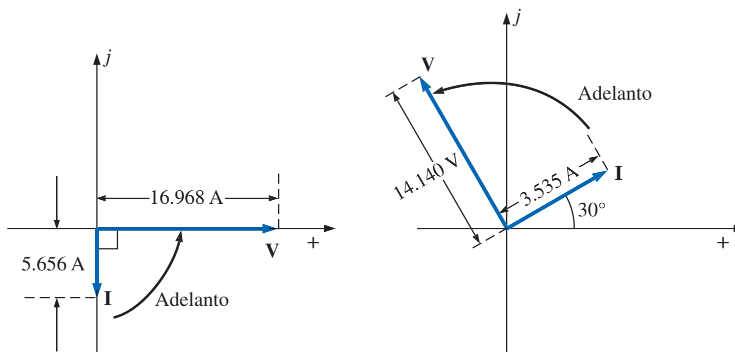


FIGURA 15.12
Diagramas fasoriales para los ejemplos 15.3 y 15.4.

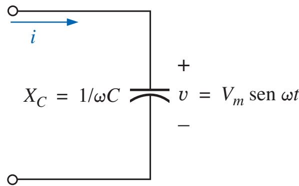


FIGURA 15.13
Circuito capacitivo de ca.

Reactancia capacitiva

En el capítulo 13 también se vio que para el capacitor puro de la figura 15.13, la corriente adelanta al voltaje por 90°, y que la reactancia del capacitor X_C está determinada por $1/\omega C$.

$$v = V_m \text{ sen } \omega t \Rightarrow \text{forma fasorial } \mathbf{V} = V \angle 0^\circ$$

Al aplicar la ley de Ohm y utilizando álgebra fasorial encontramos:

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0^\circ}{X_C \angle \theta_C} = \frac{V}{X_C} \angle 0^\circ - \theta_C$$

Dado que i adelanta a v por 90°, i deberá tener asociado un ángulo de $+90°$ Para satisfacer esta condición, θ_C debe ser igual a $-90°$. Al sustituir $\theta_C = -90°$ resulta:

$$\mathbf{I} = \frac{V \angle 0^\circ}{X_C \angle -90^\circ} = \frac{V}{X_C} \angle 0^\circ - (-90^\circ) = \frac{V}{X_C} \angle 90^\circ$$

por tanto, en el dominio del tiempo,

$$i = \sqrt{2}\left(\frac{V}{X_C}\right) \text{sen}(\omega t + 90^\circ)$$

El hecho de que $\theta_C = -90°$ se empleará en el siguiente formato de coordenadas polares para la reactancia capacitiva con el propósito de asegurar la adecuada relación de fase entre el voltaje y la corriente de un capacitor.

$$\mathbf{Z}_C = X_C \angle -90^\circ \tag{15.3}$$

La cantidad romana en negrita $\mathbf{Z}_C$, que tiene tanto magnitud como un ángulo asociado, se denomina *impedancia* del elemento capacitivo. Se mide en ohms y es una medida de cuánto "controlará o impedirá" el elemento capacitivo el nivel de corriente a través de la red (tenga siempre presente que los elementos capacitivos son dispositivos de almacenamiento y no disipan como los resistores). El formato anterior, igual que el definido para el elemento resistivo, probará ser una "herramienta" muy útil en el análisis de redes de ca. Nuevamente, recuerde que $\mathbf{Z}_C$ no es una cantidad fasorial, por las mismas razones indicadas para un elemento resistivo.

EJEMPLO 15.5 Utilizando álgebra compleja, encuentre la corriente i para el circuito de la figura 15.14. Trace las curvas de v e i.

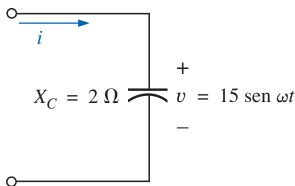


FIGURA 15.14
Ejemplo 15.5.

Solución: Vea la figura 15.15:

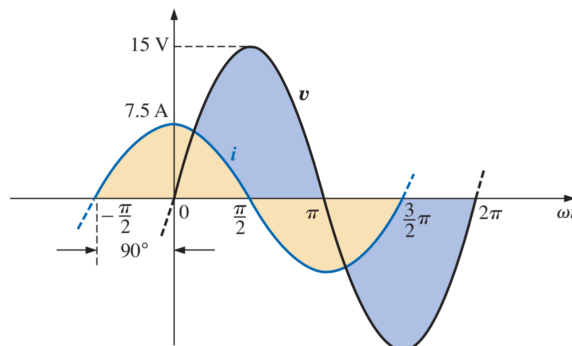


FIGURA 15.15
Formas de onda para el ejemplo 15.5.

$$v = 15 \text{ sen } \omega t \Rightarrow \text{notación fasorial } \mathbf{V} = 10.605 \text{ V} \angle 0°$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_C} = \frac{V \angle \theta}{X_C \angle -90°} = \frac{10.605 \text{ V} \angle 0°}{2\ \Omega \angle -90°} = 5.303 \text{ A} \angle 90°$$

e $$i = \sqrt{2}(5.303) \text{ sen}(\omega t + 90°) = \mathbf{7.5\ sen(\boldsymbol{\omega t} + 90°)}$$

EJEMPLO 15.6 Utilizando álgebra compleja, encuentre el voltaje v para el circuito de la figura 15.16. Trace las curvas de v e i.

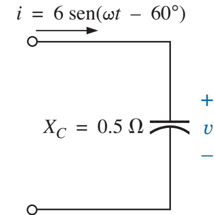


FIGURA 15.16
Ejemplo 15.6.

Solución: Vea la figura 15.17:

$$i = 6 \text{ sen}(\omega t - 60°) \Rightarrow \text{notación fasorial } \mathbf{I} = 4.242 \text{ A} \angle -60°$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_C = (I \angle \theta)(X_C \angle -90°) = (4.242 \text{ A} \angle -60°)(0.5\ \Omega \angle -90°)$$
$$= 2.121 \text{ V} \angle -150°$$

y $$v = \sqrt{2}(2.121) \text{ sen}(\omega t - 150°) = \mathbf{3.0\ sen(\boldsymbol{\omega t} - 150°)}$$

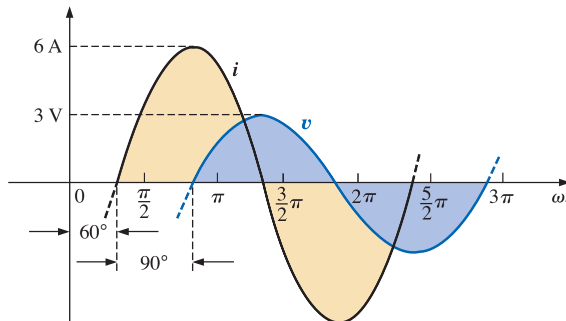


FIGURA 15.17
Formas de onda para el ejemplo 15.6.

Los diagramas fasoriales para los dos circuitos de los dos ejemplos anteriores se muestran en la figura 15.18. Ambos indican muy claramente que la corriente i adelanta al voltaje v por 90°.

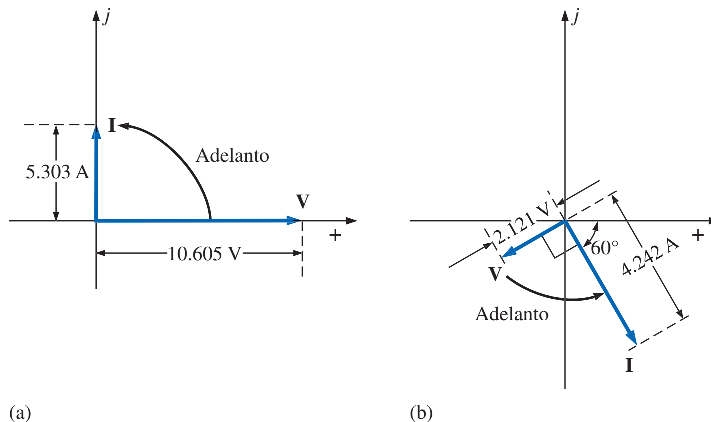


FIGURA 15.18
Diagramas fasoriales para los ejemplos 15.5 y 15.6.

Diagrama de impedancia

Ahora que un ángulo se encuentra asociado con la resistencia, la reactancia inductiva y la reactancia capacitiva, cada uno podrá colocarse sobre un diagrama

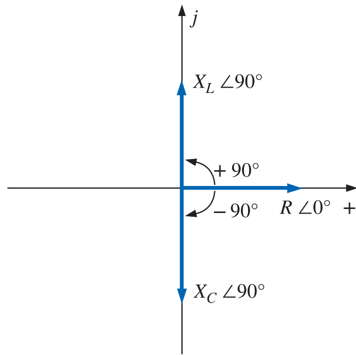


FIGURA 15.19
Diagrama de impedancia.

en el plano complejo, como se muestra en la figura 15.19. Para toda red, la resistencia aparecerá *siempre* sobre el eje real positivo, la reactancia inductiva sobre el eje imaginario positivo, y la reactancia capacitiva sobre el eje imaginario negativo. El resultado será un **diagrama de impedancia** que puede reflejar los niveles de impedancia individuales y totales de una red de ca.

En las secciones y capítulos siguientes veremos que las redes que combinan diferentes tipos de elementos tendrán impedancias totales que van desde −90° hasta +90°. Si la impedancia total tiene un ángulo de 0°, se dice que es de naturaleza resistiva. Si se encuentra más cercana a 90°, será de naturaleza inductiva, y si está cercana a −90°, tendrá naturaleza capacitiva.

Naturalmente, para redes con un solo elemento el ángulo asociado con la impedancia será el mismo que el del elemento resistivo o reactivo, según lo muestran las ecuaciones (15.1) a (15.3). Es importante recordar que la impedancia, como la resistencia y la reactancia, no es una cantidad fasorial que represente a una función que varía en el tiempo con un desplazamiento de fase en particular. Se trata simplemente de una "herramienta" de operación extremadamente útil para determinar la magnitud y el ángulo de cantidades dentro de una red de ca senoidal.

Una vez que la impedancia total de una red está determinada, su magnitud definirá el nivel de corriente resultante (mediante la ley de Ohm), mientras que su ángulo revelará si la red es en su mayoría inductiva o capacitiva, o simplemente resistiva.

Para cualquier configuración (en serie, en paralelo, en serie-paralelo, etc.), el ángulo asociado con la impedancia total es el ángulo por el cual el voltaje aplicado adelanta a la corriente de la fuente. Para redes inductivas θ_T será positivo, mientras que para redes capacitivas θ_T será negativo.

15.3 CONFIGURACIÓN EN SERIE

Las propiedades generales de los circuitos de ca en serie (Figura 15.20) son las mismas que para los circuitos de cd. Por ejemplo, la impedancia total de un sistema es la suma de las impedancias individuales:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_N \qquad \textbf{(15.4)}$$

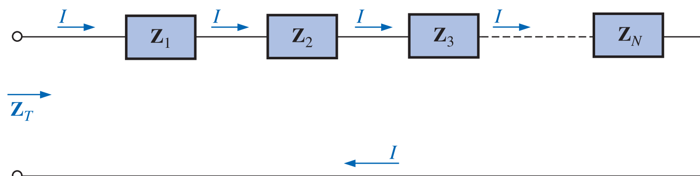


FIGURA 15.20
Impedancias en serie.

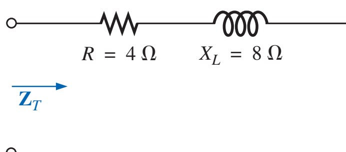


FIGURA 15.21
Ejemplo 15.7.

EJEMPLO 15.7 Trace el diagrama de impedancia para el circuito de la figura 15.21, y encuentre la impedancia total.

Solución: Como indica la figura 15.22, la impedancia de entrada puede encontrarse de forma gráfica a partir del diagrama de impedancia mediante la

escala adecuada de los ejes real e imaginario, y encontrando la longitud del vector resultante $\mathbf{Z}_T$ y el ángulo θ_T. O, mediante álgebra de vectores, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_T &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2\\ &= R \angle 0° + X_L \angle 90°\\ &= R + jX_L = 4\ \Omega + j8\ \Omega\\ \mathbf{Z}_T &= \mathbf{8.944\ \Omega \angle 63.43°}\end{aligned}$$

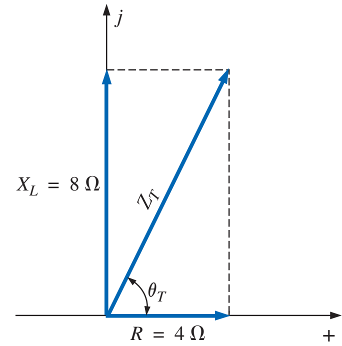


FIGURA 15.22
Diagrama de impedancia para el ejemplo 15.7.

EJEMPLO 15.8 Determine la impedancia de entrada para la red en serie de la figura 15.23. Trace el diagrama de impedancia.

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_T &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3\\ &= R \angle 0° + X_L \angle 90° + X_C \angle -90°\\ &= R + jX_L - jX_C\\ &= R + j(X_L - X_C) = 6\ \Omega + j(10\ \Omega - 12\ \Omega) = 6\ \Omega - j2\ \Omega\\ \mathbf{Z}_T &= \mathbf{6.325\ \Omega \angle -18.43°}\end{aligned}$$

El diagrama de impedancia aparece en la figura 15.24. Observe que en este ejemplo, las reactancias inductivas y capacitivas en serie están en oposición directa. Para el circuito de la figura 15.23, si la reactancia inductiva fuera igual a la reactancia capacitiva, la impedancia de entrada sería puramente resistiva. En un capítulo posterior ampliaremos el tratamiento de esta condición particular.

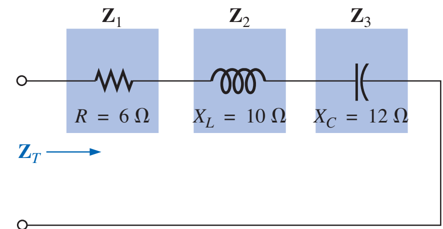


FIGURA 15.23
Ejemplo 15.8

Para la **configuración un circuito de ca en serie** representativa, que aparece en la figura 15.25 y tiene dos impedancias, *la corriente es la misma a través de cada elemento* (como lo fue en el caso de los circuitos de cd en serie) y está determinada por la ley de Ohm:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$$

e

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} \qquad \textbf{(15.5)}$$

El voltaje en cada elemento se puede encontrar mediante otra aplicación de la ley de Ohm:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{IZ}_1 \qquad \textbf{(15.6a)}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{IZ}_2 \qquad \textbf{(15.6b)}$$

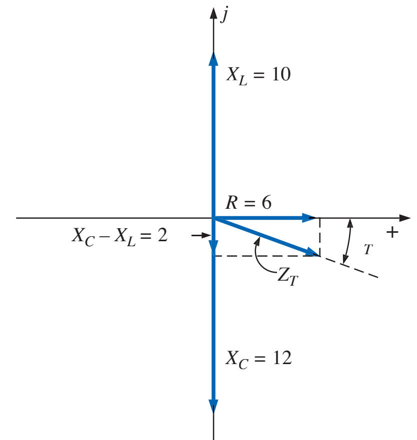


FIGURA 15.24
Diagrama de impedancia para el ejemplo 15.8.

La ley de voltaje de Kirchhoff puede aplicarse entonces en la misma forma que se utilizó para circuitos de cd. Sin embargo, tenga presente que ahora estamos tratando con la manipulación algebraica de cantidades que tienen tanto magnitud como dirección.

$$\mathbf{E} - \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0$$

o bien:

$$\mathbf{E} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \qquad \textbf{(15.7)}$$

La potencia al circuito se puede determinar mediante:

$$P = EI \cos \theta_T \qquad \textbf{(15.8)}$$

donde θ_T es el ángulo de fase entre **E** e **I**.

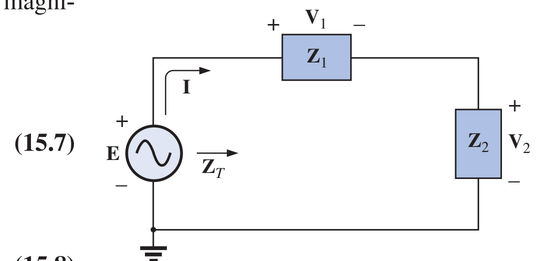


FIGURA 15.25
Circuito de ca en serie.

Ahora que se ha presentado el método general, se analizará con todo detalle la más simple de las configuraciones para enfatizar las similitudes con el análisis de circuitos de cd. En muchos de los circuitos que serán considerados, a menudo se utilizarán $3 + j4 = 5 \angle 53.13°$ y $4 + j3 = 5 \angle 36.87°$ para asegurar que el enfoque es lo más claro posible y que no se pierda en complejidades matemáticas. Naturalmente, los problemas con valores aleatorios planteados al final del capítulo proporcionarán mucha experiencia.

R-L

Vea la figura 15.26.

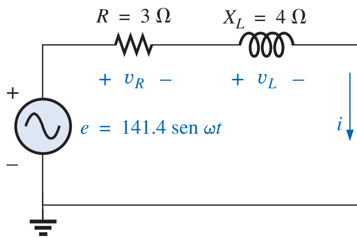


FIGURA 15.26
Circuito R-L en serie.

Notación fasorial

$$e = 141.4 \text{ sen } \omega t \Rightarrow \mathbf{E} = 100 \text{ V} \angle 0°$$

Vea la figura 15.27.

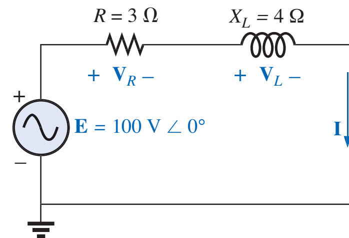


FIGURA 15.27
Aplicación de la notación fasorial a la red de la figura 15.26.

$\mathbf{Z}_T$

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 3\ \Omega \angle 0° + 4\ \Omega \angle 90° = 3\ \Omega + j4\ \Omega$$

y
$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{5\ \Omega \angle 53.13°}$$

Diagrama de impedancia: Vea la figura 15.28.

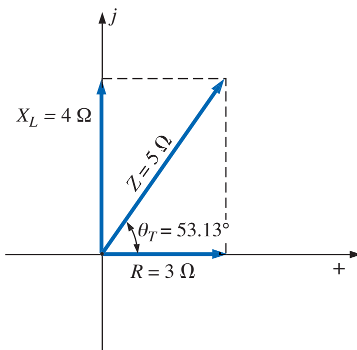


FIGURA 15.28
Diagrama de impedancia para el circuito R-L en serie de la figura 15.26.

I

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{100 \text{ V} \angle 0°}{5\ \Omega \angle 53.13°} = \mathbf{20\ A \angle -53.13°}$$

$\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_L$

Ley de Ohm:

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}\mathbf{Z}_R = (20 \text{ A} \angle -53.13°)(3\ \Omega \angle 0°) = \mathbf{60\ V \angle -53.13°}$$

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}\mathbf{Z}_L = (20 \text{ A} \angle -53.13°)(4\ \Omega \angle 90°) = \mathbf{80\ V \angle 36.87°}$$

Ley de voltaje de Kirchhoff:

$$\Sigma_{\circlearrowright} \mathbf{V} = \mathbf{E} - \mathbf{V}_R - \mathbf{V}_L = 0$$

o bien:
$$\mathbf{E} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L$$

En forma rectangular,

$$\mathbf{V}_R = 60 \text{ V} \angle -53.13° = 36 \text{ V} - j\,48 \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_L = 80 \text{ V} \angle +36.87° = 64 \text{ V} + j\,48 \text{ V}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = (36 \text{ V} - j\,48 \text{ V}) + (64 \text{ V} + j\,48 \text{ V}) = 100 \text{ V} + j\,0 \\ &= 100 \text{ V} \angle 0°\end{aligned}$$

como fue aplicado.

Diagrama fasorial: Observe que para el diagrama fasorial de la figura 15.29, **I** está en fase con el voltaje en el resistor y se encuentra atrasada con respecto al voltaje en el inductor por 90°.

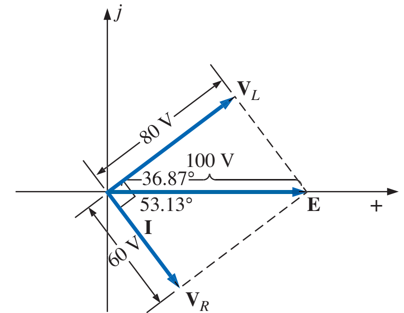


FIGURA 15.29
Diagrama fasorial para el circuito R-L en serie de la figura 15.26.

Potencia: La potencia total en watts entregada al circuito es:

$$\begin{aligned}P_T &= EI \cos \theta_T \\ &= (100 \text{ V})(20 \text{ A}) \cos 53.13° = (2000 \text{ W})(0.6) \\ &= \mathbf{1200\ W}\end{aligned}$$

donde E e I son valores efectivos y θ_T es el ángulo de fase entre E e I, o:

$$\begin{aligned}P_T &= I^2R \\ &= (20 \text{ A})^2(3\ \Omega) = (400)(3) \\ &= \mathbf{1200\ W}\end{aligned}$$

donde I es el valor efectivo, o, por último,

$$\begin{aligned}P_T = P_R + P_L &= V_R I \cos \theta_R + V_L I \cos \theta_L \\ &= (60 \text{ V})(20 \text{ A}) \cos 0° + (80 \text{ V})(20 \text{ A}) \cos 90° \\ &= 1200 \text{ W} + 0 \\ &= \mathbf{1200\ W}\end{aligned}$$

donde θ_R es el ángulo de fase entre $\mathbf{V}_R$ e **I**, y θ_L es el ángulo de fase entre $\mathbf{V}_L$ e **I**.

Factor de potencia: El factor de potencia F_p del circuito es cos 53.13° = **0.6 atrasado**, donde 53.13° es el ángulo de fase entre **E** e **I**.

Si escribimos la ecuación de potencia básica $P = EI \cos \theta$ de la siguiente forma:

$$\cos \theta = \frac{P}{EI}$$

donde E e I son las cantidades de entrada y P es la potencia entregada a la red, y luego realizamos las siguientes sustituciones a partir del circuito básico de ca en serie:

$$\cos \theta = \frac{P}{EI} = \frac{I^2R}{EI} = \frac{IR}{E} = \frac{R}{E/I} = \frac{R}{Z_T}$$

encontramos:

$$F_p = \cos \theta_T = \frac{R}{Z_T} \qquad \textbf{(15.9)}$$

Una consulta a la figura 15.28 indica también que θ es el ángulo de impedancia θ_T de la ecuación (15.9), apoyando más el hecho de que el ángulo de impedancia θ_T es también el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente de entrada para un circuito de ca en serie. Para determinar el factor de potencia,

únicamente es necesario formar la razón de la resistencia total a la magnitud de la impedancia de entrada. Para el presente caso,

$$F_p = \cos\theta = \frac{R}{Z_T} = \frac{3\ \Omega}{5\ \Omega} = \mathbf{0.6\ atrasado}$$

como se encontró antes.

R-C

Vea la figura 15.30.

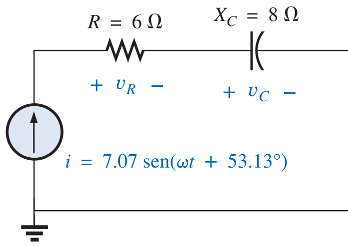


FIGURA 15.30
Circuito de ca R-C en serie.

Notación fasorial

$$i = 7.07\ \text{sen}(\omega t + 53.13°) \Rightarrow \mathbf{I} = 5\ \text{A}\ \angle 53.13°$$

Vea la figura 15.31.

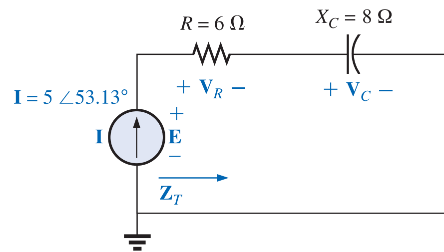


FIGURA 15.31
Aplicación de la notación fasorial al circuito de la figura 15.30.

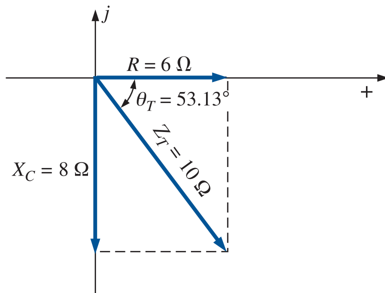


FIGURA 15.32
Diagrama de impedancia para el circuito R-C en serie de la figura 15.30.

$\mathbf{Z}_T$

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 6\ \Omega\ \angle 0° + 8\ \Omega\ \angle -90° = 6\ \Omega - j8\ \Omega$$

y
$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{10\ \Omega\ \angle -53.13°}$$

Diagrama de impedancia: Como se muestra en la figura 15.32.

E

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_T = (5\ \text{A}\ \angle 53.13°)(10\ \Omega\ \angle -53.13°) = \mathbf{50\ V\ \angle 0°}$$

$\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_C$

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}\mathbf{Z}_R = (I\ \angle\theta)(R\ \angle 0°) = (5\ \text{A}\ \angle 53.13°)(6\ \Omega\ \angle 0°)$$
$$= \mathbf{30\ V\ \angle 53.13°}$$

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{I}\mathbf{Z}_C = (I\ \angle\theta)(X_C\ \angle -90°) = (5\ \text{A}\ \angle 53.13°)(8\ \Omega\ \angle -90°)$$
$$= \mathbf{40\ V\ \angle -36.87°}$$

Ley de voltaje de Kirchhoff:

$$\Sigma_{\circlearrowright} \mathbf{V} = \mathbf{E} - \mathbf{V}_R - \mathbf{V}_C = 0$$

o bien:
$$\mathbf{E} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_C$$

lo cual puede verificarse mediante álgebra vectorial como se demostró para el circuito *R-L*.

Diagrama fasorial: Observe en el diagrama fasorial de la figura 15.33 que la corriente **I** está en fase con el voltaje en el resistor y adelanta al voltaje en el capacitor por 90°.

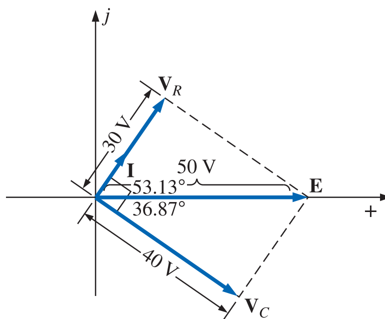


FIGURA 15.33
Diagrama fasorial para el circuito R-C en serie de la figura 15.30.

Dominio del tiempo: En el dominio del tiempo,

$$e = \sqrt{2}(50) \text{ sen } \omega t = \mathbf{70.70 \text{ sen } \omega t}$$
$$v_R = \sqrt{2}(30) \text{ sen}(\omega t + 53.13°) = \mathbf{42.42 \text{ sen}(\omega t + 53.13°)}$$
$$v_C = \sqrt{2}(40) \text{ sen}(\omega t - 36.87°) = \mathbf{56.56 \text{ sen}(\omega t - 36.87°)}$$

En la figura 15.34 aparece una gráfica de todos los voltajes y la corriente presentes en el circuito. Observe nuevamente que i y v_R están en fase y que v_C se encuentra atrasado con respecto a i por 90°.

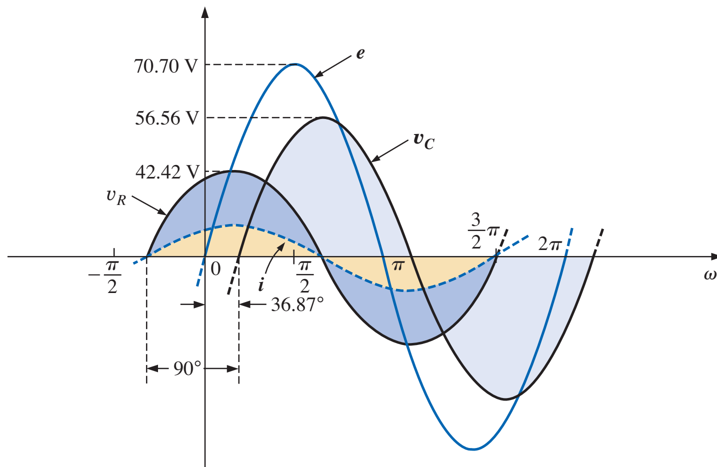


FIGURA 15.34
Formas de onda para el circuito R-C en serie de la figura 15.30.

Potencia: La potencia total en watts entregada al circuito es:

$$P_T = EI \cos \theta_T = (50 \text{ V})(5 \text{ A}) \cos 53.13°$$
$$= (250)(0.6) = \mathbf{150 \text{ W}}$$

o bien:
$$P_T = I^2R = (5 \text{ A})^2(6 \ \Omega) = (25)(6)$$
$$= \mathbf{150 \text{ W}}$$

o, por último,

$$P_T = P_R + P_C = V_RI \cos \theta_R + V_CI \cos \theta_C$$
$$= (30 \text{ V})(5 \text{ A}) \cos 0° + (40 \text{ V})(5 \text{ A}) \cos 90°$$
$$= 150 \text{ W} + 0$$
$$= \mathbf{150 \text{ W}}$$

Factor de potencia: El factor de potencia del circuito es:

$$F_p = \cos \theta = \cos 53.13° = \mathbf{0.6 \text{ adelantado}}$$

Utilizando la ecuación (15.9) obtenemos:

$$F_p = \cos \theta = \frac{R}{Z_T} = \frac{6 \ \Omega}{10 \ \Omega}$$
$$= \mathbf{0.6 \text{ adelantado}}$$

como se determinó antes.

R-L-C

Vea la figura15.35.

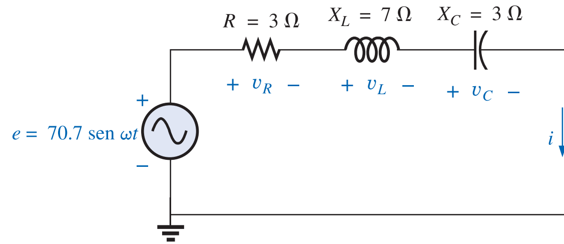


FIGURA 15.35
Circuito de ca R-L-C en serie.

Notación fasorial Como se muestra en la figura 15.36.

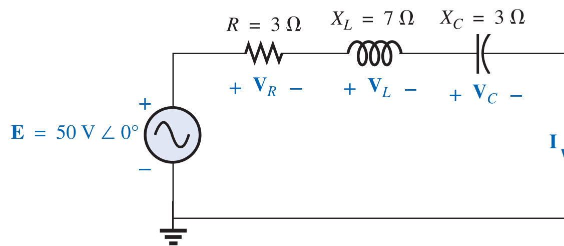


FIGURA 15.36
Aplicación de la notación fasorial al circuito de la figura 15.35.

$\mathbf{Z}_T$

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = R \angle 0° + X_L \angle 90° + X_C \angle -90°$$
$$= 3\ \Omega + j\,7\ \Omega - j\,3\ \Omega = 3\ \Omega + j\,4\ \Omega$$

y
$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{5\ \Omega \angle 53.13°}$$

Diagrama de impedancia: Como se muestra en la figura 15.37.

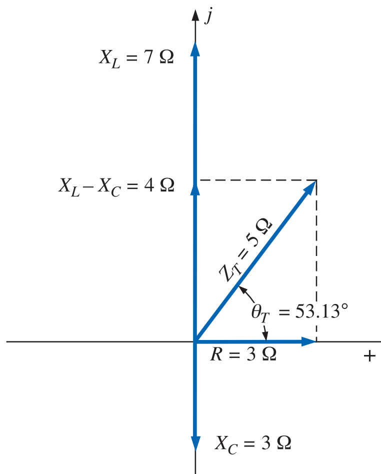


FIGURA 15.37
Diagrama de impedancia para el circuito R-L-C en serie de la figura 15.35.

I

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{50\ \text{V} \angle 0°}{5\ \Omega \angle 53.13°} = \mathbf{10\ A \angle -53.13°}$$

$\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_C$

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}\mathbf{Z}_R = (I \angle \theta)(R \angle 0°) = (10\ \text{A} \angle -53.13°)(3\ \Omega \angle 0°)$$
$$= \mathbf{30\ V \angle -53.13°}$$

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}\mathbf{Z}_L = (I \angle \theta)(X_L \angle 90°) = (10\ \text{A} \angle -53.13°)(7\ \Omega \angle 90°)$$
$$= \mathbf{70\ V \angle 36.87°}$$

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{I}\mathbf{Z}_C = (I \angle \theta)(X_C \angle -90°) = (10\ \text{A} \angle -53.13°)(3\ \Omega \angle -90°)$$
$$= \mathbf{30\ V \angle -143.13°}$$

Ley de voltaje de Kirchhoff:

$$\Sigma_{\circlearrowright} \mathbf{V} = \mathbf{E} - \mathbf{V}_R - \mathbf{V}_L - \mathbf{V}_C = 0$$

o bien: $\mathbf{E} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$

la cual también puede verificarse mediante álgebra vectorial.

Diagrama fasorial: El diagrama fasorial de la figura 15.38 indica que la corriente **I** está en fase con el voltaje en el resistor, atrasada con respecto al voltaje en el inductor por 90°, y que adelanta al voltaje en el capacitor por 90°.

Dominio del tiempo:

$$i = \sqrt{2}(10)\,\text{sen}(\omega t - 53.13°) = \mathbf{14.14\,sen(\omega t - 53.13°)}$$
$$v_R = \sqrt{2}(30)\,\text{sen}(\omega t - 53.13°) = \mathbf{42.42\,sen(\omega t - 53.13°)}$$
$$v_L = \sqrt{2}(70)\,\text{sen}(\omega t + 36.87°) = \mathbf{98.98\,sen(\omega t + 36.87°)}$$
$$v_C = \sqrt{2}(30)\,\text{sen}(\omega t - 143.13°) = \mathbf{42.42\,sen(\omega t - 143.13°)}$$

En la figura 15.39 aparece una gráfica de todos los voltajes y la corriente presentes en el circuito.

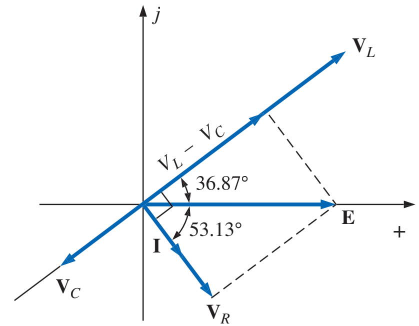


FIGURA 15.38
Diagrama fasorial para el circuito R-L-C en serie de la figura 15.35.

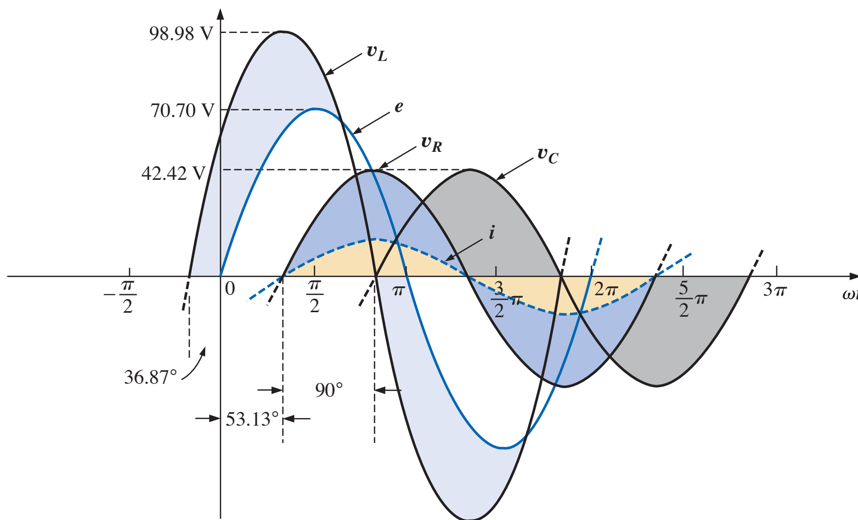


FIGURA 15.39
Formas de onda para el circuito R-L en serie de la figura 15.35.

Potencia: La potencia total en watts entregada al circuito es:

$$P_T = EI\cos\theta_T = (50\text{ V})(10\text{ A})\cos 53.13° = (500)(0.6) = \mathbf{300\ W}$$

o bien: $P_T = I^2R = (10\text{ A})^2(3\ \Omega) = (100)(3) = \mathbf{300\ W}$

o bien:

$$\begin{aligned}P_T &= P_R + P_L + P_C\\ &= V_RI\cos\theta_R + V_LI\cos\theta_L + V_CI\cos\theta_C\\ &= (30\text{ V})(10\text{ A})\cos 0° + (70\text{ V})(10\text{ A})\cos 90° + (30\text{ V})(10\text{ A})\cos 90°\\ &= (30\text{ V})(10\text{ A}) + 0 + 0 = \mathbf{300\ W}\end{aligned}$$

Factor de potencia: El factor de potencia del circuito es:

$$F_p = \cos\theta_T = \cos 53.13° = \mathbf{0.6\ atrasado}$$

Utilizando la ecuación (15.9) obtenemos:

$$F_p = \cos\theta = \frac{R}{Z_T} = \frac{3\ \Omega}{5\ \Omega} = \mathbf{0.6\ atrasado}$$

15.4 REGLA DEL DIVISOR DE VOLTAJE

En circuitos de ca, el formato básico para la **regla del divisor de voltaje** es exactamente el mismo que para circuitos de cd:

$$\mathbf{V}_x = \frac{\mathbf{Z}_x\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} \qquad \textbf{(15.10)}$$

donde $\mathbf{V}_x$ es el voltaje en uno o más elementos en serie que tienen impedancia total de $\mathbf{Z}_x$, $\mathbf{E}$ es el voltaje total que se presenta en el circuito en serie, y $\mathbf{Z}_T$ es la impedancia total del circuito en serie.

EJEMPLO 15.9 Utilizando la regla del divisor de voltaje, encuentre el voltaje en cada elemento del circuito mostrado en la figura 15.40.

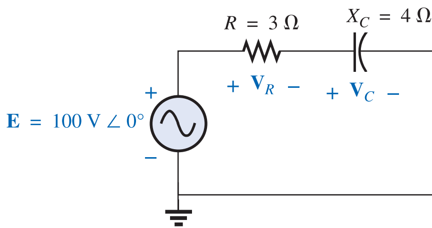


FIGURA 15.40
Ejemplo 15.9.

Solución:

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_R} = \frac{(4\ \Omega\ \angle -90^\circ)(100\ \text{V}\ \angle 0^\circ)}{4\ \Omega\ \angle -90^\circ + 3\ \Omega\ \angle 0^\circ} = \frac{400\ \angle -90^\circ}{3 - j\,4}$$

$$= \frac{400\ \angle -90^\circ}{5\ \angle -53.13^\circ} = \mathbf{80\ V\ \angle -36.87^\circ}$$

$$\mathbf{V}_R = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_R} = \frac{(3\ \Omega\ \angle 0^\circ)(100\ \text{V}\ \angle 0^\circ)}{5\ \Omega\ \angle -53.13^\circ} = \frac{300\ \angle 0^\circ}{5\ \angle -53.13^\circ}$$

$$= \mathbf{60\ V\ \angle +53.13^\circ}$$

EJEMPLO 15.10 Utilizando la regla del divisor de voltaje, encuentre los voltajes desconocidos $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$, $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_1$ para el circuito de la figura 15.41.

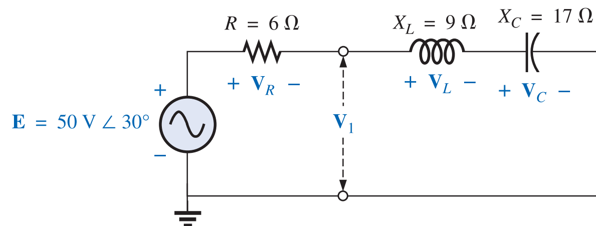


FIGURA 15.41
Ejemplo 15.10.

Solución:

$$\mathbf{V}_R = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C} = \frac{(6\ \Omega\ \angle 0^\circ)(50\ \text{V}\ \angle 30^\circ)}{6\ \Omega\ \angle 0^\circ + 9\ \Omega\ \angle 90^\circ + 17\ \Omega\ \angle -90^\circ}$$

$$= \frac{300\ \angle 30^\circ}{6 + j\,9 - j\,17} = \frac{300\ \angle 30^\circ}{6 - j\,8}$$

$$= \frac{300\ \angle 30^\circ}{10\ \angle -53.13^\circ} = \mathbf{30\ V\ \angle 83.13^\circ}$$

Calculadora El cálculo anterior proporciona una excelente oportunidad para demostrar el poder de las calculadoras actuales. Utilizando la notación de la calculadora TI-86, el cálculo anterior y el resultado serán de la siguiente forma:

```
(6∠0)*(50∠30)/((6∠0)+(9∠90)+(17∠−90))
      (3.588E0,29.785E0)
Ans ▶ Pol
      (30.000E0∠83.130E0)
```

CÁLCULO 15.1

$$\mathbf{V}_L = \frac{\mathbf{Z}_L\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{(9\ \Omega\ \angle 90°)(50\ \text{V}\ \angle 30°)}{10\ \Omega\ \angle -53.13°} = \frac{450\ \text{V}\angle 120°}{10\ \angle -53.13°}$$
$$= \mathbf{45\ V\ \angle 173.13°}$$

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{(17\ \Omega\ \angle -90°)(50\ \text{V}\ \angle 30°)}{10\ \Omega\ \angle -53.13°} = \frac{850\ \text{V}\angle -60°}{10\ \angle -53°}$$
$$= \mathbf{85\ V\ \angle -6.87°}$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{(\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C)\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{(9\ \Omega\ \angle 90° + 17\ \Omega\ \angle -90°)(50\ \text{V}\ \angle 30°)}{10\ \Omega\ \angle -53.13°}$$
$$= \frac{(8\ \angle -90°)(50\ \angle 30°)}{10\ \angle -53.13°}$$
$$= \frac{400\ \angle -60°}{10\ \angle -53.13°} = \mathbf{40\ V\ \angle -6.87°}$$

EJEMPLO 15.11 Para el circuito de la figura 15.42:

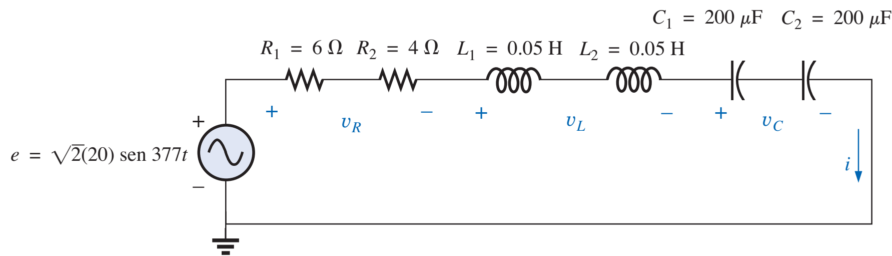


FIGURA 15.42
Ejemplo 15.11.

a. Calcule **I**, $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_C$ en forma fasorial.
b. Calcule el factor de potencia total.
c. Calcule la potencia promedio entregada al circuito.
d. Trace el diagrama fasorial.
e. Obtenga la suma fasorial de $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_C$, y muestre que es igual al voltaje de entrada **E**.
f. Encuentre $\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_C$ utilizando la regla del divisor de voltaje.

Soluciones:

a. Mediante la combinación de elementos comunes, y encontrando la reactancia del inductor y del capacitor, obtenemos:

$$R_T = 6\ \Omega + 4\ \Omega = 10\ \Omega$$
$$L_T = 0.05\ \text{H} + 0.05\ \text{H} = 0.1\ \text{H}$$
$$C_T = \frac{200\ \mu\text{F}}{2} = 100\ \mu\text{F}$$

$$X_L = \omega L = (377 \text{ rad/s})(0.1 \text{ H}) = 37.70\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(377 \text{ rad/s})(100 \times 10^{-6} \text{ F})} = \frac{10^6\ \Omega}{37{,}700} = 26.53\ \Omega$$

Al volver a trazar el circuito utilizando notación fasorial se obtiene la figura 15.43.

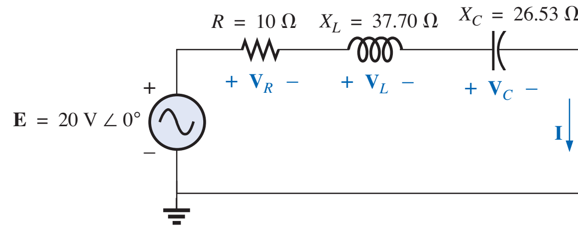


FIGURA 15.43
Aplicación de la notación fasorial al circuito de la figura 15.42.

Para el circuito de la figura 15.43,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_T &= R \angle 0° + X_L \angle 90° + X_C \angle -90° \\ &= 10\ \Omega + j\,37.70\ \Omega - j\,26.53\ \Omega \\ &= 10\ \Omega + j\,11.17\ \Omega = \mathbf{15\ \Omega \angle 48.16°} \end{aligned}$$

La corriente **I** es:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{20 \text{ V} \angle 0°}{15\ \Omega \angle 48.16°} = \mathbf{1.33\ A \angle -48.16°}$$

El voltaje en el resistor, el inductor y el capacitor puede encontrarse mediante la ley de Ohm:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_R = \mathbf{IZ}_R &= (I \angle \theta)(R \angle 0°) = (1.33 \text{ A} \angle -48.16°)(10\ \Omega \angle 0°) \\ &= \mathbf{13.30\ V \angle -48.16°} \\ \mathbf{V}_L = \mathbf{IZ}_L &= (I \angle \theta)(X_L \angle 90°) = (1.33 \text{ A} \angle -48.16°)(37.70\ \Omega \angle 90°) \\ &= \mathbf{50.14\ V \angle 41.84°} \\ \mathbf{V}_C = \mathbf{IZ}_C &= (I \angle \theta)(X_C \angle -90°) = (1.33 \text{ A} \angle -48.16°)(26.53\ \Omega \angle -90°) \\ &= \mathbf{35.28\ V \angle -138.16°} \end{aligned}$$

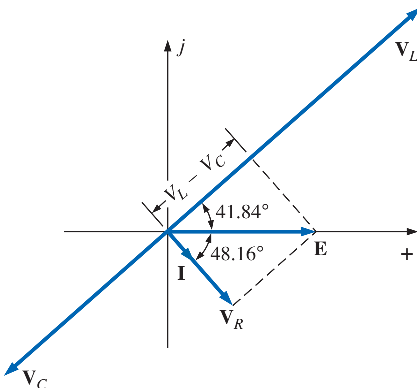


FIGURA 15.44
Diagrama fasorial para el circuito de la figura 15.42.

b. El factor de potencia total, determinado por el ángulo entre el voltaje **E** aplicado y la corriente resultante **I**, es de 48.16°:

$$F_p = \cos \theta = \cos 48.16° = \mathbf{0.667\ atrasado}$$

o bien: $$F_p = \cos \theta = \frac{R}{Z_T} = \frac{10\ \Omega}{15\ \Omega} = \mathbf{0.667\ atrasado}$$

c. La potencia total en watts entregada al circuito es:

$$P_T = EI \cos \theta = (20 \text{ V})(1.33 \text{ A})(0.667) = \mathbf{17.74\ W}$$

d. El diagrama fasorial aparece en la figura 15.44.

e. La suma fasorial de $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_C$ es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C \\ &= 13.30 \text{ V} \angle -48.16° + 50.14 \text{ V} \angle 41.84° + 35.28 \text{ V} \angle -138.16° \\ \mathbf{E} &= 13.30 \text{ V} \angle -48.16° + 14.86 \text{ V} \angle 41.84° \end{aligned}$$

Por tanto,

$$E = \sqrt{(13.30\text{ V})^2 + (14.86\text{ V})^2} = \mathbf{20\ V}$$

y $\quad \theta_E = \mathbf{0°} \quad$ (del diagrama fasorial)

y $\quad \mathbf{E} = 20\ \angle 0°$

f. $\mathbf{V}_R = \dfrac{\mathbf{Z}_R\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \dfrac{(10\ \Omega\ \angle 0°)(20\text{ V}\ \angle 0°)}{15\ \Omega\ \angle 48.16°} = \dfrac{200\text{ V}\angle 0°}{15\ \angle 48.16°}$

$= \mathbf{13.3\ V\ \angle -48.16°}$

$\mathbf{V}_C = \dfrac{\mathbf{Z}_C\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \dfrac{(26.5\ \Omega\ \angle -90°)(20\text{ V}\ \angle 0°)}{15\ \Omega\ \angle 48.16°} = \dfrac{530.6\text{ V}\angle -90°}{15\ \angle 48.16°}$

$= \mathbf{35.37\ V\ \angle -138.16°}$

15.5 RESPUESTA EN FRECUENCIA DEL CIRCUITO *R-C*

Hasta ahora, el análisis de circuitos en serie se ha limitado a una frecuencia particular. A continuación examinaremos el efecto de la frecuencia sobre la respuesta de una configuración *R-C* en serie tal como la de la figura 15.45. La magnitud de la fuente se encuentra establecida en 10 V, pero el intervalo de frecuencia del análisis irá desde 0 hasta 20 kHz.

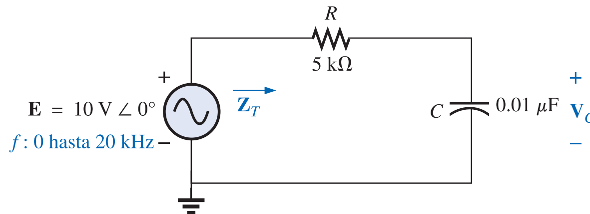


FIGURA 15.45
Determinación de la respuesta en frecuencia de un circuito R-C en serie.

$\mathbf{Z}_T$ Primero determinaremos la forma en que la impedancia del circuito $\mathbf{Z}_T$ variará con la frecuencia para el intervalo de frecuencia de interés especificado. Sin embargo, antes de entrar en detalles, desarrollemos cierta sensibilidad acerca de lo que debemos esperar al observar la curva de impedancia en función de la frecuencia de cada elemento, como se traza en la figura 15.46.

A bajas frecuencias la reactancia del capacitor será muy alta y bastante mayor que el nivel de resistencia *R*, lo cual sugiere que la impedancia total será de naturaleza capacitiva principalmente. En altas frecuencias la reactancia X_C caerá por debajo del nivel de $R = 5\text{ k}\Omega$ y la red comenzará a desplazarse hacia una de naturaleza puramente resistiva (a 5 kW). La frecuencia a la que $X_C = R$ puede determinarse de la siguiente forma:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_1 C} = R$$

y

$$f_1 = \frac{1}{2\pi RC} \Bigg|_{X_C = R} \qquad \textbf{(15.11)}$$

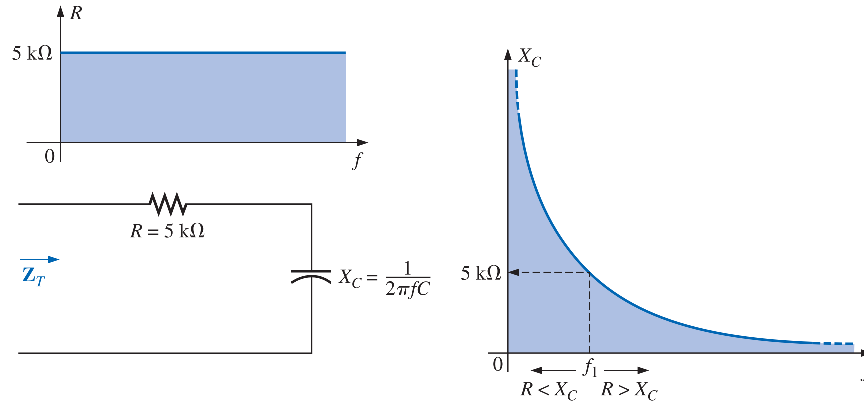


FIGURA 15.46
Respuesta en frecuencia de los elementos individuales de un circuito R-C en serie.

la cual, para la red de interés, es:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi(5\text{ k}\Omega)(0.01\ \mu\text{F})} \cong \mathbf{3183.1\ Hz}$$

Para frecuencias menores que f_1, $X_C > R$, y para frecuencias mayores que f_1, $R > X_C$, como se muestra en la figura 15.46.

Ahora veamos los detalles. La impedancia total está determinada por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{Z}_T = R - j\,X_C$$

y

$$\mathbf{Z}_T = Z_T \angle\theta_T = \sqrt{R^2 + X_C^2}\ \angle -\tan^{-1}\frac{X_C}{R} \qquad \textbf{(15.12)}$$

La magnitud y el ángulo de la impedancia total se pueden encontrar ahora en cualquier frecuencia de interés mediante una simple sustitución en la ecuación (15.12). La presencia del capacitor sugiere que comencemos desde una frecuencia baja (100 Hz) y luego aumentemos la frecuencia hasta alcanzar el límite superior de interés (20 kHz).

f = 100 Hz

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(100\text{ Hz})(0.01\ \mu\text{F})} = 159.16\text{ k}\Omega$$

y $$Z_T = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{(5\text{ k}\Omega)^2 + (159.16\text{ k}\Omega)^2} = 159.24\text{ k}\Omega$$

con: $$\theta_T = -\tan^{-1}\frac{X_C}{R} = -\tan^{-1}\frac{159.16\text{ k}\Omega}{5\text{ k}\Omega} = -\tan^{-1}31.83$$
$$= -88.2^\circ$$

y $$\mathbf{Z}_T = \mathbf{159.24\ k\Omega \angle -88.2^\circ}$$

lo cual se compara de forma muy cercana con $\mathbf{Z}_C = 159.16\text{ k}\Omega \angle -90^\circ$ si el circuito fuera sólo capacitivo ($R = 0\ \Omega$). Por tanto, nuestro supuesto de que a bajas frecuencias el circuito es principalmente capacitivo está confirmado.

***f* = 1 kHz**

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(1\text{ kHz})(0.01\ \mu\text{F})} = 15.92\text{ k}\Omega$$

y $$Z_T = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{(5\text{ k}\Omega)^2 + (15.92\text{ k}\Omega)^2} = 16.69\text{ k}\Omega$$

con: $$\theta_T = -\tan^{-1}\frac{X_C}{R} = -\tan^{-1}\frac{15.92\text{ k}\Omega}{5\text{ k}\Omega}$$

$$= -\tan^{-1} 3.18 = -72.54^\circ$$

y $$\mathbf{Z}_T = \mathbf{16.69\ k\Omega \angle -72.54^\circ}$$

Ha ocurrido una caída importante en la magnitud, y el ángulo de impedancia ha disminuido en casi 17° a partir del nivel puramente capacitivo.

Al continuar:

$$f = 5\text{ kHz}:\quad \mathbf{Z}_T = \mathbf{5.93\ k\Omega \angle -32.48^\circ}$$
$$f = 10\text{ kHz}:\quad \mathbf{Z}_T = \mathbf{5.25\ k\Omega \angle -17.66^\circ}$$
$$f = 15\text{ kHz}:\quad \mathbf{Z}_T = \mathbf{5.11\ k\Omega \angle -11.98^\circ}$$
$$f = 20\text{ kHz}:\quad \mathbf{Z}_T = \mathbf{5.06\ k\Omega \angle -9.04^\circ}$$

Observe lo cercana que está la magnitud de Z_T en $f = 20$ kHz al nivel de resistencia de 5 kΩ. Además, advierta cómo el ángulo de fase se aproxima al asociado con una red puramente resistiva (0°).

La gráfica de Z_T en función de la frecuencia de la figura 15.47 sustenta completamente nuestro supuesto basado en las curvas de la figura 15.46. La gráfica de θ_T en función de la frecuencia de la figura 15.48 sugiere, además, el hecho de que la impedancia total realizó una transición desde una naturaleza capacitiva ($\theta_T = -90^\circ$) hacia una de características resistivas ($\theta_T = 0^\circ$).

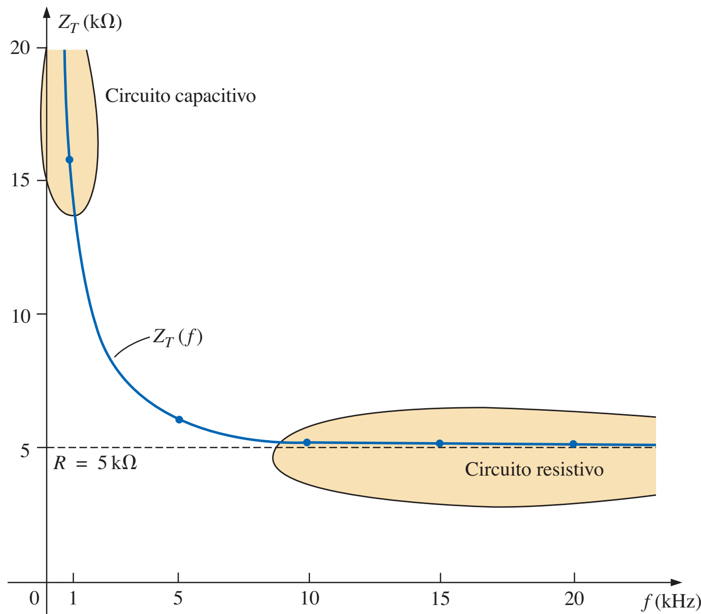


FIGURA 15.47
Magnitud de la impedancia de entrada en función de la frecuencia para el circuito de la figura 15.45.

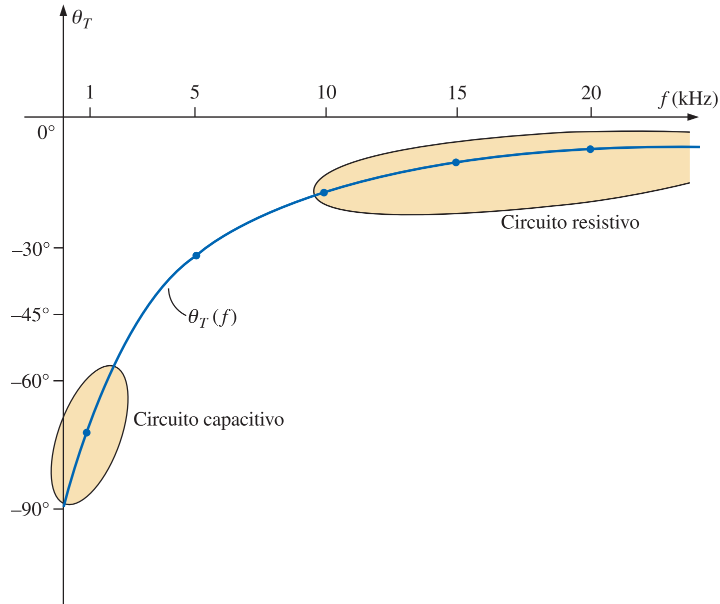


FIGURA 15.48
Ángulo de fase de la impedancia de entrada en función de la frecuencia para el circuito de la figura 15.45.

Al aplicar la regla del divisor de voltaje para determinar el voltaje en el capacitor en forma fasorial resulta:

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C}$$

$$= \frac{(X_C \angle -90°)(E \angle 0°)}{R - jX_C} = \frac{X_C E \angle -90°}{R - jX_C}$$

$$= \frac{X_C E \angle -90°}{\sqrt{R^2 + X_C^2} \; \angle -\tan^{-1} X_C/R}$$

o bien: $$\mathbf{V}_C = V_C \angle \theta_C = \frac{X_C E}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \angle -90° + \tan^{-1}(X_C/R)$$

Por tanto, la magnitud de $\mathbf{V}_C$ se determina mediante:

$$V_C = \frac{X_C E}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \qquad \textbf{(15.13)}$$

y el ángulo de fase θ_C por el que $\mathbf{V}_C$ adelanta a $\mathbf{E}$ es dado mediante:

$$\theta_C = -90° + \tan^{-1}\frac{X_C}{R} = -\tan^{-1}\frac{R}{X_C} \qquad \textbf{(15.14)}$$

Para determinar la respuesta en frecuencia, X_C debe calcularse para cada frecuencia de interés e insertarse en las ecuaciones (15.13) y (15.14).

Para comenzar nuestro análisis, sería buena idea considerar el caso de $f =$ 0 Hz (condiciones de cd).

***f* = 0 Hz**

$$X_C = \frac{1}{2\pi(0)C} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{un valor muy grande}$$

Al aplicar el equivalente de circuito abierto para el capacitor con base en el cálculo anterior se obtendrá lo siguiente:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{E} = 10 \text{ V} \angle 0°$$

Si aplicamos la ecuación (15.13), encontraremos:

$$X_C^2 >> R^2$$

y $$\sqrt{R^2 + X_C^2} \cong \sqrt{X_C^2} = X_C$$

y $$V_C = \frac{X_C E}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{X_C E}{X_C} = E$$

con: $$\theta_C = -\tan^{-1}\frac{R}{X_C} = -\tan^{-1} 0 = 0°$$

que verifica las conclusiones anteriores.

***f* = 1 kHz** Al aplicar la ecuación (15.13):

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{(2\pi)(1 \times 10^3 \text{ Hz})(0.01 \times 10^{-6} \text{ F})} \cong \mathbf{15.92\ k\Omega}$$

$$\sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{(5 \text{ k}\Omega)^2 + (15.92 \text{ k}\Omega)^2} \cong 16.69 \text{ k}\Omega$$

y $$V_C = \frac{X_C E}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{(15.92 \text{ k}\Omega)(10)}{16.69 \text{ k}\Omega} = \mathbf{9.54\ V}$$

Al aplicar la ecuación (15.14):

$$\theta_C = -\tan^{-1}\frac{R}{X_C} = -\tan^{-1}\frac{5 \text{ k}\Omega}{15.9 \text{ k}\Omega}$$

$$= -\tan^{-1} 0.314 = \mathbf{-17.46°}$$

y $$\mathbf{V}_C = \mathbf{9.53\ V} \angle \mathbf{-17.46°}$$

Como se esperaba, la mayor reactancia del capacitor a bajas frecuencias ha ocasionado que la mayor parte del voltaje aplicado aparezca en el capacitor.

Si graficamos los diagramas fasoriales para $f = 0$ Hz y $f = 1$ kHz, como se muestra en la figura 15.49, veremos que $\mathbf{V}_C$ comienza una rotación en el sentido de las manecillas del reloj con un incremento en la frecuencia que aumentará el ángulo θ_C y disminuirá el ángulo de fase entre **I** y **E**. Recuerde que para una red puramente capacitiva, **I** adelanta a **E** por 90°. Por tanto, a medida que la frecuencia se incrementa, la reactancia capacitiva disminuye, y finalmente.

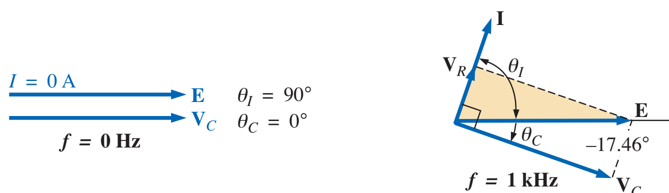


FIGURA 15.49
Diagrama fasorial para el circuito de la figura 15.45 para f = 0 Hz y 1 kHz.

$R >> X_C$ con $\theta_C = -90°$, y el ángulo entre **I** y **E** se aproximará a 0°. Tenga presente, a medida que avancemos hacia las otras frecuencias, que θ_C es el ángulo de fase entre $\mathbf{V}_C$ y **E**, y que la magnitud del ángulo por el cual **I** adelanta a **E** está determinada por:

$$|\theta_I| = 90° - |\theta_C| \quad \textbf{(15.15)}$$

***f* = 5 kHz** Al aplicar la ecuación (15.13):

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{(2\pi)(5 \times 10^3 \text{ Hz})(0.01 \times 10^{-6} \text{ F})} \cong \mathbf{3.18\ k\Omega}$$

Observe la impresionante caída en X_C desde 1 kHz hasta 5 kHz. De hecho, X_C es ahora menor que la resistencia R de la red, y el ángulo de fase determinado por $\tan^{-1}(X_C/R)$ deberá ser menor de 45°. Aquí,

$$V_C = \frac{X_C E}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{(3.18 \text{ k}\Omega)(10 \text{ V})}{\sqrt{(5 \text{ k}\Omega)^2 + (3.18 \text{ k}\Omega)^2}} = \mathbf{5.37\ V}$$

con: $$\theta_C = -\tan^{-1}\frac{R}{X_C} = -\tan^{-1}\frac{5 \text{ k}\Omega}{3.2 \text{ k}\Omega}$$
$$= -\tan^{-1} 1.56 = \mathbf{-57.38°}$$

***f* = 10 kHz**

$$X_C \cong \mathbf{1.59\ k\Omega} \qquad V_C = \mathbf{3.03\ V} \qquad \theta_C = \mathbf{-72.34°}$$

***f* = 15 kHz**

$$X_C \cong \mathbf{1.06\ k\Omega} \qquad V_C = \mathbf{2.07\ V} \qquad \theta_C = \mathbf{-78.02°}$$

***f* = 20 kHz**

$$X_C \cong \mathbf{795.78\ \Omega} \qquad V_C = \mathbf{1.57\ V} \qquad \theta_C = \mathbf{-80.96°}$$

En la figura 15.50 aparecen los diagramas fasoriales para $f = 5$ kHz y $f = 20$ kHz para mostrar la rotación continua del vector $\mathbf{V}_C$.

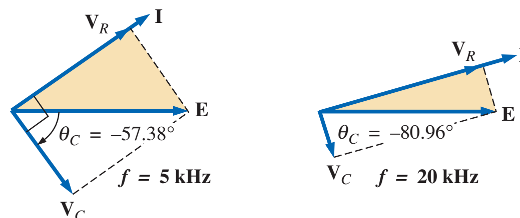


FIGURA 15.50
Diagrama fasorial para el circuito de la figura 15.45 para $f = 5$ kHz y 20 kHz.

También observe a partir de las figuras 15.49 y 15.50 que el vector $\mathbf{V}_R$ y la corriente **I** han crecido en magnitud con la reducción en la reactancia capacitiva. Finalmente, a frecuencias muy altas X_C se aproximará a cero ohms y podrá

aplicarse el equivalente de corto circuito, dando por resultado que $V_C \cong 0$ V y $\theta_C \cong -90°$, y generando el diagrama fasorial de la figura 15.51. La red es entonces resistiva, el ángulo de fase entre **I** y **E** es básicamente de cero grados, y V_R e I están en sus valores máximos.



***f* = frecuencias muy altas**

FIGURA 15.51
Diagrama fasorial para el circuito de la figura 15.45 a frecuencias muy altas.

En la figura 15.52 aparece una gráfica de V_C en función de la frecuencia. A frecuencias bajas $X_C >> R$ y V_C es muy cercano a E en magnitud. A medida que la frecuencia aplicada se incrementa, X_C disminuye en magnitud junto con V_C mientras V_R capta más del voltaje aplicado. En la figura 15.53 se proporciona una gráfica de θ_C en función de la frecuencia. A bajas frecuencias el ángulo de fase entre $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{E}$ será muy pequeño debido a que $\mathbf{V}_C \cong \mathbf{E}$. Recuerde que si dos

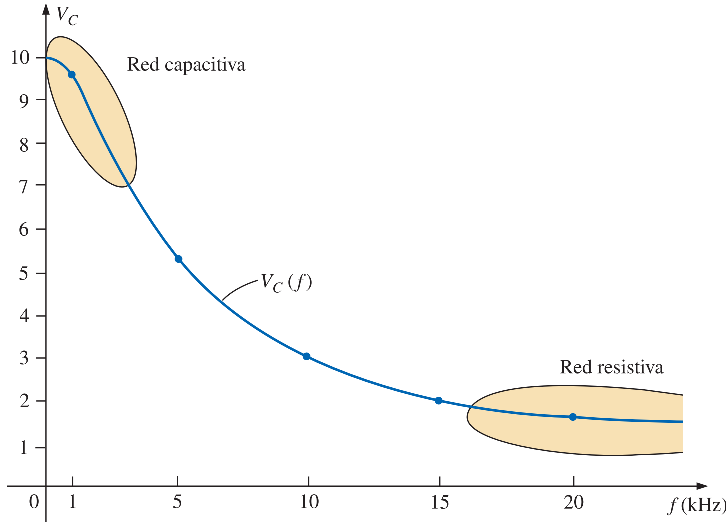


FIGURA 15.52
Magnitud del voltaje V_C en función de la frecuencia para el circuito de la figura 15.45.

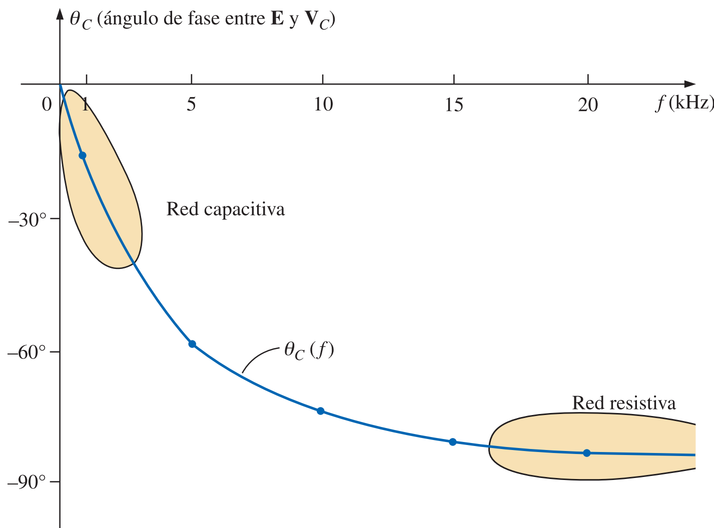


FIGURA 15.53
*Ángulo de fase entre **E** y $\mathbf{V}_C$ en función de la frecuencia para el circuito de la figura 15.45.*

fasores son iguales, deberán tener el mismo ángulo. A medida que la frecuencia aplicada se incrementa, la red se vuelve más resistiva y el ángulo de fase entre $\mathbf{V}_C$ y **E** se aproxima a 90°. Tenga presente que, a altas frecuencias, **I** y **E** se aproximan a estar en fase y el ángulo entre $\mathbf{V_C}$ y **E** se aproximará al existente entre $\mathbf{V}_C$ e **I**, el cual sabemos debe ser igual a 90° ($\mathbf{I}_C$ adelantando a $\mathbf{V}_C$).

Una gráfica de V_R en función de la frecuencia se aproximaría a E volts desde cero volts con un incremento en la frecuencia, pero recuerde que $V_R \neq E - V_C$ debido a la relación vectorial. El ángulo de fase entre **I** y **E** podría graficarse de forma directa a partir de la figura 15.53 utilizando la ecuación (15.15).

En el capítulo 23, el análisis de esta sección se extenderá a un intervalo de frecuencias mucho más amplio utilizando un eje logarítmico para la frecuencia. Se demostrará que un circuito *R*-*C* como el de la figura 15.45 puede utilizarse como un filtro para determinar las frecuencias que tendrán el mayor impacto sobre la etapa siguiente. Del presente análisis, resulta obvio que cualquier red conectada a través del capacitor recibirá el mayor nivel de potencial a bajas frecuencias y será efectivamente puesta en "corto" a frecuencias muy altas.

El análisis de un circuito *R*-*L* en serie procedería de forma muy similar, excepto que X_L y V_L se incrementarían con la frecuencia y el ángulo entre **I** y **E** se aproximaría a 90° (el voltaje adelantando a la corriente) en lugar de a 0°. Si $\mathbf{V}_L$ se graficara en función de la frecuencia, $\mathbf{V}_L$ se aproximaría a **E**, y X_L finalmente alcanzaría un nivel en el que sería apropiado el equivalente de circuito abierto.

15.6 RESUMEN: CIRCUITOS DE ca EN SERIE

A continuación se presenta un resumen de conclusiones importantes que se pueden derivar del análisis y los ejemplos de las secciones anteriores. La lista no es exhaustiva, pero destaca algunas de las consideraciones que deberán manejarse en los futuros análisis de sistemas de ca.

Para circuitos de ca en serie con elementos reactivos:

1. ***La impedancia total será dependiente de la frecuencia.***
2. ***La impedancia de cualquier elemento puede ser mayor que la impedancia total de la red.***
3. ***Las reactancias inductivas y capacitivas están siempre en oposición directa en un diagrama de impedancia.***
4. ***Dependiendo de la frecuencia aplicada, un mismo circuito puede ser predominantemente inductivo o capacitivo.***
5. ***A bajas frecuencias los elementos capacitivos tienen, por lo general, el mayor impacto sobre la impedancia total, mientras que en altas frecuencias los elementos inductivos tienen, por lo general, el mayor impacto.***
6. ***La magnitud del voltaje en cualquier elemento puede ser mayor que el voltaje aplicado.***
7. ***La magnitud del voltaje en un elemento en comparación con los otros elementos del circuito está directamente relacionada con la magnitud de su impedancia; es decir, mientras mayor sea la impedancia de un elemento, mayor será la magnitud del voltaje en el elemento.***
8. ***Los voltajes en una bobina o en un capacitor están siempre en oposición directa en un diagrama fasorial.***
9. ***La corriente siempre está en fase con el voltaje en los elementos resistivos, atrasada con respecto al voltaje en todos los elementos inductivos por 90°, y adelantada al voltaje en todos los elementos capacitivos por 90°.***

10. Mientras mayor sea el elemento resistivo de un circuito en comparación con la impedancia reactiva neta, más cercano estará el factor de potencia a la unidad.

CIRCUITOS DE ca EN PARALELO

15.7 ADMITANCIA Y SUSCEPTANCIA

El análisis de los **circuitos de ca en paralelo** será muy similar al de los circuitos de cd. En los circuitos de cd, la *conductancia* (G) se definió como igual a $1/R$. Entonces, la conductancia total de un circuito en paralelo se calculó al sumar la conductancia de cada rama. La resistencia total R_T es simplemente $1/G_T$.

En circuitos de ca, definimos la **admitancia (Y)** como igual a $1/\mathbf{Z}$. La unidad de medición para la admitancia según lo define el SI es el *siemens*, el cual se identifica con el símbolo S. La admitancia es una medida de qué tan bien un circuito de ca *admitirá*, o permitirá, que la corriente fluya en el circuito. Por tanto, mientras mayor sea su valor, más fuerte será el flujo de corriente para un mismo potencial aplicado. La admitancia total de un circuito puede calcularse también al encontrar la suma de las admitancias paralelas. La impedancia total $\mathbf{Z}_T$ del circuito es entonces $1/\mathbf{Y}_T$, es decir, para la red de la figura 15.54:

$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \cdots + \mathbf{Y}_N \qquad (15.16)$$

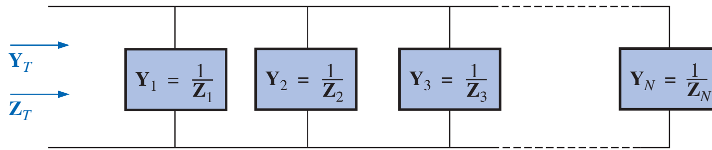


FIGURA 15.54
Red de ca en paralelo.

o, dado que $\mathbf{Z} = 1/\mathbf{Y}$,

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_T} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Z}_N} \qquad (15.17)$$

Para dos impedancias en paralelo,

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_T} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2}$$

Si ahora aplicamos el tratamiento utilizado en el capítulo 6 para encontrar la resistencia total de dos resistores en paralelo, resultará la siguiente ecuación similar:

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \qquad (15.18)$$

Para tres impedancias en paralelo,

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3} \tag{15.19}$$

Como fue señalado al introducir esta sección, la conductancia es el recíproco de la resistencia, y

$$\mathbf{Y}_R = \frac{1}{\mathbf{Z}_R} = \frac{1}{R \angle 0°} = G \angle 0° \tag{15.20}$$

El recíproco de la reactancia ($1/X$) se denomina **susceptancia**, y es una medida de qué tan *susceptible* es un elemento al paso de corriente a través de él. La susceptancia también se mide en *siemens* y está representada por la letra mayúscula B.

Para el inductor,

$$\mathbf{Y}_L = \frac{1}{\mathbf{Z}_L} = \frac{1}{X_L \angle 90°} = \frac{1}{X_L} \angle -90° \tag{15.21}$$

Al definir: $$B_L = \frac{1}{X_L} \quad \text{(siemens, S)} \tag{15.22}$$

tenemos: $$\mathbf{Y}_L = B_L \angle -90° \tag{15.23}$$

Observe que para la inductancia, un incremento en frecuencia o inductancia resultará en una disminución en la susceptancia o, respectivamente, en la admitancia.

Para el capacitor,

$$\mathbf{Y}_C = \frac{1}{\mathbf{Z}_C} = \frac{1}{X_C \angle -90°} = \frac{1}{X_C} \angle 90° \tag{15.24}$$

Al definir: $$B_C = \frac{1}{X_C} \quad \text{(siemens, S)} \tag{15.25}$$

tenemos: $$\mathbf{Y}_C = B_C \angle 90° \tag{15.26}$$

Por tanto, para el capacitor, un incremento en frecuencia o capacitancia dará por resultado un aumento en su susceptancia.

Para circuitos de ca en paralelo se utiliza el **diagrama de admitancia** con las tres admitancias, representado como se muestra en la figura 15.55.

Observe en la figura 15.55 que la conductancia (como la resistencia) está sobre el eje real positivo, mientras que las susceptancias inductivas y capacitivas están en oposición directa sobre el eje imaginario.

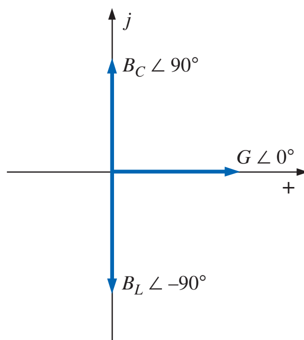


FIGURA 15.55
Diagrama de admitancia.

Para cualquier configuración (en serie, en paralelo, en serie-paralelo, etc.), el ángulo asociado con la admitancia total es el ángulo por el cual la corriente de la fuente adelanta al voltaje aplicado. Para redes inductivas θ_T es negativo, mientras que para redes capacitivas θ_T es positivo.

EJEMPLO 15.12 Para la red de la figura 15.56:

a. Encuentre la admitancia de cada rama paralela.
b. Determine la admitancia de entrada.
c. Calcule la impedancia de entrada.
d. Trace el diagrama de admitancia.

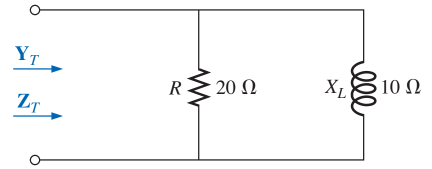


FIGURA 15.56
Ejemplo 15.12.

Soluciones:

a. $\mathbf{Y}_R = G\,\angle 0° = \dfrac{1}{R}\,\angle 0° = \dfrac{1}{20\ \Omega}\,\angle 0°$

$$= \mathbf{0.05\ S\ \angle 0° = 0.05\ S + \textit{j}\ 0}$$

$$\mathbf{Y}_L = B_L\,\angle -90° = \frac{1}{X_L}\,\angle -90° = \frac{1}{10\ \Omega}\,\angle -90°$$

$$= \mathbf{0.1\ S\ \angle -90° = 0 - \textit{j}\ 0.1\ S}$$

b. $\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_L = (0.05\ \text{S} + j\ 0) + (0 - j\ 0.1\ \text{S})$

$$= \mathbf{0.05\ S - \textit{j}\ 0.1\ S} = G - jB_L$$

c. $\mathbf{Z}_T = \dfrac{1}{\mathbf{Y}_T} = \dfrac{1}{0.05\ \text{S} - j\,0.1\ \text{S}} = \dfrac{1}{0.112\ \text{S}\ \angle -63.43°}$

$$= \mathbf{8.93\ \Omega\ \angle 63.43°}$$

o mediante la ecuación (15.17):

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L} = \frac{(20\ \Omega\ \angle 0°)(10\ \Omega\ \angle 90°)}{20\ \Omega + j\ 10\ \Omega}$$

$$= \frac{200\ \Omega\ \angle 90°}{22.36\ \angle 26.57°} = \mathbf{8.93\ \Omega\ \angle 63.43°}$$

d. El diagrama de admitancia aparece en la figura 15.57.

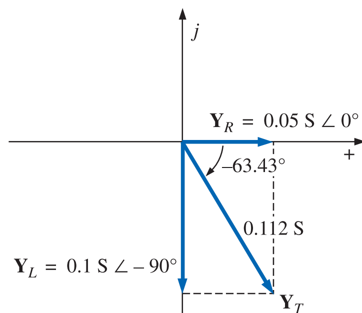


FIGURA 15.57
Diagrama de admitancia para la red de la figura 15.56.

EJEMPLO 15.13 Repita el ejemplo 15.12 para la red paralela de la figura 15.58.

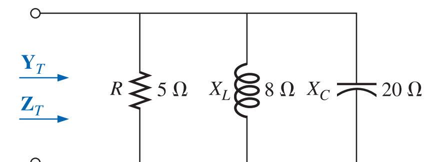


FIGURA 15.58
Ejemplo 15.13.

Soluciones:

a. $\mathbf{Y}_R = G\,\angle 0° = \dfrac{1}{R}\,\angle 0° = \dfrac{1}{5\ \Omega}\,\angle 0°$

$$= \mathbf{0.2\ S\ \angle 0° = 0.2\ S + \textit{j}\ 0}$$

$$\mathbf{Y}_L = B_L \angle -90° = \frac{1}{X_L} \angle -90° = \quad \angle -90°$$

$$= \mathbf{0.125\ S \angle -90° = 0 - \mathit{j}\, 0.125\ S}$$

$$\mathbf{Y}_C = B_C \angle 90° = \frac{1}{X_C} \angle 90° = \frac{1}{20\ \Omega} \angle 90°$$

$$= \mathbf{0.050\ S \angle +90° = 0 + \mathit{j}\, 0.050\ S}$$

b. $\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_C$

$$= (0.2\ \text{S} + j\,0) + (0 - j\,0.125\ \text{S}) + (0 + j\,0.050\ \text{S})$$

$$= 0.2\ \text{S} - j\,0.075\ \text{S} = \mathbf{0.2136\ S \angle -20.56°}$$

c. $\mathbf{Z}_T = \dfrac{1}{0.2136\ \text{S} \angle -20.56°} = \mathbf{4.68\ \Omega \angle 20.56°}$

o bien:

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_L\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_L\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_C}$$

$$= \frac{(5\ \Omega \angle 0°)(8\ \Omega \angle 90°)(20\ \Omega \angle -90°)}{(5\ \Omega \angle 0°)(8\ \Omega \angle 90°) + (8\ \Omega \angle 90°)(20\ \Omega \angle -90°) + (5\ \Omega \angle 0°)(20\ \Omega \angle -90°)}$$

$$= \frac{800\ \Omega \angle 0°}{40 \angle 90° + 160 \angle 0° + 100 \angle -90°}$$

$$= \frac{800\ \Omega}{160 + j\,40 - j\,100} = \frac{800\ \Omega}{160 - j\,60}$$

$$= \frac{800\ \Omega}{170.88 \angle -20.56°}$$

$$= \mathbf{4.68\ \Omega \angle 20.56°}$$

d. El diagrama de admitancia aparece en la figura 15.59.

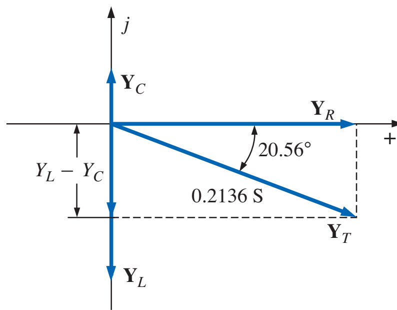


FIGURA 15.59
Diagrama de admitancia para la red de la figura 15.58.

En muchas ocasiones, la relación inversa $\mathbf{Y}_T = 1/\mathbf{Z}_T$ o $\mathbf{Z}_T = 1/\mathbf{Y}_T$ requerirá que dividamos el número 1 entre un número complejo que tenga una parte real y una imaginaria. Esta división, si no se realiza en forma polar, necesita que multipliquemos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, de la siguiente forma:

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{\mathbf{Z}_T} = \frac{1}{4\ \Omega + j\,6\ \Omega} = \left(\frac{1}{4\ \Omega + j\,6\ \Omega}\right)\left(\frac{(4\ \Omega - j\,6\ \Omega)}{(4\ \Omega - j\,6\ \Omega)}\right) = \frac{4 - j\,6}{4^2 + 6^2}$$

e

$$\mathbf{Y}_T = \frac{4}{52}\ \text{S} - j\,\frac{6}{52}\ \text{S}$$

Para evitar esta laboriosa tarea cada vez que busquemos el recíproco de un número complejo en forma rectangular, podemos desarrollar un formato utilizando el siguiente número complejo, el cual es simbólico para cualquier impedancia o admitancia en el primer o cuarto cuadrantes, como lo es también para cualquier número complejo distinto de cero.

$$\frac{1}{a_1 \pm j\,b_1} = \left(\frac{1}{a_1 \pm j\,b_1}\right)\left(\frac{a_1 \mp j\,b_1}{a_1 \mp j\,b_1}\right) = \frac{a_1 \mp j\,b_1}{a_1^2 + b_1^2}$$

o bien:

$$\frac{1}{a_1 \pm j\,b_1} = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} \mp j\,\frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2} \qquad \mathbf{(15.27)}$$

Observe que el denominador es simplemente la suma de los cuadrados de cada término. El signo entre las partes real e imaginaria está invertido. Un par de ejemplos ayudará a desarrollar cierta familiaridad con el uso de esta ecuación.

EJEMPLO 15.14 En la figura 15.60, encuentre la admitancia de cada conjunto de elementos en serie.

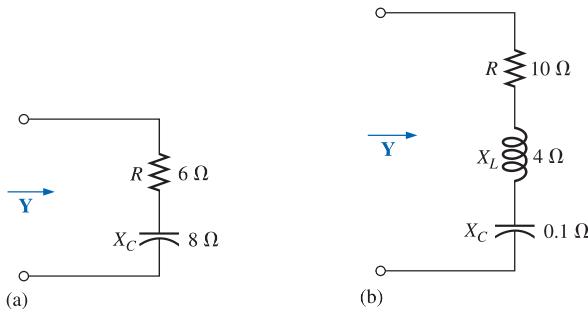


FIGURA 15.60
Ejemplo 15.14.

Soluciones:

a. $\mathbf{Z} = R - j\,X_C = 6\ \Omega - j\,8\ \Omega$

Ecuación (15.27):

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{6\ \Omega - j\,8\ \Omega} = \frac{6}{(6)^2 + (8)^2} + j\frac{8}{(6)^2 + (8)^2}$$

$$= \mathbf{\frac{6}{100}\ S + j\frac{8}{100}\ S}$$

b. $\mathbf{Z} = 10\ \Omega + j\,4\ \Omega + (-j\,0.1\ \Omega) = 10\ \Omega + j\,3.9\ \Omega$

Ecuación (15.27):

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{10\ \Omega + j\,3.9\ \Omega} = \frac{10}{(10)^2 + (3.9)^2} - j\frac{3.9}{(10)^2 + (3.9)^2}$$

$$= \frac{10}{115.21} - j\frac{3.9}{115.21} = \mathbf{0.087\ S - j\,0.034\ S}$$

15.8 REDES DE ca EN PARALELO

Para la red de ca representativa en paralelo de la figura 15.61, la impedancia, o admitancia total, está determinada como se describió en la sección anterior, y la corriente de la fuente está determinada por la ley de Ohm de la siguiente forma:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \mathbf{E}\mathbf{Y}_T \qquad \textbf{(15.28)}$$

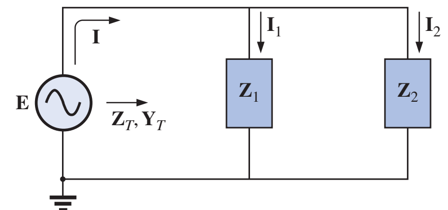


FIGURA 15.61
Red de ca en paralelo.

Dado que el voltaje es el mismo en elementos en paralelo, la corriente a través de cada rama puede calcularse mediante otra aplicación de la ley de Ohm:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1} = \mathbf{E}\mathbf{Y}_1 \qquad \textbf{(15.29a)}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_2} = \mathbf{E}\mathbf{Y}_2 \qquad \textbf{(15.29b)}$$

Luego puede aplicarse la ley de corriente de Kirchhoff de la misma forma que la utilizada para redes de cd. Sin embargo, tenga presente que ahora estaremos tratando con el manejo algebraico de cantidades que tienen tanto magnitud como dirección.

$$\mathbf{I} - \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = 0$$

o bien:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \tag{15.30}$$

La potencia entregada a la red puede determinarse mediante:

$$P = EI \cos \theta_T \tag{15.31}$$

donde θ_T es el ángulo de fase entre **E** e **I**.

Ahora veamos algunos ejemplos desarrollados con gran detalle como primera exposición.

R-L

Vea la figura 15.62.

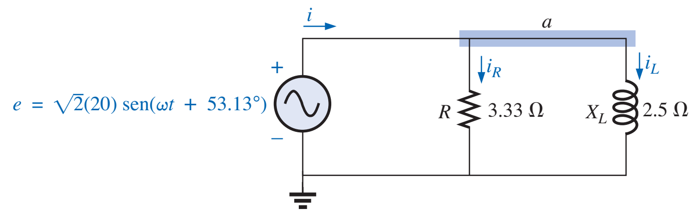


FIGURA 15.62
Red R-C en paralelo

Notación fasorial Como se muestra en la figura 15.63.

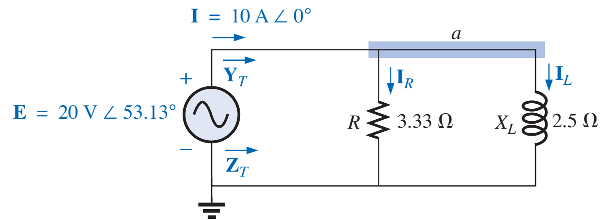


FIGURA 15.63
Aplicación de la notación fasorial a la red de la figura 15.62.

$\mathbf{Y}_T$ y $\mathbf{Z}_T$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_T &= \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_L \\
&= G \angle 0° + B_L \angle -90° = \frac{1}{3.33\ \Omega} \angle 0° + \frac{1}{2.5\ \Omega} \angle -90° \\
&= 0.3\text{ S} \angle 0° + 0.4\text{ S} \angle -90° = 0.3\text{ S} - j\,0.4\text{ S} \\
&= \mathbf{0.5\ S \angle -53.13°}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}_T = \frac{1}{\mathbf{Y}_T} = \frac{1}{0.5\text{ S} \angle -53.13°} = \mathbf{2\ \Omega \angle 53.13°}$$

Diagrama de admitancia: Como se muestra en la figura 15.64.

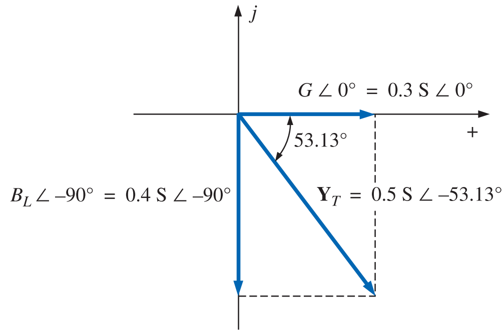


FIGURA 15.64
Diagrama de admitancia para la red R-L en paralelo de la figura 15.62.

I

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \mathbf{E}\mathbf{Y}_T = (20\text{ V}\angle 53.13°)(0.5\text{ S}\angle -53.13°) = \mathbf{10\text{ A}\angle 0°}$$

I_R e I_L

$$\mathbf{I}_R = \frac{E\angle\theta}{R\angle 0°} = (E\angle\theta)(G\angle 0°)$$
$$= (20\text{ V}\angle 53.13°)(0.3\text{ S}\angle 0°) = \mathbf{6\text{ A}\angle 53.13°}$$
$$\mathbf{I}_L = \frac{E\angle\theta}{X_L\angle 90°} = (E\angle\theta)(B_L\angle -90°)$$
$$= (20\text{ V}\angle 53.13°)(0.4\text{ S}\angle -90°)$$
$$= \mathbf{8\text{ A}\angle -36.87°}$$

Ley de corriente de Kirchhoff: En el nodo *a*,

$$\mathbf{I} - \mathbf{I}_R - \mathbf{I}_L = 0$$

o bien:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L$$
$$10\text{ A}\angle 0° = 6\text{ A}\angle 53.13° + 8\text{ A}\angle -36.87°$$
$$10\text{ A}\angle 0° = (3.60\text{ A} + j\,4.80\text{ A}) + (6.40\text{ A} - j\,4.80\text{ A}) = 10\text{ A} + j\,0$$

y $$\mathbf{10\text{ A}\angle 0°} = \mathbf{10\text{ A}\angle 0°} \qquad \text{(se comprueba)}$$

Diagrama fasorial: El diagrama fasorial de la figura 15.65 indica que el voltaje aplicado **E** está en fase con la corriente $\mathbf{I}_R$ y adelanta a la corriente $\mathbf{I}_L$ por 90°.

Potencia: La potencia total en watts entregada al circuito es:

$$P_T = EI\cos\theta_T$$
$$= (20\text{ V})(10\text{ A})\cos 53.13° = (200\text{ W})(0.6)$$
$$= \mathbf{120\text{ W}}$$

o bien: $$P_T = I^2R = \frac{V_R^2}{R} = V_R^2G = (20\text{ V})^2(0.3\text{ S}) = \mathbf{120\text{ W}}$$

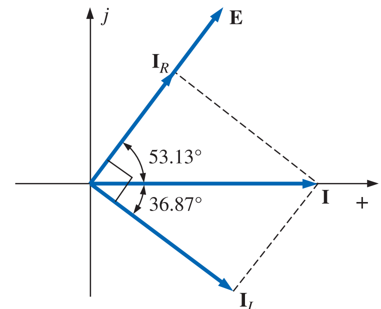


FIGURA 15.65
Diagrama fasorial para la red R-L en paralelo de la figura 15.62.

o, por último,

$$P_T = P_R + P_L = EI_R \cos \theta_R + EI_L \cos \theta_L$$
$$= (20\text{ V})(6\text{ A}) \cos 0° + (20\text{ V})(8\text{ A}) \cos 90° = 120\text{ W} + 0$$
$$= \mathbf{120\text{ W}}$$

Factor potencia: El factor de potencia del circuito es:

$$F_p = \cos \theta_T = \cos 53.13° = \mathbf{0.6\ atrasado}$$

o, mediante un análisis similar al utilizado para un circuito de ca en serie,

$$\cos \theta_T = \frac{P}{EI} = \frac{E^2/R}{EI} = \frac{EG}{I} = \frac{G}{I/V} = \frac{G}{Y_T}$$

y

$$F_p = \cos \theta_T = \frac{G}{Y_T} \tag{15.32}$$

donde G e Y_T son las magnitudes de la conductancia y admitancia totales de la red en paralelo. Para este caso,

$$F_p = \cos \theta_T = \frac{0.3\text{ S}}{0.5\text{ S}} = \mathbf{0.6\ atrasado}$$

Enfoque de impedancia: La corriente **I** también puede calcularse al encontrar primero la impedancia total de la red:

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L} = \frac{(3.33\ \Omega \angle 0°)(2.5\ \Omega \angle 90°)}{3.33\ \Omega \angle 0° + 2.5\ \Omega \angle 90°}$$
$$= \frac{8.325 \angle 90°}{4.164 \angle 36.87°} = \mathbf{2\ \Omega \angle 53.13°}$$

Y luego, utilizando la ley de Ohm, obtenemos:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{20\text{ V} \angle 53.13°}{2\ \Omega \angle 53.13°} = \mathbf{10\ A \angle 0°}$$

R-C

Vea la figura 15.66.

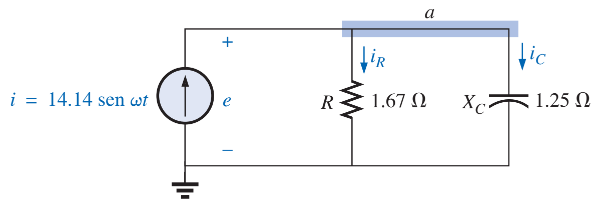


FIGURA 15.66
Red R-C en paralelo.

Notación fasorial Como se muestra en la figura 15.67.

$\mathbf{Y}_T$ y $\mathbf{Z}_T$

$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_C = G \angle 0° + B_C \angle 90° = \frac{1}{1.67\ \Omega} \angle 0° + \frac{1}{1.25\ \Omega} \angle 90°$$
$$= 0.6\text{ S} \angle 0° + 0.8\text{ S} \angle 90° = 0.6\text{ S} + j\,0.8\text{ S} = \mathbf{1.0\ S \angle 53.13°}$$
$$\mathbf{Z}_T = \frac{1}{\mathbf{Y}_T} = \frac{1}{1.0\text{ S} \angle 53.13°} = \mathbf{1\ \Omega \angle -53.13°}$$

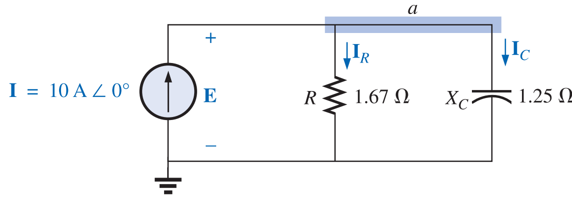


FIGURA 15.67
Aplicación de la notación fasorial a la red de la figura 15.66.

Diagrama de admitancia: Como se muestra en la figura 15.68.

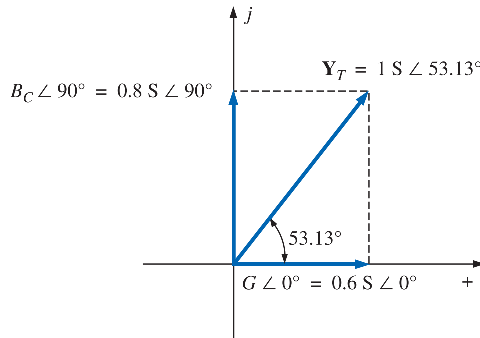


FIGURA 15.68
Diagrama de admitancia para la red R-C en paralelo de la figura 15.66.

E

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{Y}_T} = \frac{10 \text{ A } \angle 0°}{1 \text{ S } \angle 53.13°} = \mathbf{10 \text{ V } \angle -53.13°}$$

$\mathbf{I}_R$ e $\mathbf{I}_C$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_R &= (E \angle \theta)(G \angle 0°)\\ &= (10 \text{ V } \angle -53.13°)(0.6 \text{ S } \angle 0°) = \mathbf{6 \text{ A } \angle -53.13°}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_C &= (E \angle \theta)(B_C \angle 90°)\\ &= (10 \text{ V } \angle -53.13°)(0.8 \text{ S } \angle 90°) = \mathbf{8 \text{ A } \angle 36.87°}\end{aligned}$$

Ley de corriente de Kirchhoff: En el nodo *a*,

$$\mathbf{I} - \mathbf{I}_R - \mathbf{I}_C = 0$$

o bien:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C$$

lo cual también puede verificarse (como para la red *R-L*) mediante álgebra vectorial.

Diagrama fasorial: El diagrama fasorial de la figura 15.69 indica que **E** se encuentra en fase con la corriente a través del resistor $\mathbf{I}_R$ y retrasado con respecto a la corriente capacitiva $\mathbf{I}_C$ por 90°.

Dominio del tiempo:

$$\begin{aligned}e &= \sqrt{2}(10) \text{ sen}(\omega t - 53.13°) = \mathbf{14.14 \text{ sen}(\omega t - 53.13°)}\\ i_R &= \sqrt{2}(6) \text{ sen}(\omega t - 53.13°) = \mathbf{8.48 \text{ sen}(\omega t - 53.13°)}\\ i_C &= \sqrt{2}(8) \text{ sen}(\omega t + 36.87°) = \mathbf{11.31 \text{ sen}(\omega t + 36.87°)}\end{aligned}$$

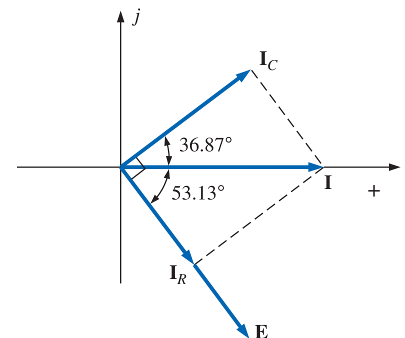


FIGURA 15.69
Diagrama fasorial para la red R-C en paralelo de la figura 15.66.

En la figura 15.70 aparece una gráfica de todas las corrientes y el voltaje. Observe que e e i_R están en fase y e se encuentra atrasado con respecto a i_C por 90°.

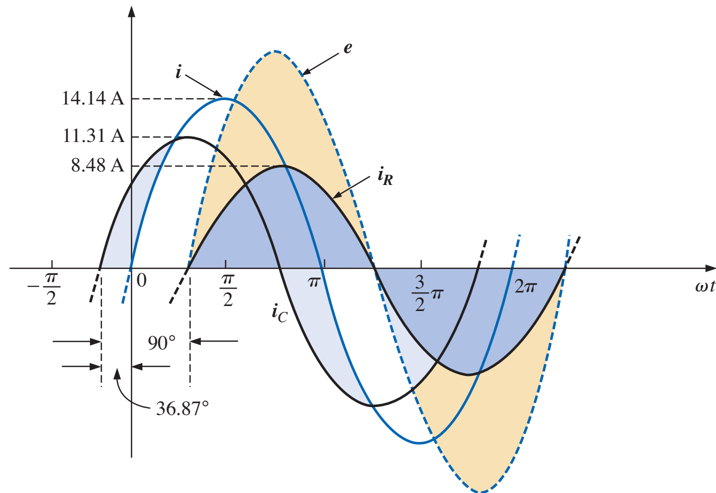


FIGURA 15.70
Formas de onda para la red R-C en paralelo de la figura 15.66.

Potencia:

$$P_T = EI\cos\theta = (10\text{ V})(10\text{ A})\cos 53.13° = (10)^2(0.6) = \mathbf{60\ W}$$

o bien: $$P_T = E^2G = (10\text{ V})^2(0.6\text{ S}) = \mathbf{60\ W}$$

o, por último,

$$\begin{aligned}P_T = P_R + P_C &= EI_R\cos\theta_R + EI_C\cos\theta_C\\ &= (10\text{ V})(6\text{ A})\cos 0° + (10\text{ V})(8\text{ A})\cos 90°\\ &= \mathbf{60\ W}\end{aligned}$$

Factor de potencia: El factor de potencia del circuito es:

$$F_p = \cos 53.13° = \mathbf{0.6\ adelantado}$$

Utilizando la ecuación (15.32) tenemos:

$$F_p = \cos\theta_T = \frac{G}{Y_T} = \frac{0.6\text{ S}}{1.0\text{ S}} = \mathbf{0.6\ adelantado}$$

Enfoque de impedancia: El voltaje **E** también puede calcularse encontrando primero la impedancia total del circuito:

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C} = \frac{(1.67\ \Omega\angle 0°)(1.25\ \Omega\angle -90°)}{1.67\ \Omega\angle 0° + 1.25\ \Omega\angle -90°} = \frac{2.09\angle -90°}{2.09\angle -36.81°} = \mathbf{1\ \Omega\angle -53.19°}$$

y luego, utilizando la ley de Ohm, encontramos:

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_T = (10\text{ A}\angle 0°)(1\ \Omega\angle -53.19°) = \mathbf{10\ V\angle -53.19°}$$

R-L-C

Vea la figura 15.71.

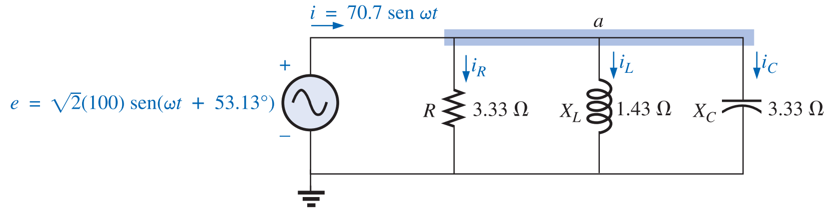


FIGURA 15.71
Red de ca R-L-C en paralelo.

Notación fasorial: Como se muestra en la figura 15.72.

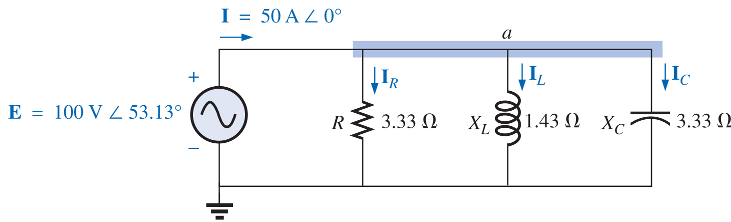


FIGURA 15.72
Aplicación de la notación fasorial a la red de la figura 15.71.

$\mathbf{Y}_T$ y $\mathbf{Z}_T$

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_T &= \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_C = G\angle 0° + B_L\angle -90° + B_C\angle 90°\\ &= \frac{1}{3.33\ \Omega}\angle 0° + \frac{1}{1.43\ \Omega}\angle -90° + \frac{1}{3.33\ \Omega}\angle 90°\\ &= 0.3\ \text{S}\angle 0° + 0.7\ \text{S}\angle -90° + 0.3\ \text{S}\angle 90°\\ &= 0.3\ \text{S} - j\,0.7\ \text{S} + j\,0.3\ \text{S}\\ &= 0.3\ \text{S} - j\,0.4\ \text{S} = \mathbf{0.5\ S\angle -53.13°}\end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}_T = \frac{1}{\mathbf{Y}_T} = \frac{1}{0.5\ \text{S}\angle -53.13°} = \mathbf{2\ \Omega\angle 53.13°}$$

Diagrama de admitancia: Como se muestra en la figura 15.73.

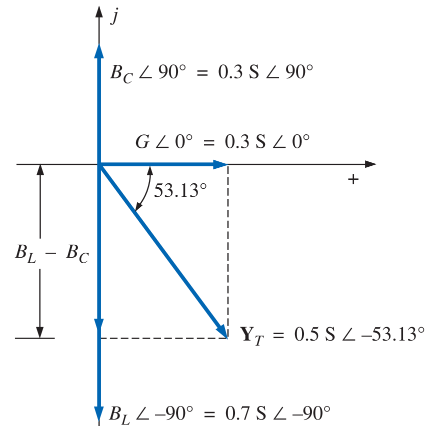


FIGURA 15.73
Diagrama de admitancia para la red R-L-C en paralelo de la figura 15.71.

I

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \mathbf{E}\mathbf{Y}_T = (100\ \text{V}\angle 53.13°)(0.5\ \text{S}\angle -53.13°) = \mathbf{50\ A\angle 0°}$$

$\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}_C$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_R &= (E\angle\theta)(G\angle 0°)\\ &= (100\ \text{V}\angle 53.13°)(0.3\ \text{S}\angle 0°) = \mathbf{30\ A\angle 53.13°}\\ \mathbf{I}_L &= (E\angle\theta)(B_L\angle -90°)\\ &= (100\ \text{V}\angle 53.13°)(0.7\ \text{S}\angle -90°) = \mathbf{70\ A\angle -36.87°}\\ \mathbf{I}_C &= (E\angle\theta)(B_C\angle 90°)\\ &= (100\ \text{V}\angle 53.13°)(0.3\ \text{S}\angle +90°) = \mathbf{30\ A\angle 143.13°}\end{aligned}$$

Ley de corriente de Kirchhoff: En el nodo *a*,

$$\mathbf{I} - \mathbf{I}_R - \mathbf{I}_L - \mathbf{I}_C = 0$$

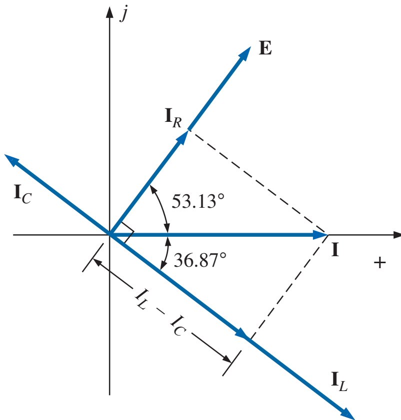


FIGURA 15.74
Diagrama fasorial para la red R-L-C en paralelo de la figura 15.71.

o bien: $$\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C$$

Diagrama fasorial: El diagrama fasorial de la figura 15.74 indica que el voltaje aplicado **E** se encuentra en fase con la corriente $\mathbf{I}_R$ que pasa por el resistor, adelanta a la corriente $\mathbf{I}_L$ en el inductor por 90°, y está atrasado con respecto a la corriente $\mathbf{I}_C$ del capacitor por 90°.

Dominio del tiempo:

$$i = \sqrt{2}(50)\text{ sen }\omega t = \mathbf{70.70\text{ sen }\omega t}$$
$$i_R = \sqrt{2}(30)\text{ sen}(\omega t + 53.13°) = \mathbf{42.42\text{ sen}(\omega t + 53.13°)}$$
$$i_L = \sqrt{2}(70)\text{ sen}(\omega t - 36.87°) = \mathbf{98.98\text{ sen}(\omega t - 36.87°)}$$
$$i_C = \sqrt{2}(30)\text{ sen}(\omega t + 143.13°) = \mathbf{42.42\text{ sen}(\omega t + 143.13°)}$$

En la figura 15.75 aparece una gráfica de todas las corrientes y el voltaje aplicado.

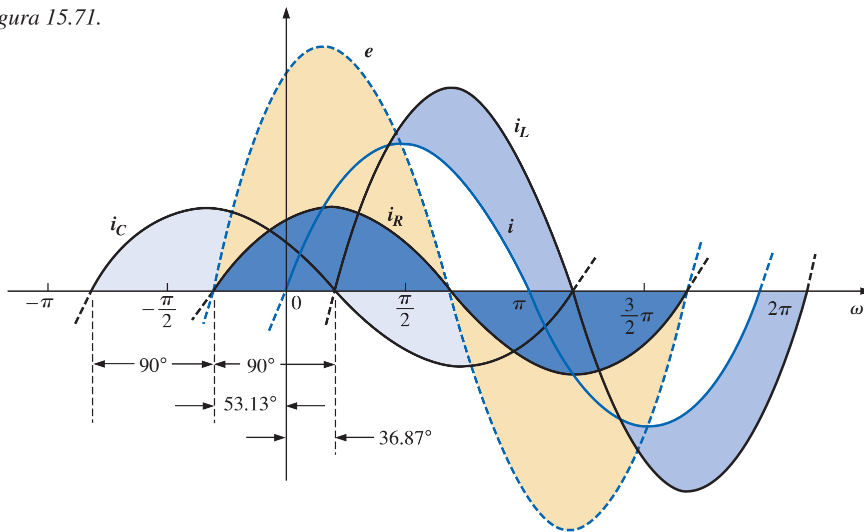


FIGURA 15.75
Formas de onda para la red R-L-C en paralelo de la figura 15.71.

Potencia: La potencia total en watts entregada al circuito es:

$$P_T = EI\cos\theta = (100\text{ V})(50\text{ A})\cos 53.13° = (5000)(0.6) = \mathbf{3000\text{ W}}$$

o bien: $$P_T = E^2G = (100\text{ V})^2(0.3\text{ S}) = \mathbf{3000\text{ W}}$$

o, por úlimo,

$$\begin{aligned} P_T &= P_R + P_L + P_C \\ &= EI_R\cos\theta_R + EI_L\cos\theta_L + EL_C\cos\theta_C \\ &= (100\text{ V})(30\text{ A})\cos 0° + (100\text{ V})(70\text{ A})\cos 90° \\ &\qquad + (100\text{ V})(30\text{ A})\cos 90° \\ &= 3000\text{ W} + 0 + 0 \\ &= \mathbf{3000\text{ W}} \end{aligned}$$

Factor de potencia: El factor de potencia del circuito es:

$$F_p = \cos\theta_T = \cos 53.13° = \mathbf{0.6\text{ atrasado}}$$

Utilizando la ecuación (15.32) obtenemos:

$$F_p = \cos\theta_T = \frac{G}{Y_T} = \frac{0.3\ \text{S}}{0.5\ \text{S}} = \mathbf{0.6\ atrasado}$$

Enfoque de impedancia: La corriente de entrada **I** también se puede determinar encontrando primero la impedancia total de la siguiente forma:

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_L\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_L\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_C} = \mathbf{2\ \Omega\ \angle 53.13^\circ}$$

y, al aplicar la ley de Ohm, obtenemos:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{100\ \text{V}\ \angle 53.13^\circ}{2\ \Omega\ \angle 53.13^\circ} = \mathbf{50\ A\ \angle 0^\circ}$$

15.9 REGLA DEL DIVISOR DE CORRIENTE

El formato básico para la **regla del divisor de corriente** en circuitos de ca es exactamente el mismo que para circuitos de cd; es decir, para dos ramas paralelas con impedancias $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ como se muestra en la figura 15.76,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \quad \text{o} \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \qquad \mathbf{(15.33)}$$

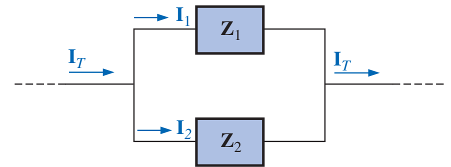


FIGURA 15.76
Aplicación de la regla del divisor de corriente.

EJEMPLO 15.15 Utilizando la regla del divisor de corriente, encuentre la corriente a través de cada impedancia de la figura 15.77.

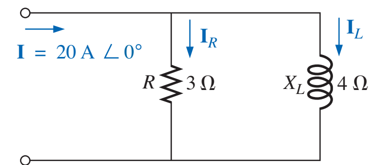


FIGURA 15.77
Ejemplo 15.15.

Solución:

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{Z}_L\mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L} = \frac{(4\ \Omega\ \angle 90^\circ)(20\ \text{A}\ \angle 0^\circ)}{3\ \Omega\ \angle 0^\circ + 4\ \Omega\ \angle 90^\circ} = \frac{80\ \text{A}\angle 90^\circ}{5\ \angle 53.13^\circ}$$
$$= \mathbf{16\ A\ \angle 36.87^\circ}$$

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L} = \frac{(3\ \Omega\ \angle 0^\circ)(20\ \text{A}\ \angle 0^\circ)}{5\ \Omega\ \angle 53.13^\circ} = \frac{60\ \text{A}\angle 0^\circ}{5\ \angle 53.13^\circ}$$
$$= \mathbf{12\ A\ \angle -53.13^\circ}$$

EJEMPLO 15.16 Utilizando la regla del divisor de corriente, encuentre la corriente a través de cada rama paralela de la figura 15.78.

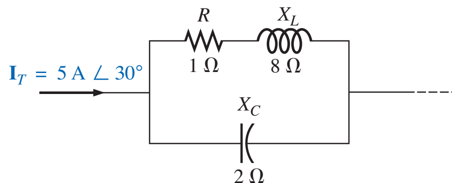


FIGURA 15.78
Ejemplo 15.16.

Solución:

$$\mathbf{I}_{R\text{-}L} = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_{R\text{-}L}} = \frac{(2\ \Omega\ \angle -90^\circ)(5\ \text{A}\ \angle 30^\circ)}{-j\,2\ \Omega + 1\ \Omega + j\,8\ \Omega} = \frac{10\ \text{A}\angle -60^\circ}{1 + j\,6}$$
$$= \frac{10\ \text{A}\angle -60^\circ}{6.083\ \angle 80.54^\circ} \cong \mathbf{1.644\ A\ \angle -140.54^\circ}$$

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{Z}_{R\text{-}L}\mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_{R\text{-}L} + \mathbf{Z}_C} = \frac{(1\ \Omega + j\ 8\ \Omega)(5\ \text{A}\ \angle 30^\circ)}{6.08\ \Omega\ \angle 80.54^\circ}$$

$$= \frac{(8.06\ \angle 82.87^\circ)(5\ \text{A} \angle 30^\circ)}{6.08\ \angle 80.54^\circ} = \frac{40.30\ \text{A} \angle 112.87^\circ}{6.083\ \angle 80.54^\circ}$$

$$= \mathbf{6.625\ A\ \angle 32.33^\circ}$$

15.10 RESPUESTA EN FRECUENCIA DE LA RED *R-L* EN PARALELO

En la sección 15.5 se analizó la respuesta en frecuencia de un circuito *R-C* en serie. Ahora observemos el impacto de la frecuencia sobre la impedancia y la corriente inductiva totales de la red *R-L* en paralelo de la figura 15.79 para un intervalo de frecuencia de 0 a 40 kHz.

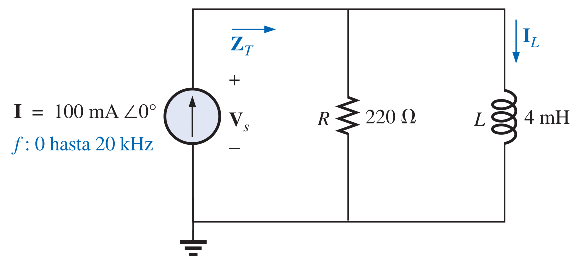


FIGURA 15.79
Determinación de la respuesta en frecuencia de una red R-L en paralelo.

Z_T Antes de ver los detalles, primero desarrollaremos cierta "sensibilidad" para advertir el impacto de la frecuencia sobre la red de la figura 15.79 al observar las curvas de impedancia en función de la frecuencia de los elementos individuales, como se muestra en la figura 15.80. El hecho de que los elementos estén ahora en paralelo requiere que consideremos sus características de una forma distinta a la que ocurrió para el circuito *R-C* en serie de la sección 15.5. Recuerde que para elementos en paralelo, el elemento con la menor im-

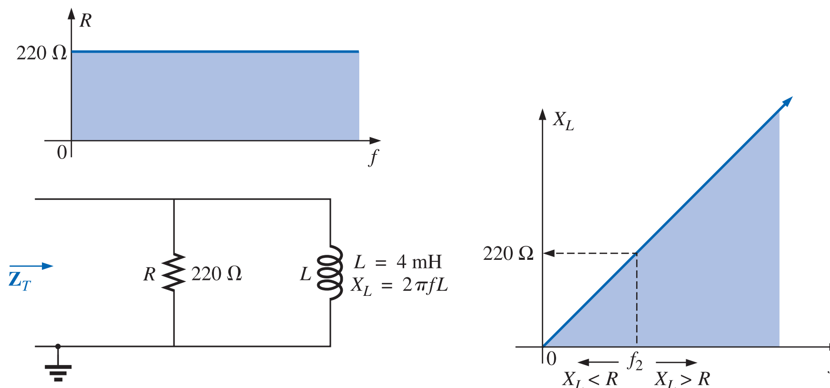


FIGURA 15.80
Respuesta en frecuencia de los elementos individuales de una red R-L en paralelo.

pedancia tendrá el mayor impacto sobre la impedancia total a esa frecuencia. Por ejemplo, en la figura 15.80, X_L es muy pequeña a bajas frecuencias en comparación con R, estableciendo a X_L como el factor dominante en este intervalo de frecuencia. En otras palabras, a bajas frecuencias la red será principalmente inductiva y el ángulo asociado con la impedancia total estará cercano a 90°, como sucede con un inductor puro. A medida que la frecuencia se incremente, X_L aumentará hasta igualar la impedancia del resistor (220 Ω). La frecuencia a la que ocurre esta situación puede determinarse en la siguiente forma:

$$X_L = 2\pi f_2 L = R$$

y

$$f_2 = \frac{R}{2\pi L} \tag{15.34}$$

la cual, para la red de la figura 15.79 es:

$$f_2 = \frac{R}{2\pi L} = \frac{220\ \Omega}{2\pi(4 \times 10^{-3}\ \text{H})}$$
$$\cong \mathbf{8.75\ kHz}$$

la cual cae dentro del intervalo de frecuencias de interés.

Para frecuencias menores que f_2, $X_L < R$, y para frecuencias mayores que f_2, $X_L > R$, como se muestra en la figura 15.80. Es posible desarrollar una ecuación general para la impedancia total en forma vectorial de la siguiente forma:

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L}$$
$$= \frac{(R\angle 0°)(X_L\angle 90°)}{R + jX_L} = \frac{RX_L\angle 90°}{\sqrt{R^2 + X_L^2}\angle \tan^{-1} X_L/R}$$

y

$$\mathbf{Z}_T = \frac{RX_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \angle 90° - \tan^{-1} X_L/R$$

por lo que:

$$\mathbf{Z}_T = \frac{RX_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \tag{15.35}$$

y

$$\theta_T = 90° - \tan^{-1}\frac{X_L}{R} = \tan^{-1}\frac{R}{X_L} \tag{15.36}$$

Ahora pueden encontrarse la magnitud y el ángulo de la impedancia total en cualquier frecuencia de interés mediante la simple sustitución en las ecuaciones (15.35) y (15.36).

f = 1 kHz

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(1\ \text{kHz})(4 \times 10^{-3}\ \text{H}) = 25.12\ \Omega$$

y

$$Z_T = \frac{RX_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{(220\ \Omega)(25.12\ \Omega)}{\sqrt{(220\ \Omega)^2 + (25.12\ \Omega)^2}} = \mathbf{24.96\ \Omega}$$

con:

$$\theta_T = \tan^{-1}\frac{R}{X_L} = \tan^{-1}\frac{220\ \Omega}{25.12\ \Omega}$$
$$= \tan^{-1} 8.76 = 83.49°$$

y $$\mathbf{Z}_T = \mathbf{24.96\ \Omega\ \angle 83.49^\circ}$$

Este valor se compara de forma muy cercana con $X_L = 25.12\ \Omega\ \angle 90^\circ$, lo cual podría ser si la red fuera puramente inductiva $(R = \infty\ \Omega)$. Por tanto, nuestro supuesto de que la red es en su mayoría inductiva a bajas frecuencias queda confirmado.

Continuando el análisis:

$$f = 5\text{ kHz:}\quad \mathbf{Z}_T = \mathbf{109.1\ \Omega\ \angle 60.23^\circ}$$
$$f = 10\text{ kHz:}\quad \mathbf{Z}_T = \mathbf{165.5\ \Omega\ \angle 41.21^\circ}$$
$$f = 15\text{ kHz:}\quad \mathbf{Z}_T = \mathbf{189.99\ \Omega\ \angle 30.28^\circ}$$
$$f = 20\text{ kHz:}\quad \mathbf{Z}_T = \mathbf{201.53\ \Omega\ \angle 23.65^\circ}$$
$$f = 30\text{ kHz:}\quad \mathbf{Z}_T = \mathbf{211.19\ \Omega\ \angle 16.27^\circ}$$
$$f = 40\text{ kHz:}\quad \mathbf{Z}_T = \mathbf{214.91\ \Omega\ \angle 12.35^\circ}$$

En $f = 40$ kHz, observe lo cercana que está la magnitud de Z_T al nivel de resistencia de 220 Ω, y cómo el ángulo asociado con la impedancia total se aproxima a cero grados. El resultado es una red con características terminales que se vuelve más y más resistiva a medida que la frecuencia se incrementa, lo que confirma aún más las anteriores conclusiones desarrolladas mediante las curvas de la figura 15.80.

Las gráficas de Z_T en función de la frecuencia en la figura 15.81 y θ_T en la figura 15.82 muestran claramente la transición desde una red inductiva hasta una que posee características resistivas. Observe que la frecuencia de transición de 8.75 kHz ocurre justo en medio del punto de inflexión de las curvas tanto para Z_T como para θ_T.

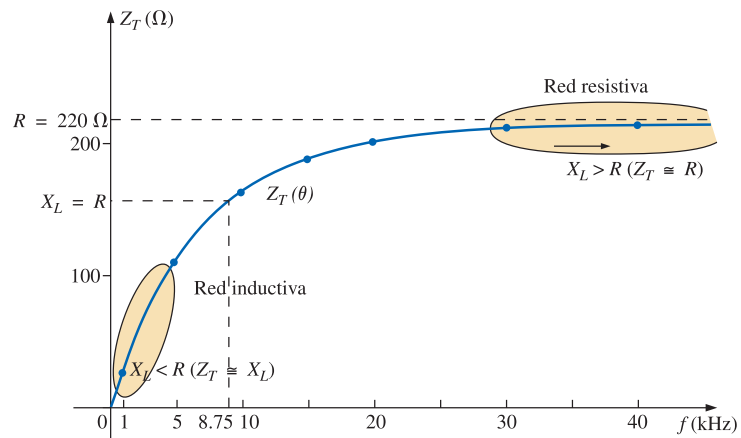


FIGURA 15.81
Magnitud de la impedancia de entrada en función de la frecuencia para la red de la figura 15.79.

Un análisis de las figuras 15.47 y 15.81 mostrará que una red *R-C* en serie y una red *R-L* en paralelo tendrán un nivel de impedancia que se aproxima a la resistencia de la red en altas frecuencias. El circuito capacitivo se aproxima al nivel desde arriba, mientras que la red inductiva hace lo mismo desde abajo. Para el circuito *R-L* en serie y la red *R*-C en paralelo, la impedancia total comenzará al nivel de resistencia y luego presentará las características de los elementos reactivos en altas frecuencias.

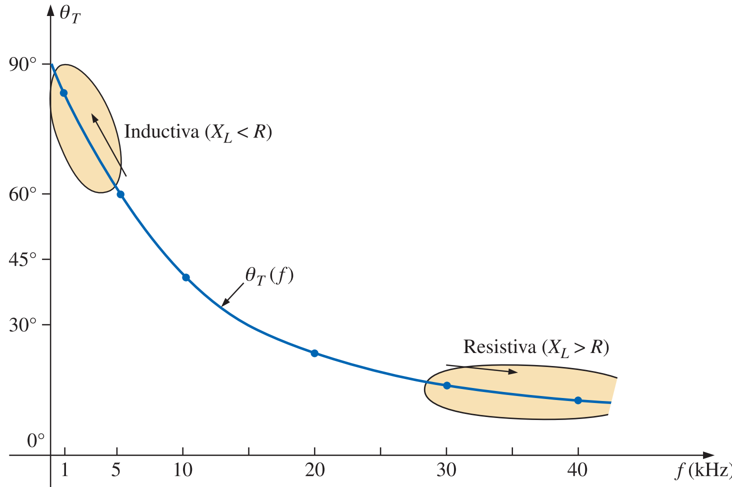


FIGURA 15.82
Ángulo de fase de la impedancia de entrada en función de la frecuencia para la red de la figura 15.79.

$\mathbf{I}_L$ Al aplicar la regla del divisor de corriente a la red de la figura 15.79 se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{Z}_R\mathbf{I}}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L}$$

$$= \frac{(R \angle 0°)(I \angle 0°)}{R + j X_L} = \frac{RI \angle 0°}{\sqrt{R^2 + X_L^2} \,\underline{/\tan^{-1} X_L/R}}$$

e
$$\mathbf{I}_L = I_L \angle \theta_L = \frac{RI}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \,\underline{/-\tan^{-1} X_L/R}$$

Por tanto, la magnitud de I_L se determina mediante:

$$I_L = \frac{RI}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \tag{15.37}$$

y el ángulo de fase θ_L, por el que $\mathbf{I}_L$ adelanta a $\mathbf{I}$, está dado por:

$$\theta_L = -\tan^{-1}\frac{X_L}{R} \tag{15.38}$$

Dado que θ_L es siempre negativo, la magnitud de θ_L es, en realidad, el ángulo por el cual $\mathbf{I}_L$ se encuentra atrasada con respecto a $\mathbf{I}$.

Para comenzar nuestro análisis, consideremos primero el caso de $f = 0$ Hz (condiciones de cd).

f = 0 Hz

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(0 \text{ Hz})L = 0\ \Omega$$

Al aplicar el equivalente de corto circuito para el inductor en la figura 15.79 se obtiene:

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I} = 100 \text{ mA} \angle 0°$$

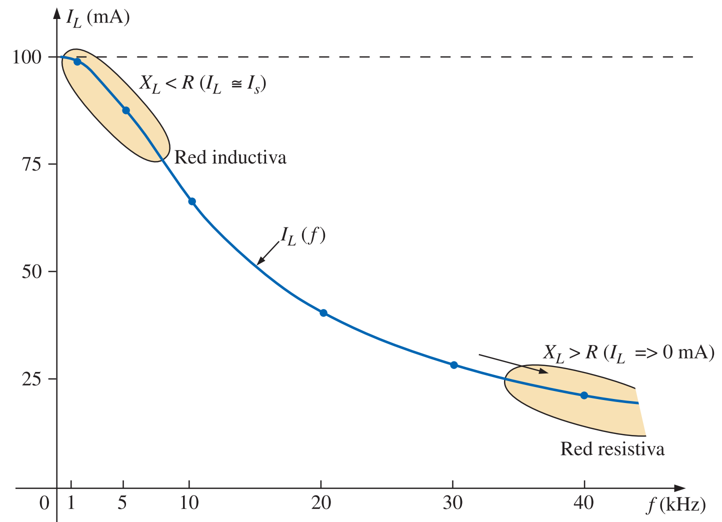


FIGURA 15.83
Magnitud de la corriente $\mathbf{I}_L$ *en función de la frecuencia para la red R-L en paralelo de la figura 15.79.*

como se muestra en las figuras 15.83 y 15.84.

***f* = 1 kHz** Al aplicar la ecuación (15.37):

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(1 \text{ kHz})(4 \text{ mH}) = 25.12\ \Omega$$

y
$$\sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(220\ \Omega)^2 + (25.12\ \Omega)^2} = 221.43\ \Omega$$

e
$$I_L = \frac{RI}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{(220\ \Omega)(100 \text{ mA})}{221.43\ \Omega} = \mathbf{99.35\ mA}$$

con:

$$\theta_L = \tan^{-1}\frac{X_L}{R} = -\tan^{-1}\frac{25.12\ \Omega}{220\ \Omega} = -\tan^{-1} 0.114 = \mathbf{-6.51^\circ}$$

e
$$\mathbf{I}_L = \mathbf{99.35\ mA} \angle \mathbf{-6.51^\circ}$$

El resultado es una corriente $\mathbf{I}_L$ que sigue muy cercana a la corriente de la fuente **I** tanto en magnitud como en fase.

Continuando el análisis:

$$f = 5 \text{ kHz:} \quad \mathbf{I}_L = \mathbf{86.84\ mA} \angle \mathbf{-29.72^\circ}$$
$$f = 10 \text{ kHz:} \quad \mathbf{I}_L = \mathbf{65.88\ mA} \angle \mathbf{-48.79^\circ}$$
$$f = 15 \text{ kHz:} \quad \mathbf{I}_L = \mathbf{50.43\ mA} \angle \mathbf{-59.72^\circ}$$
$$f = 20 \text{ kHz:} \quad \mathbf{I}_L = \mathbf{40.11\ mA} \angle \mathbf{-66.35^\circ}$$
$$f = 30 \text{ kHz:} \quad \mathbf{I}_L = \mathbf{28.02\ mA} \angle \mathbf{-73.73^\circ}$$
$$f = 40 \text{ kHz:} \quad \mathbf{I}_L = \mathbf{21.38\ mA} \angle \mathbf{-77.65^\circ}$$

La gráfica de la magnitud de I_L en función de la frecuencia se proporciona en la figura 15.83, y revela que la corriente a través de la bobina descendió desde su máximo de 100 mA hasta casi 20 mA a 40 kHz. A medida que la reactancia de la bobina se incrementó con la frecuencia, más de la corriente de la

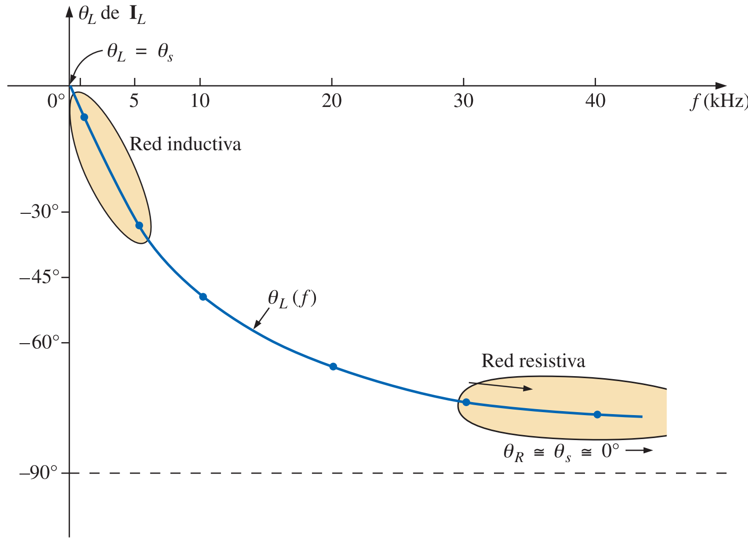


FIGURA 15.84
Ángulo de fase de la corriente $\mathbf{I}_L$ en función de la frecuencia para la red R-L en paralelo de la figura 15.79.

fuente eligió la trayectoria de baja resistencia del resistor. La magnitud del ángulo de fase entre $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}$ se aproxima a 90° con un incremento en la frecuencia, como se muestra en la figura 15.84, dejando muy atrás su valor inicial de cero grados a $f = 0$ Hz.

A $f = 1$ kHz, el diagrama fasorial de la red aparece como se muestra en la figura 15.85. Primero observe que la magnitud y el ángulo de fase de $\mathbf{I}_L$ están muy cercanos a los de $\mathbf{I}$. Dado que el voltaje en una bobina debe adelantar a la corriente que pasa por una bobina en una magnitud de 90°, el voltaje $\mathbf{V}_s$ aparecerá como se muestra. El voltaje en un resistor está en fase con la corriente que pasa por el resistor, dando por resultado la dirección de $\mathbf{I}_R$ que aparece en la figura 15.85. Como es de esperarse, a esta frecuencia $R > X_L$, y la corriente I_R es relativamente pequeña en magnitud.

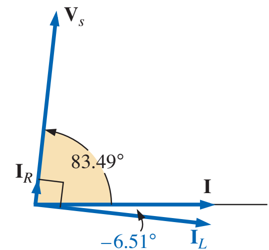


FIGURA 15.85
Diagrama fasorial para la red R-L en paralelo de la figura 15.79 a $f = 1$ kHz.

A $f = 40$ kHz, el diagrama fasorial cambiará al que aparece en la figura 15.86. Observe que $\mathbf{I}_R$ e $\mathbf{I}$ están cercanos en magnitud y fase dado que $X_L > R$. La magnitud de $\mathbf{I}_L$ habrá caído a niveles muy bajos y el ángulo de fase asociado con $\mathbf{I}_L$ se aproximará a −90°. La red se vuelve así más "resistiva" en comparación con sus características "inductivas" a bajas frecuencias.

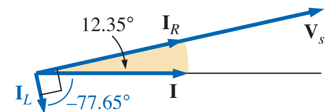


FIGURA 15.86
Diagrama fasorial para la red R-L en paralelo de la figura 15.79 a $f = 40$ kHz.

El análisis de una red *R-C* o *R-L-C* en paralelo procedería de una forma muy similar, con la impedancia inductiva predominando a bajas frecuencias y la reactancia capacitiva predominando a altas frecuencias.

15.11 RESUMEN: REDES DE ca EN PARALELO

A continuación se presenta un resumen de conclusiones importantes que se pueden derivar del análisis y los ejemplos desarrollados en la sección anterior. La lista no es exhaustiva, pero destaca algunas de las consideraciones que deberán manejarse en los futuros análisis de sistemas de ca.

Para redes de ca en paralelo con elementos reactivos:

1. ***La admitancia total (impedancia) será dependiente de la frecuencia.***
2. ***La impedancia de cualquier elemento puede ser menor que la impedancia total (recuerde que para circuitos de cd la resistencia total siempre debía ser menor que el resistor en paralelo más pequeño).***
3. ***Las susceptancias inductivas y capacitivas están en oposición directa sobre un diagrama de admitancia.***
4. ***Dependiendo de la frecuencia aplicada, una misma red puede ser predominantemente inductiva o capacitiva.***
5. ***A frecuencias menores los elementos inductivos tendrán, por lo general, el mayor impacto sobre la impedancia total, mientras que en altas frecuencias los elementos capacitivos tendrán, por lo general, el mayor impacto.***
6. ***La magnitud de la corriente a través de cualquier rama puede ser mayor que la corriente de la fuente.***
7. ***La magnitud de la corriente a través de un elemento, en comparación con los otros elementos de la red, está directamente relacionada con la magnitud de su impedancia; es decir, mientras más pequeña sea la impedancia de un elemento, mayor será la magnitud de la corriente a través del elemento.***
8. ***La corriente a través de una bobina está siempre en oposición directa con la corriente a través de un capacitor sobre un diagrama fasorial.***
9. ***El voltaje aplicado está siempre en fase con la corriente que pasa por los elementos resistivos, adelanta al voltaje en todos los elementos inductivos por 90°, y está atrasado con respecto a la corriente a través de todos los elementos capacitivos por 90°.***
10. ***Mientras menor sea el elemento resistivo de una red en comparación con la susceptancia reactiva neta, más cercano estará el factor de potencia a la unidad.***

15.12 CIRCUITOS EQUIVALENTES

En un circuito de ca en serie, la impedancia total de dos o más elementos en serie a menudo es equivalente a la impedancia que puede lograrse con menos elementos de distintos valores, siendo esos elementos y sus valores determinados por la frecuencia aplicada. Esto es válido también para circuitos en paralelo. Para el circuito de la figura 15.87(a).

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L} = \frac{(5\ \Omega \angle -90°)(10\ \Omega \angle 90°)}{5\ \Omega \angle -90° + 10\ \Omega \angle 90°} = \frac{50 \angle 0°}{5 \angle 90°}$$
$$= 10\ \Omega \angle -90°$$

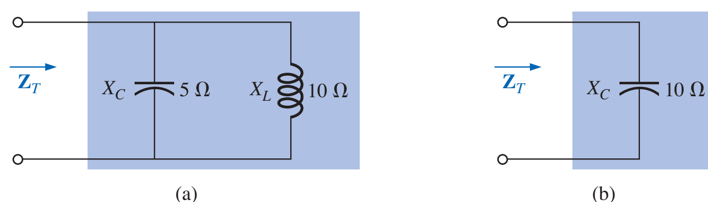


FIGURA 15.87
Definición de la equivalencia entre dos redes a una frecuencia específica.

La impedancia total a la frecuencia aplicada es equivalente a un capacitor con una reactancia de 10 Ω, como se muestra en la figura 15.87(b). Siempre debe tenerse presente que esta equivalencia es válida sólo a la frecuencia aplicada. Si la frecuencia cambia, la reactancia de cada elemento cambia, y el circuito equivalente cambiará —quizá de capacitivo a inductivo en el ejemplo anterior.

Otro resultado interesante aparece cuando la impedancia de un circuito en paralelo, como el de la figura 15.88(a), se expresa en forma rectangular. En este caso,

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_L\mathbf{Z}_R}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_R} = \frac{(4\ \Omega\ \angle 90^\circ)(3\ \Omega\ \angle 0^\circ)}{4\ \Omega\ \angle 90^\circ + 3\ \Omega\ \angle 0^\circ}$$
$$= \frac{12\ \angle 90^\circ}{5\ \angle 53.13^\circ} = 2.40\ \Omega\ \angle 36.87^\circ$$
$$= 1.920\ \Omega + j\ 1.440\ \Omega$$

lo cual es la impedancia de un circuito en serie con un resistor de 1.92 Ω y reactancia inductiva de 1.44 Ω, como se muestra en la figura 15.88(b).

La corriente **I** será la misma en cada circuito de las figuras 15.87 o 15.88 si se aplica igual voltaje de entrada **E**. Para un circuito en paralelo de un elemento resistivo y un elemento reactivo, el circuito en serie con la misma impedancia de entrada siempre estará compuesto por un elemento resistivo y un elemento reactivo. La impedancia de cada elemento del circuito en serie será diferente de la del circuito en paralelo, pero los elementos reactivos siempre serán del mismo tipo; es decir, un circuito *R-L* y un circuito *R-C* en paralelo tendrán un circuito equivalente *R-L* y *R-C* en serie, respectivamente. Lo mismo es válido cuando se convierte un circuito en serie a uno en paralelo. En el análisis siguiente, tenga presente que

el término* equivalente *se refiere sólo al hecho de que para el mismo potencial aplicado, se obtendrán las mismas impedancia y corriente de entrada.

Para formular la equivalencia entre los circuitos en serie y en paralelo, el circuito en serie equivalente para un resistor y la reactancia en paralelo podrán calcularse mediante la determinación de la impedancia total del circuito en forma rectangular; es decir, para el circuito de la figura 15.89(a),

$$\mathbf{Y}_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{\pm j\,X_p} = \frac{1}{R_P} \mp j\frac{1}{X_p}$$

y

$$\mathbf{Z}_p = \frac{1}{\mathbf{Y}_p} = \frac{1}{(1/R_p) \mp j\,(1/X_p)}$$
$$= \frac{1/R_p}{(1/R_p)^2 + (1/X_p)^2} \pm j\frac{1/X_p}{(1/R_p)^2 + (1/X_p)^2}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de cada término por $R_p^2X_p^2$ resulta:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{R_pX_p^2}{X_p^2 + R_p^2} \pm j\frac{R_p^2X_p}{X_p^2 + R_p^2}$$
$$= R_s \pm j\,X_s \qquad \text{[Figura 15.89(b)]}$$

y

$$R_s = \frac{R_pX_p^2}{X_p^2 + R_p^2} \tag{15.39}$$

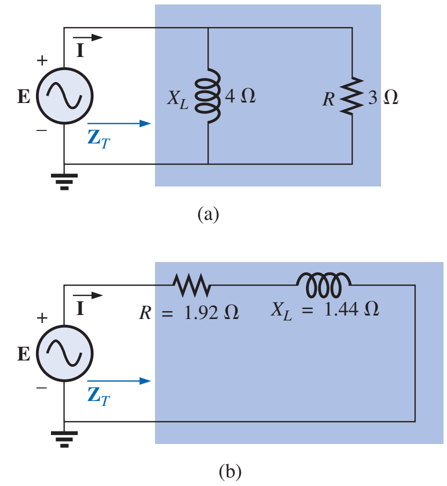


FIGURA 15.88
Cálculo del circuito en serie equivalente para una red R-L en paralelo.

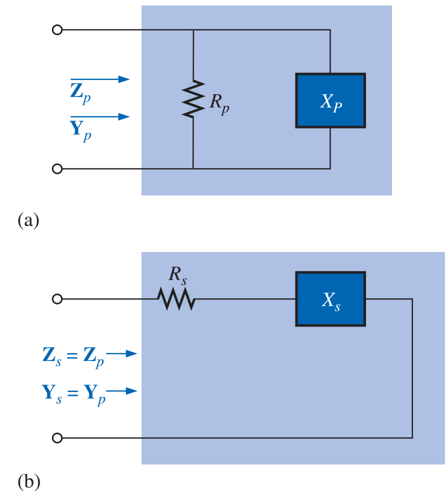


FIGURA 15.89
Definición de los parámetros de redes equivalentes en serie y en paralelo.

con:
$$X_s = \frac{R_p^2 X_p}{X_p^2 + R_p^2} \tag{15.40}$$

para la red de la figura 15.88,

$$R_s = \frac{R_p X_p^2}{X_p^2 + R_p^2} = \frac{(3\ \Omega)(4\ \Omega)^2}{(4\ \Omega)^2 + (3\ \Omega)^2} = \frac{48\ \Omega}{25} = \mathbf{1.920\ \Omega}$$

y

$$X_s = \frac{R_p^2 X_p}{X_p^2 + R_p^2} = \frac{(3\ \Omega)^2(4\ \Omega)}{(4\ \Omega)^2 + (3\ \Omega)^2} = \frac{36\ \Omega}{25} = \mathbf{1.440\ \Omega}$$

lo cual concuerda con el resultado previo.

El circuito en paralelo equivalente para un circuito con un resistor y reactancia en serie puede calcularse simplemente encontrando la admitancia total del sistema en forma rectangular; es decir, para el circuito de la figura 15.89(b),

$$\mathbf{Z}_s = R_s \pm j X_s$$

$$\mathbf{Y}_s = \frac{1}{\mathbf{Z}_s} = \frac{1}{R_s \pm j X_s} = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} \mp j \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

$$= G_p \mp j B_p = \frac{1}{R_p} \mp j \frac{1}{X_p} \qquad \text{[Figura 15.89(a)]}$$

o bien:
$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \tag{15.41}$$

con:
$$X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s} \tag{15.42}$$

Para el ejemplo anterior,

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} = \frac{(1.92\ \Omega)^2 + (1.44\ \Omega)^2}{1.92\ \Omega} = \frac{5.76\ \Omega}{1.92} = \mathbf{3.0\ \Omega}$$

y
$$X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s} = \frac{5.76\ \Omega}{1.44} = \mathbf{4.0\ \Omega}$$

como se muestra en la figura 15.88(a).

EJEMPLO 15.17 Determine el circuito en serie equivalente para la red de la figura 15.90.

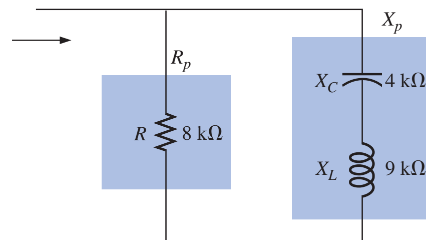


FIGURA 15.90
Ejemplo 15.17.

Solución:

$$R_p = 8\text{ k}\Omega$$
$$X_p\text{ (resultante)} = |X_L - X_C| = |9\text{ k}\Omega - 4\text{ k}\Omega|$$
$$= 5\text{ k}\Omega$$

y

$$R_s = \frac{R_p X_p^2}{X_p^2 + R_p^2} = \frac{(8\text{ k}\Omega)(5\text{ k}\Omega)^2}{(5\text{ k}\Omega)^2 + (8\text{ k}\Omega)^2} = \frac{200\text{ k}\Omega}{89} = \mathbf{2.247\text{ k}\Omega}$$

con:

$$X_s = \frac{R_p^2 X_p}{X_p^2 + R_p^2} = \frac{(8\text{ k}\Omega)^2(5\text{ k}\Omega)}{(5\text{ k}\Omega)^2 + (8\text{ k}\Omega)^2} = \frac{320\text{ k}\Omega}{89}$$
$$= \mathbf{3.596\text{ k}\Omega} \qquad \textbf{(inductiva)}$$

El circuito en serie equivalente aparece en la figura 15.91.

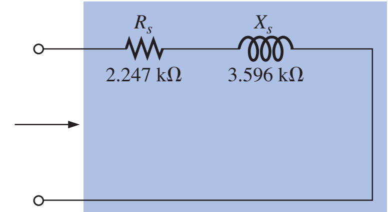


FIGURA 15.91
Circuito en serie equivalente para la red en paralelo de la figura 15.90.

EJEMPLO 15.18 Para la red de la figura 15.92:

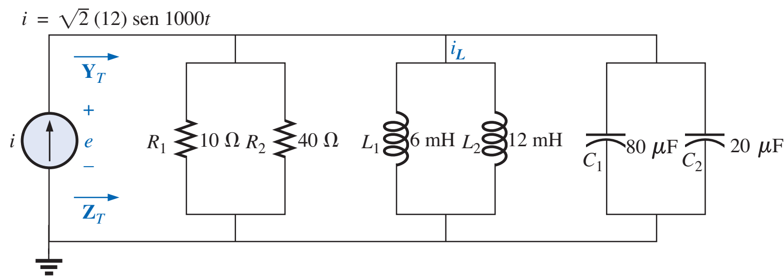


FIGURA 15.92
Ejemplo 15.18.

a. Determine $\mathbf{Y}_T$.
b. Trace el diagrama de admitancia.
c. Encuentre **E** e $\mathbf{I}_L$.
d. Calcule el factor de potencia de la red y la potencia entregada a la red.
e. Determine el circuito en serie equivalente en lo que a las características terminales de la red concierne.
f. Utilizando el circuito equivalente generado en el inciso (e), calcule **E**, y compárelo con el resultado del inciso (c).
g. Determine la potencia entregada a la red, y compárela con la solución del inciso (d).
h. Determine la red en paralelo equivalente del circuito en serie equivalente, y calcule la admitancia total $\mathbf{Y}_T$. Compare el resultado con la solución del inciso (a).

Soluciones:

a. Al combinar elementos comunes y calcular la reactancia del inductor y del capacitor obtenemos:

$$R_T = 10\ \Omega \parallel 40\ \Omega = 8\ \Omega$$
$$L_T = 6\text{ mH} \parallel 12\text{ mH} = 4\text{ mH}$$
$$C_T = 80\ \mu\text{F} + 20\ \mu\text{F} = 100\ \mu\text{F}$$

$$X_L = \omega L = (1000\text{ rad/s})(4\text{ mH}) = 4\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(1000\text{ rad/s})(100\ \mu\text{F})} = 10\ \Omega$$

La red se vuelve a trazar en la figura 15.93 con notación fasorial. La admitancia total es:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_T &= \mathbf{Y}_R + \mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_C\\ &= G\angle 0° + B_L\angle -90° + B_C\angle +90°\\ &= \frac{1}{8\ \Omega}\angle 0° + \frac{1}{4\ \Omega}\angle -90° + \frac{1}{10\ \Omega}\angle +90°\\ &= 0.125\text{ S}\angle 0° + 0.25\text{ S}\angle -90° + 0.1\text{ S}\angle +90°\\ &= 0.125\text{ S} - j\,0.25\text{ S} + j\,0.1\text{ S}\\ &= 0.125\text{ S} - j\,0.15\text{ S} = \mathbf{0.195\ S\angle -50.194°}\end{aligned}$$

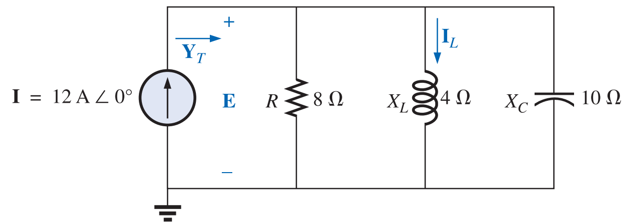


FIGURA 15.93
Aplicación de notación fasorial a la red de la figura 15.92.

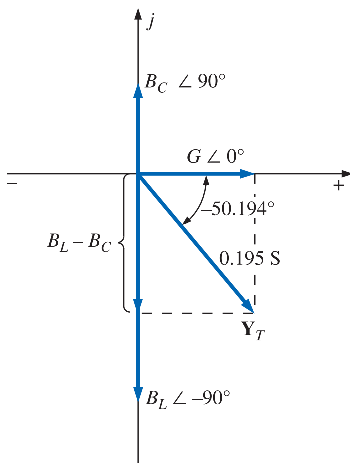


FIGURA 15.94
Diagrama de admitancia para la red R-L-C en paralelo de la figura 15.92.

b. Vea la figura 15.94.

c. $$\mathbf{E} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{Y}_T} = \frac{12\text{ A}\angle 0°}{0.195\text{ S}\angle -50.194°} = \mathbf{61.538\ V\angle 50.194°}$$

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{Z}_L} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_L} = \frac{61.538\text{ V}\angle 50.194°}{4\ \Omega\angle 90°} = \mathbf{15.385\ A\angle -39.81°}$$

d. $$F_p = \cos\theta = \frac{G}{Y_T} = \frac{0.125\text{ S}}{0.195\text{ S}} = \mathbf{0.641\ atrasado}\ (\mathbf{E}\text{ adelanta a }\mathbf{I})$$

$$\begin{aligned}P &= EI\cos\theta = (61.538\text{ V})(12\text{ A})\cos 50.194°\\ &= \mathbf{472.75\ W}\end{aligned}$$

e. $$\begin{aligned}\mathbf{Z}_T = \frac{1}{\mathbf{Y}_T} = \frac{1}{0.195\text{ S}\angle -50.194°} &= 5.128\ \Omega\angle +50.194°\\ &= 3.283\ \Omega + j3.939\ \Omega\\ &= R + j\,X_L\end{aligned}$$

$$X_L = 3.939\ \Omega = \omega L$$

$$L = \frac{3.939\ \Omega}{\omega} = \frac{3.939\ \Omega}{1000\text{ rad/s}} = \mathbf{3.939\ mH}$$

El circuito en serie equivalente aparece en la figura 15.95.

f. $$\begin{aligned}\mathbf{E} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_T &= (12\text{ A}\angle 0°)(5.128\ \Omega\angle 50.194°)\\ &= \mathbf{61.536\ V\angle 50.194°}\qquad\text{(como antes)}\end{aligned}$$

g. $$P = I^2R = (12\text{ A})^2(3.283\ \Omega) = \mathbf{472.75\ W}\qquad\text{(como antes)}$$

h. $$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} = \frac{(3.283\ \Omega)^2 + (3.939\ \Omega)^2}{3.283\ \Omega} = \mathbf{8\ \Omega}$$

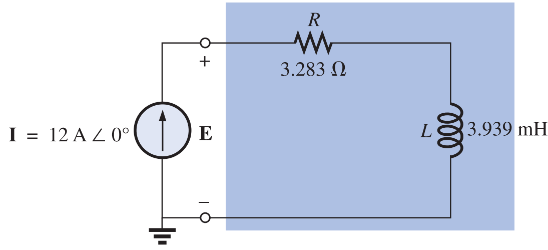


FIGURA 15.95
Circuito en serie equivalente para la red R-L-C en paralelo de la figura 15.92 con ω = 1000 rad/s.

$$X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s} = \frac{(3.283\ \Omega)^2 + (3.939\ \Omega)^2}{3.939\ \Omega} = \mathbf{6.675\ \Omega}$$

El circuito en paralelo equivalente aparece en la figura 15.96.

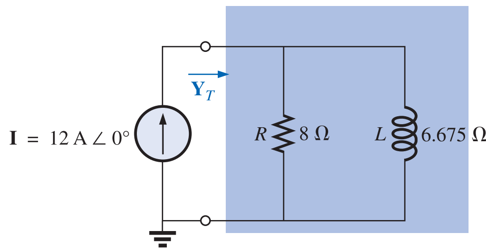


FIGURA 15.96
Equivalente paralelo del circuito de la figura 15.95.

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_T = G\ \angle 0° + B_L\ \angle -90° &= \frac{1}{8\ \Omega}\ \angle 0° + \frac{1}{6.675\ \Omega}\ \angle -90° \\ &= 0.125\ \text{S}\ \angle 0° + 0.15\ \text{S}\ \angle -90° \\ &= 0.125\ \text{S} - j\ 0.15\ \text{S} = \mathbf{0.195\ S\ \angle -50.194°} \qquad \text{(como antes)}\end{aligned}$$

15.13 MEDICIONES DE FASE (OSCILOSCOPIO DE TRAZO DUAL)

Es posible calcular el desplazamiento de fase entre los voltajes de una red, o entre los voltajes y corrientes de una red, utilizando un osciloscopio de trazo dual (dos señales presentadas al mismo tiempo). Las mediciones de desplazamiento de fase también pueden efectuarse utilizando un osciloscopio de un solo trazo mediante la adecuada interpretación de los patrones de Lissajous resultantes obtenidos en la pantalla. Sin embargo, este último enfoque se dejará como un experimento en el laboratorio.

En la figura 15.97, el canal 1 del osciloscopio de trazo dual se conecta para desplegar el voltaje aplicado e. El canal 2 está conectado para desplegar el voltaje en el inductor v_L. Resulta particularmente importante el hecho de que la tierra del aparato esté conectada a la tierra del osciloscopio para ambos canales. En otras palabras, sólo existe una tierra común para el circuito y el osciloscopio. Las formas de onda resultantes se presentarán como se muestra en la figura 15.98.

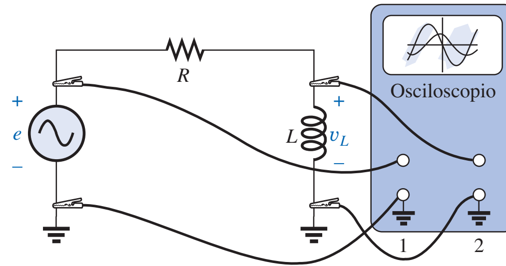


FIGURA 15.97
Determinación de la relación de fase entre e y v_L.

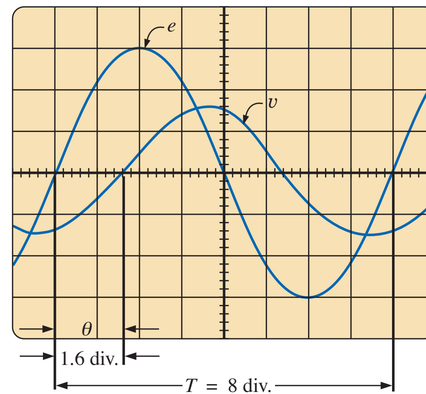


FIGURA 15.98
Determinación del ángulo de fase entre e y v_L.

Para la sensibilidad horizontal elegida, cada forma de onda de la figura 15.98 tiene un periodo T definido por ocho divisiones horizontales, y el ángulo de fase entre las dos formas de onda está definido por $1\frac{1}{2}$ divisiones. Empleando el hecho de que cada periodo de una forma senoidal abarca 360°, pueden establecerse las siguiente proporciones para determinar el ángulo de fase θ:

$$\frac{8 \text{ div.}}{360^\circ} = \frac{1.6 \text{ div.}}{\theta}$$

y

$$\theta = \left(\frac{1.6}{8}\right)360^\circ = \mathbf{72^\circ}$$

En general,

$$\theta = \frac{(\text{división para } \theta)}{(\text{división para } T)} \times 360^\circ \qquad \textbf{(15.43)}$$

Si se requiere la relación de fase entre e y v_R, el osciloscopio *no deberá* conectarse como se muestra en la figura 15.99. Los puntos a y b tienen una tierra común que establecerá una caída de cero volts entre los dos puntos; esta caída tendrá el mismo efecto que una conexión de corto circuito entre a y b. El corto circuito resultante colocará “en corto” al elemento inductivo, y la corriente se incrementará debido a la caída de impedancia del circuito. Puede surgir una situación peligrosa si el elemento inductivo posee impedancia alta y el

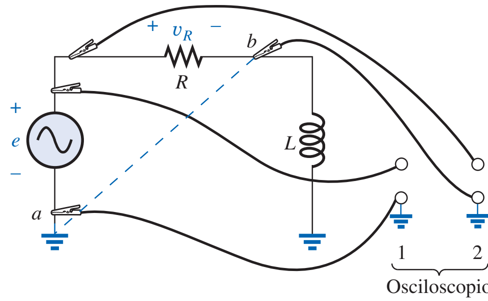


FIGURA 15.99
Conexión inadecuada para medición de fase.

resistor impedancia relativamente baja. La corriente, controlada únicamente por la resistencia R, podría saltar a niveles peligrosos y dañar el equipo.

La relación de fase entre e y v_R se puede determinar mediante un simple intercambio de las posiciones de la bobina y el resistor o introduciendo un resistor sensor, como se muestra en la figura 15.100. Un resistor sensor es exactamente eso: se introduce para “detectar” una cantidad sin afectar de forma adversa el comportamiento de la red. En otras palabras, el resistor sensor debe ser lo suficientemente pequeño, en comparación con las otras impedancias de la red, como para no ocasionar un cambio significativo en los niveles de voltaje y corriente o en las relaciones de fase. Observe que el resistor sensor se introdujo de una forma que ocasionará que un extremo se conecte a la tierra común de la red. En la figura 15.100, el canal 2 desplegará el voltaje v_{R_s}, el cual está en fase con la corriente i. Sin embargo, la corriente i también se encuentra en fase con el voltaje v_R en el resistor R. El resultado neto es que los voltajes v_{R_s} y v_R estarán en fase, y la relación de fase entre e y v_R podrá determinarse a partir de las formas de onda e y v_{R_s}. Dado que v_{R_s} e i están en fase, el procedimiento anterior determinará también el ángulo de fase entre el voltaje aplicado e y la corriente de la fuente i. Si la magnitud de R_s es lo suficientemente pequeña en comparación con R o X_L, las mediciones de fase de la figura 15.97 podrán realizarse con R_s en su lugar. Es decir, el canal 2 puede conectarse a la parte superior del inductor y a tierra, y podrá ignorarse el efecto de R_s. En la aplicación anterior, el resistor sensor no mostrará la magnitud del voltaje v_R sino simplemente la relación de fase entre e y v_R.

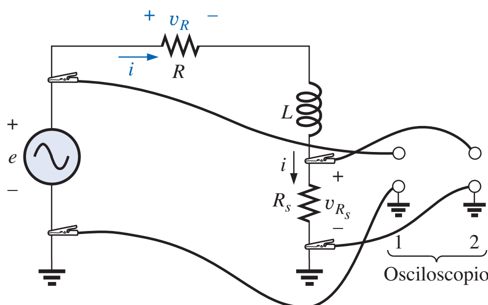


FIGURA 15.100
Determinación de la relación de fase entre e y v_R o entre e e i utilizando un resistor sensor.

Para la red en paralelo de la figura 15.101, la relación de fase entre dos de las corrientes de rama, i_R e i_L, se puede determinar utilizando un resistor sensor, como se muestra en la figura. El canal 1 desplegará el voltaje v_R, y el canal 2 desplegará el voltaje v_{R_s}. Dado que v_R está en fase con i_R, y v_{R_s} está en fase con la corriente i_L, la relación de fase entre v_R y v_{R_s} será la misma que entre i_R e i_L. En este caso, las magnitudes de los niveles de corriente podrán determinarse utilizando la ley de Ohm y los niveles de resistencia R y R_s, respectivamente.

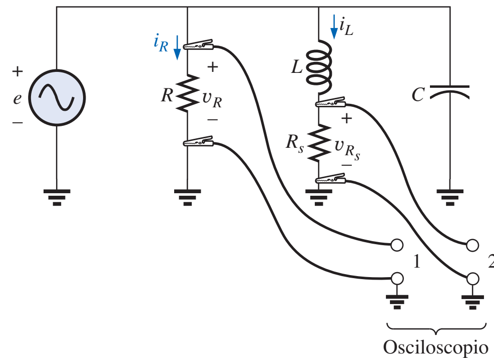


FIGURA 15.101
Determinación de la relación de fase entre i_R e i_L.

Si se requiere la relación de fase entre e e i_s de la figura 15.101, se puede utilizar un resistor sensor como aparece en la figura 15.102.

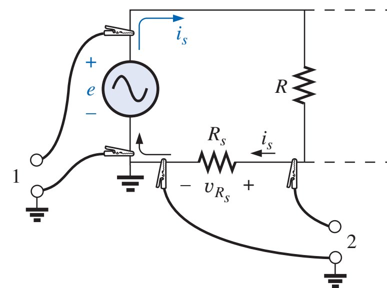


FIGURA 15.102
Determinación de la relación de fase entre e e i_s.

Por tanto, y en general, para mediciones de trazo dual de relaciones de fase, debe tenerse mucho cuidado con el circuito de tierra, y utilizar lo más posible la relación en fase que existe entre el voltaje y la corriente de un resistor.

15.14 APLICACIONES

Instalación eléctrica doméstica

En la figura 15.103 se proporciona una vista ampliada de una instalación eléctrica doméstica para permitir el análisis del sistema completo. Se incluye el tablero de la casa con la "alimentación" y el importante circuito de tierra.

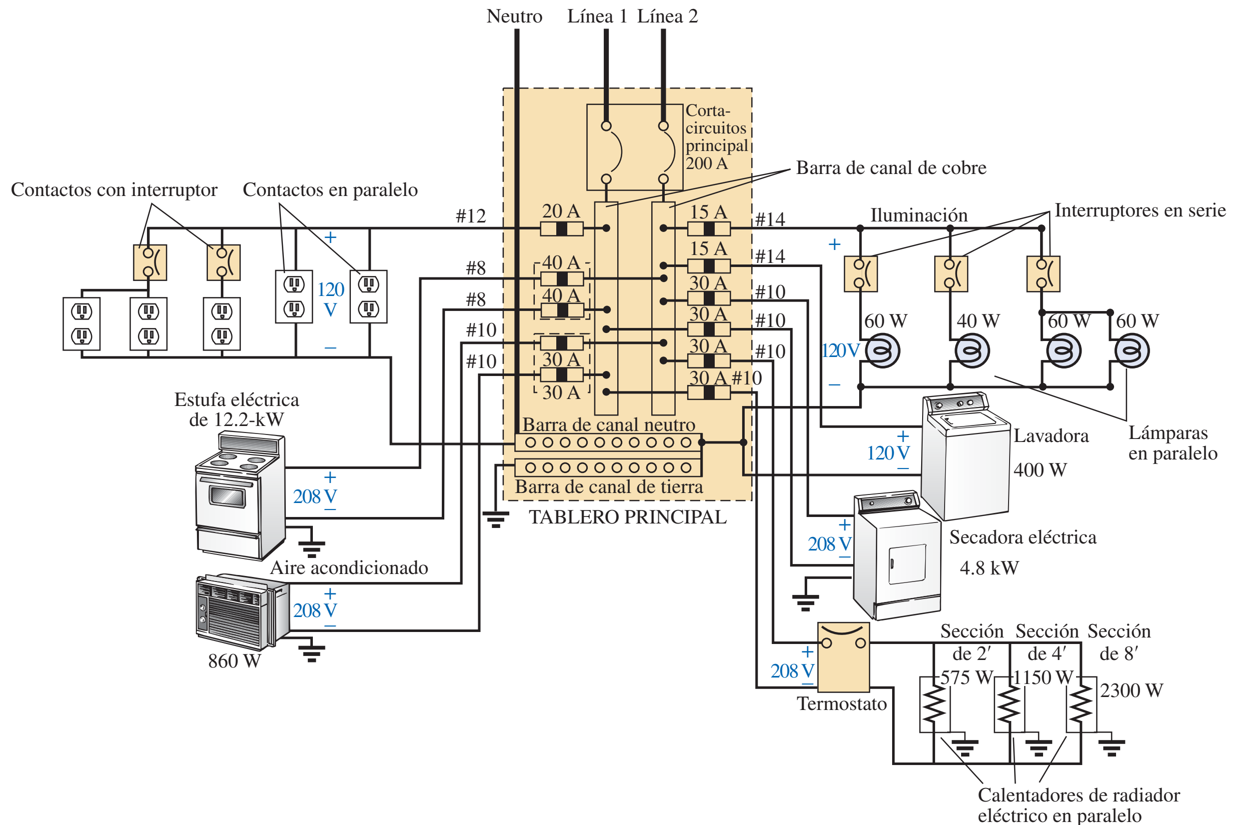


FIGURA 15.103
Diagrama de una instalación eléctrica doméstica.

Además, contiene varios de los circuitos típicos encontrados en una casa para dar una idea de la forma en que se distribuye toda la potencia.

Primero observe la forma en que están dispuestas las barras de cobre dentro del tablero para proporcionar tanto 120 V como 208 V. Entre cualquier barra y tierra se encuentra la alimentación de una fase de 120 V. Sin embargo, las barras se acomodaron de forma que se puedan obtener 208 V entre las dos barras adyacentes verticales utilizando un circuito interruptor doble. Cuando tenga tiempo, analice el tablero de su casa (pero no quite la cubierta), y observe el arreglo con el interruptor de circuito doble para la alimentación de 208 V.

En dispositivos como aparatos y calentadores que tienen cubierta metálica, el cable de tierra se conecta a la cubierta metálica para proporcionar una trayectoria directa para un "corto" o corriente errónea, como se describió en la sección 7.7. En contactos y otras instalaciones que no tienen cubierta conductora, la terminal de tierra se conecta a un punto sobre el contacto que la distribuye a todos los puntos importantes de éste.

Observe el arreglo en serie entre el termostato y el calentador y el arreglo en paralelo entre los calentadores en el mismo circuito. Además, advierta la conexión en serie de los interruptores con las lámparas en la esquina superior derecha y la conexión en paralelo de las lámparas y los contactos. Debido a la alta demanda de corriente, el aire acondicionado, los calentadores, y la estufa eléctrica tienen cortacircuitos de 30 A. Tenga presente que la corriente total no es igual al producto de las dos corrientes (o 60 A) dado que cada cortacircuitos está en una línea y la misma corriente fluirá a través de cada uno.

En general, se puede afirmar que el lector tiene ahora un conocimiento somero acerca del cableado eléctrico de su casa. Quizá no sea un técnico en

electricidad calificado y con licencia, pero al menos podrá conversar de forma inteligente sobre el sistema.

Sistemas de bocinas

La mejor reproducción del sonido se obtiene utilizando una bocina diferente para cada región de frecuencia: baja, media y alta. Aunque el intervalo típico de audio para el oído humano va desde aproximadamente 100 Hz hasta 20 kHz, es posible conseguir bocinas con intervalos desde 20 Hz hasta 40 kHz. Para el intervalo de baja frecuencia, que por lo general abarca de 20 a 300 Hz, se utiliza una bocina denominada *woofer*. De los tres tipos de bocina, normalmente es la más grande. La bocina de intervalo medio por lo regular es de tamaño más pequeño y cubre el intervalo de cerca de 100 Hz hasta 5 kHz. El *tweeter*, como se acostumbra denominarlo, constituye casi siempre la más pequeña de las tres bocinas y cubre el intervalo de cerca de 2 kHz hasta 25 kHz. Existe un traslape de frecuencias para asegurar que no se pierdan frecuencias en las regiones donde la respuesta de una frecuencia cae y la respuesta de otra inicia. En el capítulo 23 se cubrirá más material acerca del intervalo de cada bocina y su respuesta en decibeles (dB) (término que quizá haya escuchado cuando se habla de la respuesta de bocinas).

Un método común para conectar los tres tipos de bocina es la configuración de *distribución de frecuencias* mostrada en la figura 15.104. Observe que no se trata más que de una red en paralelo con una bocina en cada rama y el voltaje total aplicado en cada rama. Los elementos añadidos (inductores y capacitores) fueron cuidadosamente seleccionados para establecer el intervalo de respuesta de cada bocina. Advierta que cada bocina está identificada con un nivel de impedancia y una frecuencia asociada. Este tipo de información es característica cuando se adquieren bocinas de calidad; permite identificar de forma inmediata el tipo de bocina y muestra la frecuencia a la que se obtendrá la máxima respuesta. En la sección 23.15 se incluye un análisis detallado de la misma red. Sin embargo, en este punto, probará ser interesante determinar la impedancia total de cada rama a frecuencias específicas para comprobar si verdaderamente la respuesta en frecuencia de una superará la de las otras dos.

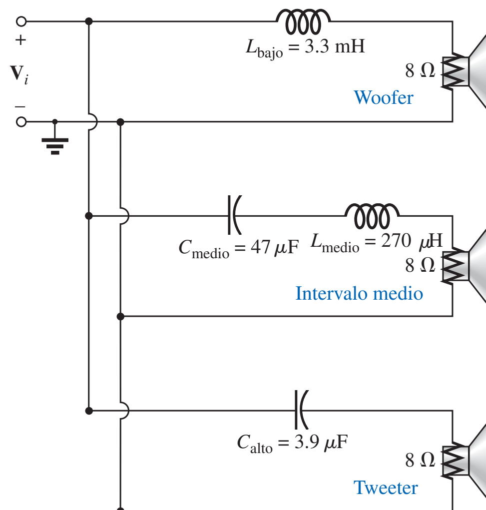


FIGURA 15.104
Sistema de bocinas por distribución de frecuencias.

Dado que se utiliza un amplificador con impedancia de salida de 8 Ω, la máxima transferencia de potencia (vea la sección 18.5 para redes de ca) a la bocina se obtendrá cuando la impedancia de la rama sea igual o muy cercana a 8 Ω.

Comencemos por analizar la respuesta en las frecuencias de interés principalmente para la bocina de intervalo medio dado que ésta representa la mayor parte del intervalo audible humano. Ya que la rama de la bocina de intervalo medio tiene un valor nominal de 8 Ω a 1.4 kHz, verifiquemos el efecto de aplicar 1.4 kHz a todas las ramas de la red de distribución de frecuencias.

Para la bocina de intervalo medio:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(1.4\text{ kHz})(47\ \mu\text{F})} = 2.42\ \Omega$$

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(1.4\text{ kHz})(270\ \mu\text{H}) = 2.78\ \Omega$$

$$R = 8\ \Omega$$

y
$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{\text{intervalo medio}} &= R + j(X_L - X_C) = 8\ \Omega + j(2.78\ \Omega - 2.42\ \Omega)\\ &= 8\ \Omega + j0.36\ \Omega\\ &= 8.008\ \Omega\ \angle -2.58^\circ \cong 8\ \Omega\ \angle 0^\circ = R\end{aligned}$$

En la figura 15.105(a), se aplica el amplificador con impedancia de salida de 8 Ω a la bocina de intervalo medio a una frecuencia de 1.4 kHz. Dado que la reactancia total ofrecida por los dos elementos reactivos en serie es tan pequeña comparada con la resistencia de 8 Ω de la bocina, básicamente podemos reemplazar la combinación en serie de la bobina y el capacitor por un corto circuito de 0 Ω. Nos encontraremos así en una situación donde la impedancia de carga coincide exactamente con la impedancia de salida del amplificador, y se entregará la máxima potencia a la bocina. Dado que las impedancias en serie son iguales, cada una recibirá la mitad del voltaje aplicado o 6 V. La potencia entregada a la bocina es entonces de $V^2/R = (6\text{ V})^2/8\ \Omega = 4.5\text{ W}$.

A una frecuencia de 1.4 kHz cabría esperar que el woofer y el tweeter tengan un impacto mínimo sobre el sonido generado. Verificaremos la validez de esta afirmación determinando la impedancia de cada rama a 1.4 kHz.

Para el woofer:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(1.4\text{ kHz})(3.3\text{ mH}) = 29.03\ \Omega$$

y
$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{\text{woofer}} &= R + jX_L = 8\ \Omega + j29.03\ \Omega\\ &= 30.11\ \Omega\ \angle 74.59^\circ\end{aligned}$$

lo cual es una pobre aproximación a la impedancia de salida del amplificador. La red resultante se muestra en la figura 15.105(b).

La carga total sobre la fuente de 12 V es:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_T &= 8\ \Omega + 8\ \Omega + j29.03\ \Omega = 16\ \Omega + j29.03\ \Omega\\ &= 33.15\ \Omega\ \angle 61.14^\circ\end{aligned}$$

y la corriente es:

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{12\text{ V}\ \angle 0^\circ}{33.15\ \Omega\ \angle 61.14^\circ}\\ &= 362\text{ mA}\ \angle -61.14^\circ\end{aligned}$$

La potencia entregada a la bocina de 8 Ω es entonces:

$$P_{\text{woofer}} = I^2R = (362\text{ mA})^2 8\ \Omega = \mathbf{1.048\ W}$$

o cerca de 1 W.

En consecuencia, el sonido generado mediante la bocina de intervalo medio superará por mucho la respuesta del woofer (como debe ser).

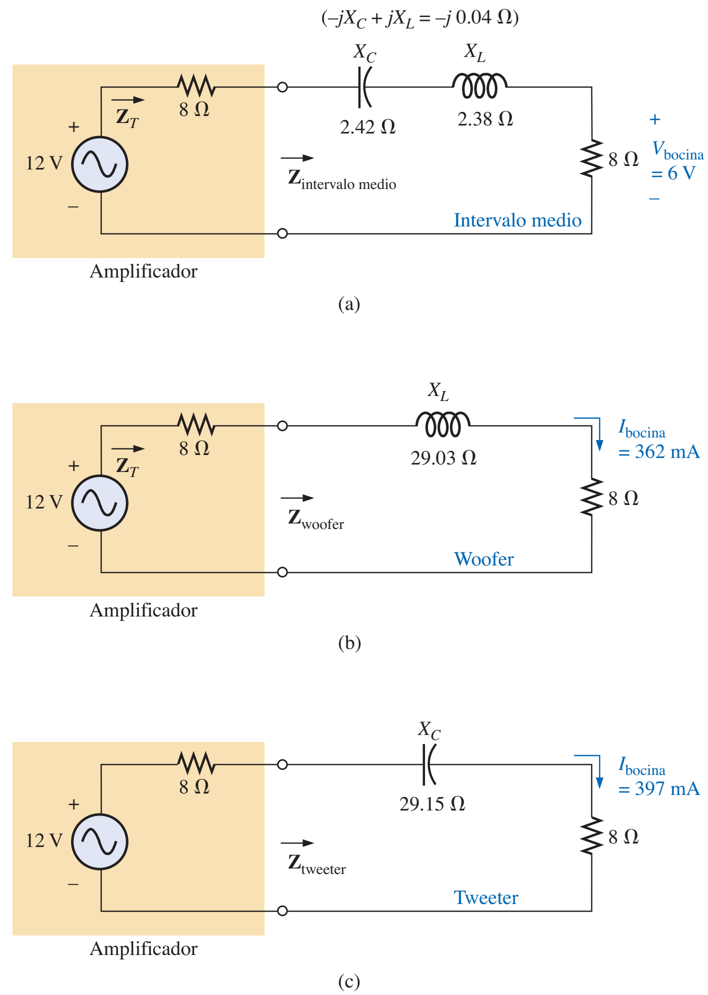


FIGURA 15.105
Red de distribución de frecuencias: (a) bocina de intervalo medio a 1.4 kHz; (b) woofer a 1.4 kHz; (c) tweeter.

Para el tweeter:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(1.4\text{ kHz})(3.9\ \mu\text{F})} = 29.15\ \Omega$$

y
$$\mathbf{Z}_{\text{tweeter}} = R - jX_C = 8\ \Omega - j29.15\ \Omega$$
$$= 30.23\ \Omega\ \angle -74.65^\circ$$

lo cual, de la misma forma que para el woofer, es una pobre aproximación a la impedancia de salida del amplificador. La corriente:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{12\text{ V}\ \angle 0^\circ}{30.23\ \Omega\ \angle -74.65^\circ}$$
$$= 397\text{ mA}\ \angle 74.65^\circ$$

La potencia entregada a la bocina de 8 Ω es entonces:

$$P_{\text{tweeter}} = I^2R = (397\text{ mA})^2(8\ \Omega) = \mathbf{1.261\ W}$$

o aproximadamente 1.3 W.

En consecuencia, el sonido generado por la bocina de intervalo medio superará también por mucho la respuesta del tweeter.

En general, la bocina de intervalo medio predomina a una frecuencia de 1.4 kHz para la red de distribución de frecuencias de la figura 15.104.

Sólo porque es interesante, determinaremos la impedancia del tweeter a 20 kHz y el impacto del woofer a esta frecuencia.

Para el tweeter:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(20\text{ kHz})(3.9\ \mu\text{F})} = 2.04\ \Omega$$

con: $$\mathbf{Z}_{\text{tweeter}} = 8\ \Omega - j2.04\ \Omega = 8.26\ \Omega \angle -14.31^\circ$$

Aunque la magnitud de la impedancia de la rama no sea exactamente de 8 Ω, está muy cercana, y la bocina recibirá un alto nivel de potencia (en realidad 4.43 W).

Para el woofer:

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(20\text{ kHz})(3.3\text{ mH}) = 414.69\ \Omega$$

con: $$\mathbf{Z}_{\text{woofer}} = 8\ \Omega - j414.69\ \Omega = 414.77\ \Omega \angle 88.9^\circ$$

lo cual es una pésima aproximación a la impedancia de salida del amplificador. Por tanto, la bocina recibirá un nivel de potencia muy bajo (6.69 mW ≅ 0.007 W).

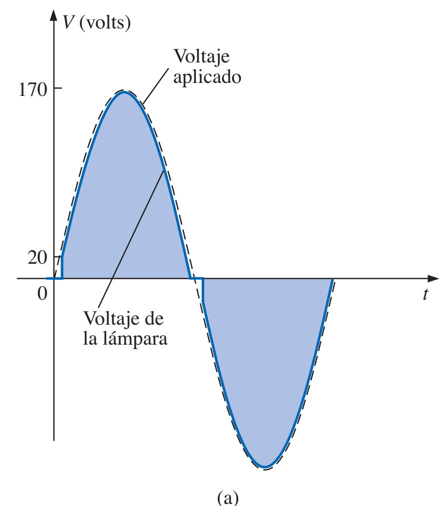
En todos los cálculos, observe que los elementos capacitivos predominan a bajas frecuencias, y los elementos inductivos predominan en altas frecuencias. Para las frecuencias bajas, la reactancia de la bobina será muy pequeña, permitiendo una transferencia total de potencia hacia la bocina. En el tweeter de alta frecuencia, la reactancia del capacitor es muy pequeña, proporcionando una trayectoria directa para que la potencia fluya hacia la bocina.

Control de potencia por desplazamiento de fase

En el capítulo 12 se analizó la estructura interna de un reductor de luz y se describió su operación básica. Ahora podemos centrar nuestra atención sobre la forma en que se controla el flujo de energía hacia la lámpara.

Si el reductor estuviera compuesto simplemente de elementos resistivos, todos los voltajes de la red estarían en fase como se muestra en la figura 15.106(a). Si suponemos que se requieren 20 V para encender el triac de la figura 12.49, entonces la potencia se entregaría a la lámpara durante el periodo resaltado por el área rayada de la figura 15.106(a). En esta situación, la lámpara está cercana a la intensidad total dado que el voltaje aplicado se encuentra a su disposición durante casi el ciclo completo. Para reducir la potencia entregada a la lámpara (y por tanto su intensidad), el voltaje de control deberá tener un voltaje pico menor, como se muestra en la figura 15.106(b). De hecho, la forma de onda de la figura 15.106(b) es tal que el voltaje de encendido no se alcanzará sino hasta que se presente el valor pico. En este caso la potencia se entrega a la lámpara durante sólo medio ciclo, y la intensidad de la lámpara se reduce. El problema de utilizar sólo elementos resistivos en un reductor se vuelve evidente ahora: la lámpara no puede ser atenuada más de lo que señala la situación de la figura 15.106(b). Cualquier reducción posterior en el voltaje de control reduciría su valor pico por debajo del nivel de disparo y la lámpara nunca se encendería.

Este dilema se puede resolver mediante una combinación de elementos en serie, tal como la de la figura 15.107(a) para el reductor de la figura 12.49. Observe que el voltaje de control es el voltaje en el capacitor, mientras que el voltaje total de línea de 120 V rms, 170 V pico, se encuentra en toda la rama.



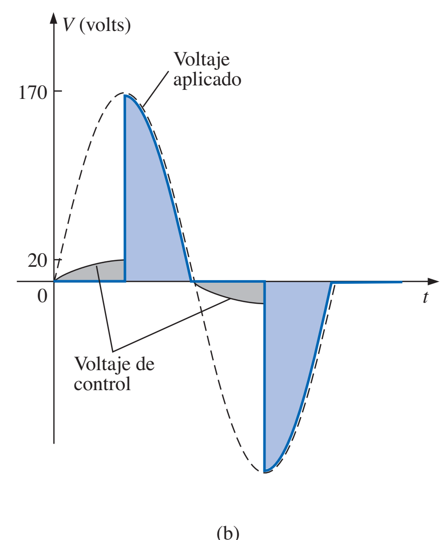


FIGURA 15.106
Reductor de luz: (a) con elementos puramente resistivos; (b) distribución de potencia de medio ciclo.

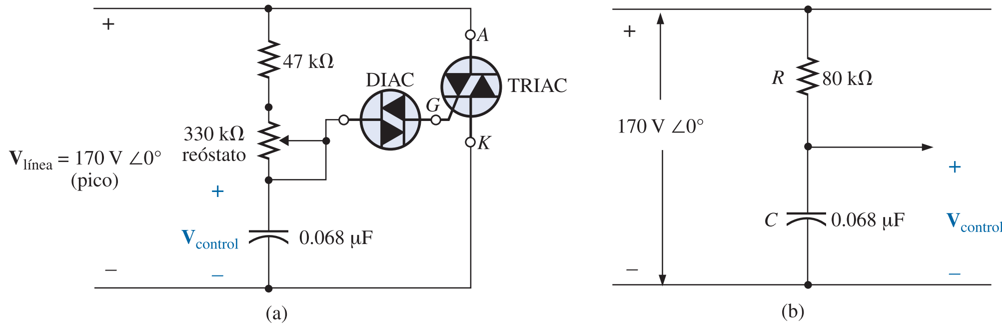


FIGURA 15.107
Reductor de luz: (a) de la figura 12.49; (b) con el reóstato establecido a 33 kΩ.

Para describir el comportamiento de la red, analicemos el caso definido al establecer el potenciómetro (utilizado como un reóstato) a 1/10 de su valor máximo, o 33 kΩ. Al combinar los 33 kΩ con la resistencia fija de 47 kΩ se obtendrá una resistencia total de 80 kΩ y la red equivalente de la figura 15.107(b).

A 60 Hz, la reactancia del capacitor es:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(60\text{ Hz})(62\ \mu\text{F})} = 42.78\text{ k}\Omega$$

Al aplicar la regla del divisor de voltaje:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\text{control}} &= \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C}\\ &= \frac{(42.78\text{ k}\Omega \angle -90^\circ)(V_s \angle 0^\circ)}{80\text{ k}\Omega - j\,42.78\text{ k}\Omega} = \frac{42.78\text{ k}\Omega\ V_s \angle -90^\circ}{90.72\text{ k}\Omega \angle -28.14^\circ}\\ &= 0.472V_s \angle -61.86^\circ\end{aligned}$$

Utilizando un valor pico de 170 V:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\text{control}} &= 0.472(170\text{ V}) \angle -61.86^\circ\\ &= 80.24\text{ V} \angle -61.86^\circ\end{aligned}$$

lo que genera la forma de onda de la figura 15.108(a). El resultado es una forma de onda con un desplazamiento de fase de 61.86° (atrasado con respecto al voltaje de línea aplicado) y un valor pico relativamente alto. El alto valor pico dará por resultado una rápida transición al nivel de encendido de 20 V, y que la potencia se entregue a la lámpara durante la mayor parte de la señal aplicada. Del análisis del capítulo 12, recuerde que la respuesta en la región negativa es una réplica de la lograda en la región positiva. Si reducimos más la resistencia del potenciómetro, el ángulo de fase podría reducirse y la lámpara se volvería más brillante. La situación es ahora muy similar a la descrita para la respuesta de la figura 15.106(a). En otras palabras, hasta este punto, no se ha obtenido nada del uso del elemento capacitivo en la red de control. No obstante, incrementemos la resistencia del potenciómetro a 200 kΩ y observemos el efecto sobre el voltaje de control.

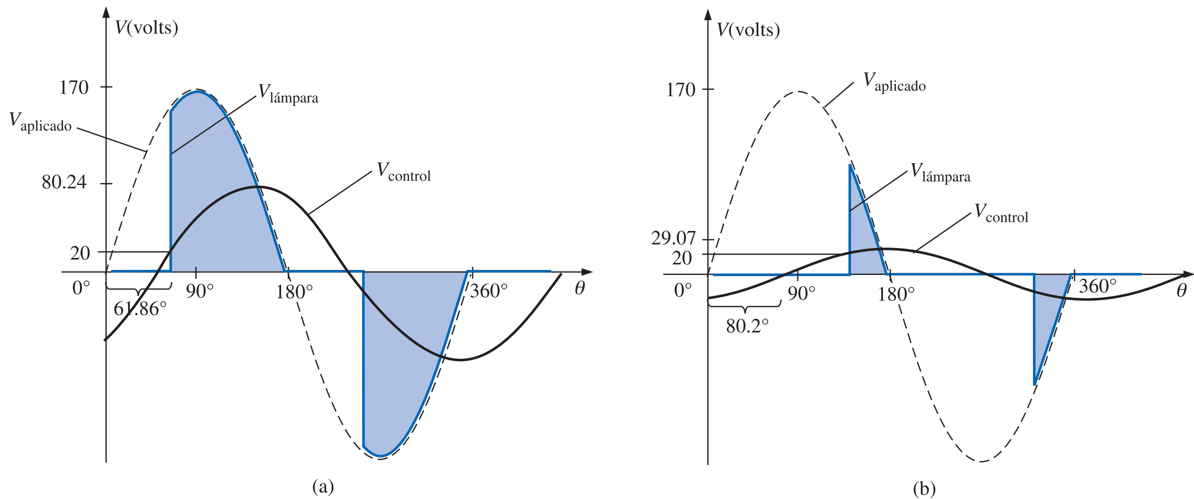


FIGURA 15.108
Reductor de luz de la figura 12.49: (a) reóstato establecido en 33 kΩ; (b) reóstato establecido en 200 kΩ.

Es decir,

$$R_T = 200\text{ k}\Omega + 47\text{ k}\Omega = 247\text{ k}\Omega$$

$$\mathbf{V}_{\text{control}} = \frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C}$$

$$= \frac{(42.78\text{ k}\Omega \angle -90^\circ)(V_s \angle 0^\circ)}{247\text{ k}\Omega - j42.78\text{ k}\Omega} = \frac{42.78\text{ k}\Omega\ V_s \angle -90^\circ}{250.78\text{ k}\Omega \angle -9.8^\circ}$$

$$= 0.171V_s \angle -80.2^\circ$$

y utilizando un valor pico de 170 V tenemos:

$$\mathbf{V}_{\text{control}} = 0.171(170\text{ V}) \angle -80.2^\circ$$

$$= 29.07\text{ V} \angle -80.2^\circ$$

El valor pico ha sido reducido sustancialmente a sólo 29.07 V, y el ángulo de desplazamiento de fase se ha incrementado a 80.2°. El resultado, como lo ilustra la figura 15.108(b), es que el potencial de disparo de 20 V no se alcanza sino hasta cerca del final de la región positiva del voltaje aplicado. La potencia se entrega a la lámpara durante sólo un periodo muy corto, ocasionando que la luz esté muy atenuada, significativamente más atenuada que la obtenida a partir de la respuesta de la figura 15.106(b).

Por tanto, es posible un ángulo de conducción menor a 90° debido únicamente al desplazamiento de fase introducido por la combinación *R-C* en serie. De esta forma, puede construirse una red de cierta importancia con un par de elementos bastante simples.

15.15 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Circuito *R-L-C* en serie A continuación se analizará la red *R-L-C* de la figura 15.35 utilizando OrCAD Capture. Dado que las reactancias inductivas y

capacitivas no pueden capturarse en la pantalla, primero se determinaron los niveles inductivos y capacitivos asociados de la siguiente forma:

$$X_L = 2\pi f L \Rightarrow L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{7\ \Omega}{2\pi(1\text{ kHz})} = 1.114\text{ mH}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi(1\text{ kHz})3\ \Omega} = 53.05\ \mu\text{F}$$

Luego se ingresaron los valores dentro del esquema como se muestra en la figura 15.109. Para la fuente de ca, la secuencia es icono de **Place part-SOURCE-VSIN-OK** con **VOFF** igual a 0 V, **VAMPL** igual a 70.7 V (el valor pico de la fuente senoidal aplicada en la figura 15.35), y **FREQ** = 1 kHz. Si hacemos doble clic sobre el símbolo de la fuente, aparecerá el editor de propiedades **Property Editor**, confirmando las opciones anteriores y mostrando que **DF** = 0 s, **PHASE** = 0°, y **TD** = 0 s como lo establecen los valores predeterminados. Ahora estamos listos para realizar un análisis del circuito para la frecuencia fija de 1 kHz.

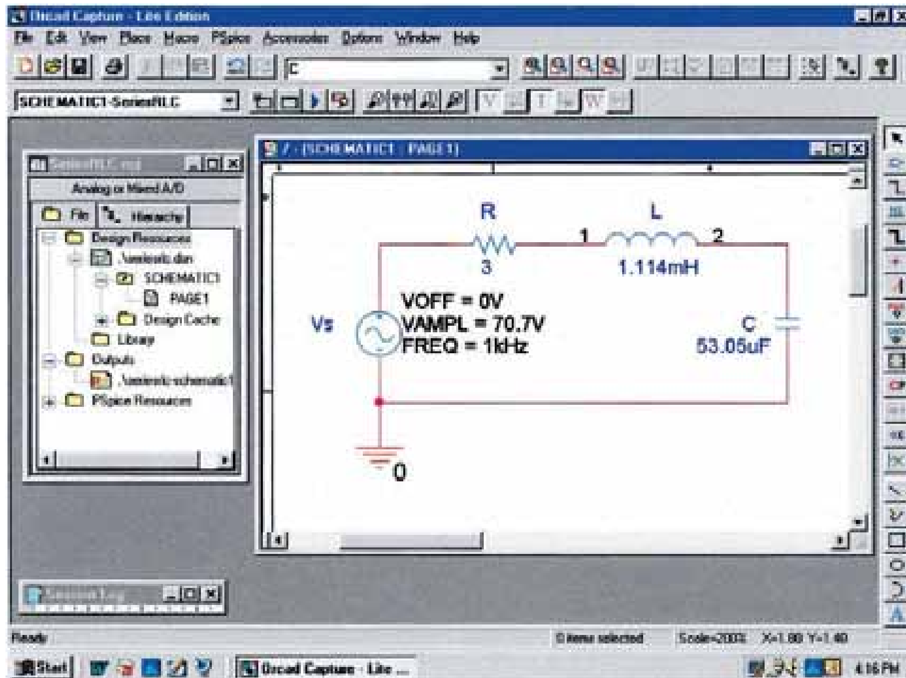


FIGURA 15.109
Utilización de PSpice para analizar un circuito de ca R-L-C en serie.

El proceso de simulación inicia al seleccionar primero el icono de **New Simulation Profile** e insertando **SeriesRLC** como el nombre, **Name**, seguido por **Create**. Aparecerá entonces el recuadro de configuración de la simulación, **Simulation Settings**, y dado que continuaremos graficando los resultados en función del tiempo, se selecciona la opción **Time Domain(Transient)** bajo **Analysis type**. Ya que el periodo de cada ciclo, **cycle**, de la fuente aplicada es 1 ms, la opción **Run to time** se establecerá en 5 ms de forma que aparezcan cinco ciclos. **Start saving data after** se dejará en 0 s aunque existirá un periodo oscilatorio para los elementos reactivos antes de que el circuito se estabilice. La opción **Maximum step size** se establece en 5 ms/1000 = 5 μs. Por

último, seleccionamos **OK** seguido por la tecla **Run PSpice**. El resultado será una pantalla en blanco con un eje *x* que se extiende desde 0 s hasta 5 ms.

La primera cantidad de interés es la corriente a través del circuito, por lo que seleccionamos **Trace-Add Trace** seguido de **I(R)** y **OK**. La gráfica resultante de la figura 15.110 muestra claramente que existe un periodo de almacenamiento y descarga de los elementos reactivos antes de que se establezca un nivel de estado estacionario. Al parecer, después de 3 ms las condiciones de estado estacionario quedan básicamente establecidas. Al seleccionar la tecla **Toggle cursor** y dar un clic izquierdo se obtendrá un cursor que puede moverse a lo largo del eje cerca del valor máximo alrededor de 1.4 ms. De hecho, el cursor muestra un valor máximo de 16.4 A, el cual excede la solución de estado estacionario por cerca de 2 A. Con un clic derecho se establecerá un segundo cursor sobre la pantalla que puede colocarse cerca del pico de estado estacionario alrededor de 4.4 ms. El valor pico resultante será de aproximadamente 14.15 A, lo cual concuerda con la solución realizada a mano de la figura 15.35. Por tanto, supondremos que las condiciones de estado estacionario quedan establecidas para el circuito después de 4 ms.

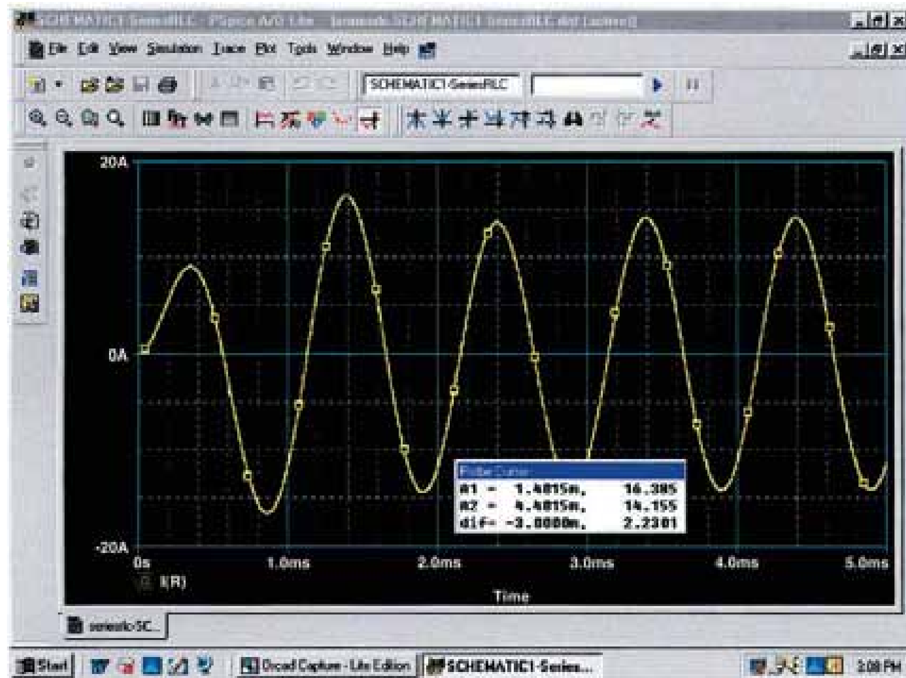


FIGURA 15.110
Gráfica de la corriente para el circuito de la figura 15.109 mostrando la transición desde el estado transitorio hasta la respuesta de estado estacionario.

Ahora añadiremos la fuente de voltaje mediante **Trace-Add Trace-V (Vs: +)-Ok** para obtener la gráfica múltiple de la parte inferior de la figura 15.111. Para el voltaje en la bobina, la secuencia **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace-V(L:1)-V(L:2)** dará por resultado la gráfica que aparece en la parte superior de la figura 15.111. Observe de forma especial el hecho de que **Trace Expression** es **V(L:1) − V(L:2)** en lugar de sólo **V(L:1)** ya que **V(L:1)** sería el voltaje desde ese punto hasta tierra, el cual incluiría el voltaje en el capacitor. Además, el signo **−** entre los dos proviene de la lista de **Functions or Macros** situada a la derecha del cuadro de diálogo **Add Traces**. Por último,

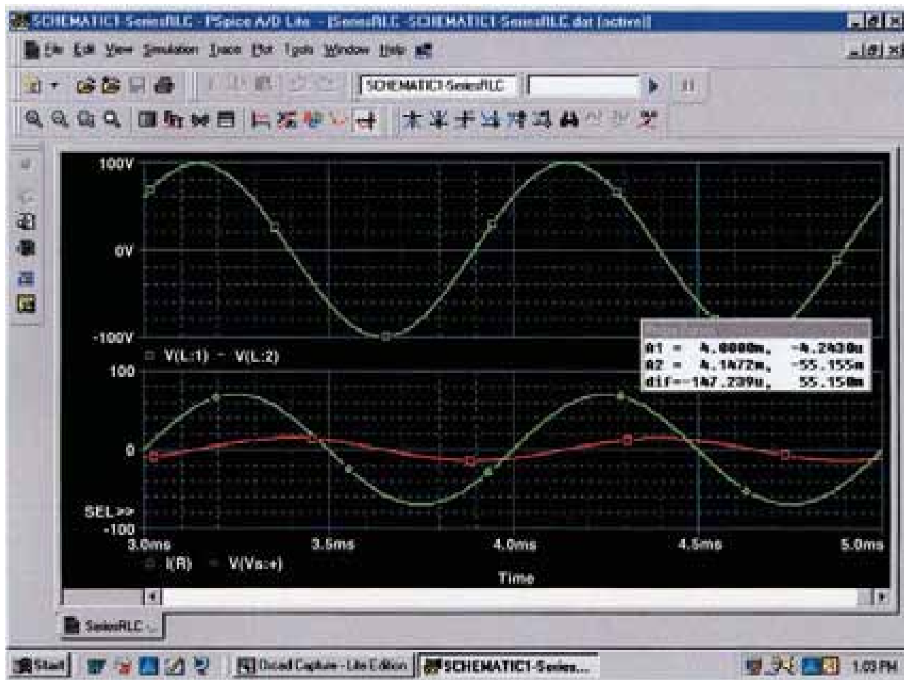


FIGURA 15.111
Gráfica de la respuesta de estado estacionario (t > 3 ms) para v_L, v_s, en el circuito de la figura 15.109.

dado que sabemos que las formas de onda son prácticamente estacionarias después de 3 ms, separemos las formas de onda antes de 3 ms con **Plot-Axis Settings-X axis-User Defined-3ms to 5ms-OK** para obtener los dos ciclos de la figura 15.111. Ahora podrá observarse claramente que el valor pico del voltaje en la bobina es igual a 100 V, para coincidir con el análisis de la figura 15.35. También resulta claro que el voltaje aplicado adelanta a la corriente de entrada por un ángulo que puede determinarse utilizando cursores. Primero active la opción de cursor seleccionando la tecla de cursor (una gráfica roja a través del origen) en la segunda barra de herramientas hacia abajo de la barra de menú. Luego seleccione **V(Vs:+)** en la parte inferior izquierda de la pantalla con un clic izquierdo, y colóquelo en el punto donde el voltaje aplicado pasa través del eje horizontal con una pendiente positiva. El resultado es **A1** = 4 ms a −4.243 μV ≅ 0 V. Luego seleccione **I(R)** en la parte inferior izquierda de la pantalla mediante un clic derecho, y colóquelo en un punto donde la forma de onda de corriente pasa a través del eje horizontal con una pendiente positiva. El resultado es **A2** = 4.15 ms a −55.15 mA = 0.55 A ≅ 0 A (comparado con el valor pico de 14.14 A). En la parte inferior del cuadro de diálogo **Probe Cursor**, la diferencia de tiempo será de 147.24 μs.

Ahora se establece la relación:

$$\frac{147.24\ \mu\text{s}}{1000\ \mu\text{s}} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$\theta = 52.99^\circ$$

El ángulo de fase por el que el voltaje aplicado adelanta a la fuente es de 52.99°, lo cual está muy cercano a la solución teórica de 53.13° obtenida en la figura 15.39. Al incrementar el número de puntos de información para la gráfica se obtendrá un nivel de precisión mayor y los resultados se acercarán a 53.13°.

Electronics Workbench

Ahora analizaremos la respuesta de una red en función de la frecuencia, en lugar de en el tiempo, utilizando la red de la figura 15.79, la cual aparece en el esquema de la figura 15.112. La fuente de corriente de ca se presenta como **AC_CURRENT_SOURCE Sources** en el depósito de herramientas de Sources junto a la fuente de voltaje de ca. Observe que a la fuente de corriente se le dio una amplitud de 1 A para establecer una correspondencia entre la respuesta del voltaje en la red y la impedancia de la red. Es decir,

$$|Z_T| = \left|\frac{V_s}{I_s}\right| = \left|\frac{V_s}{1\text{ A}}\right| = |V_s|$$

Antes de aplicar métodos por computadora, es preciso desarrollar una idea general de lo que esperamos, de manera que se tenga algo contra lo cual comparar la solución por computadora. A frecuencias muy altas como 1 MHz, la impedancia del elemento inductivo será de aproximadamente 25 kΩ la cual, al colocarla en paralelo con los 220 Ω, se verá como un circuito abierto. El resultado es que a medida que la frecuencia se vuelve muy alta, debemos esperar que la impedancia de la red se aproxime al nivel del resistor de 220 Ω. Además, puesto que la red tendrá características resistivas a frecuencias muy altas, el ángulo asociado con la impedancia de entrada también se deberá aproximar a 0 Ω. A frecuencias muy bajas la reactancia del elemento inductivo será mucho menor que los 220 Ω del resistor, y la red tendrá características inductivas. De hecho, a, digamos 10 Hz, la reactancia del inductor es de sólo 0.25 Ω, lo cual es muy cercano a un corto circuito en comparación con el resistor en paralelo

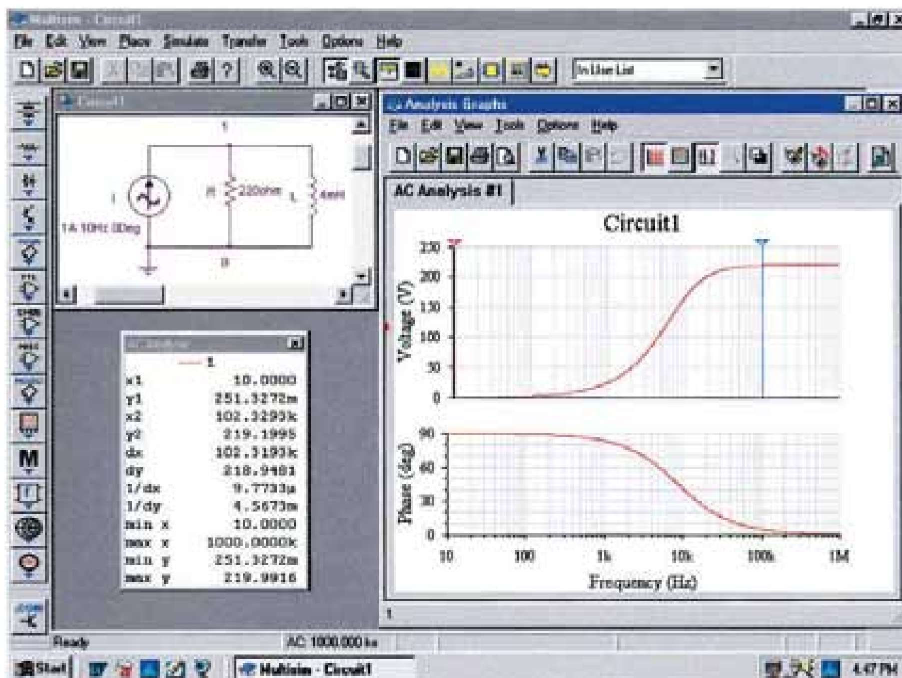


FIGURA 15.112
Obtención de una gráfica de impedancia para una red R-L en paralelo utilizando Electronics Workbench.

de 220 Ω. El resultado es que la impedancia de la red estará muy cercana a 0 Ω a frecuencias muy bajas. Nuevamente, dado que los efectos inductivos son tan fuertes a frecuencias bajas, el ángulo de fase asociado con la impedancia de entrada deberá estar muy cercano a 90°.

Ahora, para el análisis por computadora, la fuente de corriente, el elemento resistor y el inductor se colocarán y conectarán utilizando los procedimientos descritos con todo detalle en los primeros capítulos de este texto. Sin embargo, en esta ocasión existirá una gran diferencia que el usuario debe tener presente: dado que la salida se graficará en función de la frecuencia, el encabezado de **Analysis Setup** debe seleccionarse en el cuadro de diálogo **AC Current** para la fuente de corriente. Entonces, la opción **AC Magnitude** deberá establecerse al valor de la fuente de ca. En este caso, el valor predeterminado de **1 A** coincide con el de la fuente aplicada, por lo que incluso sin verificarlo sabemos que será el adecuado. Sin embargo, en el futuro se podría utilizar una fuente de voltaje o corriente que no tenga amplitud de 1, y deberá realizarse el ajuste adecuado para este listado.

Para efectuar la simulación se aplica primero la secuencia **Simulate-Analyses-AC Analysis** para obtener el cuadro de diálogo **AC Analysis**. La frecuencia de inicio, **Start frequency**, se establece en **10 Hz** para que tengamos entradas a frecuencias muy bajas, y la frecuencia final, **Stop frequency**, se establecerá en **1 MHz** para tener puntos de información en el otro extremo del espectro. El tipo de barrido, **Sweep type**, puede permanecer como **Decade**, pero el número de puntos por década será igual a 1000 para que obtengamos una gráfica detallada. La escala vertical, **Vertical scale**, se establece como **Linear**. Dentro de las variables de salida, **Output variables**, puede advertirse que sólo un nodo, **1**, está definido. Al desplazarlo sobre la columna de **Selected variables for analysis** utilizando la tecla **Plot during simulation** y oprimiendo luego la tecla **Simulate** se obtendrán las dos gráficas de la figura 15.112. Con la tecla **Show/Hide Grid** se coloca la cuadrícula sobre la gráfica, y se elige **Show/Hide Cursors** para colocar el cuadro de diálogo **AC Analysis** que aparece en la figura 15.112. Como están presentes dos gráficas, debemos definir sobre cuál trabajaremos haciendo clic en el encabezado de **Voltage** o **Phase** en la parte izquierda de cada gráfica. Aparecerá una pequeña flecha roja para indicarnos la gráfica activada. Al establecer los cursores, asegúrese de haber activado la gráfica correcta. Cuando el cursor rojo se mueva a 10 Hz (**x1**), veremos que el voltaje en la red es de únicamente 0.251 V (**y1**), dando por resultado una impedancia de entrada de sólo 0.25 Ω —muy pequeña y que coincide con nuestra predicción teórica. Además, observe que el ángulo de fase está básicamente a 90° en la otra gráfica, lo que confirma el otro supuesto mencionado: una red completamente inductiva. Si colocamos la curva azul cerca de 100 kHz (**x2** = 102.3 kHz), veremos que la impedancia a 219.2 Ω (**y2**) se está acercando a la resistencia del resistor en paralelo de 220 Ω, confirmando nuevamente el análisis preliminar anterior. Como se observa en la parte inferior del cuadro de diálogo **AC Analysis**, el valor máximo del voltaje es de 219.99 Ω o básicamente 220 Ω a 1 MHz. Antes de abandonar la gráfica, advierta las ventajas de utilizar un eje logarítmico cuando se desea obtener una respuesta sobre un intervalo de frecuencias amplio.

PROBLEMAS

SECCIÓN 15.2 Impedancia y diagrama fasorial

1. Exprese las impedancias de la figura 15.113 tanto en forma polar como rectangular.

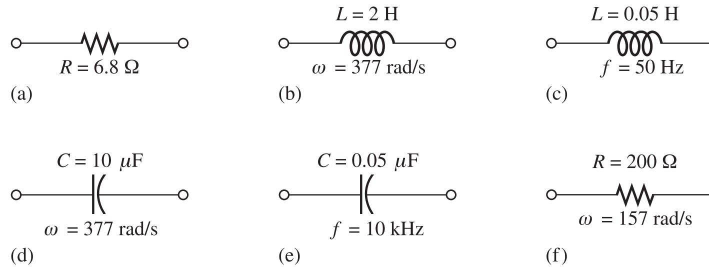


FIGURA 15.113
Problema 1.

2. Encuentre la corriente i para los elementos de la figura 15.114 utilizando álgebra compleja. Trace las formas de onda para v e i sobre el mismo conjunto de ejes.

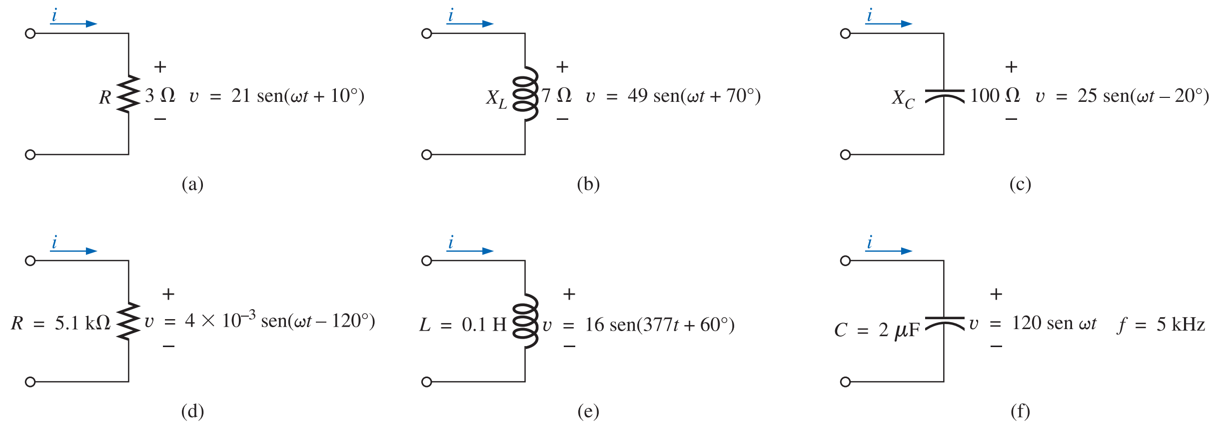


FIGURA 15.114
Problema 2.

3. Encuentre el voltaje v para los elementos de la figura 15.115 utilizando álgebra compleja. Trace las formas de onda de v e i sobre el mismo conjunto de ejes.

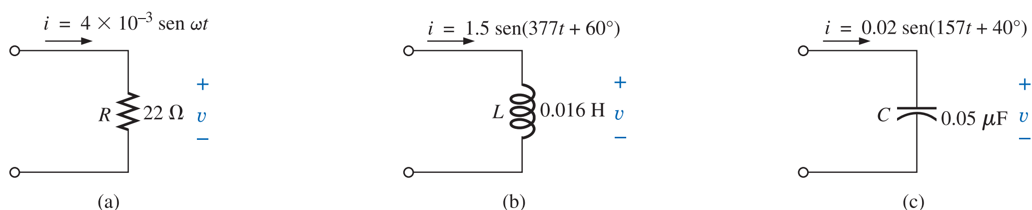
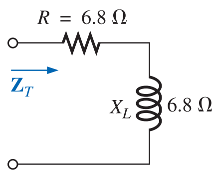
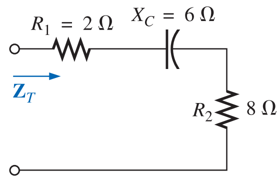


FIGURA 15.115
Problema 3.

SECCIÓN 15.3 Configuración en serie

4. Calcule la impedancia total de los circuitos de la figura 15.116. Exprese su respuesta en las formas rectangular y polar, y trace el diagrama de impedancia.





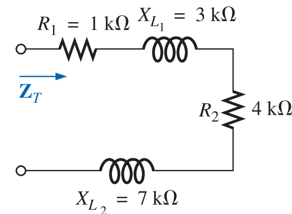
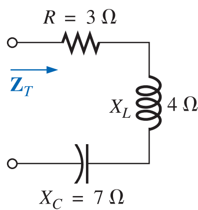
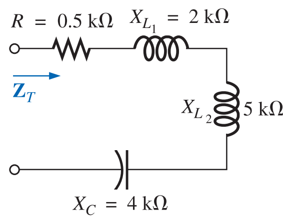


FIGURA 15.116
Problema 4.

5. Calcule la impedancia total de los circuitos de la figura 15.117. Exprese su respuesta en las formas polar y rectangular, y trace el diagrama de impedancia.





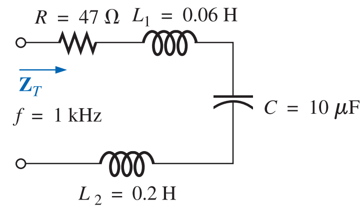
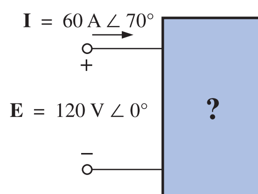
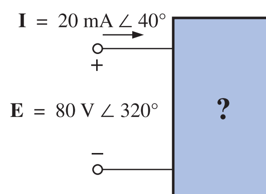


FIGURA 15.117
Problema 5.

6. Encuentre el tipo y la impedancia en ohms de los elementos del circuito en serie que deberán encontrarse dentro del contenedor cerrado de la figura 15.118 para que se presenten los voltajes y corrientes indicados en las terminales de entrada. (Encuentre el circuito en serie más simple que cumpla con las condiciones indicadas.)





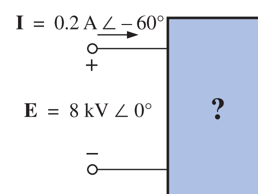


FIGURA 15.118
Problemas 6 y 26.

7. Para el circuito de la figura 15.119:

a. Encuentre la impedancia total $\mathbf{Z}_T$ en forma polar.

b. Trace el diagrama de impedancia.

c. Encuentre la corriente **I** y los voltajes $\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_L$ en forma fasorial.

d. Trace el diagrama fasorial de los voltajes **E**, $\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_L$, y de la corriente **I**.

e. Verifique la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo cerrado.

f. Encuentre la potencia promedio entregada al circuito.

g. Encuentre el factor de potencia del circuito, e indique si está adelantado o atrasado.

h. Encuentre las expresiones senoidales para los voltajes y la corriente si la frecuencia es igual a 60 Hz.

i. Grafique las formas de onda para los voltajes y la corriente sobre el mismo conjunto de ejes.

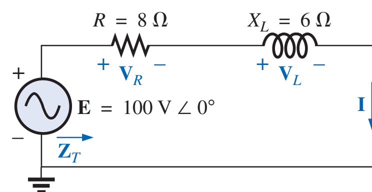


FIGURA 15.119
Problemas 7 y 47.

8. Repita el problema 7 para el circuito de la figura 15.120, reemplazando $\mathbf{V}_L$ con $\mathbf{V}_C$ en los incisos (c) y (d).

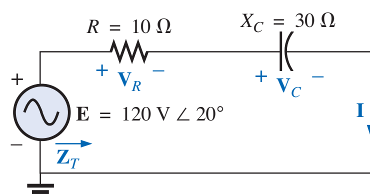


FIGURA 15.120
Problema 8.

9. Dada la red de la figura 15.121:

a. Determine $\mathbf{Z}_T$.

b. Encuentre **I**.

c. Calcule $\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_L$.

d. Encuentre P y F_p.

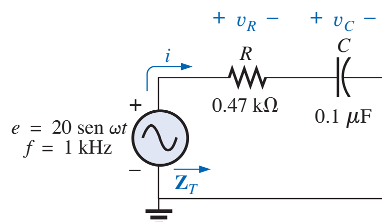


FIGURA 15.121
Problemas 9 y 49.

10. Para el circuito de la figura 15.122:

a. Encuentre la impedancia total $\mathbf{Z}_T$ en forma polar.

b. Trace el diagrama de impedancia.

c. Encuentre el valor de C en microfarads y de L en henrys.

d. Encuentre la corriente **I** y los voltajes $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_C$ en forma fasorial.

e. Trace el diagrama fasorial de los voltajes **E**, $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_C$, y de la corriente **I**.

f. Verifique la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo cerrado.

g. Encuentre la potencia promedio entregada al circuito.

h. Encuentre el factor de potencia del circuito, e indique si está atrasado o adelantado.

i. Encuentre las expresiones senoidales para los voltajes y la corriente.

j. Grafique las formas de onda para los voltajes y la corriente sobre el mismo conjunto de ejes.

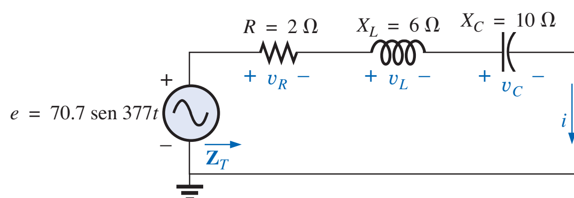


FIGURA 15.122
Problema 10.

11. Repita el problema 10 para el circuito de la figura 15.123.
12. Utilizando la lectura del osciloscopio de la figura 15.124, determine la resistencia R.

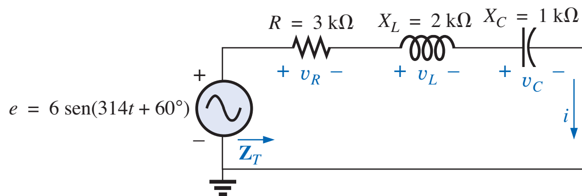


FIGURA 15.123
Problema 11.

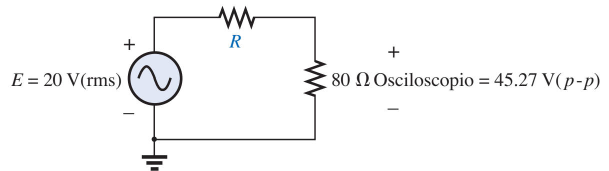


FIGURA 15.124
Problema 12.

*13. Utilizando la lectura de corriente del DMM y la medición del osciloscopio de la figura 15.125:
 a. Determine la inductancia L.
 b. Encuentre la resistencia R.

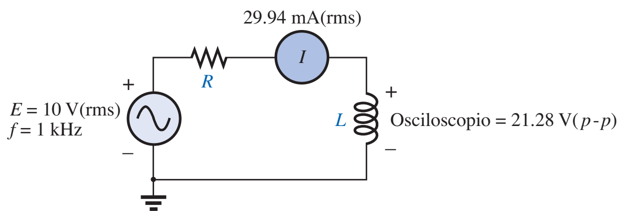


FIGURA 15.125
Problema 13.

*14. Utilizando la lectura del osciloscopio de la figura 15.126, determine la capacitancia C.

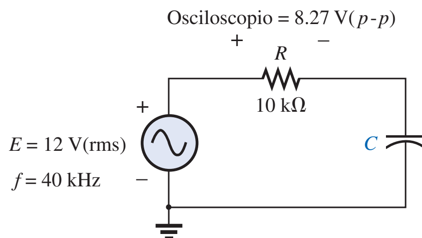
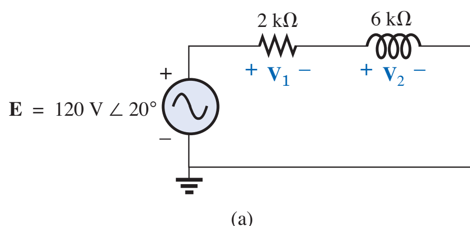


FIGURA 15.126
Problema 14.

SECCIÓN 15.4 Regla del divisor de voltaje

15. Utilice la regla del divisor de voltaje y calcule los voltajes V_1 y V_2 para el circuito de la figura 15.127 en forma fasorial.



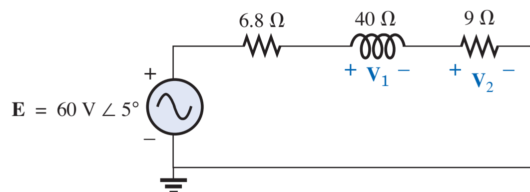
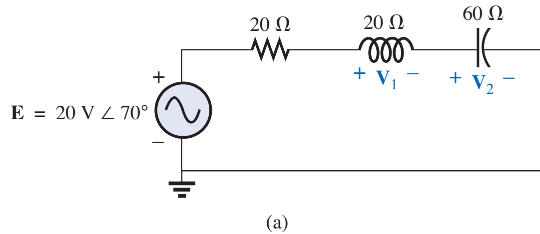


FIGURA 15.127
Problema 15.

16. Calcule los voltajes $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ para el circuito de la figura 15.128 en forma fasorial, utilice la regla del divisor de voltaje.



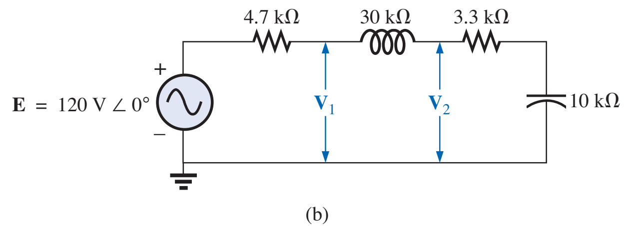


FIGURA 15.128
Problema 16.

*17. Para el circuito de la figura 15.129:
  a. Determine $\mathbf{I}$, $\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_C$ en forma fasorial.
  b. Calcule el factor de potencia total, e indique si está adelantado o atrasado.
  c. Calcule la potencia promedio entregada al circuito.
  d. Trace el diagrama de impedancia.
  e. Trace el diagrama fasorial para los voltajes $\mathbf{E}$, $\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_C$, y para la corriente $\mathbf{I}$.
  f. Encuentre los voltajes $\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_C$ utilizando la regla del divisor de voltaje y compárelos con los resultados del inciso (a) anterior.
  g. Trace el circuito en serie equivalente de lo anterior en cuanto a lo que se refiere a la impedancia total y la corriente i.

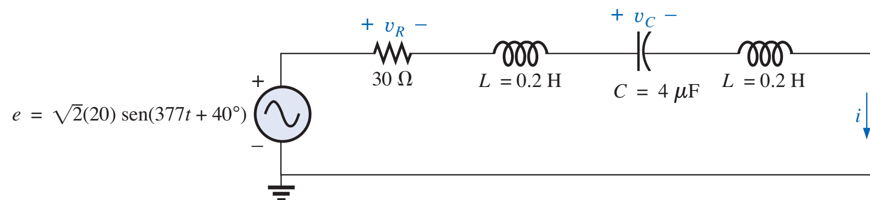


FIGURA 15.129
Problemas 17, 18 y 50.

*18. Repita el problema 17 si la capacitancia se cambia a 1000 μF.

19. Una carga eléctrica tiene un factor de potencia de 0.8 atrasado. Disipa 8 kW a un voltaje de 200 V. Calcule la impedancia de esta carga en coordenadas rectangulares.

***20.** Encuentre el o los elementos en serie que deben estar dentro del contenedor cerrado de la figura 15.130 para satisfacer las siguientes condiciones:

a. Potencia promedio al circuito = 300 W.

b. El circuito tiene un factor de potencia con atraso.

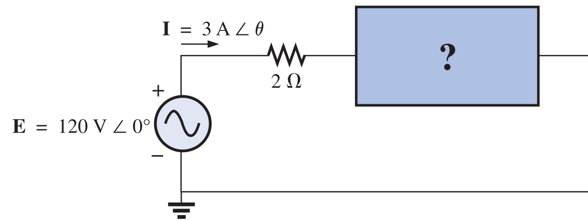


FIGURA 15.130
Problema 20.

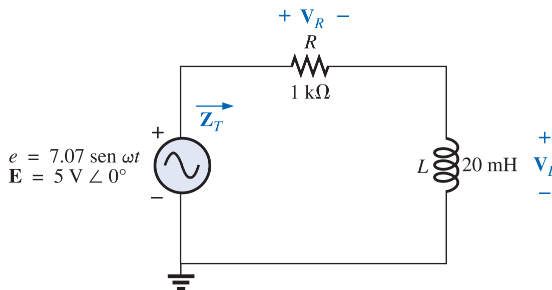


FIGURA 15.131
Problema 21.

SECCIÓN 15.5 Respuesta en frecuencia del circuito *R-C*

***21.** Para el circuito de la figura 15.131:

a. Grafique Z_T y θ_T en función de la frecuencia para un intervalo de frecuencia de 0 a 20 kHz.

b. Grafique V_L en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

c. Grafique θ_L en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

d. Grafique V_R en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

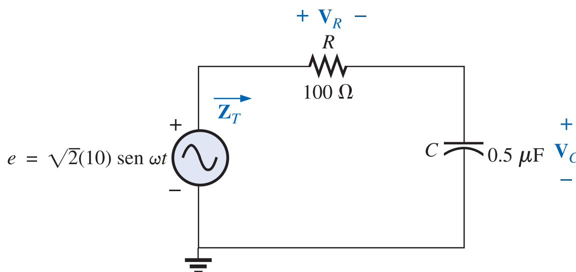


FIGURA 15.132
Problema 22.

***22.** Para el circuito de la figura 15.132:

a. Grafique Z_T y θ_T en función de la frecuencia para un intervalo de frecuencia de 0 a 10 kHz.

b. Grafique V_C en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

c. Grafique θ_C en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

d. Grafique V_R en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

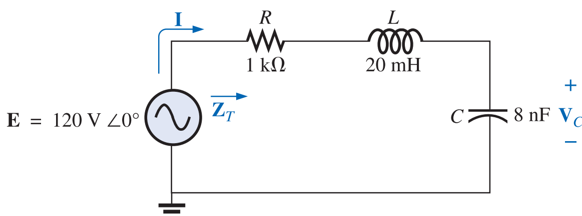


FIGURA 15.133
Problema 23.

***23.** Para el circuito *R-L-C* en serie de la figura 15.133:

a. Grafique Z_T y θ_T en función de la frecuencia para un intervalo de frecuencia de 0 a 20 kHz en incrementos de 1 kHz.

b. Grafique V_C (sólo en magnitud) en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

c. Grafique I (sólo en magnitud) en función de la frecuencia para el mismo intervalo de frecuencia del inciso (a).

SECCIÓN 15.7 Admitancia y susceptancia

24. Encuentre la admitancia total y la impedancia de los circuitos de la figura 15.134. Identifique los valores de conductancia y susceptancia, y trace el diagrama de admitancia.

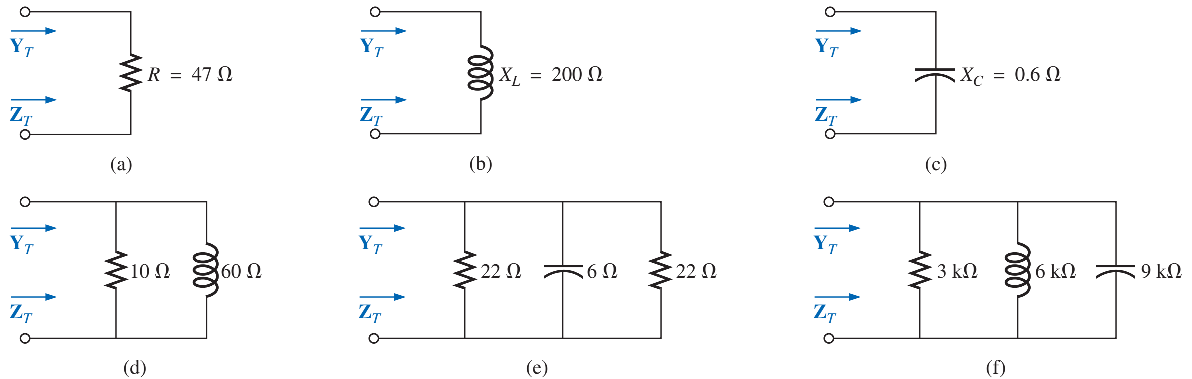


FIGURA 15.134
Problema 24.

25. Encuentre la admitancia y la impedancia totales de los circuitos de la figura 15.135. Identifique los valores de conductancia y susceptancia, y trace el diagrama de admitancia.

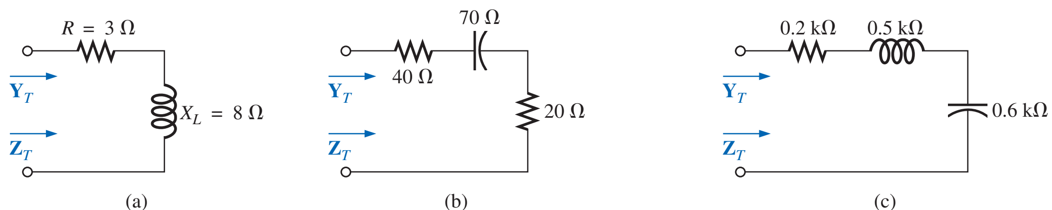


FIGURA 15.135
Problema 25.

26. Repita el problema 6 para los elementos del circuito en paralelo que deben encontrarse dentro del contenedor cerrado para que exista el mismo voltaje y la misma corriente en las terminales de entrada. (Encuentre el circuito en paralelo más simple que cumpla con las condiciones indicadas.)

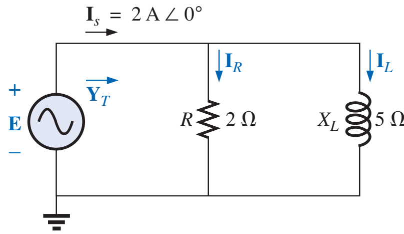


FIGURA 15.136
Problema 27.

SECCIÓN 15.8 Redes de ca en paralelo

27. Para el circuito de la figura 15.136:
- **a.** Encuentre la admitancia total $\mathbf{Y}_T$ en forma polar.
- **b.** Trace el diagrama de admitancia.
- **c.** Encuentre el voltaje **E** y las corrientes $\mathbf{I}_R$ e $\mathbf{I}_L$ en forma fasorial.
- **d.** Trace el diagrama fasorial de las corrientes $\mathbf{I}_s$, $\mathbf{I}_R$ e $\mathbf{I}_L$, y del voltaje **E**.
- **e.** Verifique la ley de corriente de Kirchhoff en un nodo.
- **f.** Encuentre la potencia promedio entregada al circuito.
- **g.** Encuentre el factor de potencia del circuito, e indique si está adelantado o atrasado.
- **h.** Encuentre las expresiones senoidales para las corrientes y el voltaje si la frecuencia es de 60 Hz.
- **i.** Trace las formas de onda de las corrientes y el voltaje sobre el mismo conjunto de ejes.

28. Repita el problema 27 para el circuito de la figura 15.137 reemplazando $\mathbf{I}_L$ con $\mathbf{I}_C$ en los incisos (c) y (d).

29. Repita el problema 27 para el circuito de la figura 15.138 reemplazando **E** con $\mathbf{I}_s$ en el inciso (c).

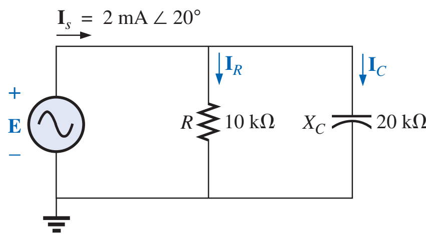


FIGURA 15.137
Problema 28.

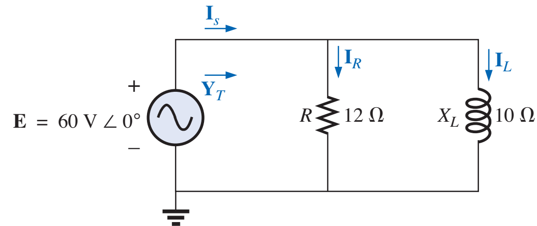


FIGURA 15.138
Problemas 29 y 48.

30. Para el circuito de la figura 15.139:
- **a.** Encuentre la admitancia total $\mathbf{Y}_T$ en forma polar.
- **b.** Trace el diagrama de admitancia.
- **c.** Encuentre el valor de C en microfarads y el de L en henrys.
- **d.** Encuentre el voltaje **E** y las corrientes $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}_C$ en forma fasorial.
- **e.** Trace el diagrama fasorial de las corrientes $\mathbf{I}_s$, $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}_C$, y del voltaje **E**.
- **f.** Verifique la ley de corriente de Kirchhoff en un nodo.
- **g.** Encuentre la potencia promedio entregada al circuito.
- **h.** Encuentre el factor de potencia del circuito, e indique si está adelantado o atrasado.
- **i.** Encuentre las expresiones senoidales para las corrientes y el voltaje.
- **j.** Grafique las formas de onda para las corrientes y el voltaje sobre el mismo conjunto de ejes.

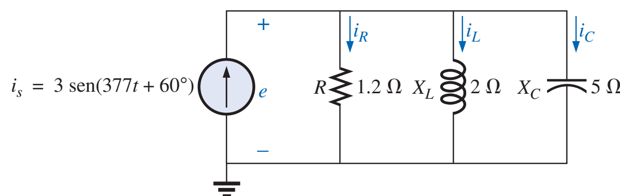


FIGURA 15.139
Problema 30.

31. Repita el problema 30 para el circuito de la figura 15.140.

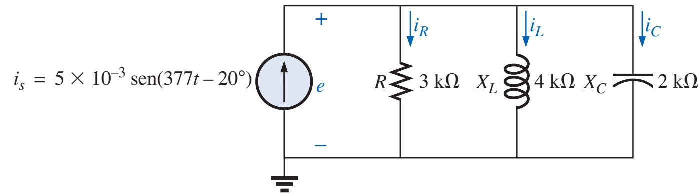


FIGURA 15.140
Problema 31.

32. Repita el problema 30 para el circuito de la figura 15.141, reemplazando e con i_s en el inciso (d).

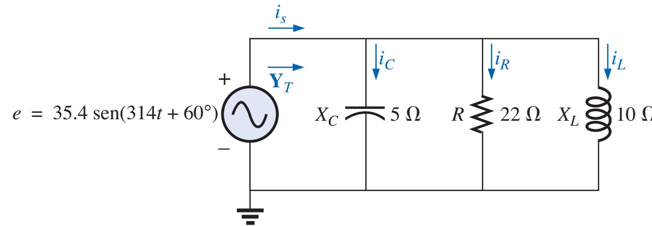


FIGURA 15.141
Problema 32.

SECCIÓN 15.9 Regla del divisor de corriente

33. Calcule las corrientes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ de la figura 15.142 en forma fasorial utilizando la regla del divisor de corriente.

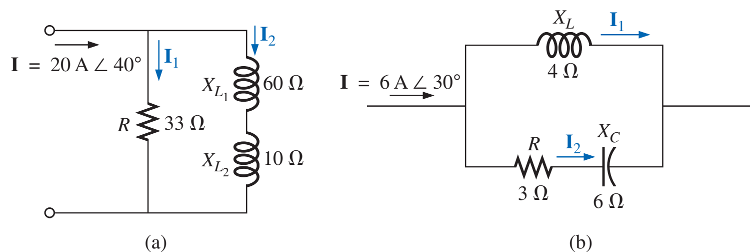


FIGURA 15.142
Problema 33.

SECCIÓN 15.10 Respuesta en frecuencia de la red *R-L* en paralelo

***34.** Para la red *R-C* en paralelo de la figura 15.143:
   a. Grafique Z_T y θ_T en función de la frecuencia para un intervalo de frecuencia de 0 a 20 kHz.
   b. Grafique V_C en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).
   c. Grafique I_R en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

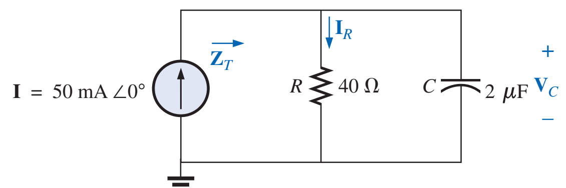


FIGURA 15.143
Problemas 34 y 36.

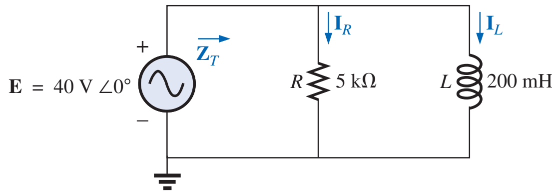


FIGURA 15.144
Problemas 35 y 37.

***35.** Para la red *R-L* en paralelo de la figura 15.144:

a. Grafique Z_T y θ_T en función de la frecuencia para un intervalo de frecuencia de 0 a 10 kHz.

b. Grafique I_L en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

c. Grafique I_R en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

36. Grafique Y_T y θ_T (de $\mathbf{Y}_T = Y_T \angle\theta_T$) para un intervalo de frecuencia de 0 a 20 kHz para la red de la figura 15.143.

37. Grafique Y_T y θ_T (de $\mathbf{Y}_T = Y_T \angle\theta_T$) para un intervalo de frecuencia de 0 a 10 kHz para la red de la figura 15.144.

38. Para la red *R-L-C* en paralelo de la figura 15.145:

a. Grafique Y_T y θ_T (de $\mathbf{Y}_T = Y_T \angle\theta_T$) para un intervalo de frecuencia de 0 a 20 kHz.

b. Repita el inciso (a) para Z_T y θ_T (de $\mathbf{Z}_T = Z_T \angle\theta_T$).

c. Grafique V_C en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

d. Grafique I_L en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia del inciso (a).

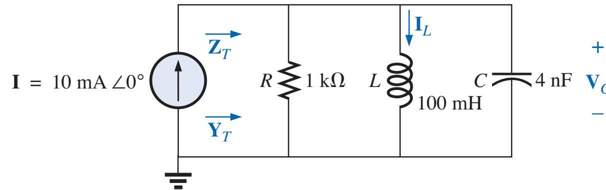
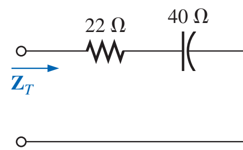


FIGURA 15.145
Problema 38.

SECCIÓN 15.12 Circuitos equivalentes

39. Para el circuito en serie de la figura 15.146, encuentre un circuito en paralelo que tenga la misma impedancia total ($\mathbf{Z}_T$).



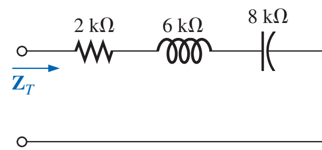
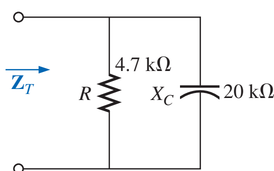


FIGURA 15.146
Problema 39.

40. Para los circuitos en paralelo de la figura 15.147, encuentre un circuito en serie que tenga la misma impedancia total.



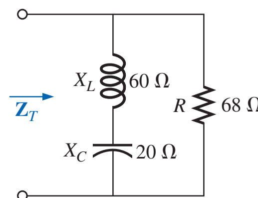


FIGURA 15.147
Problema 40.

41. Para la red de la figura 15.148:

a. Calcule **E**, $\mathbf{I}_R$ e $\mathbf{I}_L$ en forma fasorial.

b. Calcule el factor de potencia total e indique si está adelantado o atrasado.

c. Calcule la potencia promedio entregada al circuito.

d. Trace el diagrama de admitancia.

e. Trace el diagrama fasorial de las corrientes $\mathbf{I}_s$, $\mathbf{I}_R$ e $\mathbf{I}_L$, y del voltaje **E**.

f. Encuentre la corriente $\mathbf{I}_C$ para cada capacitor utilizando solamente la ley de corriente de Kirchhoff.

g. Para un elemento resistivo y uno reactivo, encuentre el circuito en serie que tenga la misma impedancia que el circuito original.

***42.** Repita el problema 41 si la inductancia se modifica a 1 H.

43. Encuentre el o los elementos que deben incluirse en el contenedor cerrado de la figura 15.149 para satisfacer las siguientes condiciones. (Encuentre el circuito paralelo más simple que cumpla con las condiciones indicadas.)

a. Potencia promedio al circuito = 3000 W.

b. El circuito tiene un factor de potencia atrasado.

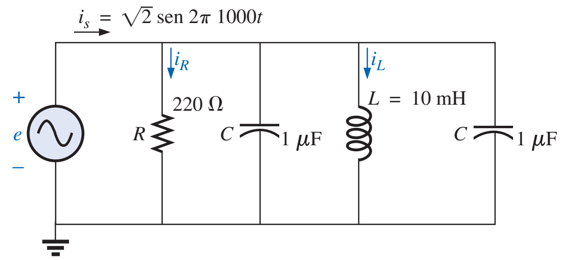


FIGURA 15.148
Problemas 41 y 42.

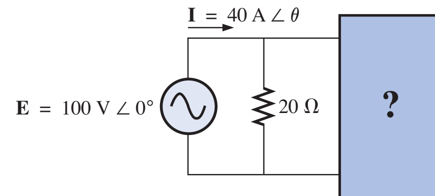


FIGURA 15.149
Problema 43.

SECCIÓN 15.13 Mediciones de fase (osciloscopio de trazo dual)

44. Para el circuito de la figura 15.150, determine la relación de fase entre los siguientes valores utilizando un osciloscopio de trazo dual. El circuito puede reconstruirse de forma distinta para cada inciso, pero no utilice resistores sensores. Muestre todas las conexiones sobre un diagrama que haya trazado de nuevo.

a. e y v_C

b. e e i_s

c. e y v_L

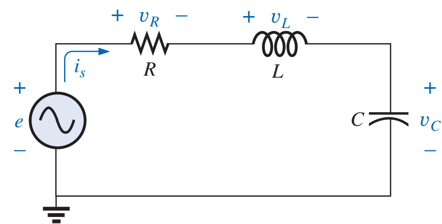


FIGURA 15.150
Problema 44.

45. Para la red de la figura 15.151, determine la relación de fase entre los siguientes valores utilizando un osciloscopio de trazo dual. La red debe permanecer como la construida en la figura 15.151, pero se pueden introducir resistores sensores. Muestre todas las conexiones sobre un diagrama que haya trazado de nuevo.

a. e y v_{R_2}

b. e e i_s

c. i_L e i_C

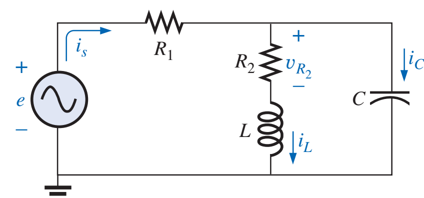
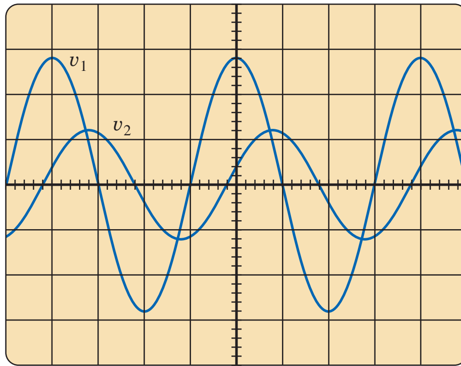


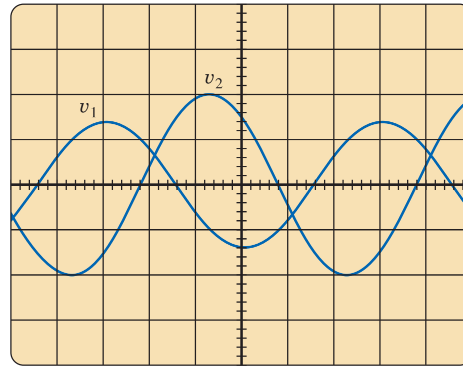
FIGURA 15.151
Problema 45.

46. Para los trazos del osciloscopio de la figura 15.152:
a. Determine la relación de fase entre las formas de onda e indique cuál se encuentra adelantada o atrasada.
b. Determine los valores pico a pico y rms de cada forma de onda.
c. Encuentre la frecuencia de cada forma de onda.



Sensibilidad vertical = 0.5 V/divisiones
Sensibilidad horizontal = 0.2 ms/divisiones

(I)



Sensibilidad vertical = 2 V/divisiones
Sensibilidad horizontal = 10 μs/divisiones

(II)

FIGURA 15.152
Problema 46.

SECCIÓN 15.15 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

47. Para la red de la figura 15.119 (utilice $f = 1$ kHz):
a. Determine los valores rms de los voltajes $\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_L$ y de la corriente $\mathbf{I}$.
b. Grafique v_R, v_L, e i en función del tiempo en gráficas separadas.
c. Coloque e, v_R, v_L, e i sobre la misma gráfica e identifíquelos como corresponde.

48. Para la red de la figura 15.138:
a. Determine los valores rms de las corrientes $\mathbf{I}_s$, $\mathbf{I}_R$ e $\mathbf{I}_L$.
b. Grafique i_s, i_R e i_L en función del tiempo en gráficas separadas.
c. Coloque e, i_s, i_R e i_L sobre la misma gráfica e identifíquelos como corresponde

49. Para la red de la figura 15.121:
a. Grafique la impedancia de la red en función de la frecuencia desde 0 hasta 10 kHz.
b. Grafique la corriente i en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia que va de 0 a 10 kHz.

***50.** Para la red de la figura 15.129:
a. Encuentre los valores rms y los voltajes v_R y v_C a una frecuencia de 1 kHz.
b. Grafique v_C en función de la frecuencia para el intervalo de frecuencia que va de 0 a 10 kHz.
c. Grafique el ángulo de fase entre e e i para el intervalo de frecuencia que va de 0 a 10 kHz.

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

51. Escriba un programa que genere la expresión senoidal para la corriente de un resistor, inductor o capacitor dados los valores de R, L o C y el voltaje aplicado en forma senoidal.

52. Dada la impedancia de cada elemento en forma rectangular, escriba un programa para determinar la impedancia total en forma rectangular de cualquier número de elementos en serie.

53. Dados dos fasores en forma polar en el primer cuadrante, escriba un programa para generar la suma de los dos fasores en forma polar.

GLOSARIO

Admitancia Medida de qué tan fácilmente “admitirá” una red el paso de corriente a través de ese sistema. Se mide en siemens, se abrevia con S, y se representa mediante la letra mayúscula *Y*.

Circuitos de ca en paralelo Conexión de elementos dentro de una red de ca en la que todos los elementos tienen dos puntos en común. El voltaje es el mismo en cada elemento.

Circuitos equivalentes Para cada red de ca en serie existe una red de ca en paralelo (y viceversa) que será “equivalente” en el sentido de que la corriente de entrada y la impedancia son las mismas.

Configuración de ca en serie Conexión de elementos dentro de una red de ca en la que no existen dos impedancias que tengan más de una terminal en común, y donde la corriente es la misma a través de cada elemento.

Diagrama de admitancia Representación vectorial que muestra claramente la magnitud de la admitancia de la conductancia, la susceptancia capacitiva, la susceptancia inductiva, y la magnitud y el ángulo de la admitancia total del sistema.

Diagrama de impedancia Representación vectorial que ilustra claramente la magnitud de la impedancia de los componentes resistivos, reactivos y capacitivos de una red, y la magnitud y el ángulo de la impedancia total del sistema.

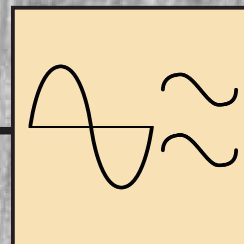
Diagrama fasorial Representación vectorial que proporciona una vista general de la magnitud y las relaciones de fase entre diversos voltajes y corrientes de una red.

Regla del divisor de corriente Método por el cual la corriente a través de cualquiera de dos ramas en paralelo se puede determinar en una red de ca sin tener que calcular primero el voltaje que pasa por las ramas paralelas.

Regla del divisor de voltaje Método por el cual el voltaje en un elemento de una serie de elementos dentro de una red de ca se puede determinar sin tener que calcular primero la corriente que pasa por los elementos.

Susceptancia Medida de qué tan “susceptible” es un elemento al paso de corriente a través de él. Se mide en siemens, que se abrevia con S, y se representa mediante la letra mayúscula *B*.

16



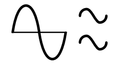
Redes de ca en serie-paralelo

16.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, utilizaremos los conceptos fundamentales aprendidos en el capítulo 15 para desarrollar una técnica con la cual se puedan resolver **redes de ca en serie-paralelo**. Puede ser útil efectuar un breve repaso del capítulo 7 antes de considerar estas redes ya que el enfoque aquí será muy similar al utilizado antes. Los circuitos que se analizarán tendrán solo una fuente de energía, ya sea de voltaje o de corriente. Las redes con dos o más fuentes se considerarán en los capítulos 17 y 18, empleando métodos ya descritos para los circuitos de cd.

En general, al trabajar con redes de ca en serie-paralelo, considere el siguiente enfoque:

1. ***Vuelva a trazar la red, utilizando impedancias de bloque para combinar los elementos en serie y en paralelo que sean evidentes, con ello reducirá la red a una que muestre claramente la estructura fundamental del sistema.***
2. ***Estudie el problema y realice un breve bosquejo mental del enfoque general que planee utilizar. Con esto pueden obtenerse atajos que ahorren tiempo y energía. En algunos casos no será necesario efectuar un análisis extenso ni elaborado. Una sola aplicación de una ley fundamental de análisis de circuitos podría dar por resultado la solución deseada.***
3. ***Luego de haber determinado el enfoque general, a menudo resultará mejor considerar cada rama involucrada en su enfoque de forma independiente antes de intentar unirlas en combinaciones en serie-paralelo. En la mayoría de los casos, trabaje desde las combinaciones en serie y paralelo evidentes hacia la fuente para determinar la impedancia total de la red. La corriente de la fuente podrá determinarse después, y podrá definirse el trayecto de regreso a las incógnitas específicas. A medida que resuelva de regreso hacia la fuente, defina continuamente aquellas incógnitas que no hayan desaparecido en el proceso de reducción. Esto le ahorrará tiempo cuando tenga que trabajar de regreso a través de la red para encontrar cantidades específicas.***



4. Cuando haya llegado a una solución, verifique si es razonable mediante la consideración de las magnitudes de la fuente de energía y de los elementos en el circuito. Si no es así, resuelva la red utilizando otro enfoque, o verifique cuidadosamente su trabajo. En este punto, una solución por computadora puede ser una ventaja invaluable en el proceso de validación.

16.2 EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

EJEMPLO 16.1 Para la red de la figura 16.1:

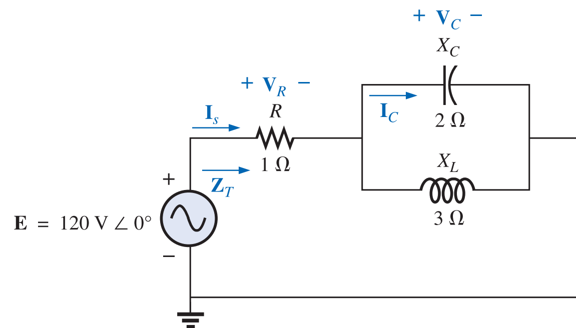


FIGURA 16.1
Ejemplo 16.1.

a. Calcule $\mathbf{Z}_T$.
b. Determine $\mathbf{I}_s$.
c. Calcule $\mathbf{V}_R$ y $\mathbf{V}_C$.
d. Encuentre $\mathbf{I}_C$.
e. Calcule la potencia entregada.
f. Encuentre la F_p de la red.

Soluciones:

a. Como se sugiere en la introducción, la red se volvió a trazar con impedancias de bloque, según se muestra en la figura 16.2. La impedancia $\mathbf{Z}_1$ es simplemente el resistor R de 1 Ω, y $\mathbf{Z}_2$ es la combinación en paralelo de X_C y X_L. Así la red muestra claramente que en lo básico es un circuito en serie, sugiriendo un trayecto directo para obtener la impedancia total y la corriente de la fuente. En la introducción también se advirtió que en muchos de estos problemas se deberá trabajar de regreso a la fuente para encontrar primero la impedancia total y luego la corriente de la fuente. Cuando se encuentren las cantidades desconocidas en términos de las impedancias con subíndice, podrán sustituirse los valores numéricos para encontrar la magnitud y el ángulo de fase de la incógnita. En otras palabras, intente encontrar la solución deseada únicamente en términos de las impedancias con subíndice antes de sustituir números. Este enfoque mejorará, por lo regular, la claridad de la trayectoria elegida para alcanzar una solución mientras ahorra tiempo y evita errores de cálculo por descuido. También observe en la figura 16.2 que todas las cantidades desconocidas, con excepción de $\mathbf{I}_C$ se han preservado; lo cual significa que podremos utilizar la figura 16.2 para determinar estas cantidades en lugar de tener que regresar a la red más compleja de la figura 16.1.

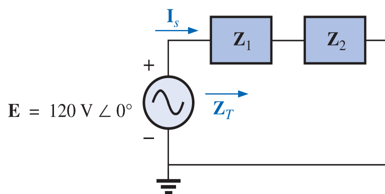
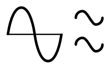


FIGURA 16.2
Red de la figura 16.1 después de asignar las impedancias de bloque.



La impedancia total se define mediante:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$$

con:

$$\mathbf{Z}_1 = R\,\angle 0° = 1\,\Omega\,\angle 0°$$

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_C \parallel \mathbf{Z}_L = \frac{(X_C\,\angle -90°)(X_L\,\angle 90°)}{-j\,X_C + j\,X_L} = \frac{(2\,\Omega\,\angle -90°)(3\,\Omega\,\angle 90°)}{-j\,2\,\Omega + j\,3\,\Omega}$$

$$= \frac{6\,\Omega\,\angle 0°}{j\,1} = \frac{6\,\Omega\,\angle 0°}{1\,\angle 90°} = 6\,\Omega\,\angle -90°$$

y

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 1\,\Omega - j\,6\,\Omega = \mathbf{6.08\,\Omega\,\angle -80.54°}$$

b. $\mathbf{I}_s = \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \dfrac{120\text{ V}\,\angle 0°}{6.08\,\Omega\,\angle -80.54°} = \mathbf{19.74\text{ A}\,\angle 80.54°}$

c. Con referencia a la figura 16.2, vemos que tanto $\mathbf{V}_R$ como $\mathbf{V}_C$ pueden calcularse mediante una aplicación directa de la ley de Ohm:

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}_s\mathbf{Z}_1 = (19.74\text{ A}\,\angle 80.54°)(1\,\Omega\,\angle 0°) = \mathbf{19.74\text{ V}\,\angle 80.54°}$$

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{I}_s\mathbf{Z}_2 = (19.74\text{ A}\,\angle 80.54°)(6\,\Omega\,\angle -90°)$$

$$= \mathbf{118.44\text{ V}\,\angle -9.46°}$$

d. Ahora que se conoce $\mathbf{V}_C$, también se podrá encontrar la corriente $\mathbf{I}_C$ utilizando la ley de Ohm.

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_C}{\mathbf{Z}_C} = \frac{118.44\text{ V}\,\angle -9.46°}{2\,\Omega\,\angle -90°} = \mathbf{59.22\text{ A}\,\angle 80.54°}$$

e. $P_{\text{del}} = I_s^2R = (19.74\text{ A})^2(1\,\Omega) = \mathbf{389.67\text{ W}}$

f. $F_p = \cos\theta = \cos 80.54° = \mathbf{0.164}$ **adelantado**

El hecho de que la impedancia total tenga un ángulo de fase negativo (revelando que $\mathbf{I}_s$ adelanta a $\mathbf{E}$) es una clara indicación de que la red es de naturaleza capacitiva y, por tanto, tiene un factor de potencia adelantado. Determinar que la red es capacitiva puede lograrse a partir de la red original observando primero que, para elementos *L-C* en paralelo, la impedancia más pequeña predomina y da por resultado una red *R-C*.

EJEMPLO 16.2 Para la red de la figura 16.3:

a. Si **I** es de 50 A $\angle 30°$, calcule $\mathbf{I}_1$ utilizando la regla del divisor de corriente.
b. Repita el inciso (a) para $\mathbf{I}_2$.
c. Verifique la ley de corriente de Kirchhoff en el nodo uno.

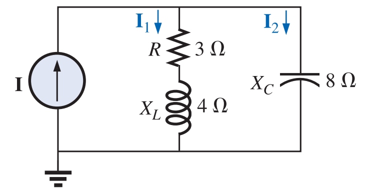


FIGURA 16.3
Ejemplo 16.2.

Soluciones:

a. Al volver a trazar el circuito como en la figura 16.4 tenemos:

$$\mathbf{Z}_1 = R + j\,X_L = 3\,\Omega + j\,4\,\Omega = 5\,\Omega\,\angle 53.13°$$

$$\mathbf{Z}_2 = -j\,X_C = -j\,8\,\Omega = 8\,\Omega\,\angle -90°$$

Utilizando la regla del divisor de corriente resulta:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{I}}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1} = \frac{(8\,\Omega\,\angle -90°)(50\text{ A}\,\angle 30°)}{(-j\,8\,\Omega) + (3\,\Omega + j\,4\,\Omega)} = \frac{400\,\angle -60°}{3 - j\,4}$$

$$= \frac{400\,\angle -60°}{5\,\angle -53.13°} = \mathbf{80\text{ A}\,\angle -6.87°}$$

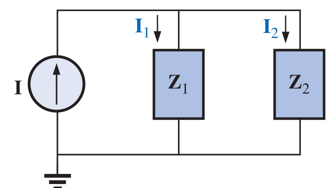
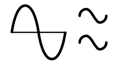


FIGURA 16.4
Red de la figura 16.3 después de asignar las impedancias de bloque.



b. $\mathbf{I}_2 = \dfrac{\mathbf{Z}_1\mathbf{I}}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1} = \dfrac{(5\ \Omega\ \angle 53.13^\circ)(50\ \text{A}\ \angle 30^\circ)}{5\ \Omega\ \angle -53.13^\circ} = \dfrac{250\ \angle 83.13^\circ}{5\ \angle -53.13^\circ}$

$= \mathbf{50\ A\ \angle 136.26^\circ}$

c. $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$

$50\ \text{A}\ \angle 30^\circ = 80\ \text{A}\ \angle -6.87^\circ + 50\ \text{A}\ \angle 136.26^\circ$
$= (79.43 - j\,9.57) + (-36.12 + j\,34.57)$
$= 43.31 + j\,25.0$
$50\ \text{A}\ \angle 30^\circ = 50\ \text{A}\ \angle 30^\circ$ (se comprueba)

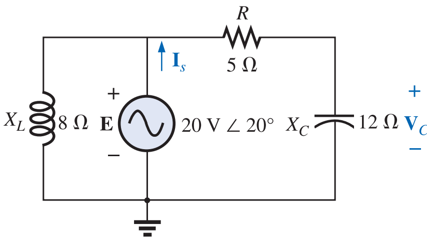


FIGURA 16.5
Ejemplo 16.3.

EJEMPLO 16.3 Para la red de la figura 16.5:

a. Calcule el voltaje $\mathbf{V}_C$ utilizando la regla del divisor de voltaje.
b. Calcule la corriente $\mathbf{I}_s$.

Soluciones:

a. La red se vuelve a trazar como se muestra en la figura 16.6, con:

$$\mathbf{Z}_1 = 5\ \Omega = 5\ \Omega\ \angle 0^\circ$$
$$\mathbf{Z}_2 = -j\,12\ \Omega = 12\ \Omega\ \angle -90^\circ$$
$$\mathbf{Z}_3 = +j\,8\ \Omega = 8\ \Omega\ \angle 90^\circ$$

Dado que se busca $\mathbf{V}_C$, no combinaremos R y X_C en una sola impedancia de bloque. Observe también cómo la figura 16.6 muestra claramente que **E** es el voltaje total en la combinación en serie de $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$, permitiendo el uso de la regla del divisor de voltaje para calcular $\mathbf{V}_C$. Además, advierta que todas las corrientes necesarias para determinar $\mathbf{I}_s$ fueron preservadas en la figura 16.6, revelando que no hay necesidad de volver a la red de la figura 16.5 —ya que todo se encuentra definido en la figura 16.6.

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(12\ \Omega\ \angle -90^\circ)(20\ \text{V}\ \angle 20^\circ)}{5\ \Omega - j\,12\ \Omega} = \frac{240\ \text{V}\ \angle -70^\circ}{13\ \angle -67.38^\circ}$$
$$= \mathbf{18.46\ V\ \angle -2.62^\circ}$$

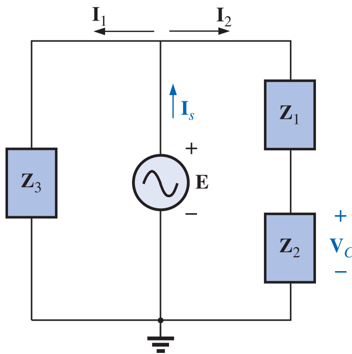


FIGURA 16.6
Red de la figura 16.5 después de asignar las impedancias de bloque.

b. $\mathbf{I}_1 = \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_3} = \dfrac{20\ \text{V}\ \angle 20^\circ}{8\ \Omega\ \angle 90^\circ} = 2.5\ \text{A}\ \angle -70^\circ$

$\mathbf{I}_2 = \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \dfrac{20\ \text{V}\ \angle 20^\circ}{13\ \Omega\ \angle -67.38^\circ} = 1.54\ \text{A}\ \angle 87.38^\circ$

e

$\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$
$= 2.5\ \text{A}\ \angle -70^\circ + 1.54\ \text{A}\ \angle 87.38^\circ$
$= (0.86 - j\,2.35) + (0.07 + j\,1.54)$
$\mathbf{I}_s = 0.93 - j\,0.81 = \mathbf{1.23\ A\ \angle -41.05^\circ}$

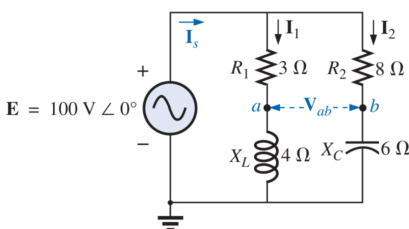


FIGURA 16.7
Ejemplo 16.4.

EJEMPLO 16.4 Para la figura 16.7:

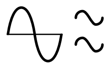
a. Calcule la corriente $\mathbf{I}_s$.
b. Encuentre el voltaje $\mathbf{V}_{ab}$.

Soluciones:

a. Al volver a trazar el circuito como en la figura 16.8 obtenemos:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j\,X_L = 3\ \Omega + j\,4\ \Omega = 5\ \Omega\ \angle 53.13^\circ$$
$$\mathbf{Z}_2 = R_2 - j\,X_C = 8\ \Omega - j\,6\ \Omega = 10\ \Omega\ \angle -36.87^\circ$$

En este caso el voltaje $\mathbf{V}_{ab}$ se pierde en la red que se volvió a trazar, pero las corrientes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ permanecen definidas para emplearse en los futuros



cálculos necesarios para determinar $\mathbf{V}_{ab}$. La figura 16.8 muestra claramente que la impedancia total puede encontrarse utilizando la ecuación para dos impedancias en paralelo:

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(5\ \Omega\ \angle 53.13°)(10\ \Omega\ \angle -36.87°)}{(3\ \Omega + j\,4\ \Omega) + (8\ \Omega - j\,6\ \Omega)}$$

$$= \frac{50\ \Omega\ \angle 16.26°}{11 - j\,2} = \frac{50\ \Omega\ \angle 16.26°}{11.18\ \angle -10.30°}$$

$$= \mathbf{4.472\ \Omega\ \angle 26.56°}$$

e $$\mathbf{I}_s = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{100\ \text{V}\ \angle 0°}{4.472\ \Omega\ \angle 26.56°} = \mathbf{22.36\ A\ \angle -26.56°}$$

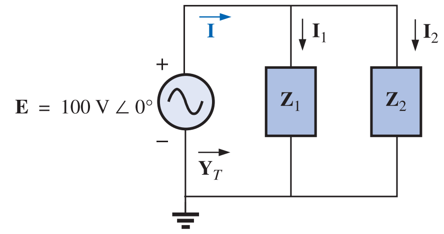


FIGURA 16.8
Red de la figura 16.7 después de asignar las impedancias de bloque.

b. Mediante la ley de Ohm,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{100\ \text{V}\ \angle 0°}{5\ \Omega\ \angle 53.13°} = \mathbf{20\ A\ \angle -53.13°}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{100\ \text{V}\ \angle 0°}{10\ \Omega\ \angle -36.87°} = \mathbf{10\ A\ \angle 36.87°}$$

Al regresar a la figura 16.7 tenemos:

$$\mathbf{V}_{R_1} = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{R_1} = (20\ \text{A}\ \angle -53.13°)(3\ \Omega\ \angle 0°) = \mathbf{60\ V\ \angle -53.13°}$$

$$\mathbf{V}_{R_2} = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{R_2} = (10\ \text{A}\ \angle +36.87°)(8\ \Omega\ \angle 0°) = \mathbf{80\ V\ \angle +36.87°}$$

En lugar de utilizar los dos pasos recién mostrados, podríamos haber determinado $\mathbf{V}_{R_1}$ o $\mathbf{V}_{R_2}$ en un paso mediante la regla del divisor de voltaje:

$$\mathbf{V}_{R_1} = \frac{(3\ \Omega\ \angle 0°)(100\ \text{V}\ \angle 0°)}{3\ \Omega\ \angle 0° + 4\ \Omega\ \angle 90°} = \frac{300\ \text{V}\ \angle 0°}{5\ \angle 53.13°} = \mathbf{60\ V\ \angle -53.13°}$$

Para encontrar $\mathbf{V}_{ab}$, deberá aplicarse la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo (Figura 16.9) que consta de los resistores de 3 Ω y 8 Ω. Mediante la ley de voltaje de Kirchhoff,

$$\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{R_1} - \mathbf{V}_{R_2} = 0$$

o bien:
$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{R_2} - \mathbf{V}_{R_1}\\ &= 80\ \text{V}\ \angle 36.87° - 60\ \text{V}\ \angle -53.13°\\ &= (64 + j\,48) - (36 - j\,48)\\ &= 28 + j\,96\\ \mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{100\ V\ \angle 73.74°}\end{aligned}$$

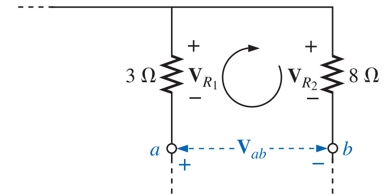
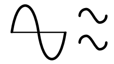


FIGURA 16.9
Determinación del voltaje $\mathbf{V}_{ab}$ para la red de la figura 16.7.

EJEMPLO 16.5 En el análisis de redes con transistores, se encuentra muy a menudo la red de la figura 16.10. El circuito equivalente del transistor incluye una fuente de corriente **I** y una impedancia de salida R_o. El resistor R_C es un resistor de polarización utilizado para establecer condiciones de cd específicas, y el resistor R_i representa la carga de la siguiente etapa. El capacitor de acoplamiento está diseñado para ser un circuito abierto en cd y tener la impedancia más baja posible para las frecuencias de interés, con el fin de asegurar que $\mathbf{V}_L$ sea un valor máximo. El intervalo de frecuencia del ejemplo incluye todo el espectro de audio (audible) desde 100 Hz hasta 20 kHz. El propósito del ejemplo es demostrar que, para todo el intervalo audible, el efecto del capacitor se puede ignorar. Éste realiza su función como agente de bloqueo de cd, pero permite que la ca pase por él con poca alteración.



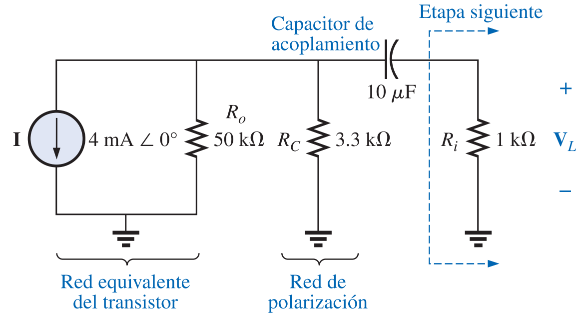


FIGURA 16.10
Amplificador básico con un transistor.

a. Determine $\mathbf{V}_L$ para la red de la figura 16.10 a la frecuencia de 100 Hz.
b. Repita el inciso (a) para una frecuencia de 20 kHz.
c. Compare los resultados de los incisos (a) y (b).

Soluciones:

a. La red se vuelve a trazar con las impedancias con subíndice en la figura 16.11.

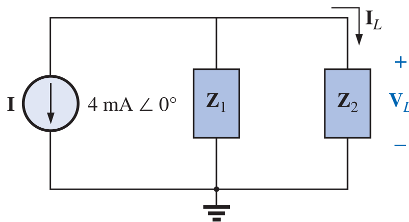


FIGURA 16.11
Red de la figura 16.10 posterior a la asignación de las impedancias de bloque.

$$\mathbf{Z}_1 = 50\text{ k}\Omega \angle 0° \parallel 3.3\text{ k}\Omega \angle 0° = 3.096\text{ k}\Omega \angle 0°$$

$$\mathbf{Z}_2 = R_i - j\,X_C$$

$$\text{A } f = 100\text{ Hz: } X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(100\text{ Hz})(10\ \mu\text{F})} = 159.16\ \Omega$$

y $$\mathbf{Z}_2 = 1\text{ k}\Omega - j\,159.16\ \Omega$$

Regla del divisor de corriente:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{I}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(3.096\text{ k}\Omega \angle 0°)(4\text{ mA} \angle 0°)}{3.096\text{ k}\Omega + 1\text{ k}\Omega - j\,159.16\ \Omega}$$

$$= \frac{12.384\text{ A} \angle 0°}{4096 - j\,159.16} = \frac{12.384\text{ A} \angle 0°}{4099 \angle -2.225°}$$

$$= 3.021\text{ mA} \angle 2.225°$$

y $$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_L\mathbf{Z}_R$$

$$= (3.021\text{ mA} \angle 2.225°)(1\text{ k}\Omega \angle 0°)$$

$$= \mathbf{3.021\ V} \angle \mathbf{2.225°}$$

b. $$\text{A } f = 20\text{ kHz: } X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(20\text{ kHz})(10\ \mu\text{F})} = 0.796\ \Omega$$

Observe el notable cambio en X_C con la frecuencia. Desde luego, a mayor frecuencia, mejor será la aproximación de X_C a un corto circuito para las condiciones de ca.

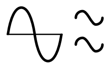
$$\mathbf{Z}_2 = 1\text{ k}\Omega - j\,0.796\ \Omega$$

Regla del divisor de corriente:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{I}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(3.096\text{ k}\Omega \angle 0°)(4\text{ mA} \angle 0°)}{3.096\text{ k}\Omega + 1\text{ k}\Omega - j\,0.796\ \Omega}$$

$$= \frac{12.384\text{ A} \angle 0°}{4096 - j\,0.796\ \Omega} = \frac{12.384\text{ A} \angle 0°}{4096 \angle -0.011°}$$

$$= 3.023\text{ mA} \angle 0.011°$$



y $$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_L\mathbf{Z}_R = (3.023 \text{ mA } \angle 0.011°)(1 \text{ k}\Omega \angle 0°) = \mathbf{3.023 \text{ V } \angle 0.011°}$$

c. El resultado indica claramente que el capacitor tuvo poco efecto sobre las frecuencias de interés. Además, observe que la mayor parte de la corriente de la fuente llegó a la carga para los parámetros característicos utilizados.

EJEMPLO 16.6 Para la red de la figura 16.12:

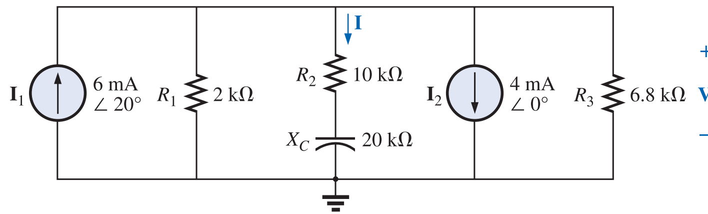


FIGURA 16.12
Ejemplo 16.6.

a. Determine la corriente **I**.
b. Encuentre el voltaje **V**.

Soluciones:

a. Las reglas para las fuentes de corriente en paralelo son las mismas que para las redes de cd y de ca. Es decir, la fuente de corriente equivalente será su suma o diferencia (como fasores). Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_T &= 6 \text{ mA } \angle 20° - 4 \text{ mA } \angle 0° \\ &= 5.638 \text{ mA} + j\,2.052 \text{ mA} - 4 \text{ mA} \\ &= 1.638 \text{ mA} + j\,2.052 \text{ mA} \\ &= 2.626 \text{ mA } \angle 51.402°\end{aligned}$$

Al volver a trazar la red utilizando impedancias de bloque se obtendrá la red de la figura 16.13 donde:

$$\mathbf{Z}_1 = 2 \text{ k}\Omega \angle 0° \parallel 6.8 \text{ k}\Omega \angle 0° = 1.545 \text{ k}\Omega \angle 0°$$

y $$\mathbf{Z}_2 = 10 \text{ k}\Omega - j\,20 \text{ k}\Omega = 22.361 \text{ k}\Omega \angle -63.435°$$

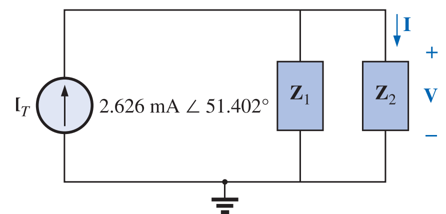


FIGURA 16.13
Red de la figura 16.12 posterior a la asignación de las impedancias con subíndice.

Observe que **I** y **V** siguen definidos en la figura 16.13.

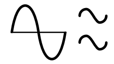
Regla del divisor de corriente:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{I}_T}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(1.545 \text{ k}\Omega \angle 0°)(2.626 \text{ mA } \angle 51.402°)}{1.545 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega - j\,20 \text{ k}\Omega}$$

$$= \frac{4.057 \text{ A } \angle 51.402°}{11.545 \times 10^3 - j\,20 \times 10^3} = \frac{4.057 \text{ A } \angle 51.402°}{23.093 \times 10^3 \angle -60.004°}$$

$$= \mathbf{0.176 \text{ mA } \angle 111.406°}$$

b. $$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_2 = (0.176 \text{ mA } \angle 111.406°)(22.36 \text{ k}\Omega \angle -63.435°) = \mathbf{3.936 \text{ V } \angle 47.971°}$$



EJEMPLO 16.7 Para la red de la figura 16.14:

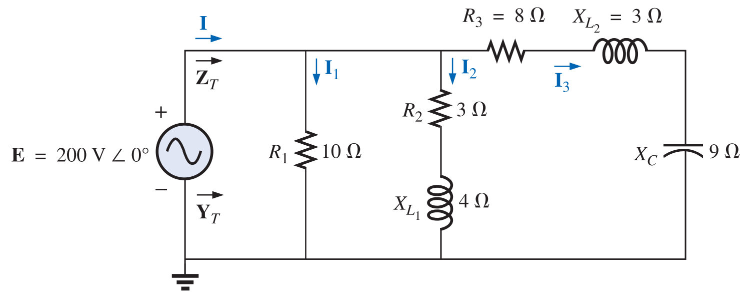


FIGURA 16.14
Ejemplo 16.7.

a. Calcule **I**.
b. Encuentre $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$.
c. Verifique la ley de corriente de Kirchhoff demostrando que:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$$

d. Encuentre la impedancia total del circuito.

Soluciones:

a. Al volver a trazar el circuito como en la figura 16.15 surge una red estrictamente paralela donde:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 = 10\ \Omega \angle 0°$$
$$\mathbf{Z}_2 = R_2 + j\,X_{L_1} = 3\ \Omega + j\,4\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_3 = R_3 + j\,X_{L_2} - j\,X_C = 8\ \Omega + j\,3\ \Omega - j\,9\ \Omega = 8\ \Omega - j\,6\ \Omega$$

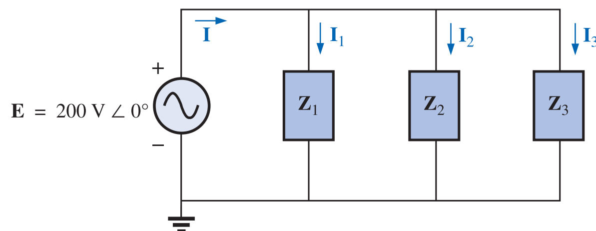
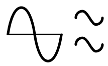


FIGURA 16.15
Red de la figura 16.14 posterior a la asignación de las impedancias con subíndice.

La admitancia total es:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_T &= \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3\\ &= \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} = \frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega + j\,4\ \Omega} + \frac{1}{8\ \Omega - j\,6\ \Omega}\\ &= 0.1\ \text{S} + \frac{1}{5\ \Omega \angle 53.13°} + \frac{1}{10\ \Omega \angle -36.87°}\\ &= 0.1\ \text{S} + 0.2\ \text{S} \angle -53.13° + 0.1\ \text{S} \angle 36.87°\\ &= 0.1\ \text{S} + 0.12\ \text{S} - j\,0.16\ \text{S} + 0.08\ \text{S} + j\,0.06\ \text{S}\\ &= 0.3\ \text{S} - j\,0.1\ \text{S} = 0.316\ \text{S} \angle -18.435°\end{aligned}$$

Calculadora El ejercicio matemático anterior presenta una excelente oportunidad para demostrar el poder de algunas de las calculadoras modernas. Utilizando la calculadora TI-86, la operación anterior podría aparecer de la siguiente forma en la pantalla:




```
1/(10,0)+1/(3,4)+1/(8,−6)
```

con el resultado:

```
(300.000E−3,−100.000E−3)
```

Convirtiendo a forma polar:

```
Ans ▶ Pol
(316.228E−3∠−18.435E0)
```

La corriente **I**:

$$\mathbf{I} = \mathbf{E}\mathbf{Y}_T = (200\text{ V}\angle 0°)(0.316\text{ S}\angle -18.435°)$$
$$= \mathbf{63.2\ A\ \angle -18.435°}$$

b. Dado que el voltaje es el mismo en ramas paralelas,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{200\text{ V}\angle 0°}{10\ \Omega\angle 0°} = \mathbf{20\ A\ \angle 0°}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{200\text{ V}\angle 0°}{5\ \Omega\angle 53.13°} = \mathbf{40\ A\ \angle -53.13°}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_3} = \frac{200\text{ V}\angle 0°}{10\ \Omega\angle -36.87°} = \mathbf{20\ A\ \angle +36.87°}$$

c. $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$

$$60 - j\,20 = 20\angle 0° + 40\angle -53.13° + 20\angle +36.87°$$
$$= (20 + j\,0) + (24 - j\,32) + (16 + j\,12)$$
$$60 - j\,20 = 60 - j\,20 \quad \text{(se comprueba)}$$

d. $\mathbf{Z}_T = \dfrac{1}{\mathbf{Y}_T} = \dfrac{1}{0.316\text{ S}\angle -18.435°}$

$$= \mathbf{3.165\ \Omega\ \angle 18.435°}$$

EJEMPLO 16.8 Para la red de la figura 16.16:

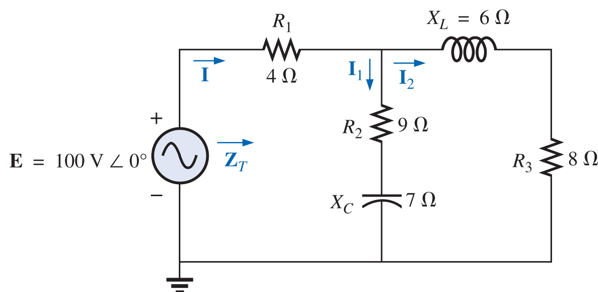
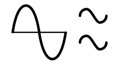


FIGURA 16.16
Ejemplo 16.8.

a. Calcule la impedancia total $\mathbf{Z}_T$.
b. Calcule **I**.
c. Encuentre el factor de potencia total.
d. Calcule $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$.
e. Encuentre la potencia promedio entregada al circuito.



Soluciones:

a. Al volver a trazar el circuito como en la figura 16.17 tenemos:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 = 4\ \Omega \angle 0^\circ$$
$$\mathbf{Z}_2 = R_2 - j\,X_C = 9\ \Omega - j\,7\ \Omega = 11.40\ \Omega \angle -37.87^\circ$$
$$\mathbf{Z}_3 = R_3 + j\,X_L = 8\ \Omega + j\,6\ \Omega = 10\ \Omega \angle +36.87^\circ$$

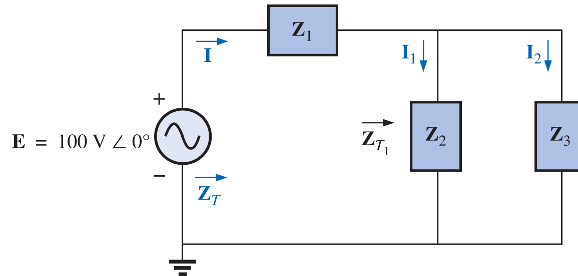


FIGURA 16.17
Red de la figura 16.16 posterior a la asignación de las impedancias con subíndice.

Observe que todas las cantidades deseadas se conservaron en la red que se volvió a trazar. La impedancia total:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_{T_1}$$
$$= \mathbf{Z}_1 + \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$$
$$= \frac{4\ \Omega + (11.4\ \Omega \angle -37.87^\circ)(10\ \Omega \angle 36.87^\circ)}{(9\ \Omega - j\,7\ \Omega) + (8\ \Omega + j\,6\ \Omega)}$$
$$= 4\ \Omega + \frac{114\ \Omega \angle -1.00^\circ}{17.03 \angle -3.37^\circ} = 4\ \Omega + 6.69\ \Omega \angle 2.37^\circ$$
$$= 4\ \Omega + 6.68\ \Omega + j\,0.28\ \Omega = 10.68\ \Omega + j\,0.28\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{10.684\ \Omega \angle 1.5^\circ}$$

Solución con Mathcad: El álgebra compleja que acabamos de presentar con todo detalle ofrece una excelente oportunidad para practicar nuestras habilidades en Mathcad con números complejos. Recuerde que la *j* debe seguir al valor numérico de la parte imaginaria y **no** se multiplica por el valor numérico. Simplemente teclee el valor numérico y luego la *j*. También recuerde que, a menos que efectúe un cambio global en el formato, aparecerá una *i* con la parte imaginaria de la solución. Como vemos en la figura 16.18, cada impedancia se define primero con **Shift:**. Luego, cada impedancia se ingresa en secuencia sobre la misma línea o líneas posteriores. A continuación, se define la ecuación para la impedancia total utilizando los paréntesis con el fin de asegurar que la suma inferior se efectúe antes que la división, y también para proporcionar el mismo formato a la ecuación tal como el que aparece líneas arriba. Luego se ingresa **ZT**, se selecciona la tecla de igual, y aparecerá la forma rectangular para la impedancia total como muestra la figura 16.18.

La forma polar se puede obtener acudiendo primero a la barra de herramientas de **Calculator** para obtener la operación de magnitud e insertando **ZT** como se muestra en la figura 16.18. Luego, al seleccionar el signo de igual, se obtendrá la magnitud de 10.693 Ω. El ángulo se obtiene acudiendo primero a la barra de herramientas **Greek** y eligiendo theta, ingresando **T**, y definiendo la variable. La π proviene de la barra de herramientas **Calculator**, y **arg(** **)**

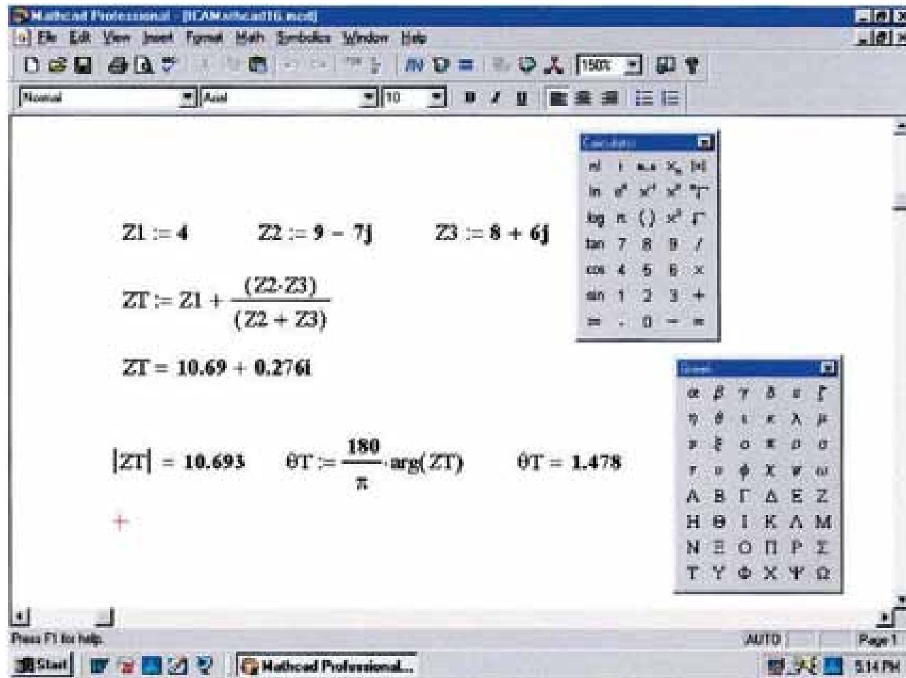


FIGURA 16.18
Utilización de Mathcad para determinar la impedancia total de la red de la figura 16.16.

de **Insert-*f(x)*-Function Name-arg**. Por último, la variable se vuelve a escribir y se selecciona el signo de igual para obtener un ángulo de 1.478°. La solución por computadora de 10.693 Ω ∠1.478° representa una excelente verificación de la solución teórica de 10.684 Ω ∠1.5°.

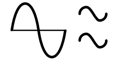
Calculadora ¡He aquí otra oportunidad para demostrar la versatilidad de la calculadora! Sin embargo, en la operación anterior, debemos estar conscientes de la prioridad en las operaciones matemáticas, como se demuestra en la siguiente pantalla de calculadora. En la mayoría de los casos, las operaciones se realizan en el mismo orden que si se efectuaran a mano.

(4,0)+((9,−7)+(8,6))$^{-1}$* (11.4∠−37.87)(10∠36.87) (ENTER)
(10.689E0,276.413E−3)
Ans ▶ Pol (ENTER)
(10.692E0∠1.481E0)

b. $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \dfrac{100\text{ V }\angle 0^\circ}{10.684\ \Omega\ \angle 1.5^\circ} = \mathbf{9.36\ A\ \angle -1.5^\circ}$

c. $F_p = \cos\theta_T = \dfrac{R}{Z_T} = \dfrac{10.68\ \Omega}{10.684\ \Omega} \cong \mathbf{1}$

(básicamente resistiva, lo cual resulta interesante si se considera la complejidad de la red.)



d. Regla del divisor de corriente:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{I}}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} = \frac{(11.40\ \Omega \angle -37.87°)(9.36\ \text{A} \angle -1.5°)}{(9\ \Omega - j\,7\ \Omega) + (8\ \Omega + j\,6\ \Omega)}$$

$$= \frac{106.7\ \text{A} \angle -39.37°}{17 - j\,1} = \frac{106.7\ \text{A} \angle -39.37°}{17.03 \angle -3.37°}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{6.27\ A \angle -36°}$$

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff (en lugar de otra aplicación de la regla del divisor de corriente) resulta:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{I}_2$$

o bien:
$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$$
$$= (9.36\ \text{A} \angle -1.5°) - (6.27\ \text{A} \angle -36°)$$
$$= (9.36\ \text{A} - j\,0.25\ \text{A}) - (5.07\ \text{A} - j\,3.69\ \text{A})$$
$$\mathbf{I}_1 = 4.29\ \text{A} + j\,3.44\ \text{A} = \mathbf{5.5\ A \angle 38.72°}$$

e. $P_T = EI\cos\theta_T$
$$= (100\ \text{V})(9.36\ \text{A})\cos 1.5°$$
$$= (936)(0.99966)$$
$$P_T = \mathbf{935.68\ W}$$

16.3 REDES ESCALERA

Las **redes escalera** se analizaron con cierto detalle en el capítulo 7. Aquí simplemente se aplicará el primer método descrito en la sección 7.3 a la red escalera general de ca senoidal que aparece en la figura 16.19. Se busca la corriente $\mathbf{I}_6$.

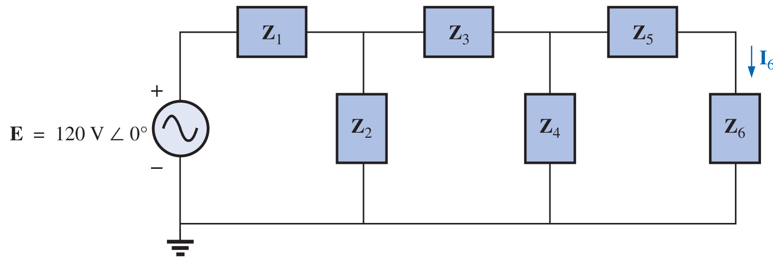


FIGURA 16.19
Red escalera.

Las impedancias $\mathbf{Z}_T$, $\mathbf{Z}'_T$ y $\mathbf{Z}''_T$ y las corrientes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_3$ están definidas en la figura 16.20:

$$\mathbf{Z}''_T = \mathbf{Z}_5 + \mathbf{Z}_6$$

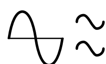
y
$$\mathbf{Z}'_T = \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 \parallel \mathbf{Z}''_T$$

con:
$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \parallel \mathbf{Z}'_T$$

Entonces:
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T}$$

e
$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{I}}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}'_T}$$

con:
$$\mathbf{I}_6 = \frac{\mathbf{Z}_4\mathbf{I}_3}{\mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}''_T}$$



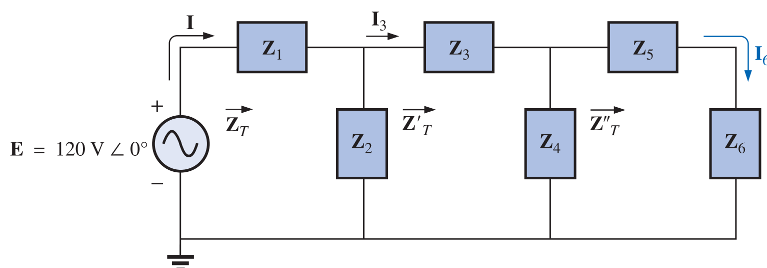


FIGURA 16.20
Definición de un método para efectuar el análisis de redes escalera.

16.4 APLICACIONES

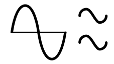
La amplia mayoría de las aplicaciones que aparecen a lo largo de este libro han sido del tipo serie-paralelo. Las siguientes son simplemente dos más que incluyen combinaciones en serie-paralelo de elementos y sistemas para realizar importantes labores cotidianas. La toma con un interruptor para falla de tierra (GFI, *ground fault interrupter*) utiliza interruptores protectores en serie y bobinas sensoras y un sistema de control en paralelo, mientras que el circuito equivalente ideal de un cable coaxial utiliza una combinación en serie-paralelo de inductores y capacitores.

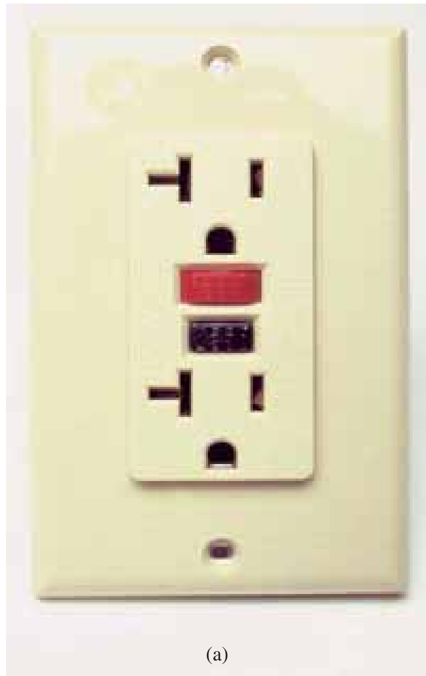
Interruptor de falla de tierra (GFI)

El *National Electric Code*, la "biblia" estadounidense para los proveedores eléctricos, demanda actualmente que se utilicen tomas con interruptores para falla de tierra (GFI) en cualquier área donde el agua y la humedad pudieran provocar accidentes serios, como baños, albercas, embarcaderos, etc. Estos enchufes son similares a cualquier otro contacto excepto porque cuentan con un botón de reinicio y uno de prueba en el centro de la unidad, como se muestra en la figura 16.21(a). Su principal diferencia con una toma ordinaria es que desconectará la energía mucho más rápido de lo que lo haría el interruptor instalado en el sótano. Todavía puede sentirse una descarga eléctrica aunque se use un GFI, pero la corriente se desconecta tan rápido (en algunos milisegundos) que una persona con buena salud no sufrirá lesiones eléctricas serias. Cuando se tenga alguna duda sobre su uso, recuérdese que el costo es tal que debería instalarse. Funciona como una toma común, pero ofrece mayor nivel de seguridad.

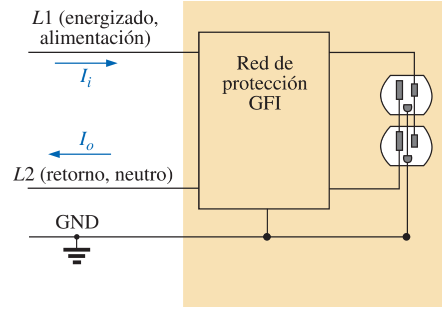
La operación básica del GFI se describe mejor mediante la sencilla red de la figura 16.21(b). El circuito de protección separa la fuente de energía del propio contacto. Observe en la figura 16.21(b) la importancia de aterrizar el circuito de protección a la tierra central de las instalaciones (una tubería de agua, una barra de tierra, etc., conectadas al tablero central). En general, la toma se aterrizará a la misma conexión. Básicamente, la red que se muestra en la figura 16.21(b) detecta tanto la corriente que ingresa (I_i) como la que sale (I_o), y proporciona una conexión directa a la toma cuando las corrientes son iguales. Si se genera una falla como la causada por alguien que toca la terminal energizada mientras está de pie sobre un piso mojado, la corriente de regreso será menor que la de alimentación (sólo unos cuantos miliampere son suficientes). La red de protección detectará esta diferencia, estableciendo un circuito abierto en la línea, y cortará la energía hacia la toma.

En la figura 16.22(a) el lector puede observar las líneas de alimentación y retorno cruzando a través de las bobinas sensoras. Las dos bobinas sensoras

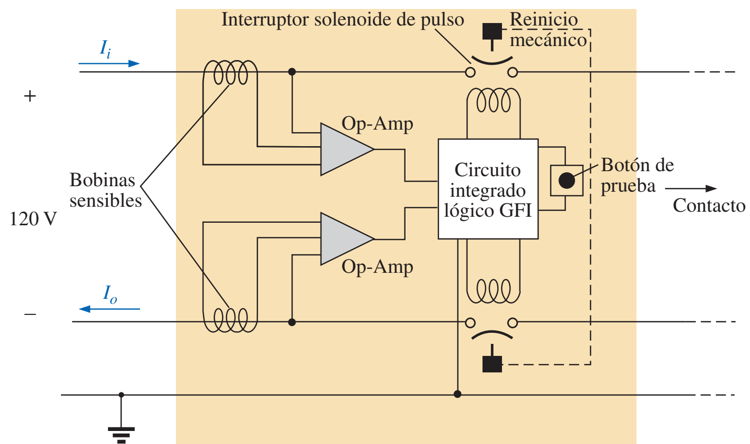




(a)



(b)

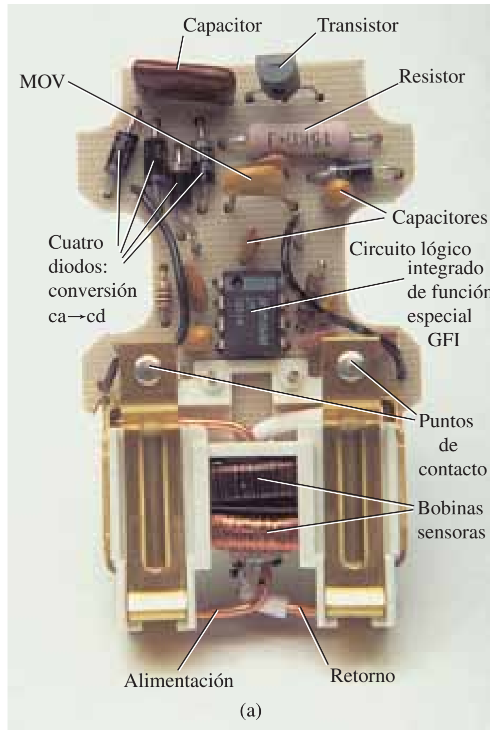


(c)

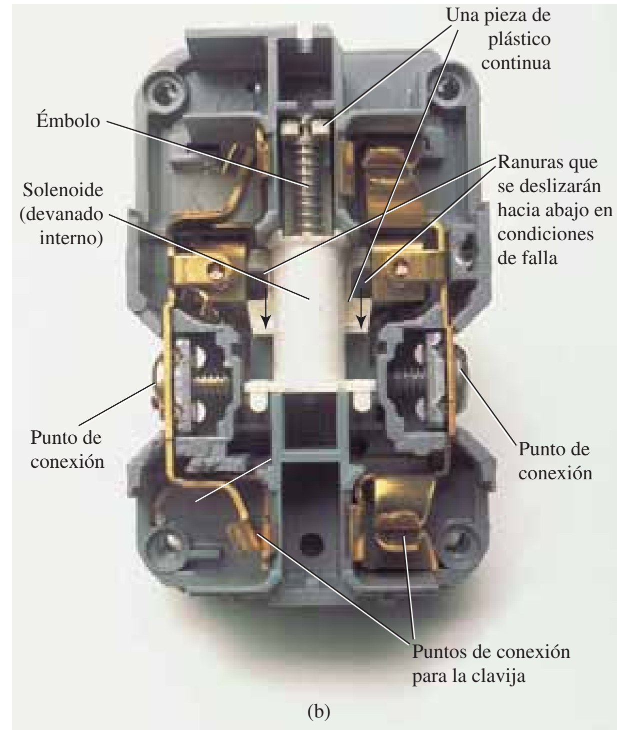
FIGURA 16.21

Toma GFI: (a) apariencia montado en la pared; (b) operación básica; (c) esquema.

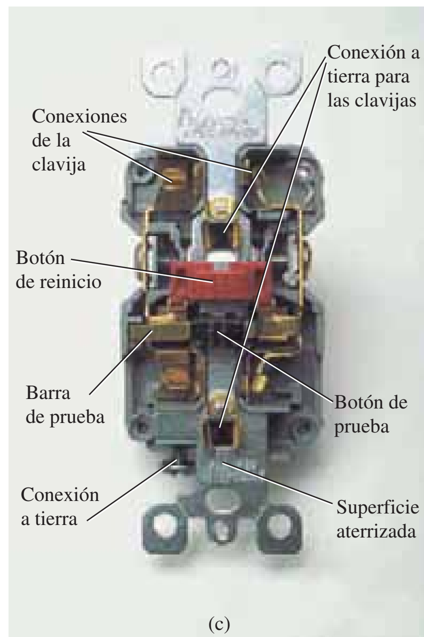
de forma independiente a la tarjeta de circuito impreso. Existen dos interruptores de control de pulso en la línea y un retorno para establecer un circuito abierto bajo condiciones de error. Los dos contactos mostrados en la figura 16.22(a) son los que ofrecen conducción a la toma. Cuando se genere una falla, se deslizará hacia afuera otro juego de contactos similares en la carcasa, proporcionando la condición deseada de circuito abierto. La separación se crea mediante el solenoide que aparece en la figura 16.22(a). Si el solenoide se energiza como consecuencia de una condición de falla, se jalará el émbolo hacia el solenoide, comprimiendo el resorte. Al mismo tiempo, las ranuras en la pieza inferior de plástico (conectadas directamente al émbolo) se desplazarán, ocasionando una desconexión al mover la estructura insertada en esas ranuras. El botón de prueba está conectado a la barra de cobre a través de la unidad mostrada en la figura 16.22(c) por debajo del botón de reinicio. Cuando se presione, colocará un resistor grande entre la línea y tierra para “desbalancear” la línea y ocasionar una condición de falla; al ser liberado, el resistor se separará de la línea y la condición desbalanceada desaparecerá. En realidad, el resistor está conectado directamente a un extremo de la barra y se moverá hacia abajo con la presión sobre la barra, como se muestra en la figura 16.22(d). En la figura 16.22(c), observe cómo la conexión metálica de tierra pasa a través de la unidad completa y cómo se conecta a la terminal de tierra de una clavija apli-



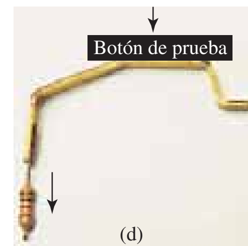
(a)



(b)



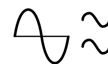
(c)



(d)

FIGURA 16.22

Estructura del GFI: (a) bobinas sensibles; (b) solenoide de control (vista inferior); (c) mecanismo de tierra (vista superior); (d) barra de prueba.



cada. También advierta cómo está separada del resto de la red mediante la carcasa plástica. Aunque esta unidad tiene una apariencia externa sencilla y es de tamaño relativamente pequeño, está muy bien diseñada y contiene una buena parte de tecnología e innovación.

Antes de abandonar el tema, observe el circuito lógico integrado localizado en el centro de la figura 16.22(a) y los distintos tamaños de los capacitores y resistores. Observe también los cuatro diodos en la región superior izquierda de la tarjeta de circuito utilizados como un rectificador de puente para el proceso de conversión de ca a cd. El transistor es el elemento negro con apariencia semicircular. Es parte del circuito necesario para el manejo del solenoide de control. Debido al tamaño de la unidad, no existía suficiente espacio para proporcionar la energía y abrir rápidamente el circuito. El resultado es el uso de un circuito de pulso para controlar el movimiento del solenoide de control. En otras palabras, el solenoide es pulsado por un corto periodo para ocasionar la liberación requerida. Si el diseño usara un sistema que mantuviera abierto de forma continua el circuito, la demanda de energía sería mayor y el tamaño de la bobina más grande. Una bobina pequeña puede manejar el pulso de energía requerido durante un periodo breve sin daño de largo plazo.

Como se mencionó, si existen riesgos, entonces instale un GFI. Ofrece un nivel de seguridad, a un costo muy razonable, que no puede ignorarse.

Cable coaxial

De unos años a la fecha, el cable coaxial aparece por todas partes; se le encuentra desde conexiones de televisión hasta equipo médico, y desde equipos estereofónicos hasta conexiones de cómputo. ¿Qué hace tan especial a este tipo de conexión? ¿Cuáles son sus ventajas sobre la conexión estándar de dos cables?

El propósito principal del cable coaxial es proporcionar un canal de comunicación entre dos puntos sin recoger ruido del medio que lo rodea (una conexión directa en su forma más pura). El lector podría preguntarse si la contaminación por ruido es en realidad tan indeseable y si esta preocupación es excesiva, pero simplemente piense en todas las señales que cruzan el aire y no podemos ver; por ejemplo, de teléfonos celulares, radiolocalizadores, estaciones de radio y de televisión. Entonces advertirá que existen demasiados eventos que no podemos observar a simple vista. Ninguno de nosotros desearía que la señal de electrocardiograma de nuestro corazón fuera perturbada por ruido externo o que nuestro aparato estéreo recogiera canales distintos a los de interés. Éste es un problema real que debe resolverse, y al parecer la mejor solución es utilizar cable coaxial. En comparación con conductores estándar, el cable coaxial presenta menor pérdida de señal en la transmisión y mejores características de transmisión en alta frecuencia.



FIGURA 16.23
Cable coaxial de 75 Ω: (a) estructura; (b) conexión terminal.

Esta anhelada protección la ofrece la estructura del cable coaxial. La estructura básica de un cable coaxial de 75 Ω como el que se utiliza normalmente en una casa se presenta en la figura 16.23(a) con su conexión terminal en la figura 16.23(b). Tiene un conductor interno sólido rodeado por un dieléctrico de polietileno (aislante). Un tejido trenzado de cobre o aluminio sobre el dieléctrico forma el conductor externo. Por último, un recubrimiento a prueba de agua sobre el cable trenzado proporciona protección contra la humedad. Dado que toda la superficie exterior del cable trenzado se encuentra al mismo potencial, aislará completamente al conductor sólido localizado en el centro del cable coaxial de señales externas —aislamiento conocido como *blindaje*—. La pregunta que surge en ocasiones es: ¿por qué el cable exterior está trenzado en lugar de que se utilice solamente una hoja plana de material conductor? Respuesta: el trenzado reduce los efectos de los campos magnéticos establecidos por cualquier corriente que pase a través del conductor externo. En la figura 16.24(a), una corriente en el conductor externo establece campos magnéticos circulares que pueden ser aditivos y crear problemas de transmisión. Sin embargo, como se muestra en la figura 16.24(b), si el cable está trenzado, el campo magnético establecido por un cable dentro de la trenza puede cancelarse mediante un conductor vecino que cruce al primero en cierto ángulo. Observe la dirección opuesta de los campos en la región localizada entre los dos cables trenzados. Como era de esperarse, el flujo magnético total podría no cancelarse, pero la situación es, ciertamente, mejor con respecto a la del conductor sólido plano. Para mayor protección, en ocasiones se añade una hoja de aluminio, como se muestra en la figura 16.23(a), para asegurar un blindaje al 100%.

Debido a que el cable coaxial generalmente es referido como una *línea de transmisión de RF* (radiofrecuencia), la mayoría de las personas asocia su uso con frecuencias altas. Sin embargo, por supuesto que éste no es el caso, como lo demuestra la tecnología médica que maneja niveles de cd estáticos y de bajo voltaje (microvolts o milivolts), y ca "lenta" (menos de 5 Hz). En general, los cables coaxiales deberán utilizarse siempre que exista necesidad de asegurar que la señal transmitida no se vea afectada por cualquier ruido del ambiente. Los cables coaxiales son aceptables para todo el intervalo de frecuencias desde 0 Hz hasta algunos cientos de gigahertz, con frecuencias de sonido que van desde cerca de 15 Hz hasta 20 kHz, radiofrecuencias de 20 kHz hasta 300 Mhz, y frecuencias de microondas de 300 MHz a 300 GHz. Hasta ahora nuestro análisis se ha centrado en la protección de la señal transmitida contra el ruido externo. También es importante lograr que cuando se utilice un cable coaxial, éste no actúe como transmisor para la señal que transporta. Recordar

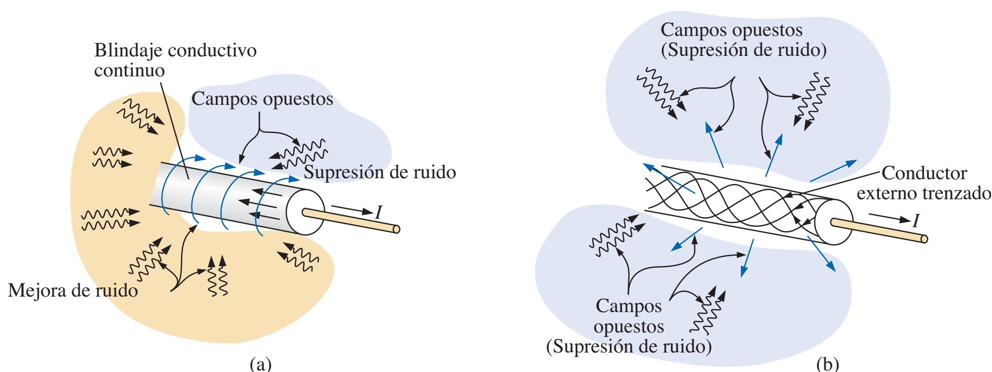
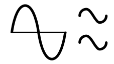


FIGURA 16.24
Blindaje: (a) inductor sólido externo; (b) conductor trenzado externo.



esto es muy conveniente cuando conectemos aparatos electrónicos como reproductores de video a nuestras televisiones. Si utilizáramos un simple cable de terminal doble entre el reproductor y el televisor, el cable no sólo captaría señales al actuar como una antena, sino que también transmitiría el canal 3 (o 4) al medio ambiente lo cual afectaría tanto la respuesta del televisor propio como la de cualquier otro televisor o aparato receptor ubicado en el área.

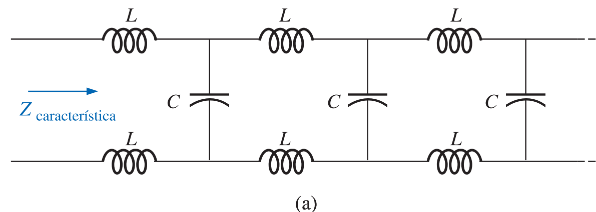
Para el acoplamiento entre los sistemas típicos en que se utiliza cable coaxial, la preocupación principal no es el nivel de voltaje o de corriente sino si existe un "acoplamiento" adecuado entre los componentes y el cable. Cada línea de transmisión compuesta por dos conductores paralelos presentará capacitancia entre los conductores, y cada conductor que transporte corriente presentará cierto nivel de inductancia. Para una línea de transmisión, se puede proponer un modelo equivalente como la combinación en serie-paralelo concentrada de la figura 16.25(a), donde cada capacitor o inductor se destina a un pequeño tramo del cable. En una cadena infinita de los elementos que aparecen en la figura 16.25(a), la combinación tendrá una impedancia de entrada denominada *impedancia característica* que es proporcional a $\sqrt{L/C}$ donde L y C son la inductancia y capacitancia respectivas de una longitud unitaria de la línea de transmisión. Aunque la figura 16.25(a) sugiere que una línea de transmisión es puramente reactiva, existe resistencia en la línea debido a la resistencia del cable, y esta resistencia absorberá potencia. Por tanto, es importante darse cuenta de que al conectar cable coaxial el televisor más alejado de la fuente recibirá la menor cantidad de potencia de la señal, y si se encuentra muy distante, la pérdida resultante podría ser suficiente para afectar la calidad de la imagen. Al reagrupar la ecuación para υ_L e i_C y sustituir como sigue se muestra que la impedancia característica es puramente resistiva y se mide en ohms:

$$\upsilon_L = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow L = \upsilon_L\frac{dt}{di_L}$$

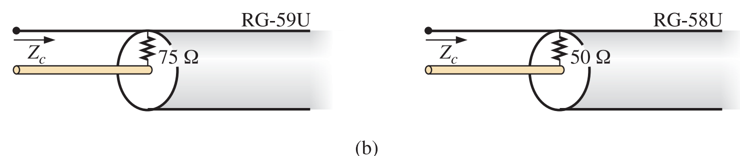
$$i_C = C\frac{d\upsilon_C}{dt} \Rightarrow C = i_C\frac{dt}{d\upsilon_C}$$

de manera que:

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\upsilon_L\dfrac{dt}{di_L}}{i_C\dfrac{dt}{d\upsilon_C}}} = \sqrt{\frac{\upsilon_L}{i_C}\cdot\frac{d\upsilon_C}{di_L}} = \sqrt{\Omega\cdot\Omega} = \sqrt{\Omega^2} = \Omega$$



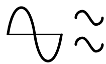
(a)



(b)

FIGURA 16.25

Cable coaxial: (a) equivalente eléctrico (línea sin pérdida); (b) impedancia característica.



Los cables coaxiales más comunes tienen impedancias características de 50 o 75 Ω, como se muestra en la figura 16.25(b). En realidad, pueden ser líneas de 53.5 y 73.5 Ω respectivamente, pero por lo general se agrupan en la categoría de líneas de 50 o 75 Ω. La línea de 75 Ω se utiliza normalmente para aplicaciones como televisión por cable y equipo de radiofrecuencia, mientras que la línea de 50 Ω se utiliza más para equipo de pruebas, estaciones de radio aficionados y equipo médico. En la tabla 16.1 aparece información específica sobre las características de dos de los cables coaxiales más comunes.

TABLA 16.1
Características de dos cables coaxiales utilizados con mucha frecuencia.

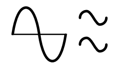
	RG-59U 75 Ω (en realidad 73.5 Ω)	**RG-58U 50 Ω (en realidad 53.5 Ω)**
Cable central:	20 AWG, 40% de aluminio	20 AWG, 95% de estaño
Resistencia:	44.5 Ω/1000 pies	10 Ω/1000 pies
Recubrimiento:	Hoja de aluminio, 100% blindaje	Polietileno
Cubierta de	0.237 pulg, diámetro exterior	0.193diámetro exterior
PVC:	16.2 pF/pies	28.5 pF/pies
Capacitancia:	1 MHz, 0.8 dB/100 pies	1 MHz, 0.3 dB/100 pies
Pérdidas:	10 MHz, 1 dB/100 pies	10 MHz, 1.1 dB/100 pies
	50 MHz, 1.8 dB/100 pies	50 MHz, 2.5 dB/100 pies
	100 MHz, 2.5 dB/100 pies	100 MHz, 3.8 dB/100 pies
	1 GHz, 7.9 dB/100 pies	1 GHz, 14.5 dB/100 pies

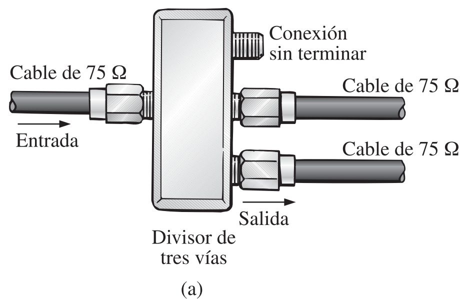
En realidad, una línea de transmisión no será de longitud infinita como lo requiere la definición de impedancia característica. El resultado es que un cable de 75 Ω con longitud de 20 pies no tendrá impedancia de entrada de 20 Ω sino una que estará determinada por la carga aplicada al cable. Sin embargo, si la línea de transmisión está terminada por una resistencia de 75 Ω, la impedancia característica de 75 Ω aparecerá en la fuente. En otras palabras, terminar un cable coaxial por su impedancia característica lo hará parecer como una línea infinita para la fuente. Cuando la carga aplicada es igual a la impedancia característica de la línea, se dice que la línea está *acoplada*. Una carga aplicada que sea igual a la impedancia característica también dará por resultado una transferencia máxima de potencia a la carga, como lo establece el teorema de máxima potencia. Cualquier carga diferente a la impedancia característica ocasionará una “reflexión de potencia” hacia la fuente. Por tanto, el acoplamiento de la carga con la línea es un asunto de interés prioritario al utilizar cables coaxiales. Tomemos como ejemplo la antena dipolo plegadiza denominada *yagi* que era una escena común sobre los techos antes de la llegada del cable. El cable de doble línea que iba de la antena al televisor tenía una impedancia característica de 300 Ω. Actualmente la mayoría de los televisores tiene impedancia de entrada de 75 Ω, y por eso las antenas yagi tenían que conectarse al televisor con un *transformador de acoplamiento* como se muestra en la figura 16.26 (llamado *transformador Balun*) que hacía que la carga de 75 Ω pareciera de 300 Ω a la antena para lograr la máxima transferencia de potencia. En el mundo actual, los televisores se describen como *preparados para cable* si tienen conexión coaxial e impedancia de entrada de 75 Ω para acoplar al sistema de cable.

Uno de los errores más frecuentes cometidos al instalar un sistema coaxial es conectar un divisor y no terminar todas las terminales de salida. En la figura 16.27(a), un divisor de tres vías está conectado a dos televisores dejando abierta la tercera terminal para posibles adiciones futuras. La tercera terminal



FIGURA 16.26
Transformador de acoplamiento Balun.





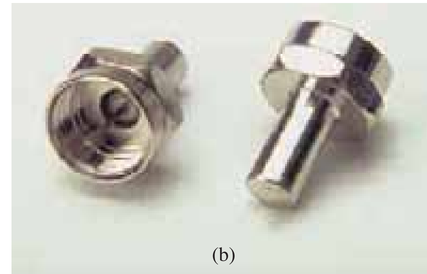


FIGURA 16.27
Divisor de señal: (a) divisor de tres vías; (b) terminador coaxial tipo F de 75 Ω.

abierta ocasionará incompatibilidad en la línea de entrada, y a los televisores conectados les llegará menor potencia. Esta situación se corrige al terminar la terminal no utilizada mediante un conector disponible comercialmente, como se muestra en la figura 16.27(b), el cual tiene un resistor de 75 Ω dentro. También es importante observar que en cada ocasión que la línea se divida, se perderá potencia para cada uno de los televisores conectados al sistema. De hecho, se perderán 3 dB por cada división, como se muestra en la figura 16.28(a). La división de la señal en dos dará por resultado una pérdida de 3 dB para cada televisor, mientras que la división en tres vías ocasionará una pérdida de 6 dB para cada televisor. El concepto de decibeles será cubierto en el capítulo 24, pero por el momento tenga presente que una caída de 3 dB representa una caída de potencia de un medio, lo cual por supuesto que es una cantidad importante. Un televisor podrá seguir respondiendo bastante bien con una caída de 3 o 6 dB, pero cualquier caída que se aproxime a 12 dB con seguridad ocasionará una imagen pobre y deberá evitarse. Al utilizar un divisor, siempre es preferible conectar un amplificador antes del divisor, como se muestra en la figura 16.28(b). En esencia, el amplificador compensará la pérdida introducida por los divisores y (si está bien diseñado) permitirá dejar abierta una terminal

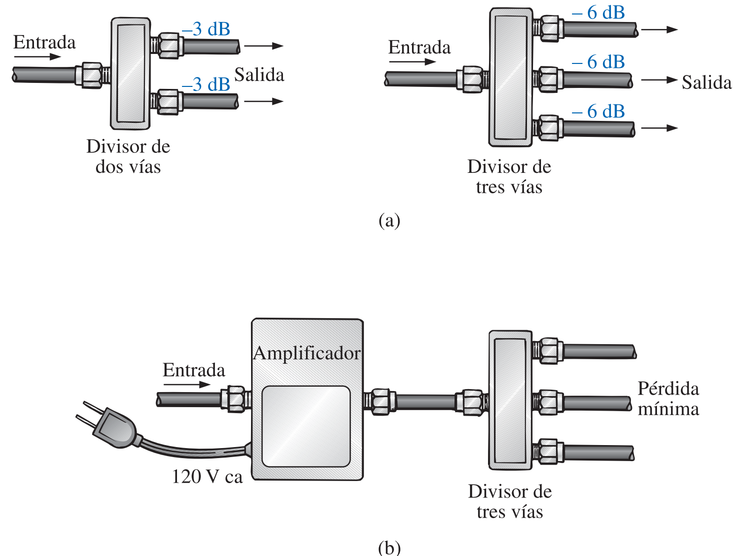


FIGURA 16.28
Pérdidas por divisor coaxial: (a) pérdidas en dB ocasionadas por divisores de dos y tres vías; (b) utilización de un amplificador.

sin perturbar el flujo de potencia de la señal resultante. En otras palabras, un buen amplificador sabrá cómo compensar una terminal que haya sido terminada de manera impropia.

La tabla 16.1 muestra que existirá una considerable pérdida de potencia (dB) por cada 100 pies de cable. En los cables coaxiales se pierden cerca de 3 dB por cada 100 pies a 100 MHz, debido principalmente a la resistencia del conductor central (44.5 Ω/1000 pies para la línea de 75 Ω y 10 Ω/1000 pies para la línea de 50 Ω). Ésta es una razón por la que no se recomienda dividir primero la señal y aplicar luego el amplificador en la ubicación del televisor. En la figura 16.29(a), la razón señal a ruido (*SNR, signal-to-noise ratio*) (señales no deseadas) es muy alta, y la recepción será muy buena. Sin embargo, como se muestra en la figura 16.29(b), si la señal se envía a través de un cable de 100 pies a una habitación distante de la fuente, existirá una caída en la señal; y aun cuando el componente de ruido no se incremente, la razón señal a ruido en el televisor será mucho menor. Al conectar un amplificador en este punto, se amplificará tanto la señal como el ruido no deseado, y al televisor le llegará una muy pobre razón señal a ruido, dando por resultado una recepción deficiente. Por tanto, en general, los amplificadores deberán aplicarse donde la razón señal a ruido sea mayor.

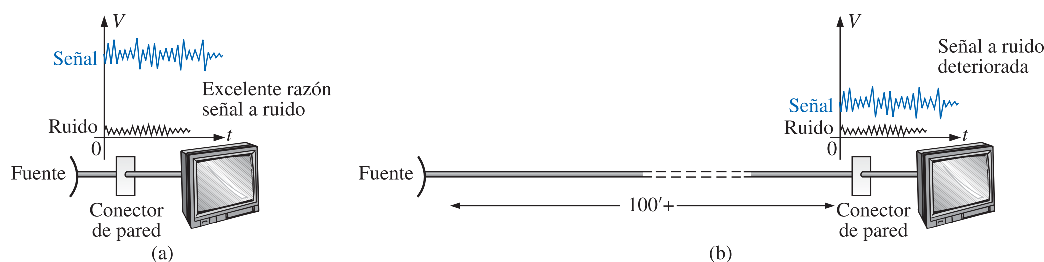


FIGURA 16.29
Razón señal a ruido: (a) pérdida insignificante en la línea; (b) pérdida considerable en la línea.

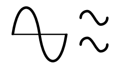
El análisis acerca de cables coaxiales y su adecuada utilización podría continuar por varias páginas; sin embargo, las prioridades demandan que cualquier investigación posterior se deje al lector. Sólo debe tenerse presente que el proceso de acoplamiento es importante y que los cables coaxiales no son sistemas ideales y, por tanto, presentan resistencia interna que puede afectar la transmisión, especialmente a través de largas distancias.

16.5 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Red puente de ca Utilizaremos el ejemplo 16.4 para demostrar el poder de la opción **VPRINT** en la biblioteca **SPECIAL**. Ésta permite determinar directamente la magnitud y el ángulo de cualquier voltaje dentro de una red de ca. De manera similar, la opción **IPRINT** realiza la misma función para corrientes de ca. En el ejemplo 16.4, primero se determinaron los voltajes de ca en R_1 y R_2, y luego se aplicó la ley de voltaje de Kirchhoff para definir el voltaje entre los dos puntos conocidos. Dado que PSpice está diseñado principalmente para determinar el voltaje en un punto con respecto a tierra, la red de la figura 16.7 se ingresa como se muestra en la figura 16.30 para permitir un cálculo directo de los voltajes en R_1 y R_2.

La fuente y los elementos de red se ingresan utilizando un procedimiento ya demostrado en varias ocasiones en capítulos previos, aunque para el análisis de



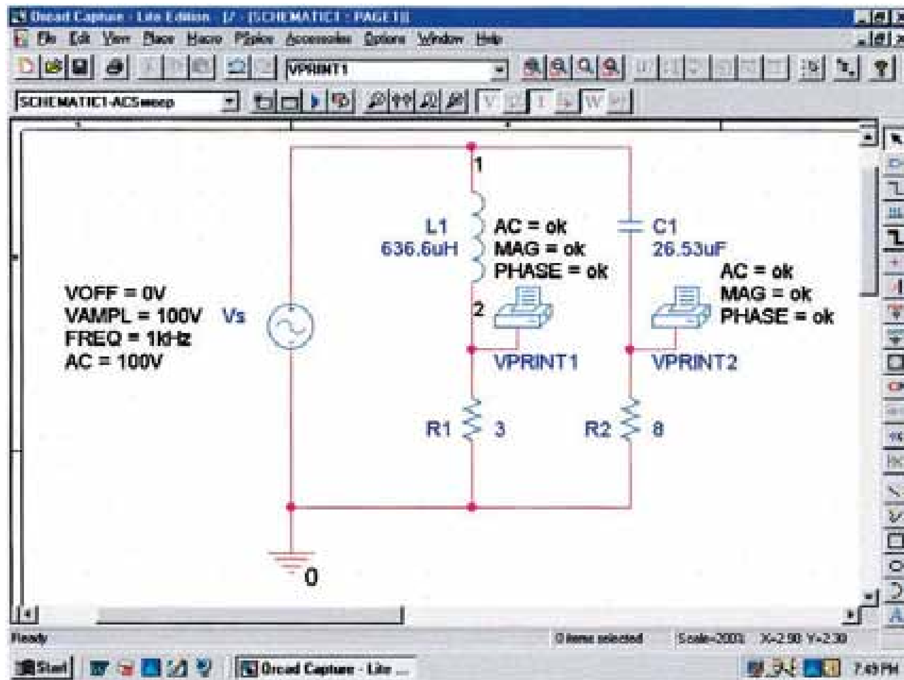


FIGURA 16.30
*Determinación del voltaje en R_1 y R_2 utilizando la opción **VPRINT** de un análisis PSpice.*

barrido de ca, **AC Sweep**, que se realizará en este ejemplo, la fuente deberá manejar también un nivel de **AC**. Por fortuna, es el mismo que **VAMPL**, como se muestra en la figura 16.30. Se introduce en la descripción de la fuente haciendo doble clic en el símbolo de fuente para obtener el cuadro de diálogo **Property Editor**. Se selecciona la columna **AC** y se ingresa 100 V en el recuadro inferior. Se elige **Display** y luego **Name and Value**. Haga clic en **OK** seguido por **Apply** para abandonar el cuadro de diálogo. El resultado es **AC** = 100 V agregado a la descripción de la fuente sobre el diagrama y dentro del sistema. Al utilizar los valores de reactancia de la figura 16.7, se determinaron los valores para L y C utilizando una frecuencia de 1 kHz. El voltaje en R_1 y R_2 podrá determinarse utilizando el comando **Trace** de la misma forma que la descrita en el capítulo anterior o mediante el uso de la opción **VPRINT**. Ambos métodos se analizarán en esta sección puesto que tienen aplicación para cualquier red de ca.

La opción **VPRINT** está bajo la biblioteca **SPECIAL** en el cuadro de diálogo **Place Part**. Una vez seleccionada, aparecerá el símbolo de impresora en la pantalla junto al cursor, y podrá colocarse cerca del punto de interés. Cuando el símbolo de impresora esté en su lugar, mediante un doble clic sobre él se obtendrá el cuadro de diálogo **Property Editor**. Desplazándose de izquierda a derecha teclee **ok** bajo **AC**, **MAG** y **PHASE**. Cuando cada uno de éstos se encuentre activo, deberá seleccionarse la tecla **Display** y elegir la opción **Name and Value** seguida de **OK**. Una vez ingresados todos los datos, seleccione **Apply** y abandone el cuadro de diálogo. El resultado se muestra en la figura 16.30 para las dos aplicaciones de la opción **VPRINT**. Si lo prefiere, puede añadir **VPRINT1** y **VPRINT2** para distinguirlas cuando revise la información de salida. Esto se logra regresando al cuadro de diálogo **Property Editor** en cada aplicación haciendo doble clic sobre el símbolo de impresora y seleccio-

nando **Value** seguido de **Display** y **Value Only**. Ahora está todo listo para emprender la simulación.

La simulación se inicia al seleccionar el icono **New Simulation Profile** e ingresando **ACSweep** como el nombre, **Name**. Luego seleccione **Create** para acceder al cuadro de diálogo **Simulation Settings**. En esta ocasión queremos analizar una red a 1 kHz pero no estamos interesados en gráficas en función del tiempo. Por tanto, se selecciona la opción **AC Sweep/Noise** bajo **Analysis type** en la sección de **Analysis**. La región de **AC Sweep Type** aparecerá en el cuadro solicitando la frecuencia de inicio, **Start Frequency**. Ya que estamos interesados sólo en la respuesta a una frecuencia, la frecuencia de inicio, **Start**, y la final, **End Frequency**, serán las mismas: 1 kHz. Como necesitamos un solo punto de análisis, la opción **Points/Decade** será igual a 1. Haga clic en **OK** y podrá seleccionar el icono **Run PSpice**. Aparecerá la pantalla de **SCHEMATIC1**, y se podrá determinar el voltaje en R_1 al seleccionar **Trace** seguido de **Add Trace** y luego **V(R1:1)**. El resultado es la ventana inferior de la figura 16.31 con solo un punto de la gráfica a 1 kHz. Como fijamos la frecuencia de interés a 1 kHz, ésta es la única frecuencia con una respuesta. La magnitud del voltaje en R_1 es de 60 V, y coincide con la solución realizada a mano en el ejemplo 16.4. El ángulo de fase asociado con el voltaje puede determinarse mediante la secuencia **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace-P( )** a partir de la lista de **Functions or Macros** y luego **V(R1:1)** para obtener **P(V(R1:1))** en el cuadro **Trace Expression**. Al hacer clic en **OK** la gráfica resultante mostrará que el ángulo de fase es justamente menor que $-50°$, lo cual coincide muy bien con los $-53.13°$ obtenidos en el ejemplo 16.4.

El proceso anterior no utiliza la opción **VPRINT** recién presentada, pero a continuación veremos lo que ésta ofrece. Cuando aparece la ventana de **SCHEMATIC1** después de la simulación, deberá abandonarse mediante la **X** y seleccionar **PSpice** en la barra de menú superior de la pantalla resultante. Aparecerá

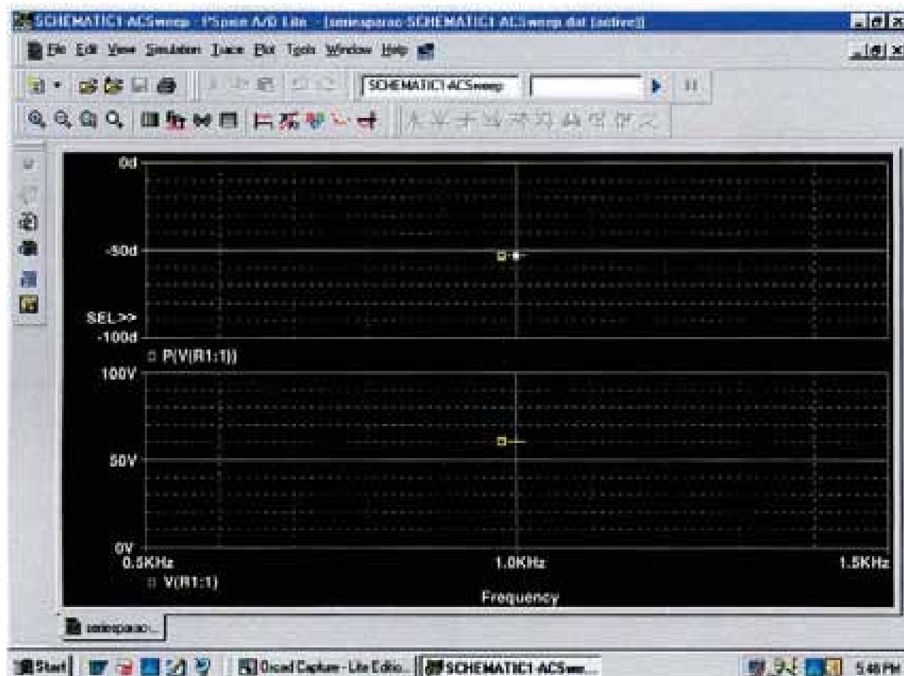
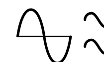


FIGURA 16.31
Magnitud resultante y ángulo de fase para el voltaje $\mathbf{V}_{R_1}$ de la figura 16.30.



una lista de la cual **View Output File** es una opción que, al seleccionarla, proporciona una larga lista de información acerca de la construcción de la red y los resultados obtenidos de la simulación. En la figura 16.32 aparece la parte del archivo de salida que presenta la magnitud resultante y el ángulo de fase para los voltajes definidos por **VPRINT1** y **VPRINT2**. Observe que el voltaje en R_1 definido mediante **VPRINT1** es de 60 V a un ángulo de $-53.13°$. El voltaje en R_2 como lo define **VPRINT2** es de 80 V a un ángulo de 36.87°. Ambos voltajes coinciden exactamente con las soluciones del ejemplo 16.4. Por tanto, en el futuro, si se utiliza la opción **VPRINT**, los resultados aparecerán en el archivo de salida.

```
 ** Profile: "SCHEMATIC1-ACSweep"  [ C:\PSpice\seriesparac-SCHEMATIC1-ACSweep.s
im ]


 ****     AC ANALYSIS                        TEMPERATURE =   27.000 DEG C


******************************************************************************



  FREQ        VM(N00809)  VP(N00809)


   1.000E+03   6.000E+01  -5.313E+01

**** 06/30/01 17:45:20 ************** PSpice Lite (Mar 2000) *****************

 ** Profile: "SCHEMATIC1-ACSweep"  [ C:\PSpice\seriesparac-SCHEMATIC1-ACSweep.s
im ]


 ****     AC ANALYSIS                        TEMPERATURE =   27.000 DEG C


******************************************************************************



  FREQ        VM(N00717)  VP(N00717)


   1.000E+03   8.000E+01   3.687E+01

```

FIGURA 16.32
*Respuestas **VPRINT1** (V_{R_1}) y **VPRINT2** (V_{R_2}) para la red de la figura 16.30.*

Ahora determinaremos el voltaje en las dos ramas desde el punto *a* hasta el punto *b*. Regrese a **SCHEMATIC1**, y seleccione **Trace** seguido por **Add Trace** para obtener la lista **Simulation Output Variables**. Luego, al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo cerrado, vemos que el voltaje deseado es **V(R1:1)-V(R2:1)** el cual, al hacer clic en **OK**, dará por resultado la señal que aparece en pantalla en la parte inferior de la figura 16.33. Observe que es exactamente de 100 V como se obtuvo en la solución manual. El ángulo de fase puede determinarse entonces mediante **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace** y creando la expresión **P(V(R1:1)-V(R2:1))**. Recuerde que la expresión puede generarse utilizando los listados de **Output variables** y **Functions**, pero también puede simplemente ingresarse desde el teclado. Sin

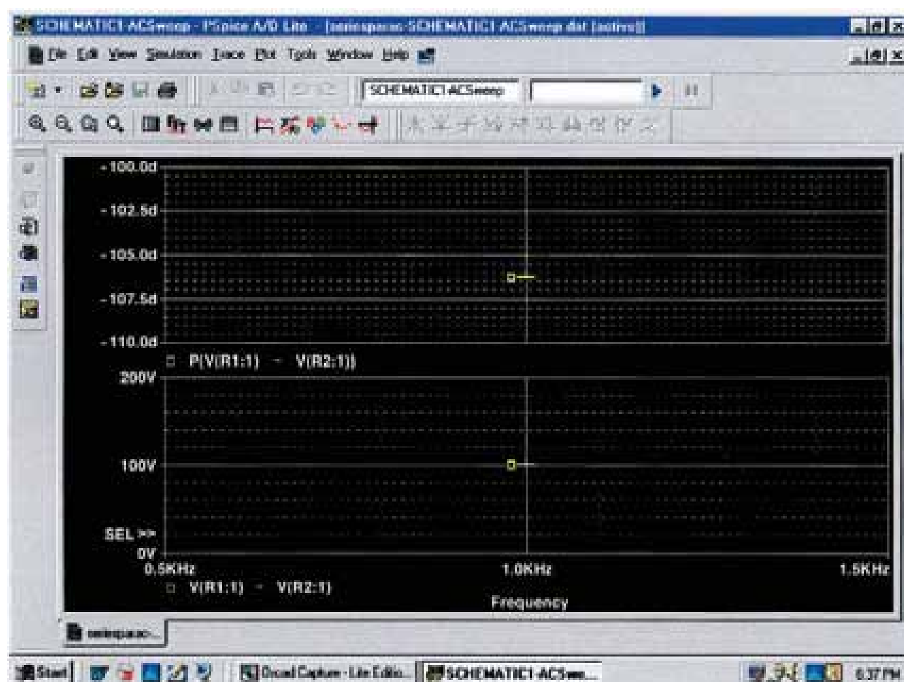


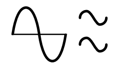
FIGURA 16.33
Respuesta de PSpice para el voltaje entre los dos puntos localizados por encima de los resistores R_1 y R_2.

embargo, asegúrese siempre de que existan los mismos paréntesis izquierdos que derechos. Haga clic en **OK** y aparecerá una solución cercana a $-105°$. Es posible obtener una mejor lectura utilizando **Plot-Axis Settings-Y Axis-User Defined** y cambiando la escala de $-100°$ a $-110°$. El resultado es la pantalla superior de la figura 16.33 con un ángulo más cercano a $-106.5°$ o $73.5°$ lo cual está muy cercano a la solución teórica de $73.74°$.

Para finalizar, la última forma de encontrar el voltaje de puente deseado es eliminando la opción **VPRINT2** y colocando la tierra en ese punto, como se muestra en la figura 16.34. Ahora el voltaje generado desde un punto por encima de R_1 hacia tierra será el voltaje deseado. Al repetir la simulación completa se obtendrá la gráfica de la figura 16.35 con los mismos resultados que en la figura 16.33. Sin embargo, observe que aun cuando las dos cifras parecen iguales, las cantidades presentadas en la parte inferior izquierda de cada gráfica son diferentes.

Electronics Workbench

A continuación utilizaremos Electronics Workbench para determinar el voltaje en el último elemento de la red escalera mostrada en la figura 16.36. El contenido matemático de este capítulo podría sugerir que el análisis resultará en un largo ejercicio de álgebra compleja, siendo un solo error (un signo o un ángulo incorrectos) suficiente para invalidar el resultado. Sin embargo, tomará sólo unos cuantos minutos “trazar” la red en la pantalla y otros pocos segundos generar los resultados, los cuales comúnmente pueden suponerse válidos si todos los parámetros fueron ingresados de forma correcta. Los resultados son, desde luego, una excelente verificación de la solución obtenida de manera manual.



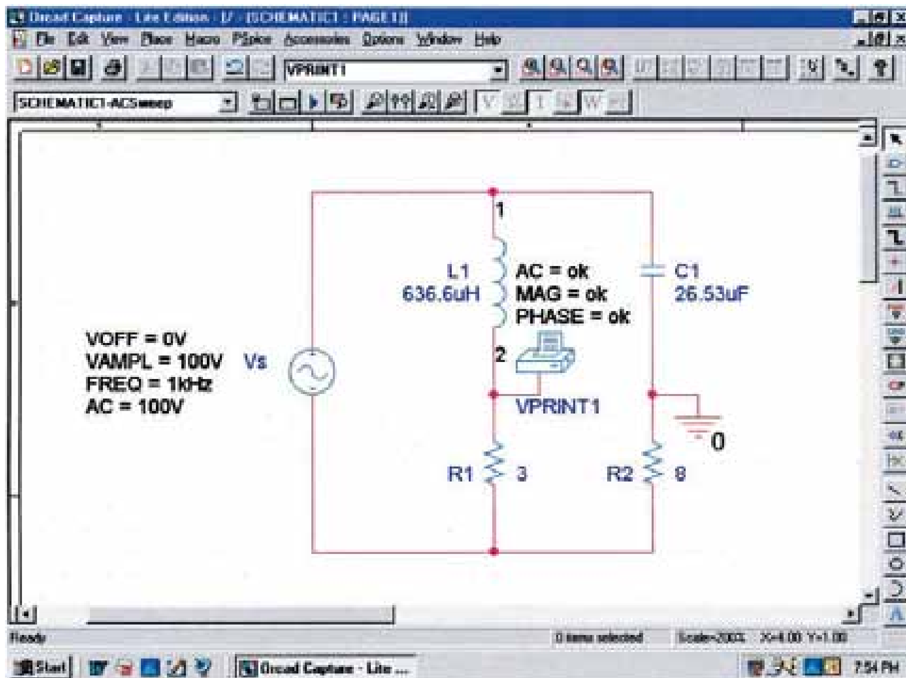


FIGURA 16.34
*Determinación del voltaje entre los dos puntos localizados por encima de los resistores R_1 y R_2 al mover la conexión de tierra de la figura 16.30 a la posición de **VPRINT2**.*

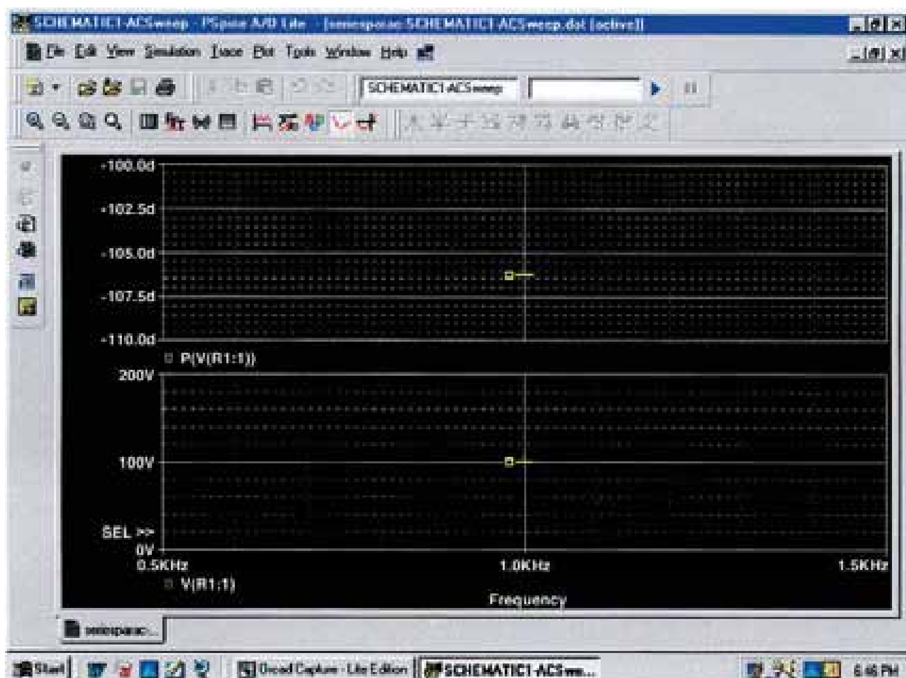


FIGURA 16.35
Respuesta de PSpice a la simulación de la red de la figura 16.34.

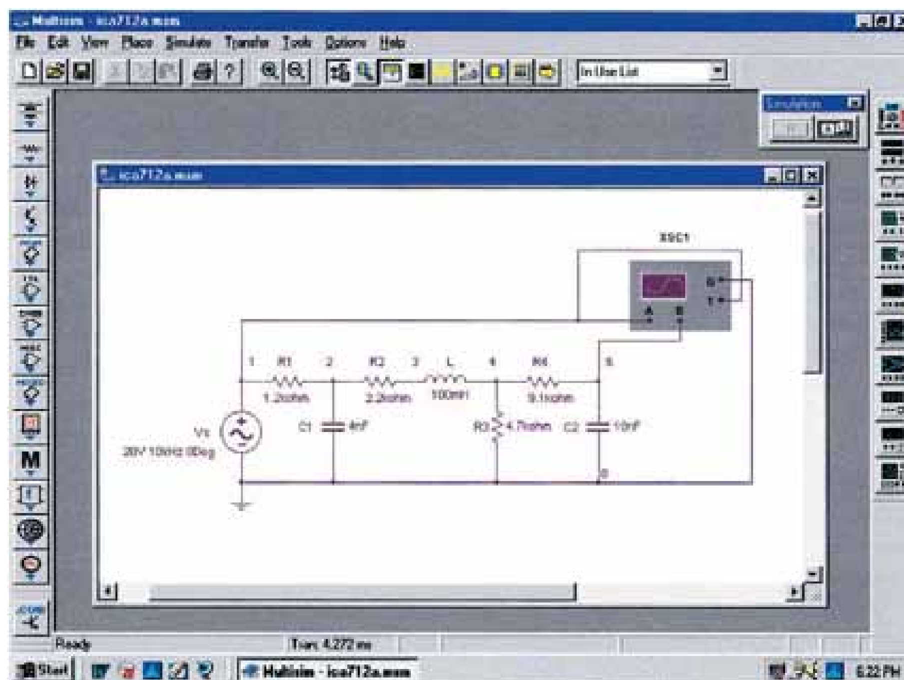
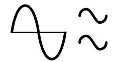


FIGURA 16.36
Utilización del osciloscopio de Electronics Workbench para determinar el voltaje en el capacitor C_2.

Nuestro primer enfoque será utilizar el osciloscopio para medir la amplitud y el ángulo de fase del voltaje de salida como se muestra en la figura 16.36. Observe que se definen cinco nodos, siendo el nodo 5 el voltaje deseado. La configuración del osciloscopio incluye un **Time base** de 20 μs/división, dado que el periodo de la señal de 10 kHz es de 100 μs. El canal **A** se estableció en 10 V/división, de manera que los 20 V de la señal aplicada tendrán un valor pico que abarque dos divisiones. Observe que en la figura 16.36 el canal A, **Channel A**, está conectado directamente a la fuente **Vs** y a la entrada de **Trigger** para sincronización. Se espera que el voltaje de salida tenga una amplitud más pequeña y se fija una escala vertical de 1 V/división para el canal B, **Channel B**. El análisis se inicia al colocar el interruptor **Simulation** en la posición **1**. Es importante darse cuenta de que

cuando se inicia la simulación, tomará tiempo para que las redes con elementos reactivos se estabilicen y la respuesta alcance su condición de estado estacionario. Por tanto, es recomendable permitir que un sistema trabaje por unos momentos después de iniciar la simulación antes de seleccionar* Single *en el osciloscopio para obtener una forma de onda estacionaria y efectuar el análisis.

Las gráficas resultantes de la figura 16.37 muestran claramente que el voltaje aplicado tiene amplitud de 20 V y periodo de 100 μs (5 divisiones a 20 μs/división). El cursor permanece listo para su uso en los extremos izquierdo y derecho de la pantalla. Hacer clic sobre la pequeña flecha roja (con el número 1) en la parte superior de la pantalla del osciloscopio le permitirá desplazarla hacia cualquier lugar del eje horizontal. A medida que mueva el cursor, la magnitud de cada forma de onda aparecerá en el recuadro **T1** inferior. Al comparar las pendientes positivas a través del origen, verá que el voltaje aplicado está



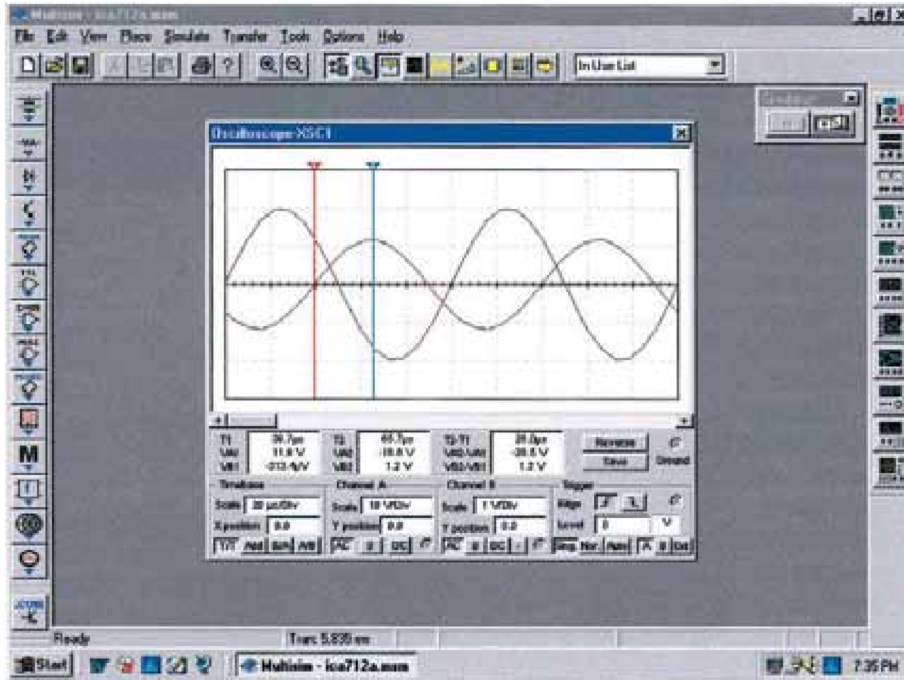


FIGURA 16.37
Utilización de Electronics Workbench para desplegar el voltaje aplicado y el voltaje en el capacitor C_2 para la red de la figura 16.36.

adelantando al voltaje de salida por un ángulo que es mayor a 90°. Al fijar el cursor en el punto donde el voltaje de salida del canal B pasa a través del origen con una pendiente positiva, encontramos que no es posible lograr exactamente 0 V; pero $-313.4\ \mu\text{V} = -0.313\ \text{mV}$ **(VB1)** desde luego que está muy cercano a 39.7 μs **(T1)**.

Saber que el voltaje aplicado pasa a través del origen a 0 μs permite efectuar el siguiente cálculo para el ángulo de fase:

$$\frac{39.7\ \mu\text{s}}{100\ \mu\text{s}} = \frac{\theta}{360°}$$
$$\theta = 142.92°$$

con el resultado de que el voltaje de salida tiene asociado un ángulo de $-142.92°$. El segundo cursor se localiza en el extremo derecho de la pantalla y tiene un color azul. Al seleccionarlo y moverlo hacia el valor pico del voltaje de salida dará por resultado **VB2** = 1.2 V a 65.7 μs **(T2)**. El resultado de todo lo anterior es

$$\mathbf{V}_{C_2} = 1.2\ \text{V} \angle -142.92°.$$

Nuestro segundo enfoque será utilizar la opción de **AC Analysis** bajo el encabezado **Simulate**. Primero, observe que cuando utilizamos el osciloscopio como lo hicimos líneas arriba, no había necesidad de pasar a través de la secuencia de cuadros de diálogo para elegir el análisis deseado. Todo esto era necesario para simular ya sea el interruptor o la secuencia de **PSpice-Run**, el osciloscopio estuvo ahí para medir el voltaje de salida. Recuerde que la fuente definía la magnitud del voltaje aplicado, la frecuencia y el desplazamiento de

fase. En esta ocasión utilizaremos la secuencia **Simulate-Analyses-AC Analysis** para obtener el cuadro de diálogo **AC Analysis** en el que las frecuencias inicial y final, **Start** y **Stop frequencies**, serán de 10 kHz y la variable seleccionada para analizar, **Selected variable for analysis**, será solamente el nodo 5. Al seleccionar **Simulate** se obtendrá una gráfica de magnitud-fase sin indicadores aparentes a 10 kHz. Sin embargo, esto se corrige fácilmente al seleccionar primero una de las gráficas haciendo clic sobre la etiqueta de **Voltage** ubicada a la izquierda de la gráfica. Entonces elegimos las teclas **Show/Hide Grid**, **Show/Hide Legend** y **Show/Hide Cursors** para obtener los cursores, letreros y el cuadro de diálogo **AC Analysis**. Seleccione el cursor rojo y muévalo a 10 kHz. En ese lugar, y sólo en ese lugar, **x1** aparecerá como 10 kHz en el cuadro de diálogo, e **y1** será igual a 1.1946 como se muestra en la figura 16.38. En otras palabras, el cursor tiene definida la magnitud del voltaje en el capacitor de salida como 1.1946 V, o aproximadamente 1.2 V como se obtuvo antes. Si el lector selecciona la curva de fase, **Phase**, y repite el proceso, verá que a 10 kHz **(x1)** el ángulo es de −142.15° **(y1)** lo que está muy cercano a los −142.92° obtenidos antes.

En resumen, tenemos dos métodos para obtener un voltaje de ca en una red;

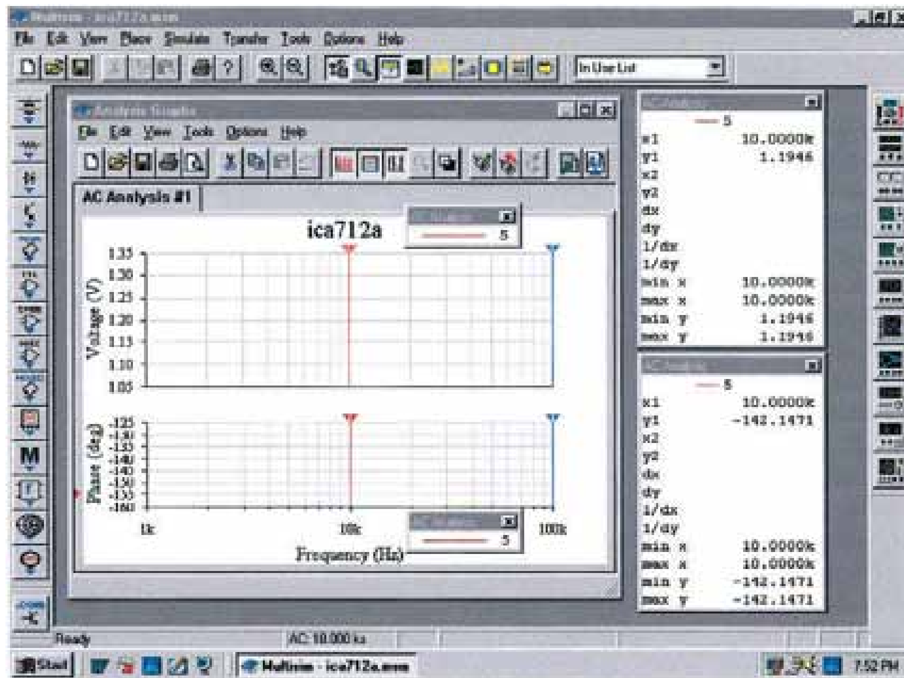
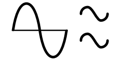


FIGURA 16.38
*Uso de la opción **AC Analysis** en Electronics Workbench para determinar la magnitud y el ángulo de fase para el voltaje V_{C_2} de la red de la figura 16.36.*

un método por instrumentación y el otro a través de directrices de cómputo. Ambos son válidos, aunque, como se esperaba, el enfoque computacional tiene un nivel de precisión mayor.



PROBLEMAS

SECCIÓN 16.2 Ejemplos ilustrativos

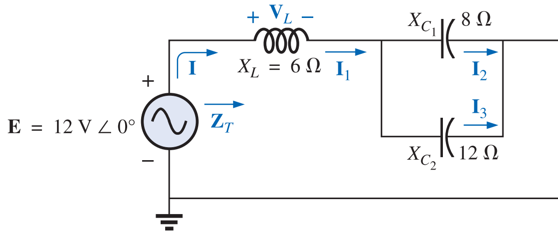


FIGURA 16.39
Problemas 1 y 19.

1. Para la red en serie-paralelo de la figura 16.39:
   - **a.** Calcule $\mathbf{Z}_T$.
   - **b.** Determine **I**.
   - **c.** Determine $\mathbf{I}_1$.
   - **d.** Encuentre $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$.
   - **e.** Encuentre $\mathbf{V}_L$.

2. Para la red de la figura 16.40:
   - **a.** Encuentre la impedancia total $\mathbf{Z}_T$.
   - **b.** Determine la corriente $\mathbf{I}_s$.
   - **c.** Calcule $\mathbf{I}_C$ utilizando la regla del divisor de corriente.
   - **d.** Calcule $\mathbf{V}_L$ utilizando la regla del divisor de voltaje.

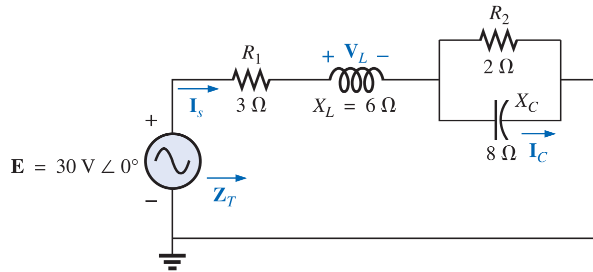


FIGURA 16.40
Problemas 2 y 15.

3. Para la red de la figura 16.41:
   - **a.** Encuentre la impedancia total $\mathbf{Z}_T$ y la admitancia total $\mathbf{Y}_T$.
   - **b.** Encuentre la corriente $\mathbf{I}_s$.
   - **c.** Calcule $\mathbf{I}_2$ utilizando la regla del divisor de corriente.
   - **d.** Calcule $\mathbf{V}_C$.
   - **e.** Calcule la potencia promedio entregada a la red.

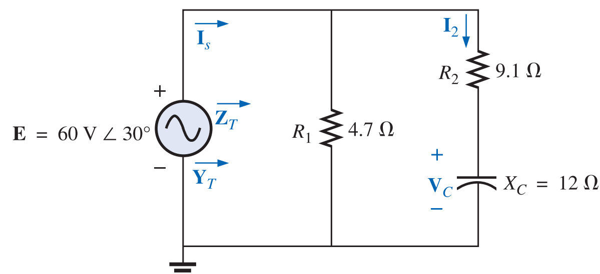
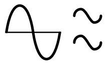


FIGURA 16.41
Problemas 3 y 20.



4. Para la red de la figura 16.42:
a. Encuentre la impedancia total $\mathbf{Z}_T$.
b. Calcule el voltaje $\mathbf{V}_2$ y la corriente $\mathbf{I}_L$.
c. Encuentre el factor de potencia de la red.

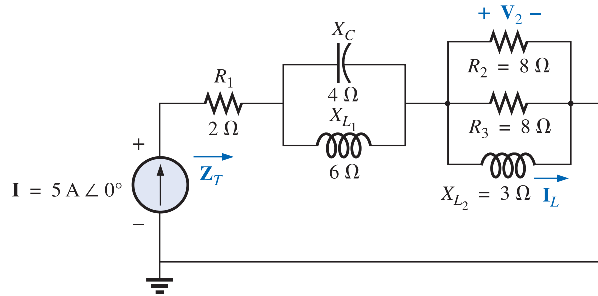


FIGURA 16.42
Problema 4.

5. Para la red de la figura 16.43:
a. Encuentre la corriente **I**.
b. Encuentre el voltaje $\mathbf{V}_C$.
c. Encuentre la potencia promedio entregada a la red.

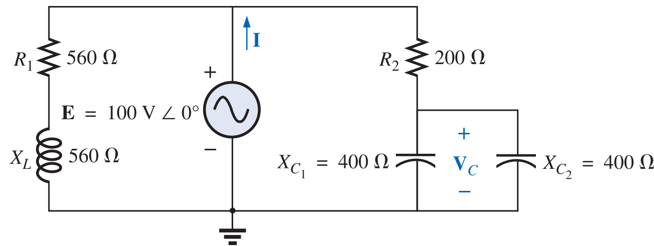


FIGURA 16.43
Problemas 5 y 21.

***6.** Para la red de la figura 16.44:
a. Encuentre la corriente $\mathbf{I}_1$.
b. Calcule el voltaje $\mathbf{V}_C$ utilizando la regla del divisor de voltaje.
c. Encuentre el voltaje $\mathbf{V}_{ab}$.

***7.** Para la red de la figura 16.45:
a. Encuentre la corriente $\mathbf{I}_1$.
b. Encuentre el voltaje $\mathbf{V}_1$.
c. Calcule la potencia promedio entregada a la red.

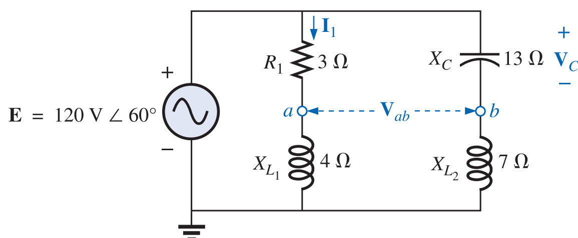


FIGURA 16.44
Problema 6.

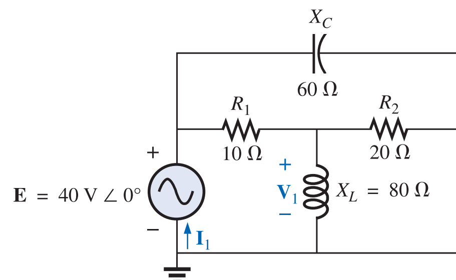
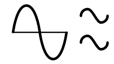


FIGURA 16.45
Problemas 7 y 16.



8. Para la red de la figura 16.46:
- **a.** Encuentre la impedancia total $\mathbf{Z}_T$ y la admitancia $\mathbf{Y}_T$.
- **b.** Encuentre las corrientes $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$.
- **c.** Verifique la ley de corriente de Kirchhoff demostrando que $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$.
- **d.** Encuentre el factor de potencia de la red, e indique si se encuentra adelantado o atrasado.

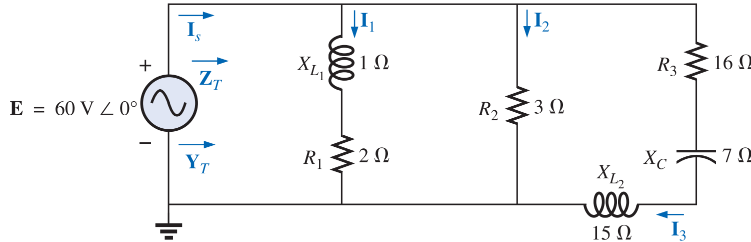


FIGURA 16.46
Problema 8.

***9.** Para la red de la figura 16.47:
- **a.** Encuentre la admitancia total $\mathbf{Y}_T$.
- **b.** Encuentre los voltajes $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$.
- **c.** Encuentre la corriente $\mathbf{I}_3$.

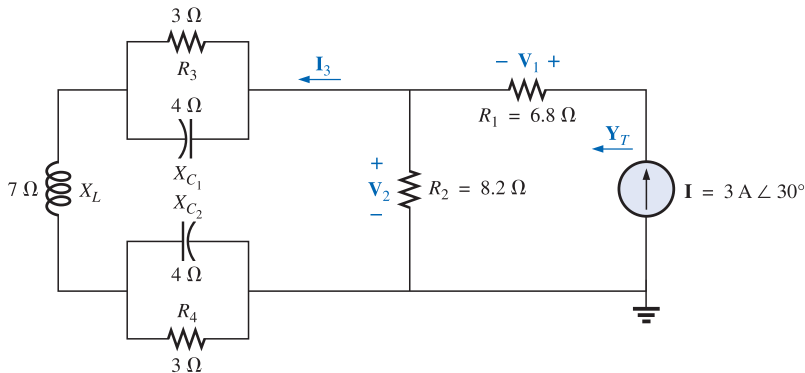


FIGURA 16.47
Problema 9.

***10.** Para la red de la figura 16.48:
- **a.** Encuentre la impedancia total $\mathbf{Z}_T$ y la admitancia $\mathbf{Y}_T$.
- **b.** Encuentre la corriente de fuente $\mathbf{I}_s$ en forma fasorial.
- **c.** Encuentre las corrientes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ en forma fasorial.
- **d.** Encuentre los voltajes $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_{ab}$ en forma fasorial.
- **e.** Encuentre la potencia promedio entregada a la red.
- **f.** Encuentre el factor de potencia de la red, e indique si se encuentra adelantado o atrasado.

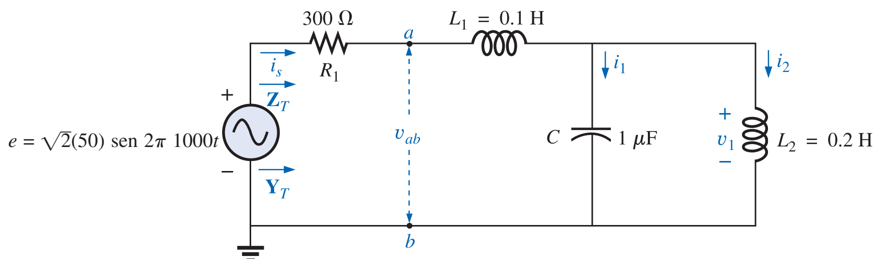
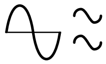


FIGURA 16.48
Problema 10.



***11.** Encuentre la corriente **I** para la red de la figura 16.49.

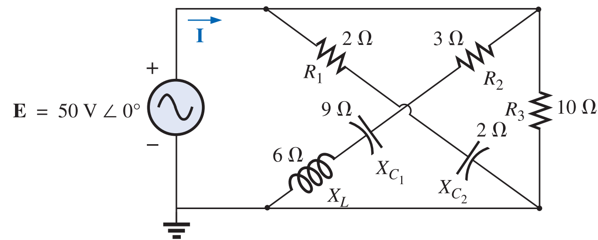


FIGURA 16.49
Problemas 11 y 17.

SECCIÓN 16.3 Redes escalera

12. Encuentre la corriente $\mathbf{I}_5$ para la red de la figura 16.50. Observe el efecto de un elemento reactivo sobre los cálculos resultantes.

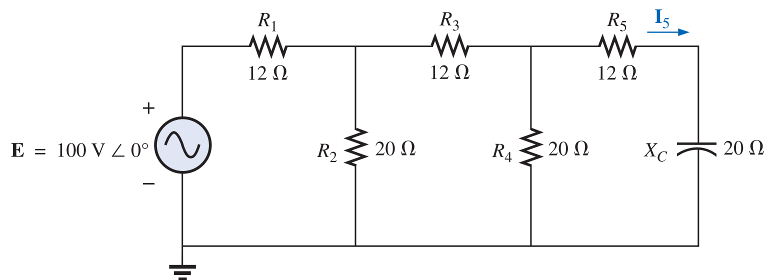


FIGURA 16.50
Problema 12.

13. Encuentre la potencia promedio entregada a R_4 en la figura 16.51.

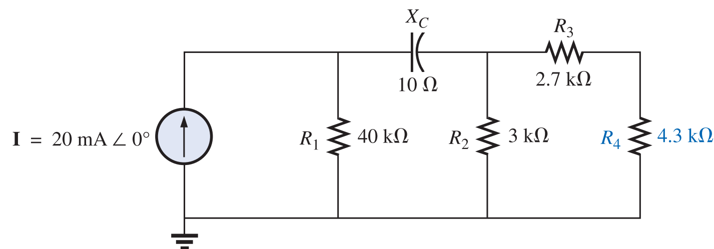


FIGURA 16.51
Problema 13.

14. Encuentre la corriente $\mathbf{I}_1$ para la red de la figura 16.52.

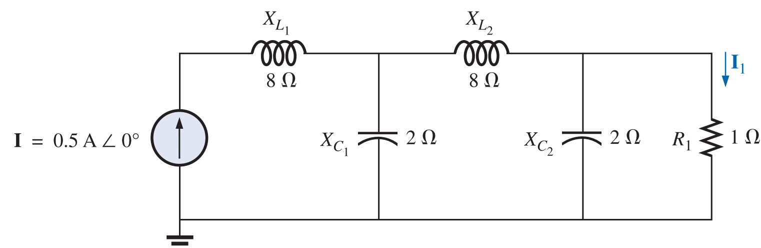
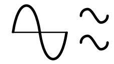


FIGURA 16.52
Problemas 14 y 18.



SECCIÓN 16.5 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

En los problemas del 15 al 18, utilice una frecuencia de 1 kHz para determinar los niveles inductivos y capacitivos requeridos para los archivos de entrada. En cada caso escriba el archivo de entrada requerido.

***15.** Repita el problema 2 utilizando PSpice o EWB.

***16.** Repita el problema 7, incisos (a) y (b), utilizando PSpice o EWB.

***17.** Repita el problema 11 utilizando PSpice o EWB.

***18.** Repita el problema 14 utilizando PSpice o EWB.

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

19. Escriba un programa para proporcionar una solución general al problema 1; es decir, dada la reactancia de cada elemento, genere una solución para los incisos del (a) al (e).

20. Dada la red de la figura 16.41, escriba un programa con el cual se genere una solución para los incisos del (a) al (b) en el problema 2. Utilice los valores dados.

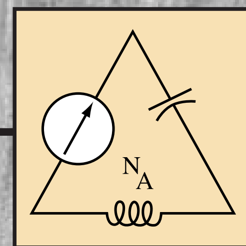
21. Genere un programa con el cual pueda obtenerse una solución general para la red de la figura 16.43 para las preguntas de los incisos (a), (b) y (c) del problema 2. Es decir, dadas la resistencia y la reactancia de los elementos, determine la corriente, el voltaje y la potencia solicitados.

GLOSARIO

Red de ca en serie-paralelo Combinación de ramas en serie y en paralelo dentro de la misma configuración de red. Cada rama puede contener cualquier número de elementos cuya impedancia es dependiente de la frecuencia aplicada.

Red escalera Combinación repetitiva de ramas en serie y en paralelo que tiene la apariencia de una escalera.

17



Métodos de análisis y temas seleccionados (ca)

17.1 INTRODUCCIÓN

Para redes con dos o más fuentes que no estén en serie o en paralelo, no se pueden aplicar los métodos descritos en los últimos dos capítulos. En lugar de ello, se deben utilizar métodos como el análisis de mallas o el análisis de nodos. Dado que estos métodos se analizaron con todo detalle para circuitos de cd en el capítulo 8, el presente capítulo considerará las variaciones requeridas para aplicarlos a los circuitos de ca. También se presentan las fuentes dependientes tanto para el análisis de mallas como para el de nodos.

No se analizará el método de corriente de rama nuevamente puesto que cae dentro del marco del análisis de mallas. Además de los métodos mencionados, también se analizará la red puente y las conversiones Δ-Y, Y-Δ para circuitos de ca.

Sin embargo, antes de analizar estas cuestiones debemos considerar el tema de las fuentes independientes y controladas.

17.2 FUENTES INDEPENDIENTES CONTRA FUENTES DEPENDIENTES (CONTROLADAS)

En los capítulos previos, cada fuente que aparecía en los análisis de redes de ca o cd era una **fuente independiente**, tal como E e I (o **E** e **I**) en la figura 17.1.

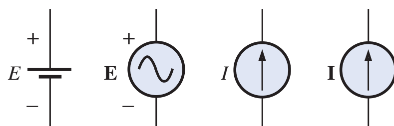
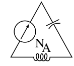


FIGURA 17.1
Fuentes independientes.



El término* independiente *especifica que la magnitud de la fuente es independiente de la red a la que está aplicada, y que la fuente desplegará sus características en sus terminales incluso si está completamente aislada.

Una* fuente dependiente *o* controlada *es aquella cuya magnitud está determinada (o controlada) por una corriente o un voltaje del sistema en el que se presenta.

En la actualidad se utilizan dos símbolos para identificar las fuentes controladas. Uno de ellos simplemente utiliza el símbolo independiente con una señal del elemento controlador, como se muestra en la figura 17.2. En la figura 17.2(a), la magnitud y la fase del voltaje están controladas por un voltaje **V** en cualquier otra parte en el sistema, con la magnitud controlada adicionalmente

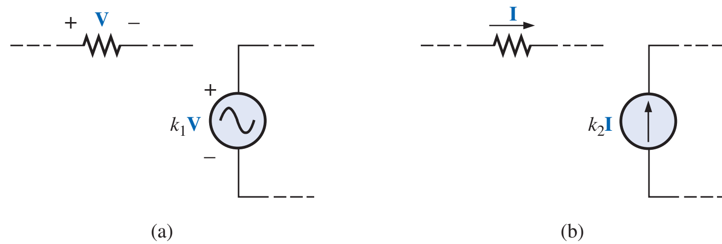


FIGURA 17.2
Fuentes controladas o dependientes.

por la constante k_1. En la figura 17.2(b), la magnitud y la fase de la fuente de corriente están controladas por una corriente **I** en alguna parte en el sistema, con la magnitud controlada adicionalmente por la constante k_2. Para distinguir entre las fuentes dependientes e independientes, se introduce la notación de la figura 17.3. En años recientes muchas respetables publicaciones sobre análisis de circuitos han aceptado la notación de la figura 17.3, aunque varias ediciones excelentes en el área de electrónica siguen utilizando el símbolo de la figura 17.2, especialmente en la modelación de circuitos para cierta variedad de dispositivos electrónicos como el transistor y el FET. Este libro empleará los símbolos de la figura 17.3.

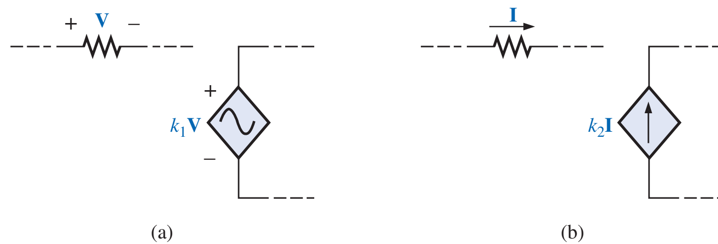


FIGURA 17.3
Notación especial para fuentes controladas o dependientes.

En la figura 17.4 se indican posibles combinaciones para fuentes controladas. Observe que la magnitud de las fuentes de corriente o de voltaje puede ser controlada por un voltaje y una corriente, respectivamente. A diferencia de la fuente independiente, un aislamiento como el de **V** o **I** = 0 en la figura 17.4(a) dará por resultado el corto circuito o el circuito abierto equivalente como se indica en la figura 17.4(b). Observe que el tipo de representación bajo estas condiciones está controlado por el hecho de si se trata de una fuente de corriente o de una fuente de voltaje, no por el agente controlador (**V** o **I**).

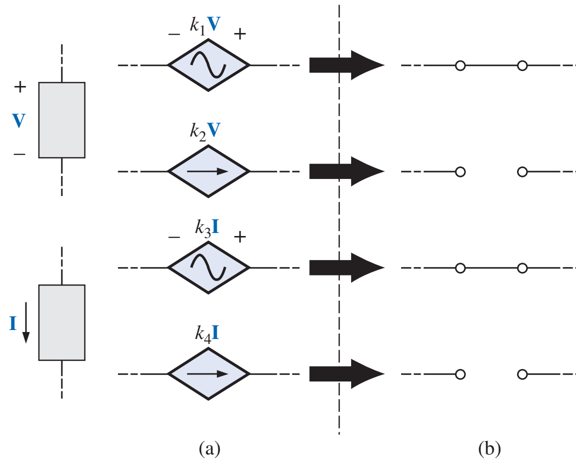


FIGURA 17.4
Condiciones de V = 0 V e I = 0 A para una fuente controlada.

17.3 CONVERSIONES DE FUENTE

Al aplicar los métodos que se analizarán, puede ser necesario convertir una fuente de corriente a una fuente de voltaje, o viceversa. Esta **conversión de fuente** puede lograrse de una forma muy similar a la de los circuitos de cd, excepto que ahora enfrentaremos fasores e impedancias en lugar de sólo números reales y resistores.

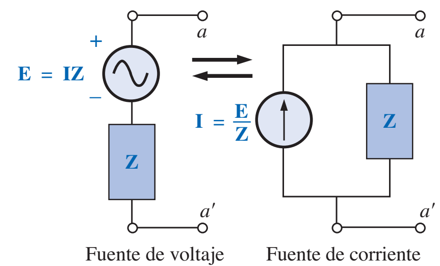


FIGURA 17.5
Conversión de fuente.

Fuentes independientes

En general, el formato para convertir un tipo de fuente independiente a otro es como el que se muestra en la figura 17.5.

EJEMPLO 17.1 Convierta la fuente de voltaje de la figura 17.6(a) a una fuente de corriente.

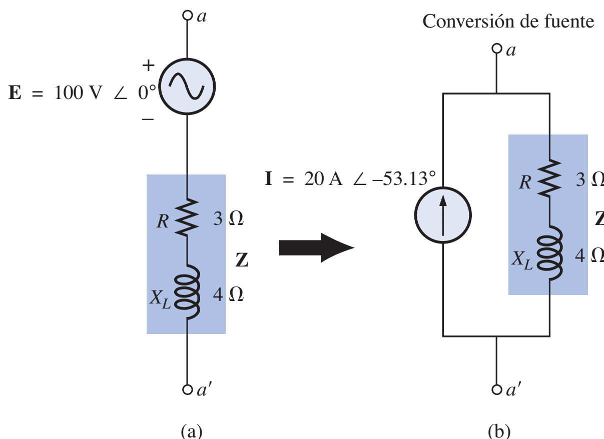
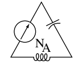


FIGURA 17.6
Ejemplo 17.1.



Solución:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{100 \text{ V} \angle 0^\circ}{5\ \Omega \angle 53.13^\circ}$$
$$= \mathbf{20\ A \angle -53.13^\circ} \qquad \text{[Figura 17.6(b)]}$$

EJEMPLO 17.2 Convierta la fuente de corriente de la figura 17.7(a) a una fuente de voltaje.

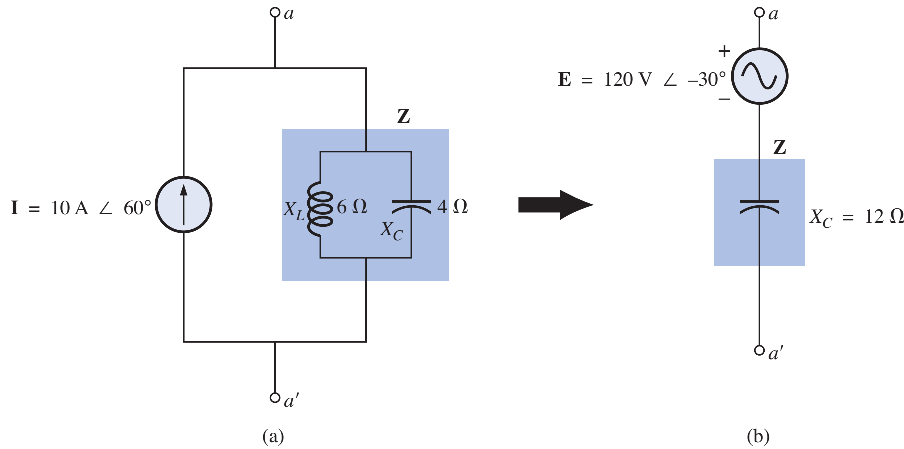


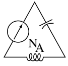
FIGURA 17.7
Ejemplo 17.2.

Solución:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z}_C \mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L} = \frac{(X_C \angle -90^\circ)(X_L \angle 90^\circ)}{-j\,X_C + j\,X_L}$$
$$= \frac{(4\ \Omega \angle -90^\circ)(6\ \Omega \angle 90^\circ)}{-j\,4\ \Omega + j\,6\ \Omega} = \frac{24\ \Omega \angle 0^\circ}{2 \angle 90^\circ}$$
$$= \mathbf{12\ \Omega \angle -90^\circ} \qquad \text{[Figura 17.7(b)]}$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{IZ} = (10 \text{ A} \angle 60^\circ)(12\ \Omega \angle -90^\circ)$$
$$= \mathbf{120\ V \angle -30^\circ} \qquad \text{[Figura 17.7(b)]}$$

Fuentes dependientes

Para fuentes dependientes, se puede aplicar la conversión directa de la figura 17.5 si la variable de control (**V** o **I** en la figura 17.4) no está determinada por una parte de la red a la que se aplicará la conversión. Por ejemplo, en las figuras 17.8 y 17.9, **V** e **I**, respectivamente, están controlados por una parte externa de la red. Las conversiones de otro tipo, donde **V** e **I** están controlados por una parte de la red que será convertida, serán consideradas en las secciones 18.3 y 18.4.



EJEMPLO 17.3 Convierta la fuente de voltaje de la figura 17.8(a) a una fuente de corriente.

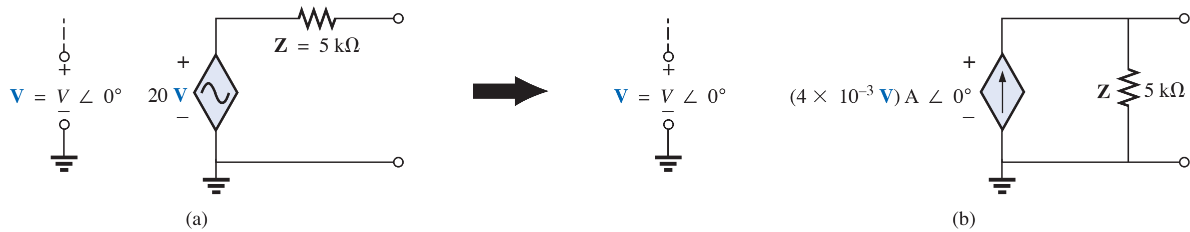


FIGURA 17.8
Conversión de fuente con una fuente de voltaje controlada por voltaje.

Solución:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{(20\mathbf{V})\ \text{V}\ \angle 0^\circ}{5\ \text{k}\Omega\ \angle 0^\circ}$$
$$= \mathbf{(4 \times 10^{-3}\ V)\ A\ \angle 0^\circ} \qquad \text{[Figura 17.8(b)]}$$

EJEMPLO 17.4 Convierta la fuente de corriente de la figura 17.9(a) a una fuente de voltaje.

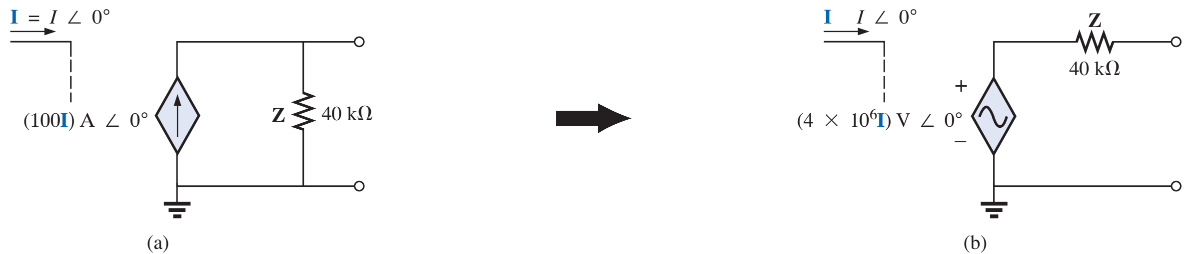


FIGURA 17.9
Conversión de fuente con una fuente de corriente controlada por corriente.

Solución:

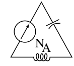
$$\mathbf{E} = \mathbf{IZ} = [(100\mathbf{I})\ \text{A}\ \angle 0^\circ][40\ \text{k}\Omega\ \angle 0^\circ]$$
$$= \mathbf{(4 \times 10^6 I)\ V\ \angle 0^\circ} \qquad \text{[Figura 17.9(b)]}$$

17.4 ANÁLISIS DE MALLAS

Método general

Fuentes de voltaje independientes Antes de analizar la aplicación del método a redes de ca, el lector deberá revisar primero las secciones apropiadas acerca de **análisis de mallas** en el capítulo 8, ya que el contenido de esta sección estará apegado a las conclusiones generales obtenidas en ese capítulo.

El método general del análisis de mallas para fuentes independientes incluye la misma secuencia de pasos que aparece en el capítulo 8. De hecho, a lo largo de esta sección, el único cambio con respecto al caso de cd será sustituir la impedancia por la resistencia y la admitancia por la conductancia en el procedimiento general.



1. ***Asigne una corriente diferente en el sentido de las manecillas del reloj a cada lazo cerrado independiente de la red. No es absolutamente obligatorio seleccionar el sentido de las manecillas del reloj para cada corriente de lazo. Sin embargo, eso elimina la necesidad de tener que elegir una dirección para cada aplicación. Se puede elegir cualquier dirección para cada corriente de lazo sin pérdida de precisión siempre que los pasos restantes se sigan de forma adecuada.***
2. ***Indique las polaridades dentro de cada lazo para cada impedancia según lo determine la dirección asumida de corriente de lazo para ese lazo.***
3. ***Aplique la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de cada lazo cerrado en el sentido de las manecillas del reloj. Nuevamente, el sentido de las manecillas del reloj se elige para establecer uniformidad y prepararnos para el método de formato que sigue.***
   a. ***Si una impedancia tiene dos o más corrientes asumidas a través de ella, la corriente total a través de esa impedancia será la corriente asumida del lazo en el que se esté aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff, más las corrientes asumidas de los otros lazos que pasan en la misma dirección, menos las corrientes asumidas que pasan en la dirección opuesta.***
   b. ***La polaridad de una fuente de voltaje no se ve afectada por la dirección de las corrientes de lazo asignadas.***
4. ***Resuelva las ecuaciones lineales simultáneas resultantes para las corrientes de lazo asumidas.***

Tal como se indica, la técnica es aplicable para todas las redes con fuentes independientes o para redes con *fuentes dependientes donde la variable de control no es parte de la red bajo análisis*. Si la variable de control forma parte de la red que se analiza, deberá aplicarse un método que se describirá en breve.

EJEMPLO 17.5 Utilizando el método general para análisis de mallas, encuentre la corriente $\mathbf{I}_1$ en la figura 17.10.

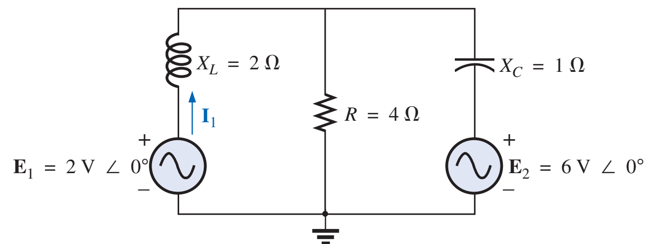


FIGURA 17.10
Ejemplo 17.5.

Solución: Al aplicar estos métodos a los circuitos de ca, es buena costumbre representar los resistores y las reactancias (o sus combinaciones) mediante impedancias con subíndice. Cuando ya se tenga la solución total en términos de estas impedancias con subíndice, podrán sustituirse los valores numéricos para encontrar las cantidades desconocidas.

La red se vuelve a trazar en la figura 17.11 con las impedancias con subíndice:

$$\mathbf{Z}_1 = +j\,X_L = +j\,2\ \Omega \qquad \mathbf{E}_1 = 2\ \mathrm{V}\ \angle 0°$$
$$\mathbf{Z}_2 = R = 4\ \Omega \qquad \mathbf{E}_2 = 6\ \mathrm{V}\ \angle 0°$$
$$\mathbf{Z}_3 = -j\,X_C = -j\,1\ \Omega$$

Los *pasos 1* y *2* son como los indicados en la figura 17.11.

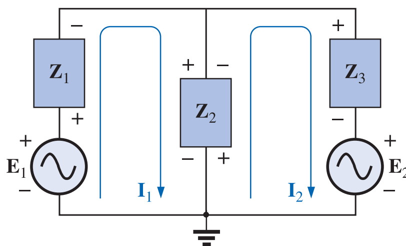
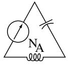


FIGURA 17.11
Asignación de las corrientes de malla y las impedancias con subíndice a la red de la figura 17.10.



Paso 3:

$$+\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 0$$
$$-\mathbf{Z}_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_3 - \mathbf{E}_2 = 0$$

o bien:

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 = 0$$
$$-\mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 + \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2 - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_3 - \mathbf{E}_2 = 0$$

de manera que:

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 = \mathbf{E}_1$$
$$\mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2 = -\mathbf{E}_2$$

la cual se vuelve a escribir como:

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 = \mathbf{E}_1$$
$$-\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) = -\mathbf{E}_2$$

Paso 4: Al utilizar determinantes obtenemos:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{E}_1 & -\mathbf{Z}_2 \\ -\mathbf{E}_2 & \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 & -\mathbf{Z}_2 \\ -\mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) - \mathbf{E}_2(\mathbf{Z}_2)}{(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) - (\mathbf{Z}_2)^2}$$
$$= \frac{(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\mathbf{Z}_2 + \mathbf{E}_1\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}$$

Al sustituir valores numéricos resulta:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{(2\text{ V} - 6\text{ V})(4\ \Omega) + (2\text{ V})(-j\,1\ \Omega)}{(+j\,2\ \Omega)(4\ \Omega) + (+j\,2\ \Omega)(-j\,2\ \Omega) + (4\ \Omega)(-j\,2\ \Omega)}$$
$$= \frac{-16 - j\,2}{j\,8 - j^2 2 - j\,4} = \frac{-16 - j\,2}{2 + j\,4} = \frac{16.12\text{ A} \angle -172.87^\circ}{4.47 \angle 63.43^\circ}$$
$$= \mathbf{3.61\ A} \angle \mathbf{-236.30^\circ} \quad \text{o} \quad \mathbf{3.61\ A} \angle \mathbf{123.70^\circ}$$

Fuentes de voltaje dependientes Para las fuentes de voltaje dependientes, el procedimiento se modifica de la siguiente forma:

1. Los pasos 1 y 2 serán los mismos que los aplicados para fuentes de voltaje independientes.
2. El paso 3 se modifica como sigue: trate cada fuente dependiente como una fuente independiente cuando se aplique la ley de voltaje de Kirchhoff a cada lazo independiente. Sin embargo, una vez escrita la ecuación, sustitúyala por la cantidad de control para asegurar que las incógnitas se limiten únicamente a las corrientes de malla elegidas.
3. El paso 4 no se modifica.

EJEMPLO 17.6 Escriba las corrientes de malla para la red de la figura 17.12 que tiene una fuente de voltaje dependiente.

Solución:

Los *pasos 1* y *2* están definidos en la figura 17.12.

Paso 3:

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1 R_1 - R_2(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 0$$
$$R_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + \mu\mathbf{V}_x - \mathbf{I}_2 R_3 = 0$$

Luego se sustituye $\mathbf{V}_x = (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)R_2$

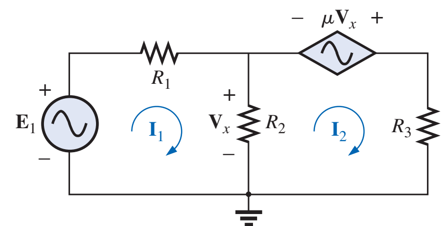
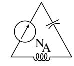


FIGURA 17.12
Aplicación del análisis de mallas a una red con una fuente de voltaje controlada por voltaje.



El resultado son dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1 R_1 - R_2(\mathbf{I} - \mathbf{I}_2) = 0$$
$$R_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + \mu R_2(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) - \mathbf{I}_2 R_3 = 0$$

Fuentes de corriente independientes Para fuentes de corriente independientes, el procedimiento se modifica de la siguiente forma:

1. Los pasos 1 y 2 son los mismos que los aplicados para fuentes independientes.
2. El paso 3 se modifica como sigue: trate cada fuente de corriente como un circuito abierto (recuerde la denominación de *supermalla* del capítulo 8), y escriba las ecuaciones de malla para cada trayectoria independiente restante. Luego relacione las corrientes de malla seleccionadas con las fuentes dependientes para asegurar que las incógnitas de las ecuaciones finales estén limitadas sólo a las corrientes de malla.
3. El paso 4 no se modifica.

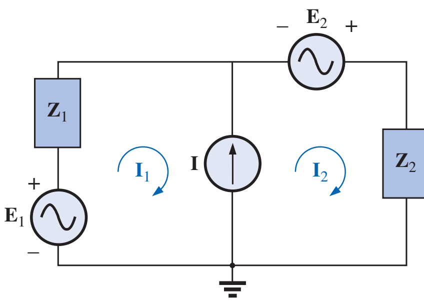


FIGURA 17.13
Aplicación del análisis de mallas a una red con una fuente de corriente independiente.

EJEMPLO 17.7 Escriba las corrientes de malla para la red de la figura 17.13 que tiene una fuente de corriente independiente.

Solución:

Los *pasos 1* y *2* están definidos en la figura 17.13.

Paso 3: $\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 + \mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 = 0$ (solo la trayectoria independiente restante)

con: $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I} = \mathbf{I}_2$

El resultado son dos ecuaciones y dos incógnitas.

Fuentes de corriente dependientes Para las fuentes de corriente dependientes, el procedimiento se modifica de la siguiente forma:

1. Los pasos 1 y 2 son los mismos que los aplicados para las fuentes independientes.
2. El paso 3 se modifica como sigue: el procedimiento es esencialmente el mismo que el aplicado para las fuentes de corriente independientes, excepto que ahora las fuentes dependientes deben ser definidas en términos de las corrientes de malla seleccionadas para asegurar que las ecuaciones finales tengan sólo corrientes de malla como las cantidades desconocidas.
3. El paso 4 no se modifica.

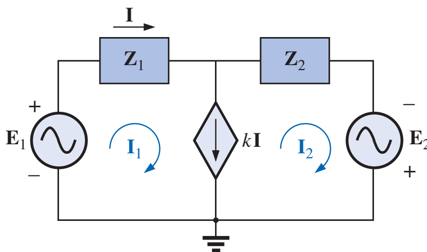


FIGURA 17.14
Aplicación del análisis de mallas a una red con una fuente de corriente controlada por corriente.

EJEMPLO 17.8 Escriba las corrientes de malla para la red de la figura 17.14 que tiene una fuente de corriente dependiente.

Solución:

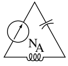
Los *pasos 1* y *2* están definidos en la figura 17.14.

Paso 3: $\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 + \mathbf{E}_2 = 0$

y $k\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$

Ahora $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1$ por lo que $k\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$ o $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1(1 - k)$

Es resultado son dos ecuaciones y dos incógnitas.



Método de formato

El método de formato se presentó en la sección 8.8. Los pasos para aplicarlo se repiten aquí con modificaciones para su uso en circuitos de ca:

1. ***Asigne una corriente de lazo a cada lazo cerrado independiente (como en la sección anterior) en el sentido de las manecillas del reloj.***
2. ***El número de ecuaciones requeridas será igual al número de lazos cerrados independientes elegidos. La columna 1 de cada ecuación estará formada simplemente por la suma de los valores de impedancia de aquellas impedancias a través de las cuales pasa la corriente de lazo de interés y multiplicando el resultado por esa corriente de lazo.***
3. ***Ahora deberemos considerar los términos mutuos que siempre se restan de los términos localizados en la primera columna. Es posible tener más de un término mutuo si la corriente de lazo de interés tiene un elemento en común con más de una corriente de lazo diferente. Cada término mutuo será el producto de la impedancia mutua y la otra corriente de lazo que pasa a través del mismo elemento.***
4. ***La columna a la derecha del signo de igualdad será la suma algebraica de las fuentes de voltaje en las cuales pasa la corriente de lazo de interés. Se asignan signos positivos a aquellas fuentes de voltaje que tienen una polaridad tal que la corriente de lazo pasa de la terminal negativa a la positiva. Los signos negativos se asignan a aquellos potenciales para los que aplica el caso contrario.***
5. ***Resuelva las ecuaciones simultáneas resultantes para las corrientes de lazo deseadas.***

Tal como se enumera, esta técnica es aplicable en todas las redes con fuentes independientes o en redes con fuentes dependientes donde la variable de control no es parte de la red bajo análisis. Si la variable de control forma parte de la red que se analiza, deberá tenerse cuidado adicional al aplicar los pasos anteriores.

EJEMPLO 17.9 Utilizando el método de formato para el análisis de mallas, encuentre la corriente $\mathbf{I}_2$ en la figura 17.15.

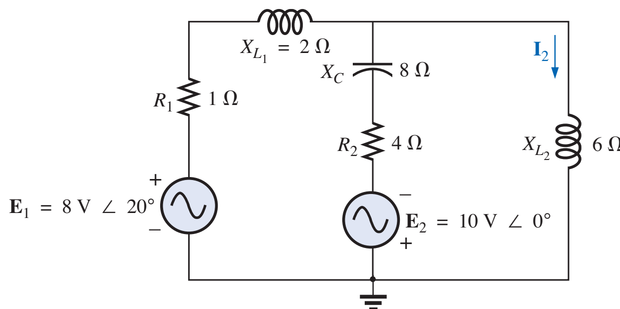


FIGURA 17.15
Ejemplo 17.9.

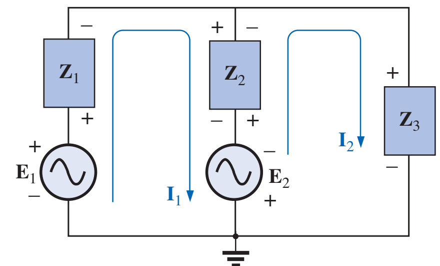
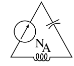


FIGURA 17.16
Asignación de las corrientes de malla y las impedancias con subíndice a la red de la figura 17.15.

Solución 1: La red se vuelve a trazar en la figura 17.16:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j\,X_{L_1} = 1\,\Omega + j\,2\,\Omega \qquad \mathbf{E}_1 = 8\text{ V}\angle 20^\circ$$
$$\mathbf{Z}_2 = R_2 - j\,X_C = 4\,\Omega - j\,8\,\Omega \qquad \mathbf{E}_2 = 10\text{ V}\angle 0^\circ$$
$$\mathbf{Z}_3 = +j\,X_{L_2} = +j\,6\,\Omega$$



Observe cómo la complejidad del problema se reduce gracias a la sustitución de las impedancias con subíndice.

El *paso 1* es como el indicado en la figura 17.16.

Los *pasos* del *2* al *4:*

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$
$$\mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2 = -\mathbf{E}_2$$

las cuales se vuelven a escribir como:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 \quad &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \\ -\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2 \quad + \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) &= -\mathbf{E}_2 \end{aligned}$$

Paso 5: Utilizando determinantes tenemos:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 & \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \\ -\mathbf{Z}_2 & -\mathbf{E}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 & -\mathbf{Z}_2 \\ -\mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{-(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)\mathbf{E}_2 + \mathbf{Z}_2(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)}{(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) - \mathbf{Z}_2^2}$$
$$= \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{E}_1 - \mathbf{Z}_1\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}$$

Al sustituir los valores numéricos resulta:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{(4\ \Omega - j\,8\ \Omega)(8\ \text{V} \angle 20^\circ) - (1\ \Omega + j\,2\ \Omega)(10\ \text{V} \angle 0^\circ)}{(1\ \Omega + j\,2\ \Omega)(4\ \Omega - j\,8\ \Omega) + (1\ \Omega + j\,2\ \Omega)(+j\,6\ \Omega) + (4\ \Omega - j\,8\ \Omega)(+j\,6\ \Omega)}$$
$$= \frac{(4 - j\,8)(7.52 + j\,2.74) - (10 + j\,20)}{20 + (j\,6 - 12) + (j\,24 + 48)}$$
$$= \frac{(52.0 - j\,49.20) - (10 + j\,20)}{56 + j\,30} = \frac{42.0 - j\,69.20}{56 + j\,30} = \frac{80.95\ \text{A} \angle -58.74^\circ}{63.53 \angle 28.18^\circ}$$
$$= \mathbf{1.27\ A\ \angle -86.92^\circ}$$

Calculadora La calculadora (TI-86 o una equivalente) puede ser una herramienta efectiva para realizar los extensos y laboriosos cálculos involucrados en la ecuación final que aparece líneas arriba. Sin embargo, el usuario deberá ser muy cuidadoso con el uso del número correcto de paréntesis y para definir, utilizando los paréntesis, el orden de las operaciones aritméticas.

```
((4,−8)*8(∠20)−(1,2)*(10∠0))/((1,2)*(4,−8)+(1,2)*(0,6)+(4,−8)*(0,6)) ENTER
(67.854E−3,−1.272E0)
Ans ▶ Pol
(1.274E0∠−86.956E0)
```

CÁLCULO 17.1

Solución con Mathcad: Este ejemplo proporciona una excelente oportunidad para demostrar el poder de Mathcad. Primero se definen las impedancias y los parámetros para las ecuaciones que seguirán, como se muestra en la figura 17.17. Luego se ingresan los valores de aproximación, **guess**, de las corrientes de malla $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. La etiqueta **Given** deberá ingresarse seguida por las ecua-

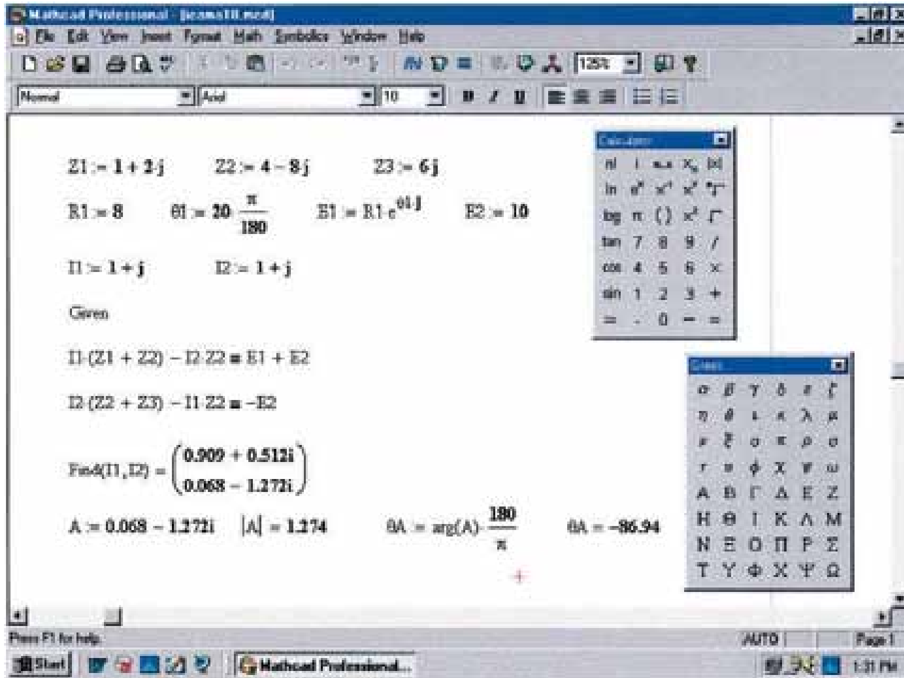


FIGURA 17.17
Utilización de Mathcad para verificar los resultados del ejemplo 17.9.

ciones para la red. Observe que, en este ejemplo, no continuamos con el análisis sino hasta que la matriz está definida, trabajamos directamente a partir de las ecuaciones de red. Una vez que las ecuaciones se ingresaron de forma adecuada se ingresa **Find(I1,I2)**. Luego, al seleccionar el signo de igual se obtendrá una matriz de una sola columna con los resultados en forma rectangular. La conversión a forma polar requiere definir una variable **A**, y solicitar entonces la magnitud y el ángulo utilizando las definiciones ingresadas antes en el listado y las barras de herramientas **Calculator** y **Greek**. El resultado para $\mathbf{I}_2$ será 1.274 A $\angle -86.94°$ lo cual es una coincidencia excelente con la solución teórica.

EJEMPLO 17.10 Escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 17.18. No las resuelva.

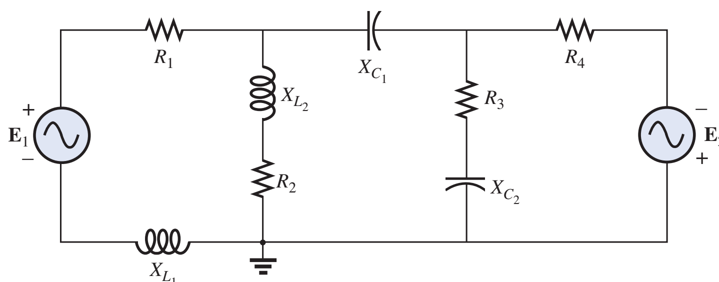
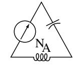


FIGURA 17.18
Ejemplo 17.10.



Solución: La red se vuelve a trazar en la figura 17.19. Nuevamente observe la reducida complejidad y la mayor claridad que proporciona el uso de impedancias con subíndice:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j X_{L_1} \qquad \mathbf{Z}_4 = R_3 - j X_{C_2}$$
$$\mathbf{Z}_2 = R_2 + j X_{L_2} \qquad \mathbf{Z}_5 = R_4$$
$$\mathbf{Z}_3 = j X_{C_1}$$

e

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 = \mathbf{E}_1$$
$$\mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4) - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2 - \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_4 = 0$$
$$\mathbf{I}_3(\mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}_5) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_4 = \mathbf{E}_2$$

o bien:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) & - \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2) & + 0 & = \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2 & - \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4) & + \mathbf{I}_3(\mathbf{Z}_4) & = 0 \\ 0 & - \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_4) & + \mathbf{I}_3(\mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}_5) & = \mathbf{E}_2 \end{array}$$

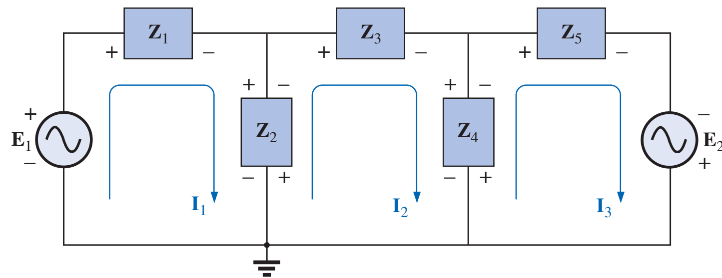


FIGURA 17.19
Asignación de las corrientes de malla y las impedancias con subíndice a la red de la figura 17.18.

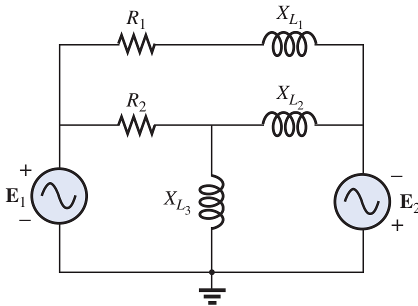


FIGURA 17.20
Ejemplo 17.11.

EJEMPLO 17.11 Utilizando el método de formato, escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 17.20.

Solución: La red se vuelve a trazar como se muestra en la figura 17.21, donde:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j X_{L_1} \qquad \mathbf{Z}_3 = j X_{L_2}$$
$$\mathbf{Z}_2 = R_2 \qquad \mathbf{Z}_4 = j X_{L_3}$$

e

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 - \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_4 = \mathbf{E}_1$$
$$\mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2 - \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_3 = 0$$
$$\mathbf{I}_3(\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_3 - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_4 = \mathbf{E}_2$$

o bien:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4) & - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 & - \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_4 & = \mathbf{E}_1 \\ -\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_2 & + \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) & - \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_3 & = 0 \\ -\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_4 & - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_3 & + \mathbf{I}_3(\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4) & = \mathbf{E}_2 \end{array}$$

Observe la simetría *sobre* el eje diagonal; es decir, advierta la ubicación de $-\mathbf{Z}_2$, $-\mathbf{Z}_4$ y $-\mathbf{Z}_3$ fuera de la diagonal.

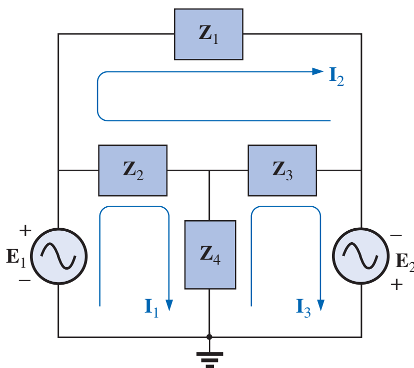
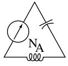


FIGURA 17.21
Asignación de las corrientes de malla y las impedancias con subíndice a la red de la figura 17.20.

17.5 ANÁLISIS DE NODOS

Método general

Fuentes independientes Antes de analizar la aplicación del método a las redes de ca, se sugiere efectuar una revisión de las secciones apropiadas sobre



análisis de nodos en el capítulo 8 ya que el contenido de esta sección estará apegado a las conclusiones generales ahí obtenidas.

Los pasos fundamentales son los siguientes:

1. ***Determine el número de nodos dentro de la red.***
2. ***Elija un nodo de referencia e identifique cada nodo restante con un valor de voltaje con subíndice: $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, etcétera.***
3. ***Aplique la ley de corriente de Kirchhoff a cada nodo excepto al de referencia. Asuma que todas las corrientes desconocidas abandonan el nodo en cada aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff.***
4. ***Resuelva las ecuaciones resultantes para los voltajes nodales.***

Los ejemplos siguientes nos permitirán recordar el contenido del capítulo 8 y el método general para encontrar una solución de análisis de nodos.

EJEMPLO 17.12 Determine el voltaje en el inductor para la red de la figura 17.22.

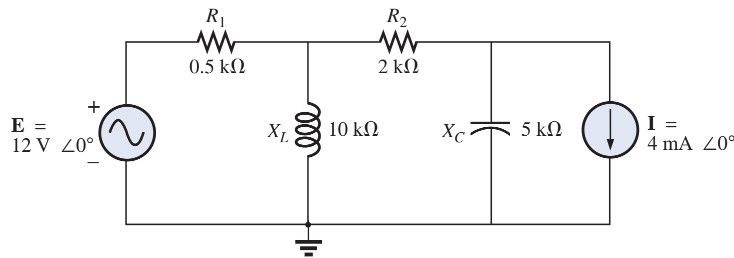


FIGURA 17.22
Ejemplo 17.12.

Solución 1:

Los *pasos 1* y *2* son como los indicados en la figura 17.23.

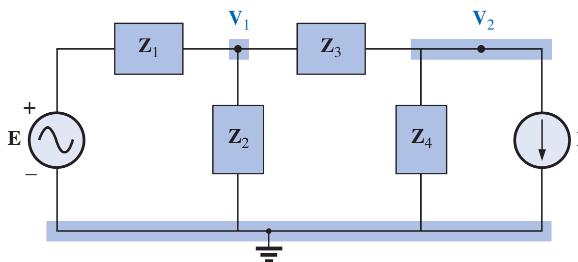


FIGURA 17.23
Asignación de los voltajes nodales y las impedancias con subíndice a la red de la figura 17.22.

Paso 3: Observe la figura 17.24 para la aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo $\mathbf{V}_1$:

$$\Sigma\, \mathbf{I}_i = \Sigma\, \mathbf{I}_o$$

$$0 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$$

$$\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_3} = 0$$

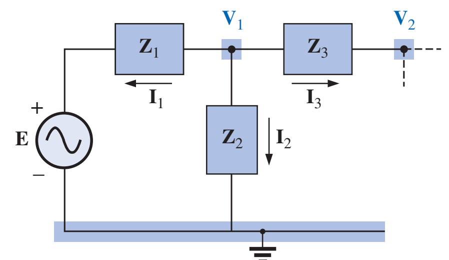
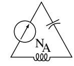


FIGURA 17.24
Aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo $\mathbf{V}_1$ de la figura 17.23.



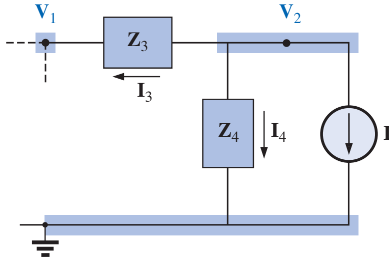


FIGURA 17.25
Aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo $\mathbf{V}_2$ de la figura 17.23.

Al reagrupar términos:

$$\mathbf{V}_1\left[\frac{1}{\mathbf{Z}_1}+\frac{1}{\mathbf{Z}_2}+\frac{1}{\mathbf{Z}_3}\right]-\mathbf{V}_2\left[\frac{1}{\mathbf{Z}_3}\right]=\frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1} \qquad \textbf{(17.1)}$$

Observe la figura 17.25 para la aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff al nodo $\mathbf{V}_2$.

$$0=\mathbf{I}_3+\mathbf{I}_4+\mathbf{I}$$

$$\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_3}+\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_4}+\mathbf{I}=0$$

Al reagrupar términos:

$$\mathbf{V}_2\left[\frac{1}{\mathbf{Z}_3}+\frac{1}{\mathbf{Z}_4}\right]-\mathbf{V}_1\left[\frac{1}{\mathbf{Z}_3}\right]=-\mathbf{I} \qquad \textbf{(17.2)}$$

Al agrupar ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1\left[\frac{1}{\mathbf{Z}_1}+\frac{1}{\mathbf{Z}_2}+\frac{1}{\mathbf{Z}_3}\right]-\mathbf{V}_2\left[\frac{1}{\mathbf{Z}_3}\right]&=\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1}\\ \mathbf{V}_1\left[\frac{1}{\mathbf{Z}_3}\right]-\mathbf{V}_2\left[\frac{1}{\mathbf{Z}_3}+\frac{1}{\mathbf{Z}_4}\right]&=\mathbf{I}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_1}+\frac{1}{\mathbf{Z}_2}+\frac{1}{\mathbf{Z}_3}=\frac{1}{0.5\text{ k}\Omega}+\frac{1}{j\,10\text{ k}\Omega}+\frac{1}{2\text{ k}\Omega}=2.5\text{ mS}\angle-2.29^\circ$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_3}+\frac{1}{\mathbf{Z}_4}=\frac{1}{2\text{ k}\Omega}+\frac{1}{-j\,5\text{ k}\Omega}=0.539\text{ mS}\angle 21.80^\circ$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1[2.5\text{ mS}\angle-2.29^\circ]-\mathbf{V}_2[0.5\text{ mS}\angle 0^\circ]&=24\text{ mA}\angle 0^\circ\\ \mathbf{V}_1[0.5\text{ mS}\angle 0^\circ]-\mathbf{V}_2[0.539\text{ mS}\angle 21.80^\circ]&=4\text{ mA}\angle 0^\circ\end{aligned}$$

con:

$$\mathbf{V}_1=\frac{\begin{vmatrix}24\text{ mA}\angle 0^\circ & -0.5\text{ mS}\angle 0^\circ\\ 4\text{ mA}\angle 0^\circ & -0.539\text{ mS}\angle 21.80^\circ\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2.5\text{ mS}\angle-2.29^\circ & -0.5\text{ mS}\angle 0^\circ\\ 0.5\text{ mS}\angle 0^\circ & -0.539\text{ mS}\angle 21.80^\circ\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(24\text{ mA}\angle 0^\circ)(-0.539\text{ mS}\angle 21.80^\circ)+(0.5\text{ mS}\angle 0^\circ)(4\text{ mA}\angle 0^\circ)}{(2.5\text{ mS}\angle-2.29^\circ)(-0.539\text{ mS}\angle 21.80^\circ)+(0.5\text{ mS}\angle 0^\circ)(0.5\text{ mS}\angle 0^\circ)}$$

$$=\frac{-12.94\times 10^{-6}\text{ V}\angle 21.80^\circ+2\times 10^{-6}\text{ V}\angle 0^\circ}{-1.348\times 10^{-6}\angle 19.51^\circ+0.25\times 10^{-6}\angle 0^\circ}$$

$$=\frac{-(12.01+j\,4.81)\times 10^{-6}\text{ V}+2\times 10^{-6}\text{ V}}{-(1.271+j\,0.45)\times 10^{-6}+0.25\times 10^{-6}}$$

$$=\frac{-10.01\text{ V}-j\,4.81\text{ V}}{-1.021-j\,0.45}=\frac{11.106\text{ V}\angle-154.33^\circ}{1.116\angle-156.21^\circ}$$

$\mathbf{V}_1$ = **9.95 V ∠1.88°**

Solución con Mathcad: La extensión y complejidad del desarrollo matemático anterior sugiere fuertemente el uso de un método alternativo como Mathcad. La impresión de la figura 17.26 define primero las letras **k** y **m** con valores numéricos específicos de manera que el formato de potencia de diez no tiene que incluirse en las ecuaciones. De esta forma, los resultados son más limpios y fáciles de revisar. Al ingresar las ecuaciones, recuerde que la *j* se captura como *1j* **sin** el signo de multiplicación entre el 1 y la *j*. Un signo de mul-

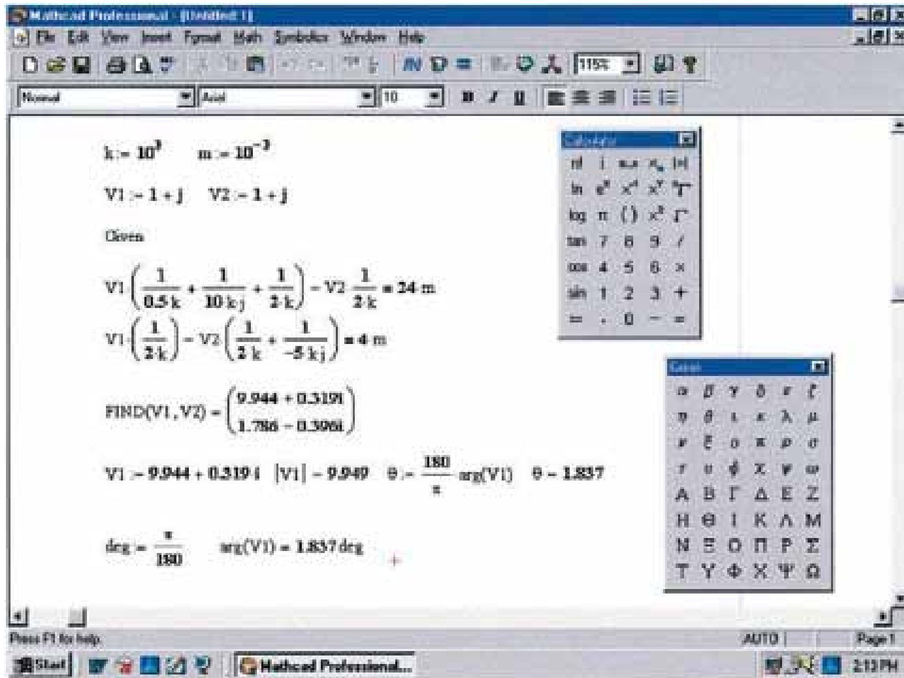


FIGURA 17.26
Utilización de Mathcad para verificar los resultados del ejemplo 17.12.

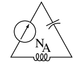
tiplicación entre las dos definirá a la j como otra variable. También asegúrese de que el proceso de multiplicación se encuentre insertado entre las variables nodales y los paréntesis. Si continúa apareciendo un signo de error, por lo general es mejor reingresar el listado completo —ya que los errores no se identifican fácilmente con sólo mirar las ecuaciones resultantes.

Por último, se obtienen los resultados y se convierten a forma polar para compararlos con la solución teórica. La solución de 9.949 A $\angle 1.837°$ es una confirmación muy cercana de la solución obtenida manualmente.

Antes de abandonar este ejemplo, veamos otro método para obtener la forma polar de la solución. El método aparece en la parte inferior de la figura 17.26. Primero se define **deg** como se muestra, y luego se elige **arg** a partir de la secuencia **Insert-*f* (*x*)-Insert Function-arg**. Luego se ingresa **V1**; el resultado estará en radianes pero con un pequeño rectángulo negro en el lugar donde normalmente aparecen las unidades. Haga clic sobre ese rectángulo negro y aparecerá el paréntesis donde se puede teclear **deg**. Cuando se seleccione el signo de igual, el ángulo aparecerá en grados.

Fuentes de corriente dependientes Para las fuentes de corriente dependientes, el procedimiento se modifica de la siguiente forma:

1. Los pasos 1 y 2 son los mismos que los aplicados para las fuentes independientes.
2. El paso 3 se modifica como sigue: trate cada fuente de corriente dependiente como una fuente independiente cuando se aplique la ley de corriente de Kirchhoff a cada nodo definido. Sin embargo, una vez que las ecuaciones estén establecidas, sustituya la ecuación por la cantidad de control para asegurar que las incógnitas estén apegadas únicamente a los voltajes nodales seleccionados.
3. El paso 4 no se modifica.



EJEMPLO 17.13 Escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 17.27 que tiene una fuente de corriente dependiente.

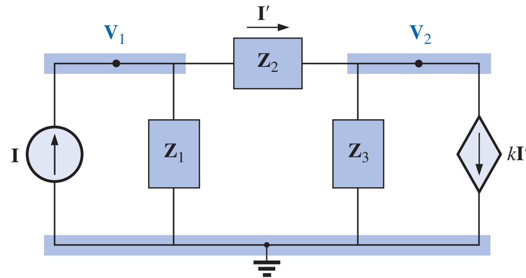


FIGURA 17.27
Aplicación del análisis de nodos a una red con una fuente de corriente controlada por corriente.

Solución:

Los *pasos 1* y *2* son como los definidos en la figura 17.27.

Paso 3: En el nodo $\mathbf{V}_1$,

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_2} - \mathbf{I} = 0$$

y
$$\mathbf{V}_1\left[\frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2}\right] - \mathbf{V}_2\left[\frac{1}{\mathbf{Z}_2}\right] = \mathbf{I}$$

En el nodo $\mathbf{V}_2$,

$$\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 + k\mathbf{I}' = 0$$

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_3} + k\left[\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_2}\right] = 0$$

y
$$\mathbf{V}_1\left[\frac{1-k}{\mathbf{Z}_2}\right] - \mathbf{V}_2\left[\frac{1-k}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3}\right] = 0$$

dando por resultado dos ecuaciones y dos incógnitas.

Fuentes de voltaje independientes entre nodos asignados Para las fuentes de voltaje independientes entre nodos asignados, el procedimiento se modifica de la siguiente forma:

1. Los pasos 1 y 2 son los mismos que los aplicados para fuentes independientes.
2. El paso 3 se modifica como sigue: trate cada fuente entre los nodos asignados como un corto circuito (recuerde la clasificación de *supernodo* del capítulo 8), y escriba las ecuaciones nodales para cada nodo independiente restante. Luego relacione los voltajes nodales seleccionados con la fuente de voltaje independiente para asegurar que las incógnitas de las ecuaciones finales estén apegadas únicamente a los voltajes nodales.
3. El paso 4 no se modifica.

EJEMPLO 17.14 Escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 17.28 que tiene una fuente independiente entre dos nodos asignados.

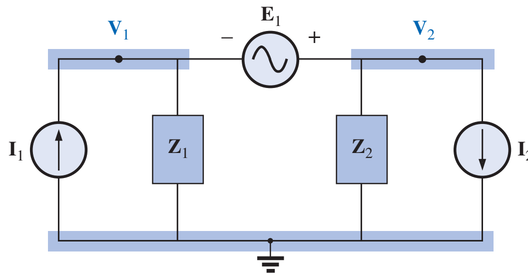


FIGURA 17.28
Aplicación del análisis de nodos a una red con una fuente de voltaje independiente entre nodos asignados.

Solución:

Los *pasos 1* y *2* están definidos en la figura 17.28.

Paso 3: al reemplazar la fuente independiente **E** con un corto circuito equivalente se obtiene un supernodo que generará la siguiente ecuación cuando se aplique la ley de corriente de Kirchhoff al nodo $\mathbf{V}_1$:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_2} + \mathbf{I}_2$$

con: $$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{E}$$

y tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas.

Fuentes de voltaje dependientes entre nodos asignados Para las fuentes de voltaje dependientes entre nodos asignados, el procedimiento se modifica de la siguiente forma:

1. Los pasos 1 y 2 son los mismos que los aplicados para fuentes de voltaje independientes.
2. El paso 3 se modifica como sigue: el procedimiento es esencialmente el mismo que el aplicado para las fuentes de voltaje independientes, excepto que ahora las fuentes dependientes deberán definirse en términos de los voltajes nodales elegidos para asegurar que las ecuaciones finales sólo tengan voltajes nodales como sus cantidades desconocidas.
3. El paso 4 no se modifica.

EJEMPLO 17.15 Escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 17.29 que tiene una fuente de voltaje dependiente entre dos nodos asignados.

Solución:

Los *pasos 1* y *2* están definidos en la figura 17.29.

Paso 3: al reemplazar la fuente dependiente $\mu\mathbf{V}_x$ con un corto circuito equivalente se obtendrá la siguiente ecuación cuando se aplique la ley de corriente de Kirchhoff al nodo $\mathbf{V}_1$:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)}{\mathbf{Z}_2} - \mathbf{I} = 0$$

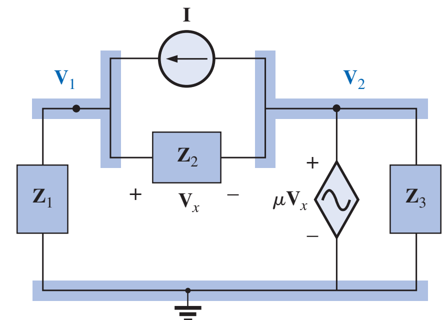
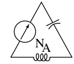


FIGURA 17.29
Aplicación del análisis de nodos a una red con una fuente de voltaje controlada por voltaje.



y $$\mathbf{V}_2 = \mu\mathbf{V}_x = \mu[\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2]$$

o bien: $$\mathbf{V}_2 = \frac{\mu}{1+\mu}\mathbf{V}_1$$

dando por resultado dos ecuaciones y dos incógnitas. Observe que debido a que la impedancia $\mathbf{Z}_3$ está en paralelo con una fuente de voltaje, no aparece en el análisis; sin embargo, afectará a la corriente a través de la fuente de voltaje dependiente.

Método de formato

Una inspección minuciosa de las ecuaciones (17.1) y (17.2) en el ejemplo 17.12 mostrará que son las mismas que se obtendrían utilizando el método de formato presentado en el capítulo 8. Recuerde que el método requería que la fuente de voltaje se convirtiera primero a una fuente de corriente, pero la escritura de las ecuaciones era bastante directa y minimizaba cualquier probabilidad de error debido a un signo perdido o un término faltante.

La secuencia de pasos requeridos para aplicar el método de formato es la siguiente:

1. ***Elija un nodo de referencia y asigne una etiqueta de voltaje con subíndice a los (N – 1) nodos independientes restantes de la red.***
2. ***El número de ecuaciones requeridas para obtener una solución completa será igual al número de voltajes con subíndice (N – 1). La columna 1 de cada ecuación estará formada por la suma de admitancias ligadas al nodo de interés y multiplicando el resultado por el voltaje nodal con subíndice.***
3. ***Los términos mutuos se restan siempre de los términos de la primera columna. Es posible tener más de un término mutuo si el voltaje nodal de interés tiene un elemento en común con otro voltaje nodal más. Cada término mutuo será el producto de la admitancia mutua y del otro voltaje nodal ligado con esa admitancia.***
4. ***La columna a la derecha del signo de igualdad es la suma algebraica de las fuentes de corriente ligadas al nodo de interés. Se asigna un signo positivo a una fuente de corriente si ésta suministra corriente a un nodo, y un signo negativo si la fuente extrae corriente de un nodo.***
5. ***Resuelva las ecuaciones simultáneas resultantes para los voltajes nodales deseados. Las recomendaciones presentadas para el análisis de mallas con respecto a las fuentes independientes y dependientes también son aplicables aquí.***

EJEMPLO 17.16 Utilizando el método de formato para el análisis de nodos, encuentre el voltaje en el resistor de 4 Ω que aparece en la figura 17.30.

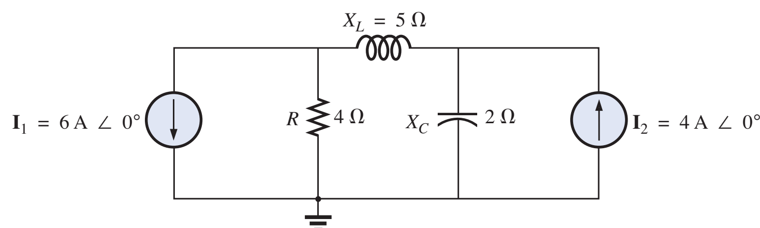
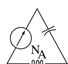


FIGURA 17.30
Ejemplo 17.16.



Solución 1: Al elegir los nodos (Figura 17.31) y escribir las ecuaciones nodales tenemos:

$$\mathbf{Z}_1 = R = 4\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_2 = j\,X_L = j\,5\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_3 = -j\,X_C = -j\,2\ \Omega$$

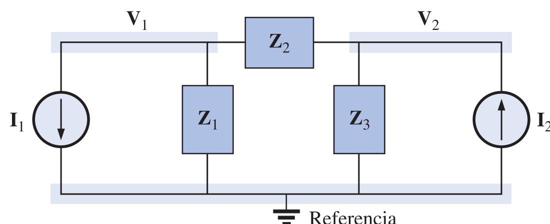


FIGURA 17.31
Asignación de los voltajes nodales y las impedancias con subíndice para la red de la figura 17.30.

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) - \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_2) = -\mathbf{I}_1$$
$$\mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_2) - \mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_2) = +\mathbf{I}_2$$

o bien:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) - \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_2) &= -\mathbf{I}_1 \\ -\mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_2) + \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_2) &= +\mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} \qquad \mathbf{Y}_2 = \frac{1}{\mathbf{Z}_2} \qquad \mathbf{Y}_3 = \frac{1}{\mathbf{Z}_3}$$

Al utilizar determinantes resulta:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\mathbf{I}_1 & -\mathbf{Y}_2 \\ +\mathbf{I}_2 & \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 & -\mathbf{Y}_2 \\ -\mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_2 \end{vmatrix}} = \frac{-(\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_2)\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2\mathbf{Y}_2}{(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)(\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_2) - \mathbf{Y}_2^2} = \frac{-(\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_2)\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2\mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2}$$

Al sustituir valores numéricos tenemos:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{-[(1/-j\,2\ \Omega) + (1/j\,5\ \Omega)]6\text{ A}\angle 0° + 4\text{ A}\angle 0°(1/j\,5\ \Omega)}{(1/4\ \Omega)(1/-j\,2\ \Omega) + (1/j\,5\ \Omega)(1/-j\,2\ \Omega) + (1/4\ \Omega)(1/j\,5\ \Omega)}$$

$$= \frac{-(+j\,0.5 - j\,0.2)6\angle 0° + 4\angle 0°(-j\,0.2)}{(1/-j\,8) + (1/10) + (1/j\,20)}$$

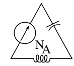
$$= \frac{(-0.3\angle 90°)(6\angle 0°) + (4\angle 0°)(0.2\angle -90°)}{j\,0.125 + 0.1 - j\,0.05}$$

$$= \frac{-1.8\angle 90° + 0.8\angle -90°}{0.1 + j\,0.075}$$

$$= \frac{2.6\text{ V}\angle -90°}{0.125\angle 36.87°}$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{20.80\ V\angle -126.87°}$$

Solución con Mathcad: En este ejemplo utilizaremos el formato de matriz para encontrar el voltaje nodal $\mathbf{V}_1$. Primero se definen los distintos parámetros de la red, incluyendo el factor **deg**, de manera que el ángulo de fase se presente en grados. Luego se define el numerador mediante **n**, y se selecciona el icono



Matrix de la barra de herramientas **Matrix**. Dentro del cuadro de diálogo **Insert Matrix**, renglones, **Rows**, y columnas, **Columns**, se establecen en 2 seguidos por **OK** para colocar una matriz de 2 × 2 en la pantalla. Luego se ingresan los parámetros como se muestra en la figura 17.32 utilizando un clic izquierdo del ratón para seleccionar el parámetro que se ingresará. Una vez que el denominador queda establecido, se repite el proceso para definir el denominador. Por último, se define la ecuación para **V1**, y cuando se seleccione el signo de igual aparecerá el resultado en forma rectangular. Luego se calculan la magnitud y el ángulo en forma polar como se describió en secciones previas de este capítulo. Los resultados nuevamente son una clara confirmación del resultado teórico.

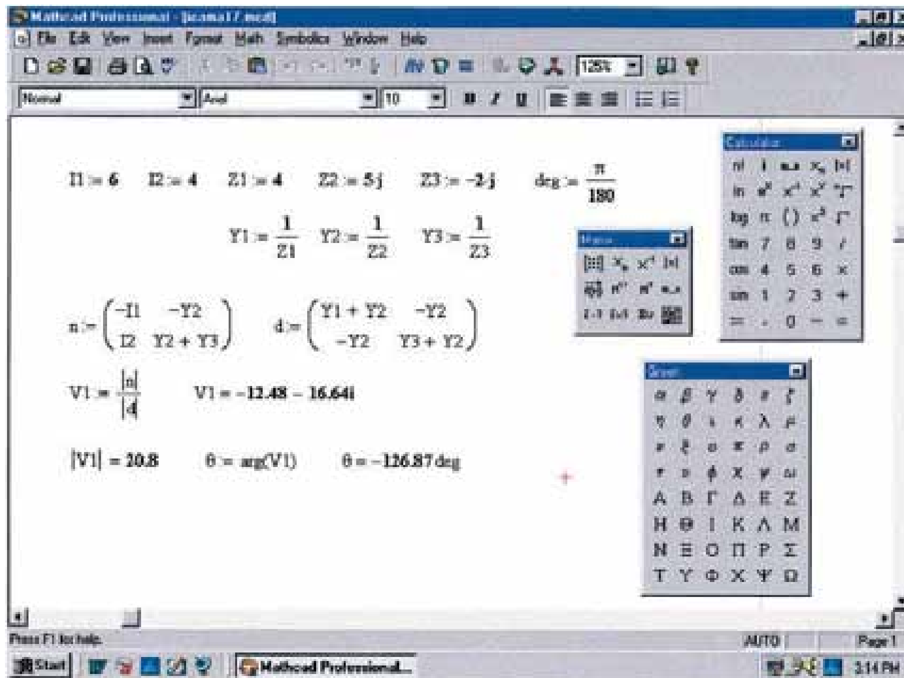


FIGURA 17.32
Utilización de Mathcad para verificar los resultados del ejemplo 17.16.

EJEMPLO 17.17 Utilizando el método de formato, escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 17.33.

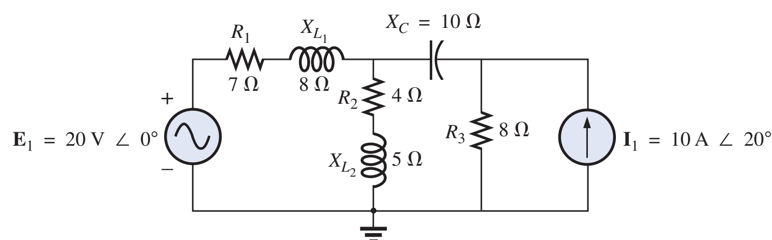
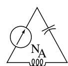


FIGURA 17.33
Ejemplo 17.17.



Solución: El circuito se vuelve a trazar en la figura 17.34, donde:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j X_{L_1} = 7\ \Omega + j\,8\ \Omega \qquad \mathbf{E}_1 = 20\ \text{V}\ \angle 0^\circ$$
$$\mathbf{Z}_2 = R_2 + j X_{L_2} = 4\ \Omega + j\,5\ \Omega \qquad \mathbf{I}_1 = 10\ \text{A}\ \angle 20^\circ$$
$$\mathbf{Z}_3 = -j X_C = -j\,10\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_4 = R_3 = 8\ \Omega$$

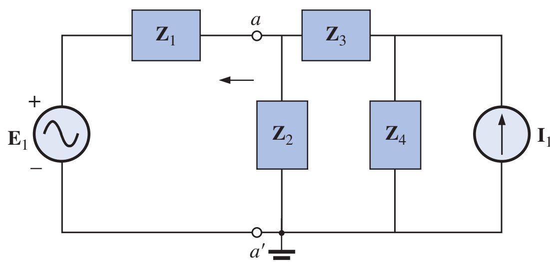


FIGURA 17.34
Asignación de las impedancias con subíndice para la red de la figura 17.33.

Al convertir la fuente de voltaje a una fuente de corriente y elegir los nodos, obtenemos la figura 17.35. Observe la apariencia "nítida" que presenta la red al utilizar las impedancias con subíndice. Trabajar de forma directa con la figura 17.33 sería más difícil y podría generar errores.

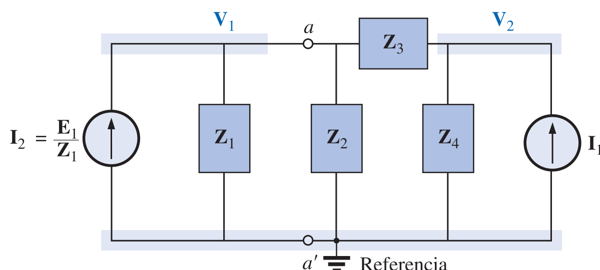


FIGURA 17.35
Conversión de la fuente de voltaje de la figura 17.34 a una fuente de corriente, y definición de los voltajes nodales.

Se escriben las ecuaciones nodales:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3) - \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_3) = +\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4) - \mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_3) = +\mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} \qquad \mathbf{Y}_2 = \frac{1}{\mathbf{Z}_2} \qquad \mathbf{Y}_3 = \frac{1}{\mathbf{Z}_3} \qquad \mathbf{Y}_4 = \frac{1}{\mathbf{Z}_4}$$

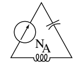
las cuales se vuelven a escribir como:

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3) - \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_3) = +\mathbf{I}_2$$
$$-\mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_3) + \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4) = +\mathbf{I}_1$$

EJEMPLO 17.18 Escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 17.36. No las resuelva.

Solución: Se eligen los nodos (Figura 17.37):

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 \qquad \mathbf{Z}_2 = j X_{L_1} \qquad \mathbf{Z}_3 = R_2 - j X_{C_2}$$
$$\mathbf{Z}_4 = -j X_{C_1} \qquad \mathbf{Z}_5 = R_3 \qquad \mathbf{Z}_6 = j X_{L_2}$$



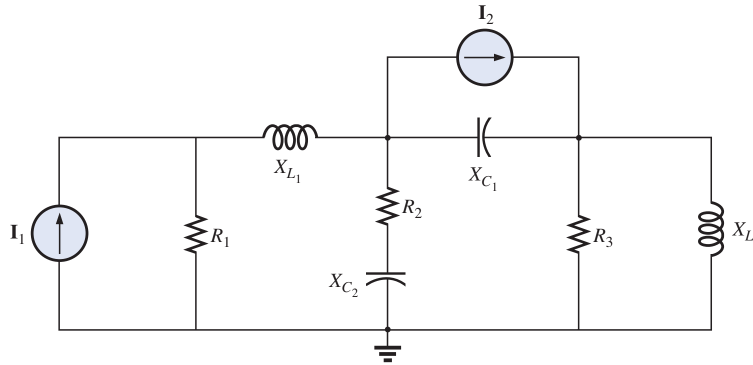


FIGURA 17.36
Ejemplo 17.18.

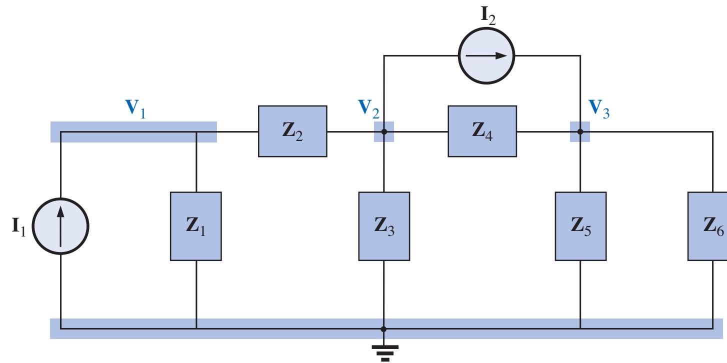


FIGURA 17.37
Asignación de los voltajes nodales y las impedancias con subíndice para la red de la figura 17.36.

y se escriben las ecuaciones nodales:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) - \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_2) &= +\mathbf{I}_1 \\
\mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4) - \mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_2) - \mathbf{V}_3(\mathbf{Y}_4) &= -\mathbf{I}_2 \\
\mathbf{V}_3(\mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_5 + \mathbf{Y}_6) - \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_4) &= +\mathbf{I}_2
\end{aligned}$$

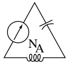
las cuales se vuelven a escribir como:

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) & - \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_2) & + 0 & = +\mathbf{I}_1 \\
-\mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_2) & + \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_4) & - \mathbf{V}_3(\mathbf{Y}_4) & = -\mathbf{I}_2 \\
0 & - \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_4) & + \mathbf{V}_3(\mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_5 + \mathbf{Y}_6) & = +\mathbf{I}_2
\end{array}$$

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{R_1} \qquad \mathbf{Y}_2 = \frac{1}{j\,X_{L_1}} \qquad \mathbf{Y}_3 = \frac{1}{R_2 - j\,X_{C_2}}$$

$$\mathbf{Y}_4 = \frac{1}{-j\,X_{C_1}} \qquad \mathbf{Y}_5 = \frac{1}{R_3} \qquad \mathbf{Y}_6 = \frac{1}{j\,X_{L_2}}$$

Observe la simetría sobre la diagonal para este ejemplo y para los que lo preceden en esta sección.



EJEMPLO 17.19 Aplique el análisis de nodos a la red de la figura 17.38. Determine el voltaje $\mathbf{V}_L$.

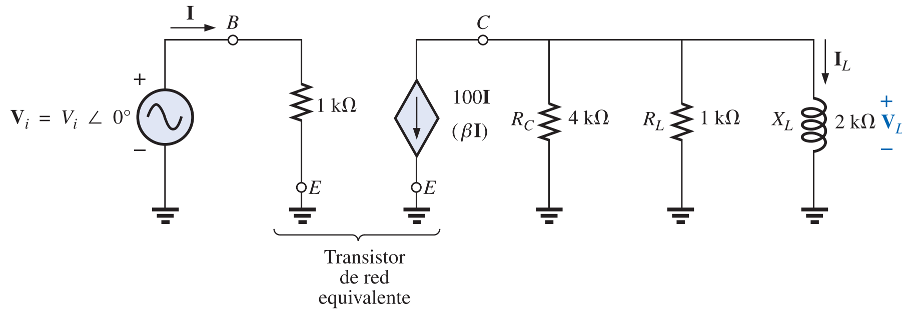


FIGURA 17.38
Ejemplo 17.19.

Solución: En este caso no hay necesidad de efectuar una conversión de fuente. La red se vuelve a trazar en la figura 17.39 con el voltaje nodal elegido y las impedancias con subíndice.

Al aplicar el método de formato:

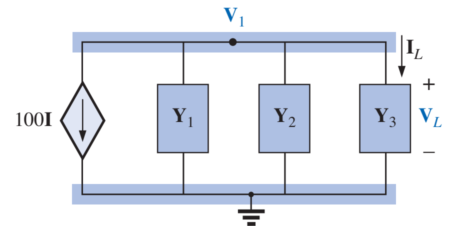


FIGURA 17.39
Asignación del voltaje nodal y de las impedancias con subíndice para la red de la figura 17.38.

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{1}{4\text{ k}\Omega} = 0.25\text{ mS}\angle 0° = G_1\angle 0°$$

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{1\text{ k}\Omega} = 1\text{ mS}\angle 0° = G_2\angle 0°$$

$$\mathbf{Y}_3 = \frac{1}{\mathbf{Z}_3} = \frac{1}{2\text{ k}\Omega\angle 90°} = 0.5\text{ mS}\angle -90°$$

$$= -j\,0.5\text{ mS} = -j\,B_L$$

$$\mathbf{V}_1:\quad (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_1 = -100\mathbf{I}$$

y

$$\mathbf{V}_1 = \frac{-100\mathbf{I}}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$$

$$= \frac{-100\mathbf{I}}{0.25\text{ mS} + 1\text{ mS} - j\,0.5\text{ mS}}$$

$$= \frac{-100 \times 10^3\mathbf{I}}{1.25 - j\,0.5} = \frac{-100 \times 10^3\mathbf{I}}{1.3463\angle -21.80°}$$

$$= -74.28 \times 10^3\mathbf{I}\angle 21.80°$$

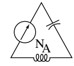
$$= -74.28 \times 10^3\left(\frac{\mathbf{V}_i}{1\text{ k}\Omega}\right)\angle 21.80°$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_L = \mathbf{-(74.28V_\mathit{i})\ V\angle 21.80°}$$

17.6 REDES PUENTE (ca)

La configuración de puente básico se analizó con cierto detalle en la sección 8.11 para las redes de cd. Ahora continuaremos el análisis de las **redes puente** mediante la consideración de aquellas redes que tienen componentes reactivos y un voltaje o una corriente senoidal de ca aplicados.

Primero analizaremos diversas formas conocidas de la red puente utilizando análisis de mallas y análisis de nodos (el método de formato). Las condiciones de balance se analizarán a lo largo de esta sección.



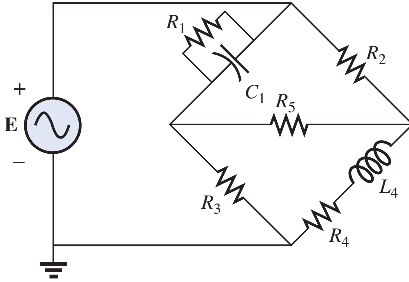


FIGURA 17.40
Puente de Maxwell.

En seguida se aplica el **análisis de mallas** a la red de la figura 17.40. La red se vuelve a trazar en la figura 17.41, donde:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{\mathbf{Y}_1} = \frac{1}{G_1 + j\,B_C} = \frac{G_1}{G_1^2 + B_C^2} - j\,\frac{B_C}{G_1^2 + B_C^2}$$

$$\mathbf{Z}_2 = R_2 \qquad \mathbf{Z}_3 = R_3 \qquad \mathbf{Z}_4 = R_4 + j\,X_L \qquad \mathbf{Z}_5 = R_5$$

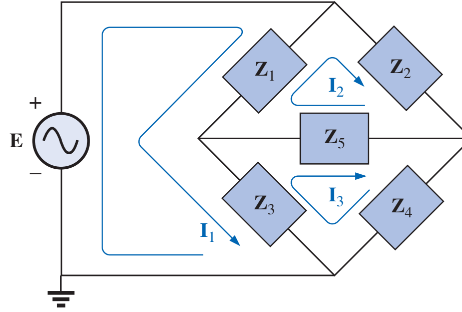


FIGURA 17.41
Asignación de las corrientes de malla y las impedancias con subíndice para la red de la figura 17.40.

Al aplicar el método de formato:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_1 - (\mathbf{Z}_1)\mathbf{I}_2 - (\mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_3 &= \mathbf{E} \\
(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_5)\mathbf{I}_2 - (\mathbf{Z}_1)\mathbf{I}_1 - (\mathbf{Z}_5)\mathbf{I}_3 &= 0 \\
(\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}_5)\mathbf{I}_3 - (\mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_1 - (\mathbf{Z}_5)\mathbf{I}_2 &= 0
\end{aligned}$$

las cuales se vuelven a escribir como:

$$\begin{array}{rrrl}
\mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3) & - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_1 & - \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_3 & = \mathbf{E} \\
-\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 & + \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_5) & - \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_5 & = 0 \\
-\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_3 & - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_5 & + \mathbf{I}_3(\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}_5) & = 0
\end{array}$$

Observe la simetría sobre la diagonal de las ecuaciones anteriores. Por balance, $\mathbf{I}_{\mathbf{Z}_5} = 0$ A, y

$$\mathbf{I}_{\mathbf{Z}_5} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 = 0$$

A partir de las ecuaciones anteriores,

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3 & \mathbf{E} & -\mathbf{Z}_3 \\ -\mathbf{Z}_1 & 0 & -\mathbf{Z}_5 \\ -\mathbf{Z}_3 & 0 & (\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}_5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_1 & -\mathbf{Z}_3 \\ -\mathbf{Z}_1 & (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_5) & -\mathbf{Z}_5 \\ -\mathbf{Z}_3 & -\mathbf{Z}_5 & (\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}_5) \end{vmatrix}}$$

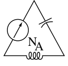
$$= \frac{\mathbf{E}(\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_5 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_5)}{\Delta}$$

donde Δ denota el determinante del denominador (o coeficientes). De manera similar,

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_5 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_5)}{\Delta}$$

e

$$\mathbf{I}_{\mathbf{Z}_5} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4 - \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_2)}{\Delta}$$



Para $\mathbf{I}_{\mathbf{Z}_5} = 0$, deberá satisfacerse lo siguiente para una Δ finita distinta de cero:

$$\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_2 \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{Z}_5} = 0 \qquad \textbf{(17.3)}$$

Esta condición se analizará con mayor detalle y profundidad más adelante en esta sección.

Aplicar el **análisis de nodos** a la red de la figura 17.42 resulta en la configuración de la figura 17.43, donde:

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{1}{R_1 - j X_C} \qquad \mathbf{Y}_2 = \frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{R_2}$$

$$\mathbf{Y}_3 = \frac{1}{\mathbf{Z}_3} = \frac{1}{R_3} \qquad \mathbf{Y}_4 = \frac{1}{\mathbf{Z}_4} = \frac{1}{R_4 + j X_L} \qquad \mathbf{Y}_5 = \frac{1}{R_5}$$

e

$$\begin{aligned}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)\mathbf{V}_1 - (\mathbf{Y}_1)\mathbf{V}_2 - (\mathbf{Y}_2)\mathbf{V}_3 &= \mathbf{I}\\ (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_5)\mathbf{V}_2 - (\mathbf{Y}_1)\mathbf{V}_1 - (\mathbf{Y}_5)\mathbf{V}_3 &= 0\\ (\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_5)\mathbf{V}_3 - (\mathbf{Y}_2)\mathbf{V}_1 - (\mathbf{Y}_5)\mathbf{V}_2 &= 0\end{aligned}$$

las cuales se vuelven a escribir como:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) - \mathbf{V}_2\mathbf{Y}_1 \qquad\qquad\qquad - \mathbf{V}_3\mathbf{Y}_2 &= \mathbf{I}\\ -\mathbf{V}_1\mathbf{Y}_1 \qquad + \mathbf{V}_2(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_5) - \mathbf{V}_3\mathbf{Y}_5 &= 0\\ -\mathbf{V}_1\mathbf{Y}_2 \qquad - \mathbf{V}_2\mathbf{Y}_5 \qquad + \mathbf{V}_3(\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_5) &= 0\end{aligned}$$

Nuevamente, observe la simetría sobre el eje diagonal. Por balance, $\mathbf{V}_{\mathbf{Z}_5} = 0$ V, y:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{Z}_5} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 = 0$$

De las ecuaciones anteriores,

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix}\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 & \mathbf{I} & -\mathbf{Y}_2\\ -\mathbf{Y}_1 & 0 & -\mathbf{Y}_5\\ -\mathbf{Y}_2 & 0 & (\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_5)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 & -\mathbf{Y}_1 & -\mathbf{Y}_2\\ -\mathbf{Y}_1 & (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_5) & -\mathbf{Y}_5\\ -\mathbf{Y}_2 & -\mathbf{Y}_5 & (\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_5)\end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\mathbf{I}(\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_5 + \mathbf{Y}_3\mathbf{Y}_5)}{\Delta}$$

De forma similar,

$$\mathbf{V}_3 = \frac{\mathbf{I}(\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_3\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_5 + \mathbf{Y}_3\mathbf{Y}_5)}{\Delta}$$

Observe las similitudes entre las ecuaciones anteriores y las obtenidas para el análisis de mallas. Entonces:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{Z}_5} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 = \frac{\mathbf{I}(\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_4 - \mathbf{Y}_3\mathbf{Y}_2)}{\Delta}$$

Para $\mathbf{V}_{\mathbf{Z}_5} = 0$, deberá satisfacerse lo siguiente para una Δ finita distinta de cero:

$$\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_3\mathbf{Y}_2 \qquad \mathbf{V}_{\mathbf{Z}_5} = 0 \qquad \textbf{(17.4)}$$

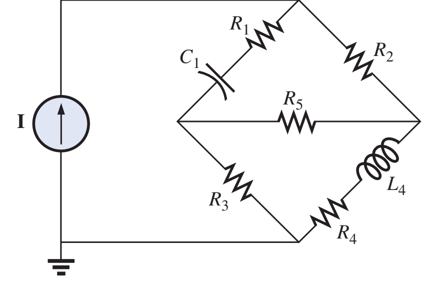


FIGURA 17.42
Puente Hay.

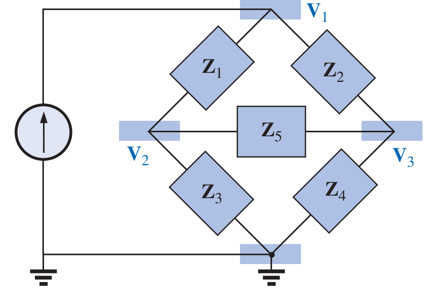


FIGURA 17.43
Asignación de los voltajes nodales y las impedancias con subíndice para la red de la figura 17.42.



Sin embargo, al sustituir $\mathbf{Y}_1 = 1/\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Y}_2 = 1/\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Y}_3 = 1/\mathbf{Z}_3$, e $\mathbf{Y}_4 = 1/\mathbf{Z}_4$, tenemos:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4} = \frac{1}{\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_2}$$

o bien: $$\boxed{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_2} \qquad \mathbf{V}_{\mathbf{Z}_5} = 0$$

correspondiendo con la ecuación (17.3) obtenida anteriormente.

Ahora analicemos el criterio de balance con mayor detalle mediante la consideración de la red que aparece en la figura 17.44, donde se especifica que **I** y **V** = 0.

Dado que **I** = 0,

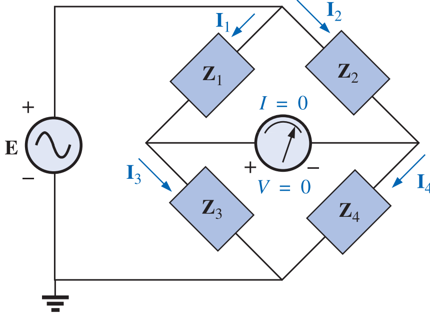


FIGURA 17.44
Análisis del criterio de balance para una configuración puente de ca.

$$\boxed{\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_3} \tag{17.5a}$$

e $$\boxed{\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_4} \tag{17.5b}$$

Además, para **V** = 0,

$$\boxed{\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 = \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2} \tag{17.5c}$$

e $$\boxed{\mathbf{I}_3\mathbf{Z}_3 = \mathbf{I}_4\mathbf{Z}_4} \tag{17.5d}$$

Al sustituir las relaciones de corriente anteriores en la ecuación (17.5d) tenemos:

$$\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_3 = \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_4$$

e $$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_4}\mathbf{I}_1$$

Al sustituir esta relación para $\mathbf{I}_2$ en la ecuación (17.5c) resulta:

$$\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 = \left(\frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_4}\mathbf{I}_1\right)\mathbf{Z}_2$$

y $$\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3$$

como se obtuvo anteriormente. Al reagrupar términos tenemos:

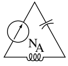
$$\boxed{\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_3} = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_4}} \tag{17.6}$$

correspondiendo con la ecuación (8.4) para redes resistivas de cd.

Para la red de la figura 17.42, que se denomina **puente Hay** cuando $\mathbf{Z}_5$ se reemplaza por un galvanómetro sensible,

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 - j\,X_C$$
$$\mathbf{Z}_2 = R_2$$
$$\mathbf{Z}_3 = R_3$$
$$\mathbf{Z}_4 = R_4 + j\,X_L$$

Esta detallada red se utiliza para medir la resistencia y la inductancia de bobinas en las que la resistencia es una pequeña fracción de la reactancia X_L.



Al sustituir en la ecuación (17.6) de la siguiente manera:

$$\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_4\mathbf{Z}_1$$
$$R_2R_3 = (R_4 + j\,X_L)(R_1 - j\,X_C)$$

o bien: $$R_2R_3 = R_1R_4 + j\,(R_1X_L - R_4X_C) + X_C\,X_L$$

de manera que:

$$R_2R_3 + j\,0 = (R_1R_4 + X_C\,X_L) + j\,(R_1X_L - R_4X_C)$$

Para que las ecuaciones sean iguales, *las partes real e imaginaria deben ser iguales*. Por tanto, para un puente Hay balanceado,

$$\boxed{R_2R_3 = R_1R_4 + X_C\,X_L} \qquad \textbf{(17.7a)}$$

y $$\boxed{0 = R_1X_L - R_4X_C} \qquad \textbf{(17.7b)}$$

o al sustituir: $$X_L = \omega L \quad \text{y} \quad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

tenemos: $$X_C X_L = \left(\frac{1}{\omega C}\right)(\omega L) = \frac{L}{C}$$

y $$R_2R_3 = R_1R_4 + \frac{L}{C}$$

con: $$R_1\omega L = \frac{R_4}{\omega C}$$

Al resolver para R_4 en la última ecuación resulta:

$$R_4 = \omega^2 LCR_1$$

y al sustituir en la ecuación previa tenemos:

$$R_2R_3 = R_1(\omega^2 LCR_1) + \frac{L}{C}$$

Multiplicando por C y factorizando:

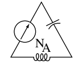
$$CR_2R_3 = L(\omega^2C^2R_1^2 + 1)$$

y $$\boxed{L = \frac{CR_2R_3}{1 + \omega^2C^2R_1^2}} \qquad \textbf{(17.8a)}$$

Con álgebra adicional esto genera:

$$\boxed{R_4 = \frac{\omega^2C^2R_1R_2R_3}{1 + \omega^2C^2R_1^2}} \qquad \textbf{(17.8b)}$$

Las ecuaciones (17.7) y (17.8) son las condiciones de balance para el puente Hay. Observe que cada una es dependiente de la frecuencia. Para frecuencias diferentes, los elementos resistivos y capacitivos deberán variar en una bobina en particular para lograr el balance. Para una bobina colocada en el puente Hay como se muestra en la figura 17.42, la resistencia y la inductancia podrán determinarse mediante las ecuaciones (17.8a) y (17.8b) cuando se logre el balance.



El puente de la figura 17.40 se denomina **puente Maxwell** cuando $\mathbf{Z}_5$ se reemplaza por un galvanómetro sensible. Esta configuración se utiliza para mediciones de inductancia cuando la resistencia de la bobina es lo suficientemente grande como para no requerir un puente Hay.

Al aplicar la ecuación (17.6) en la forma:

$$\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_4\mathbf{Z}_1$$

y al sustituir:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 \angle 0° \parallel X_{C_1} \angle -90° = \frac{(R_1 \angle 0°)(X_{C_1} \angle -90°)}{R_1 - j X_{C_1}}$$

$$= \frac{R_1 X_{C_1} \angle -90°}{R_1 - j X_{C_1}} = \frac{-j R_1 X_{C_1}}{R_1 - j X_{C_1}}$$

$$\mathbf{Z}_2 = R_2$$

$$\mathbf{Z}_3 = R_3$$

y $$\mathbf{Z}_4 = R_4 + j X_{L_4}$$

tenemos: $$(R_2)(R_3) = (R_4 + j X_{L_4})\left(\frac{-j R_1 X_{C_1}}{R_1 - j X_{C_1}}\right)$$

$$R_2 R_3 = \frac{-j R_1 R_4 X_{C_1} + R_1 X_{C_1} X_{L_4}}{R_1 - j X_{C_1}}$$

o bien: $$(R_2 R_3)(R_1 - j X_{C_1}) = R_1 X_{C_1} X_{L_4} - j R_1 R_4 X_{C_1}$$

y $$R_1 R_2 R_3 - j R_2 R_3 X_{C_1} = R_1 X_{C_1} X_{L_4} - j R_1 R_4 X_{C_1}$$

por lo que para el balance:

$$\cancel{R_1} R_2 R_3 = \cancel{R_1} X_{C_1} X_{L_4}$$

$$R_2 R_3 = \left(\frac{1}{\cancel{2\pi} f C_1}\right)(\cancel{2\pi} f L_4)$$

y $$L_4 = C_1 R_2 R_3 \tag{17.9}$$

y $$R_2 R_3 \cancel{X_{C_1}} = R_1 R_4 \cancel{X_{C_1}}$$

por lo que: $$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \tag{17.10}$$

Observe la ausencia de frecuencia en las ecuaciones (17.9) y (17.10).

Un puente restante que es popular se denomina **puente de comparación de capacitancia** y aparece en la figura 17.45. Mediante su uso es posible determinar una capacitancia desconocida así como su resistencia asociada. Aplicar la ecuación (17.6) producirá los siguientes resultados:

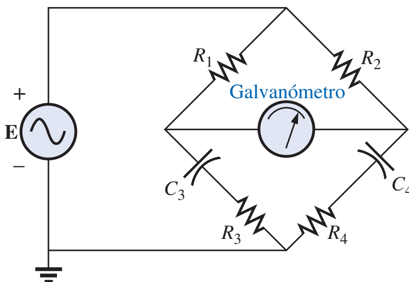


FIGURA 17.45
Puente de comparación de capacitancia.

$$C_4 = C_3 \frac{R_1}{R_2} \tag{17.11}$$

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \tag{17.12}$$

La obtención de estas ecuaciones se presentará en forma de problema al final del capítulo.



17.7 CONVERSIONES Δ-Y, Y-Δ

Las conversiones Δ-Y, Y-Δ (o π-T, T-π como fueron definidas en la sección 8.12) para los circuitos de ca no se obtendrán aquí dado que su desarrollo corresponde exactamente con el de los circuitos de cd. Al tomar la **configuración Δ-Y** que se muestra en la figura 17.46, encontramos las ecuaciones generales para las impedancias de la Y en términos de las impedancias de la Δ:

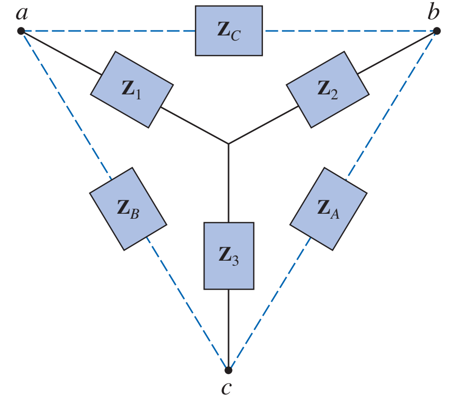


FIGURA 17.46
Configuración Δ-Y.

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \qquad \textbf{(17.13)}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \qquad \textbf{(17.14)}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} \qquad \textbf{(17.15)}$$

Para las impedancias de la Δ en términos de las impedancias de la Y, las ecuaciones son:

$$\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2} \qquad \textbf{(17.16)}$$

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1} \qquad \textbf{(17.17)}$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_3} \qquad \textbf{(17.18)}$$

Observe que cada impedancia de la Y es igual al producto de las impedancias en las dos ramas más cercanas de la Δ, divididas entre la suma de las impedancias en la Δ.

Adicionalmente, el valor de cada impedancia de la Δ será igual a la suma de las posibles combinaciones de productos de las impedancias de la Y, dividida entre la impedancia de la Y más alejada de la impedancia que se determinará.

Al trazarlas en formas diferentes (Figura 17.47), también se denominan configuraciones T y π.

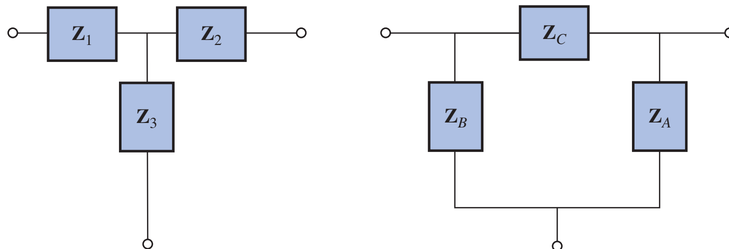
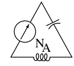


FIGURA 17.47
Configuraciones T y π.



En el estudio de redes de cd encontramos que si todos los resistores de una Δ o de una Y eran iguales, la conversión de una configuración a otra podría lograrse utilizando la ecuación:

$$R_\Delta = 3R_Y \quad \text{o} \quad R_Y = \frac{R_\Delta}{3}$$

Para redes de ca,

$$\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y \quad \text{o} \quad \mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} \tag{17.19}$$

Debe tenerse cuidado al utilizar esta forma simplificada. No es suficiente con que todas las impedancias de la Δ o de la Y sean de la misma magnitud: *el ángulo asociado con cada una también deberá ser el mismo.*

EJEMPLO 17.20 Encuentre la impedancia total $\mathbf{Z}_T$ de la red de la figura 17.48.

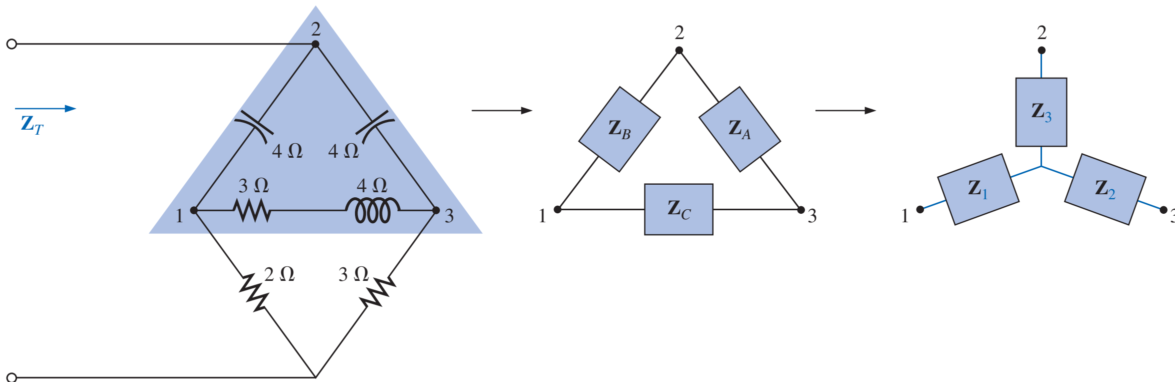


FIGURA 17.48
Conversión de la Δ superior de una configuración de puente a una Y.

Solución:

$$\mathbf{Z}_B = -j\,4 \qquad \mathbf{Z}_A = -j\,4 \qquad \mathbf{Z}_C = 3 + j\,4$$

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(-j\,4\ \Omega)(3\ \Omega + j\,4\ \Omega)}{(-j\,4\ \Omega) + (-j\,4\ \Omega) + (3\ \Omega + j\,4\ \Omega)}$$

$$= \frac{(4\ \angle -90^\circ)(5\ \angle 53.13^\circ)}{3 - j\,4} = \frac{20\ \angle -36.87^\circ}{5\ \angle -53.13^\circ}$$

$$= 4\ \Omega\ \angle 16.13^\circ = 3.84\ \Omega + j\,1.11\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(-j\,4\ \Omega)(3\ \Omega + j\,4\ \Omega)}{5\ \Omega\ \angle -53.13^\circ}$$

$$= 4\ \Omega\ \angle 16.13^\circ = 3.84\ \Omega + j\,1.11\ \Omega$$

Recuerde del estudio de los circuitos de cd que si dos ramas de la Y o de la Δ eran iguales, la Δ o Y, correspondientes, respectivamente, también tendrían dos ramas iguales. En este ejemplo, $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B$. Por tanto, $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2$, y



$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A + \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_C} = \frac{(-j\,4\ \Omega)(-j\,4\ \Omega)}{5\ \Omega\ \angle -53.13^\circ}$$

$$= \frac{16\ \Omega\ \angle -180^\circ}{5\ \angle -53.13^\circ} = 3.2\ \Omega\ \angle -126.87^\circ = -1.92\ \Omega - j\,2.56\ \Omega$$

Al reemplazar la Δ por la Y (Figura 17.49):

$$\mathbf{Z}_1 = 3.84\ \Omega + j\,1.11\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_2 = 3.84\ \Omega + j\,1.11\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_3 = -1.92\ \Omega - j\,2.56\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_4 = 2\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_5 = 3\ \Omega$$

Las impedancias Z_1 y Z_4 están en serie:

$$\mathbf{Z}_{T_1} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4 = 3.84\ \Omega + j\,1.11\ \Omega + 2\ \Omega = 5.84\ \Omega + j\,1.11\ \Omega$$
$$= 5.94\ \Omega\ \angle 10.76^\circ$$

Las impedancias $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_5$ están en serie:

$$\mathbf{Z}_{T_2} = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_5 = 3.84\ \Omega + j\,1.11\ \Omega + 3\ \Omega = 6.84\ \Omega + j\,1.11\ \Omega$$
$$= 6.93\ \Omega\ \angle 9.22^\circ$$

Las impedancias $\mathbf{Z}_{T_1}$ y $\mathbf{Z}_{T_2}$ están en paralelo:

$$\mathbf{Z}_{T_3} = \frac{\mathbf{Z}_{T_1}\mathbf{Z}_{T_2}}{\mathbf{Z}_{T_1} + \mathbf{Z}_{T_2}} = \frac{(5.94\ \Omega\ \angle 10.76^\circ)(6.93\ \Omega\ \angle 9.22^\circ)}{5.84\ \Omega + j\,1.11\ \Omega + 6.84\ \Omega + j\,1.11\ \Omega}$$

$$= \frac{41.16\ \Omega\ \angle 19.98^\circ}{12.68 + j\,2.22} = \frac{41.16\ \Omega\ \angle 19.98^\circ}{12.87\ \angle 9.93^\circ} = 3.198\ \Omega\ \angle 10.05^\circ$$

$$= 3.15\ \Omega + j\,0.56\ \Omega$$

Las impedancias $\mathbf{Z}_3$ y $\mathbf{Z}_{T_3}$ están en serie. Por tanto,

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_{T_3} = -1.92\ \Omega - j\,2.56\ \Omega + 3.15\ \Omega + j\,0.56\ \Omega$$
$$= 1.23\ \Omega - j\,2.0\ \Omega = \mathbf{2.35\ \Omega\ \angle -58.41^\circ}$$

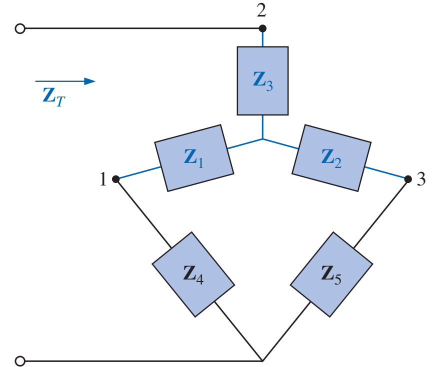


FIGURA 17.49
Red de la figura 17.48 posterior a la sustitución de la configuración en Y.

EJEMPLO 17.21 Utilizando las transformaciones Δ-Y e Y-Δ encuentre la impedancia total $\mathbf{Z}_T$ para la red de la figura 17.50.

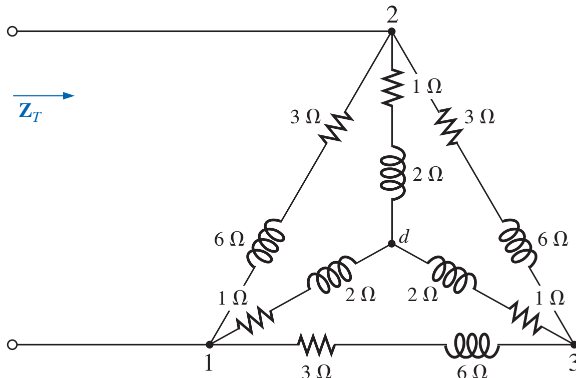
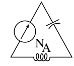


FIGURA 17.50
Ejemplo 17.21.



Solución: *Utilizando la transformación Δ-Y,* se obtiene la figura 17.51. En este caso, dado que ambos sistemas están balanceados (la misma impedancia en cada rama), el punto central *d'* de la Δ transformada será el mismo que el punto *d* de la Y original:

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} = \frac{3\ \Omega + j\,6\ \Omega}{3} = 1\ \Omega + j\,2\ \Omega$$

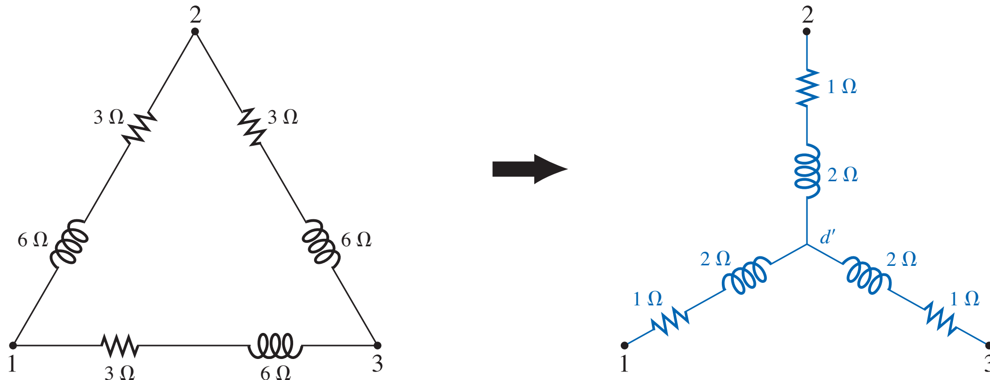


FIGURA 17.51
Conversión de una configuración Δ a una configuración Y.

y (Figura 17.52)

$$\mathbf{Z}_T = 2\left(\frac{1\ \Omega + j\,2\ \Omega}{2}\right) = \mathbf{1\ \Omega + \mathit{j}\,2\ \Omega}$$

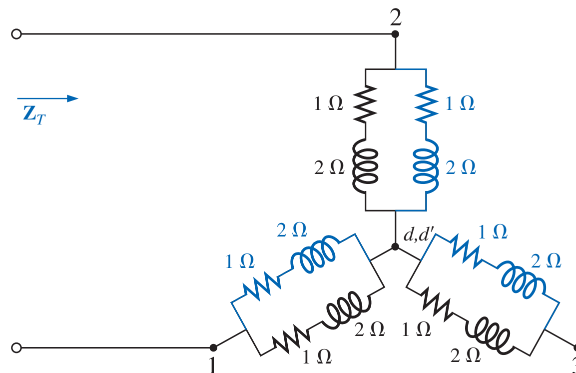


FIGURA 17.52
Sustitución de la configuración Y de la figura 17.51 en la red de la figura 17.50.

Utilizando la transformación Y-Δ (Figura 17.53) obtenemos:

$$\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y = 3(1\ \Omega + j\,2\ \Omega) = 3\ \Omega + j\,6\ \Omega$$

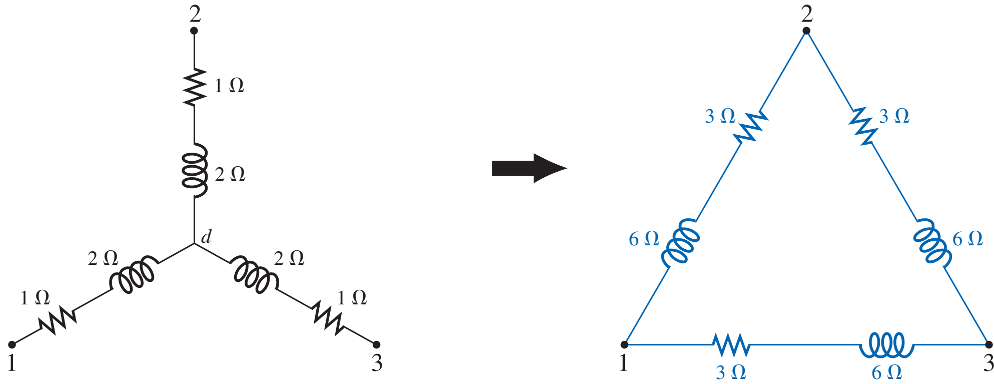


FIGURA 17.53
Conversión de la configuración Y de la figura 17.50 a una Δ.

Cada combinación en paralelo resultante en la figura 17.54 tendrá la siguiente impedancia:

$$\mathbf{Z}' = \frac{3\ \Omega + j\,6\ \Omega}{2} = 1.5\ \Omega + j\,3\ \Omega$$

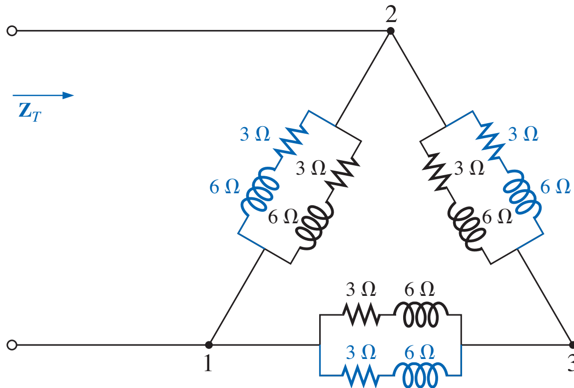


FIGURA 17.54
Sustitución de la configuración Δ de la figura 17.53 en la red de la figura 17.50.

y

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{Z}'(2\mathbf{Z}')}{\mathbf{Z}' + 2\mathbf{Z}'} = \frac{2(\mathbf{Z}')^2}{3\mathbf{Z}'} = \frac{2\mathbf{Z}'}{3}$$

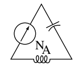
$$= \frac{2(1.5\ \Omega + j\,3\ \Omega)}{3} = \mathbf{1\ \Omega + \mathit{j}\,2\ \Omega}$$

lo cual equivale al resultado anterior.

17.8 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Análisis de nodos La primera aplicación de PSpice será para determinar los voltajes nodales de la red del ejemplo 17.16 y comparar resultados. La red se presentará como se muestra en la figura 17.55 utilizando elementos que se



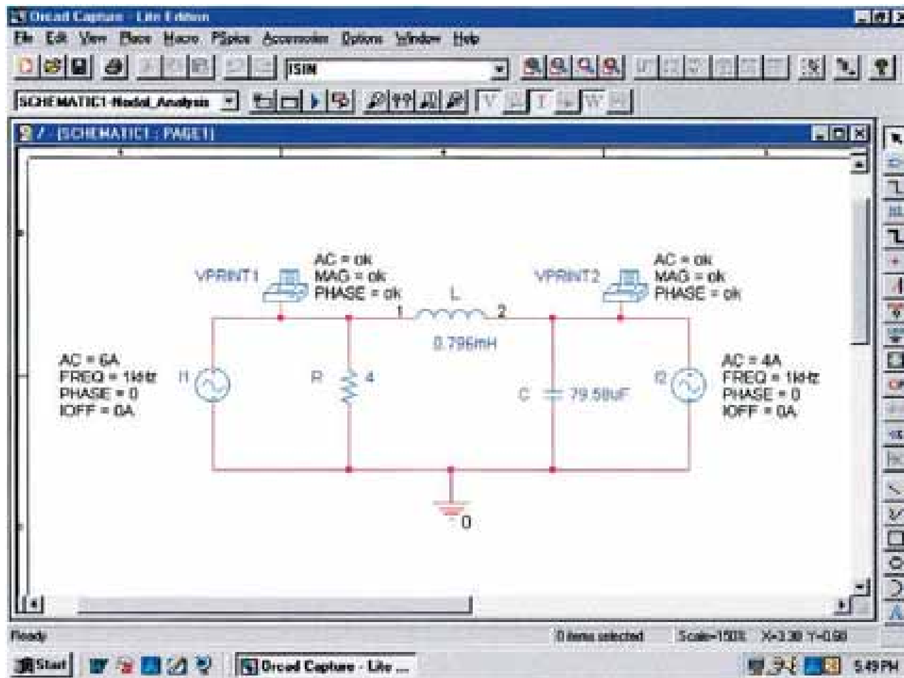
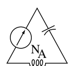


FIGURA 17.55
Utilización de PSpice para verificar los resultados del ejemplo 17.16.

determinaron a partir del valor de reactancia a una frecuencia de 1 kHz. No hay necesidad de utilizar continuamente 1 kHz. Cualquier frecuencia lo permitirá, pero recuerde utilizar la frecuencia elegida para calcular los componentes de red y cuando se configure la simulación.

En las fuentes de corriente, se eligió **ISIN** para que el ángulo de fase pueda especificarse (aunque sea igual a 0°), a pesar de que el símbolo no tiene la flecha utilizada en el material del libro. La dirección deberá reconocerse como apuntando desde el signo + hacia el − de la fuente. Esto requiere que las fuentes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ se establezcan como en la figura 17.55. La fuente $\mathbf{I}_2$ se invierte utilizando la opción **Mirror Vertically** que se obtiene al hacer clic derecho sobre el símbolo de la fuente en la pantalla. La configuración de la fuente **ISIN** es la misma que la empleada con la fuente **VSIN**; puede encontrarse bajo la biblioteca **SOURCE** y sus atributos son los mismos que los de la fuente **VSIN**. Para cada fuente, **IOFF** se establece en 0 A, y la amplitud será el valor pico de la corriente de fuente. La frecuencia será la misma para cada fuente. Luego se selecciona **VPRINT1** de la biblioteca **SPECIAL** y se ubica para generar los voltajes nodales deseados. Por último, se añaden los elementos restantes a la red como se muestra en la figura 17.55. Para cada fuente se da un doble clic sobre el símbolo para generar el cuadro de diálogo del editor de propiedades, **Property Editor**. **AC** se establece en el nivel de 6 A para la fuente $\mathbf{I}_1$ y a 4 A para la fuente $\mathbf{I}_2$, seguido por **Display** y **Name and Value** para cada una; aparecerá como se muestra en la figura 17.55. Un clic doble sobre cada opción **VPRINT1** también proporciona **Property Editor** para que **OK** pueda añadirse bajo **AC**, **MAG** y **PHASE**. Por cada cantidad, se selecciona **Display** seguido por **Name and Value** y **OK**. Luego se elige **Value** y se despliega **VPRINT1** solamente como **Value**. Al seleccionar **Apply** y abandonar el cuadro de diálogo se obtendrá el listado junto a cada fuente de la figura 17.55. Para **VPRINT2** primero deberá cambiarse el listado sobre **Value** de **VPRINT1** a **VPRINT2,** antes de seleccionar **Display** y **Apply**.

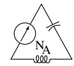


Ahora se selecciona el icono **New Simulation Profile** y se ingresa **ACNodal** como el nombre, **Name**, seguido por **Create**. En el cuadro de diálogo **Simulation Settings** se selecciona **AC Sweep**, y las frecuencias inicial y final, **Start Frequency** y **End Frequency**, se establecen en 1 kHz con un valor de 1 para **Points/Decade**. Haga clic en **OK** y elija el icono **Run PSpice**, con éste obtendrá la pantalla de **SCHEMATIC1** que, al abandonarla **(X)**, lo regresará a la ventana **Orcad Capture**. Elegir **PSpice** seguido por **View Output File** resulta en la pantalla de la figura 17.56, proporcionando exactamente los mismos resultados obtenidos en el ejemplo 17.16 con $\mathbf{V}_1 = 20.8 \text{ V} \angle -126.9°$. El otro voltaje nodal es $8.617 \text{ V} \angle -15.09°$.

```
 79:
 80:  ** Profile: "SCHEMATIC1-Nodal_Analysis"  [ C:\PSpice\nodal_analysis-SCHEMATIC1-N
     odal_Analysis.sim ]
 81:
 82:
 83:  ****     AC ANALYSIS                        TEMPERATURE =   27.000 DEG C
 84:
 85:
 86: ******************************************************************************
 87:
 88:
 89:
 90:   FREQ        VM(N01310)  VP(N01310)
 91:
 92:
 93:    1.000E+03   2.080E+01  -1.269E+02
 94:
 95: **** 07/16/01 17:40:22 ************* PSpice Lite (Mar 2000) ****************
 96:
 97:  ** Profile: "SCHEMATIC1-Nodal_Analysis"  [ C:\PSpice\nodal_analysis-SCHEMATIC1-N
     odal_Analysis.sim ]
 98:
 99:
100:  ****     AC ANALYSIS                        TEMPERATURE =   27.000 DEG C
101:
102:
103: ******************************************************************************
104:
105:
106:
107:   FREQ        VM(N01383)  VP(N01383)
108:
109:
110:    1.000E+03   8.617E+00  -1.509E+01
111:
```

FIGURA 17.56
Archivo de salida para los voltajes nodales de la red de la figura 17.55.

Fuente de corriente controlada por corriente (CCCS) Nuestro interés se volverá ahora hacia las fuentes controladas en el ambiente de PSpice. Las fuentes controladas no son particularmente difíciles de aplicar una vez que se han comprendido algunos elementos importantes de su uso. La red de la figura 17.14 tiene una fuente de corriente controlada por corriente en el tramo central de la configuración. La magnitud de la fuente de corriente es k veces la corriente a través del resistor R_1, donde k puede ser mayor o menor que 1. El esquema resultante, que se muestra en la figura 17.57, parece bastante complejo en el área de la fuente controlada, pero una vez que se comprende el papel de cada componente, no será difícil de entender. Primero, dado que es el único componente nuevo en el esquema, nos concentraremos en la fuente controlada. Las fuentes de corriente controladas por corriente (CCCS en las aplicaciones de cómputo en este libro) se obtienen bajo la biblioteca **ANALOG** como **F**, y



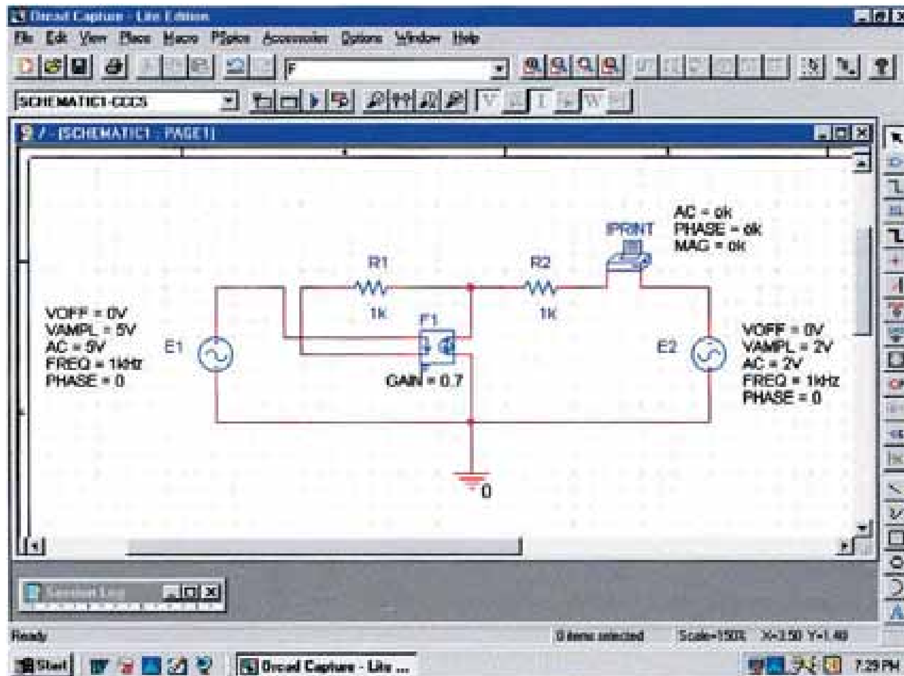
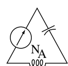


FIGURA 17.57
Utilización de PSpice para verificar los resultados del ejemplo 17.8.

aparecen como se muestra en el centro de la figura 17.57. Observe de manera especial la dirección de la corriente en cada parte del símbolo. En particular, advierta que la corriente a través del sensor de **F** tiene la misma dirección que la corriente de control de definición de la figura 17.14. Además, observe que la fuente de corriente controlada tiene también la misma dirección que la fuente de la figura 17.14. Si hacemos doble clic sobre el símbolo de la CCCS, aparecerá el cuadro de diálogo del editor de propiedades, **Property Editor**, con la ganancia, **GAIN**, (k según se describió) establecida en 1. En este ejemplo, la ganancia deberá establecerse en **0.7**, así que se da un clic sobre la región inferior de la etiqueta **GAIN** y se ingresa **0.7**. Seleccione entonces **Display** seguido por **Name and Value-OK**. Salga de **Property Editor** y aparecerá **GAIN = 0.7** con la fuente de corriente controlada por corriente como se muestra en la figura 17.57.

El otro componente nuevo en este esquema es **IPRINT**; el cual puede localizarse en la biblioteca **SPECIAL**. Se utiliza para indicarle al programa que liste la corriente en la rama de interés en el archivo de salida. Si el usuario no le indica al programa la información de salida que desea, simplemente se ejecutará la simulación y se presentarán características específicas de la red, pero no se proporcionará voltaje ni corriente alguna. En este caso, se desea conocer la corriente $\mathbf{I}_2$ a través del resistor R_2. Haga doble clic sobre el componente **IPRINT** para obtener el cuadro de diálogo **Property Editor** con varios elementos que necesitan ser definidos —de forma muy similar a la utilizada para **VPRINT**—. Primero ingrese **OK** debajo de **AC** y prosiga con **Display-Name and Value-OK**. Repita para **MAG** y **PHASE**, y luego seleccione **Apply** antes de salir del cuadro de diálogo. **OK** solamente está diseñado para indicarle al programa que ésas son las cantidades “aprobadas” para que se generen y sean proporcionadas. El propósito de **Apply** al final de cada acceso



a **Property Editor** es "aplicar" los cambios realizados a la red bajo análisis. Cuando se salga de **Property Editor**, los tres parámetros seleccionados aparecerán en el esquema con la directriz **OK**. El lector verá que las etiquetas aparecerán sobre el símbolo de **IPRINT**. No hay problema, sólo haga clic sobre cada una y muévala hacia una ubicación más conveniente.

Los componentes restantes de la red ya deberán resultar familiares, pero no se olvide aplicar la opción **Mirror Vertically** a la fuente de voltaje **E2**. Además, tampoco deberá olvidarse llamar a la pantalla el editor de propiedades, **Property Editor**, por cada fuente y establecer el valor de **AC**, **FREQ**, **VAMPL** y **VOFF**, y asegurarse de que **PHASE** esté establecido en el valor predeterminado de 0°. El valor aparece con cada parámetro en la figura 17.57 para cada fuente. Siempre asegúrese de seleccionar **Apply** antes de salir de **Property Editor**. Una vez colocados todos los componentes en la pantalla, deberán conectarse con la opción **Place wire**. Normalmente, esto es bastante directo; sin embargo, con las fuentes controladas a menudo es necesario cruzar cables **sin** hacer una conexión. En general, cuando coloque un cable sobre otro y no desee que se realice una conexión, haga clic sobre un punto en un extremo del cable que se cruzará para crear un cuadro rojo temporal. Luego cruce el cable, y haga otro clic para establecer otro cuadro rojo. Si la conexión se realiza de manera adecuada, el cable cruzado no deberá mostrar un punto de conexión (un pequeño punto rojo). En este ejemplo la parte superior de la corriente de control se conectó primero desde la fuente **E1**. Luego se conectó un cable desde el extremo inferior del sensor de corriente hasta el punto donde se efectuó un giro de 90° hacia la página. El cable fue ubicado mediante un clic en este punto antes de cruzar el cable original, y nuevamente se hizo clic antes de la vuelta derecha al resistor R_1. Con esto no se verá un pequeño punto rojo donde cruza el cable.

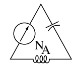
Ahora para la simulación. En el cuadro de diálogo **Simulation Settings**, seleccione **AC Sweep/Noise** con frecuencia inicial y final, **Start** y **End Frequency**, de 1 kHz. Con 1 en **Point/Decade**. Haga clic en **OK** y seleccione la tecla **Run Spice**; esto resultará en el esquema **SCHEMATIC1** del que deberá salir para obtener la ventana **Orcad Capture**. Seleccione **PSpice** seguido por **View Output File** y avance hacia abajo hasta que lea **AC ANALYSIS** tal como aparece en la figura 17.58. La magnitud de la corriente deseada es de 1.615 mA con un ángulo de fase de 0°, lo cual coincide con exactitud con el análisis teórico que sigue. Se esperaba un ángulo de fase de 0° debido a que la red está compuesta solamente por elementos resistivos.

Las ecuaciones obtenidas en los inicios de este capítulo utilizando el método de supermalla fueron:

$$\mathbf{E} - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 + \mathbf{E}_2 = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 + \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

```
 87:
 88:  ** Profile: "SCHEMATIC1-CCCS"  [ C:\PSpice\cccs-SCHEMATIC1-CCCS.sim ]
 89:
 90:
 91:  ****     AC ANALYSIS                      TEMPERATURE =   27.000 DEG C
 92:
 93:
 94: ******************************************************************************
 95:
 96:
 97:
 98:   FREQ        IM(V_PRINT1)IP(V_PRINT1)
 99:
100:
101:    1.000E+03   1.615E-03   0.000E+00
102:
```

FIGURA 17.58
Archivo de salida para la corriente de malla $\mathbf{I}_2$ *de la figura 17.14.*



y $$k\mathbf{I} = k\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$$

dando por resultado: $$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{I}_2}{1-k} = \frac{\mathbf{I}_2}{1-0.7} = \frac{\mathbf{I}_2}{0.3} = 3.333\mathbf{I}_2$$

de manera que: $\mathbf{I}_1(1\ \text{k}\Omega) + \mathbf{I}_2(1\ \text{k}\Omega) = 7\ \text{V}$ (desde arriba)

se convierte en: $(3.333\mathbf{I}_2)1\ \text{k}\Omega + \mathbf{I}_2(1\ \text{k}\Omega) = 7\ \text{V}$

o bien: $(4.333\ \text{k}\Omega)\mathbf{I}_2 = 7\ \text{V}$

e $$\mathbf{I}_2 = \frac{7\ \text{V}}{4.333\ \text{k}\Omega} = \mathbf{1.615\ mA\ \angle 0^\circ}$$

lo que confirma la solución por computadora.

PROBLEMAS

SECCIÓN 17.2 Fuentes independientes contra fuentes dependientes (controladas)

1. Explique, con sus propias palabras, la diferencia entre una fuente controlada y una fuente independiente.

SECCIÓN 17.3 Conversiones de fuente

2. Convierta las fuentes de voltaje de la figura 17.59 a fuentes de corriente.

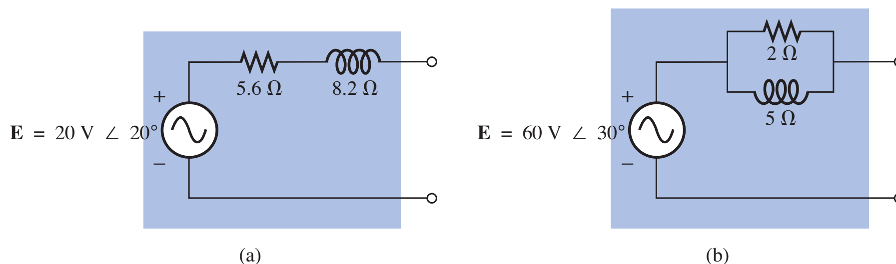


FIGURA 17.59
Problema 2.

3. Convierta las fuentes de corriente de la figura 17.60 a fuentes de voltaje.

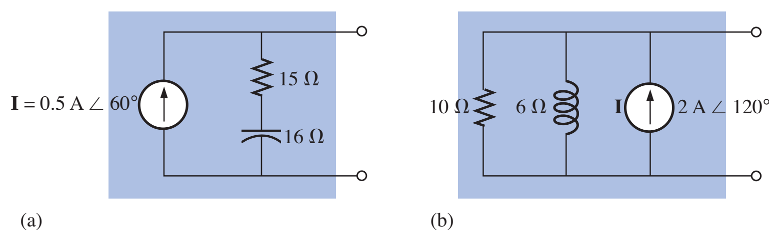
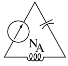


FIGURA 17.60
Problema 3.



4. Convierta la fuente de voltaje de la figura 17.61(a) a una fuente de corriente, y la fuente de corriente de la figura 17.61(b) a una fuente de voltaje.

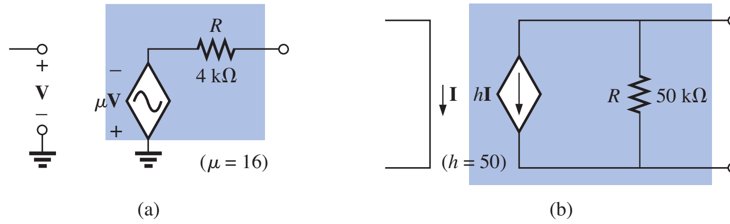


FIGURA 17.61
Problema 4.

SECCIÓN 17.4 Análisis de mallas

5. Escriba las ecuaciones de malla para las redes de la figura 17.62. Determine la corriente a través del resistor R.

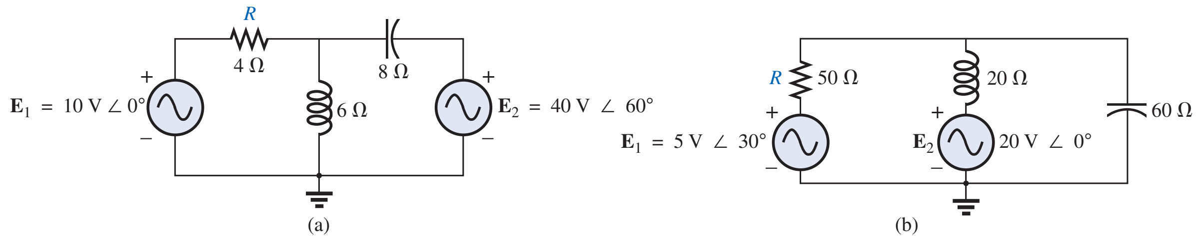


FIGURA 17.62
Problemas 5 y 34.

6. Escriba las ecuaciones de malla para las redes de la figura 17.63. Determine la corriente a través del resistor R_1.

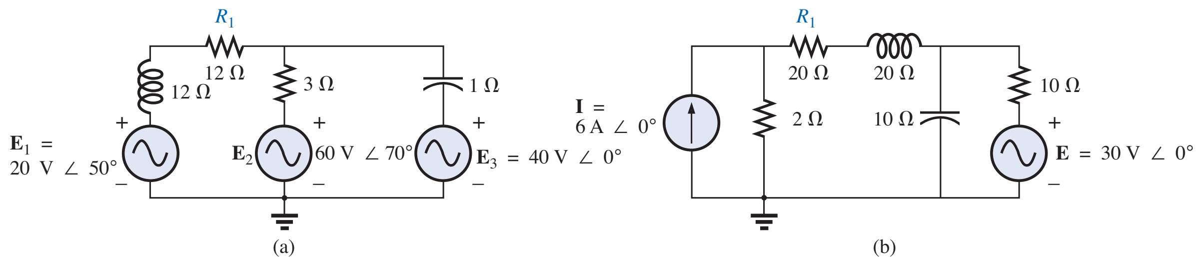
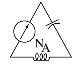
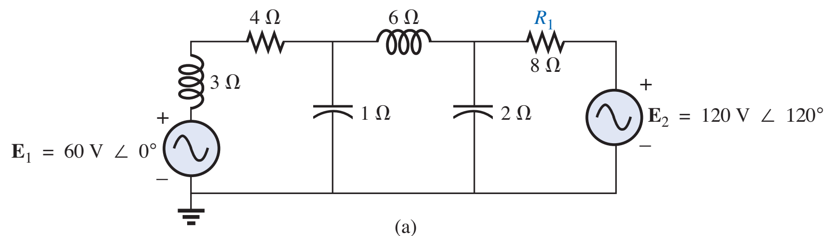


FIGURA 17.63
Problemas 6 y 16.



***7.** Escriba las ecuaciones de malla para las redes de la figura 17.64. Determine la corriente a través del resistor R_1.



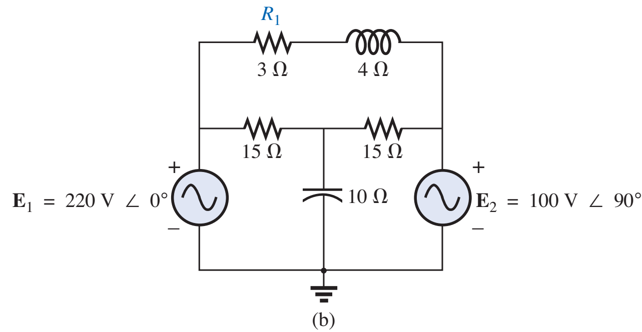
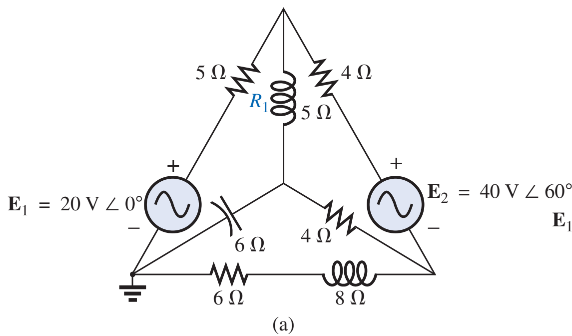


FIGURA 17.64
Problemas 7, 17 y 35.

***8.** Escriba las ecuaciones de malla para las redes de la figura 17.65. Determine la corriente a través del resistor R_1.



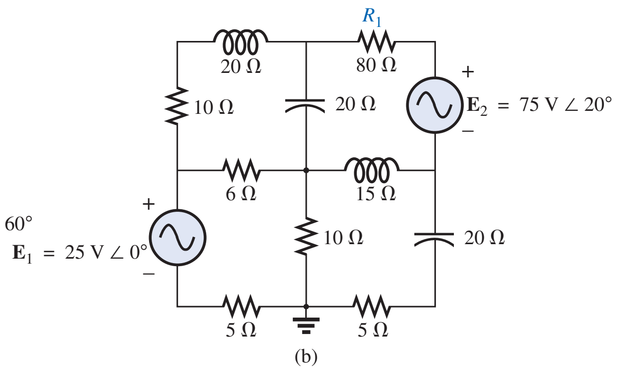


FIGURA 17.65
Problemas 8, 18 y 19.

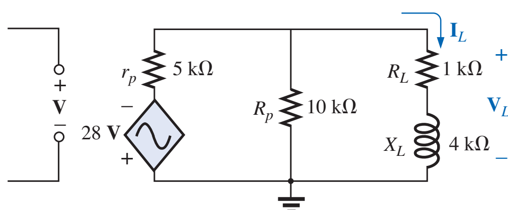


FIGURA 17.66
Problema 9.

9. Utilizando el análisis de mallas, determine la corriente $\mathbf{I}_L$ (en términos de **V**) para la red de la figura 17.66.



***10.** Utilizando el análisis de mallas, determine la corriente $\mathbf{I}_L$ (en términos de **I**) para la red de la figura 17.67.

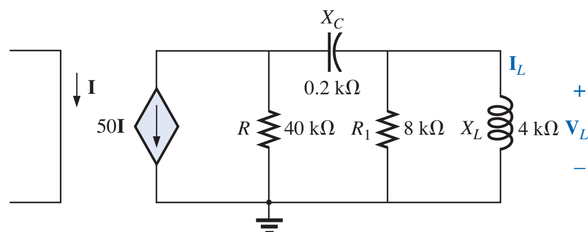


FIGURA 17.67
Problema 10.

***11.** Escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 17.68, y determine la corriente a través de los resistores de 1 kΩ y 2 kΩ.

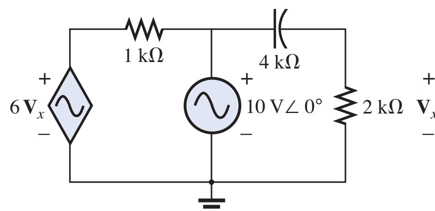


FIGURA 17.68
Problemas 11 y 36.

***12.** Escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 17.69, y determine la corriente a través del resistor de 10 kΩ.

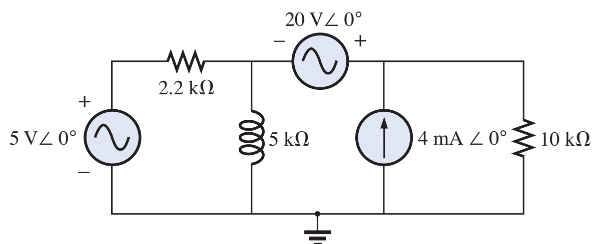


FIGURA 17.69
Problemas 12 y 37.

***13.** Escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 17.70, y determine la corriente a través del elemento inductivo.

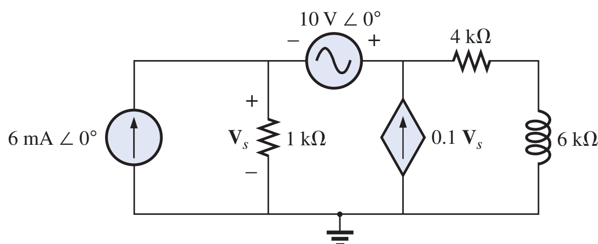
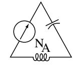


FIGURA 17.70
Problemas 13 y 38.



SECCIÓN 17.5 Análisis de nodos

14. Determine los voltajes nodales para las redes de la figura 17.71.

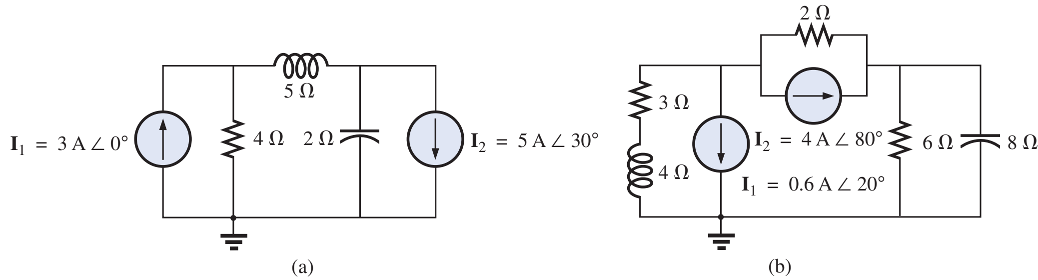


FIGURA 17.71
Problemas 14 y 39.

15. Determine los voltajes nodales para las redes de la figura 17.72.

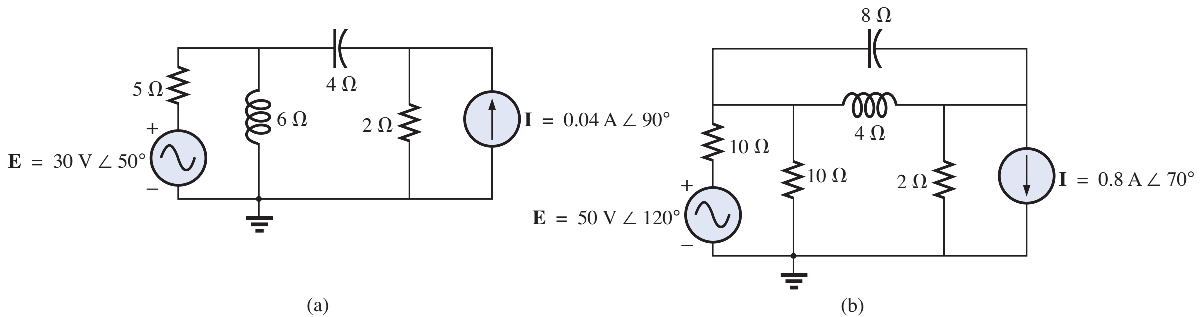


FIGURA 17.72
Problema 15.

16. Determine los voltajes nodales para la red de la figura 17.63(b).

17. Determine los voltajes nodales para la red de la figura 17.64(b).

***18.** Determine los voltajes nodales para la red de la figura 17.65(a).

***19.** Determine los voltajes nodales para la red de la figura 17.65(b).

***20.** Determine los voltajes nodales para las redes de la figura 17.73.

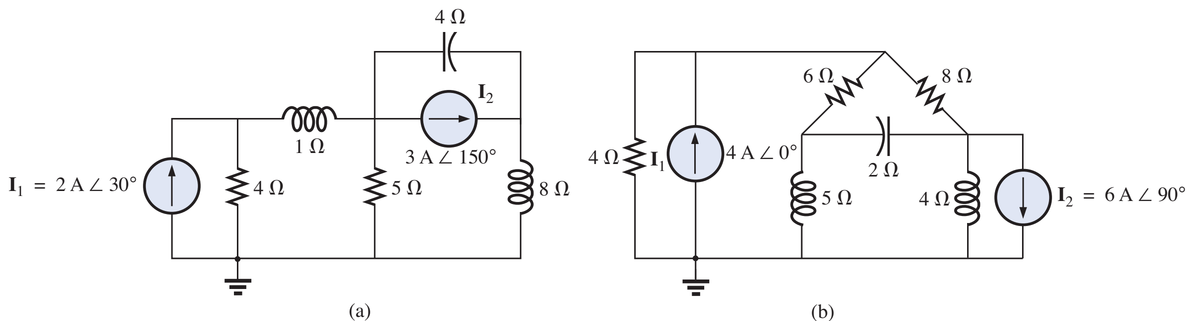


FIGURA 17.73
Problema 20.



***21.** Escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 17.74, y encuentre el voltaje en el resistor de 1 kΩ.

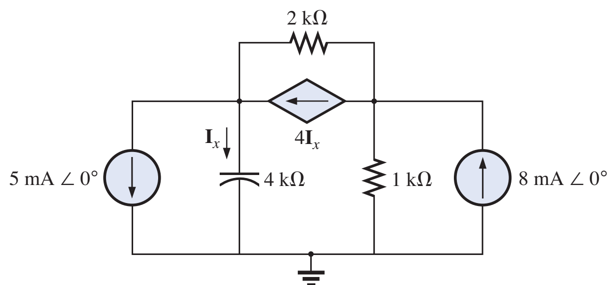


FIGURA 17.74
Problemas 21 y 40.

***22.** Escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 17.75, y encuentre el voltaje en el elemento capacitivo.

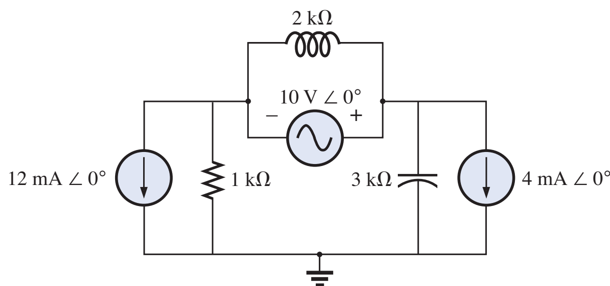


FIGURA 17.75
Problemas 22 y 41.

***23.** Escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 17.76, y encuentre el voltaje en el resistor de 2 kΩ.

***24.** Escriba las ecuaciones nodales para la red de la figura 17.77, y encuentre el voltaje en el resistor de 2 kΩ.

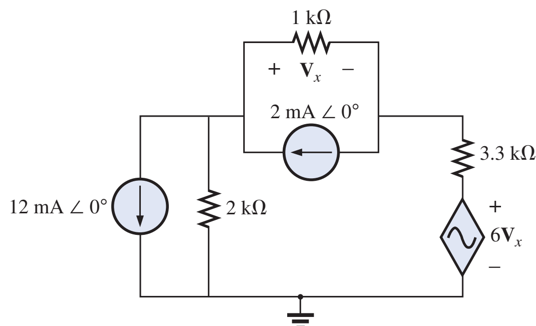


FIGURA 17.76
Problemas 23 y 42.

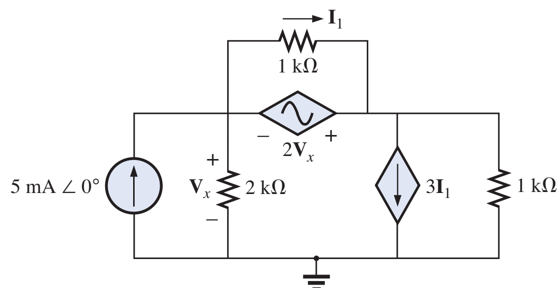
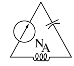


FIGURA 17.77
Problemas 24 y 43.



***25.** Para la red de la figura 17.78, determine el voltaje $\mathbf{V}_L$ en términos del voltaje $\mathbf{E}_i$.

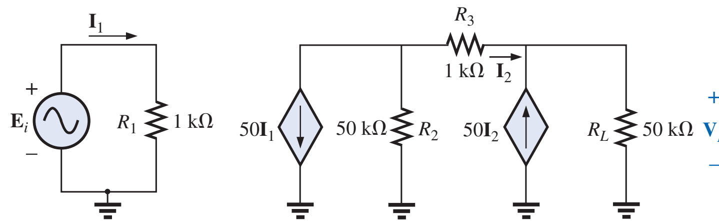


FIGURA 17.78
Problema 25.

SECCIÓN 17.6 Redes puente (ca)

26. Para la red puente de la figura 17.79:

a. ¿El puente está balanceado?

b. Utilizando el análisis de mallas, determine la corriente a través de la reactancia capacitiva.

c. Utilizando el análisis de nodos, determine el voltaje en la reactancia capacitiva.

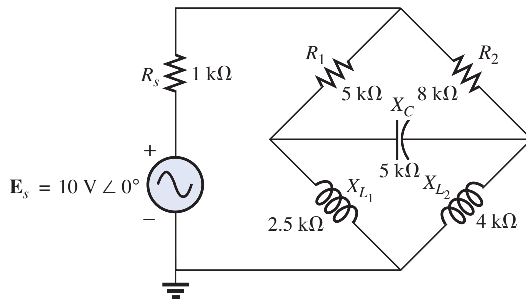


FIGURA 17.79
Problema 26.

27. Para la red puente de la figura 17.80:

a. ¿El puente está balanceado?

b. Utilizando el análisis de mallas, determine la corriente a través de la reactancia capacitiva.

c. Utilizando el análisis de nodos, determine el voltaje en la reactancia capacitiva.

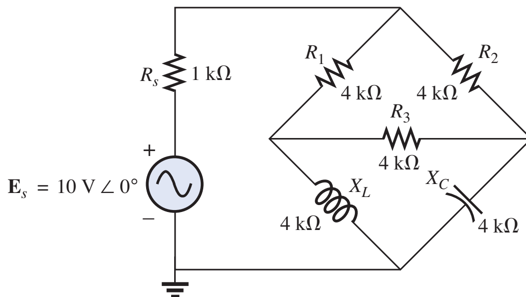


FIGURA 17.80
Problema 27.

28. El puente Hay de la figura 17.81 está balanceado. Utilizando la ecuación (17.3), determine la inductancia L_x y la resistencia R_x desconocidas.

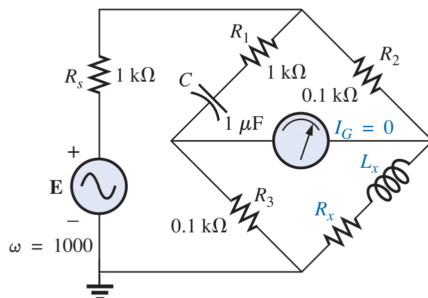


FIGURA 17.81
Problema 28.



29. Determine si el puente de Maxwell de la figura 17.82 está balanceado ($\omega = 1000$ rad/s).

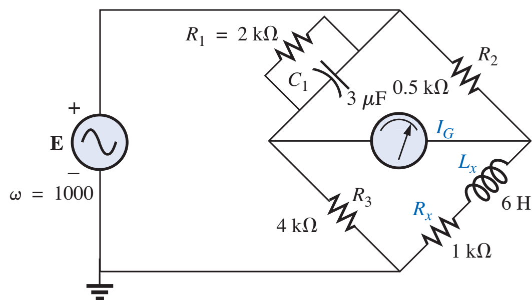


FIGURA 17.82
Problema 29.

30. Obtenga las ecuaciones de balance (17.11) y (17.12) para el puente de comparación de capacitancia.

31. Determine las ecuaciones de balance para el puente de inductancia de la figura 17.83.

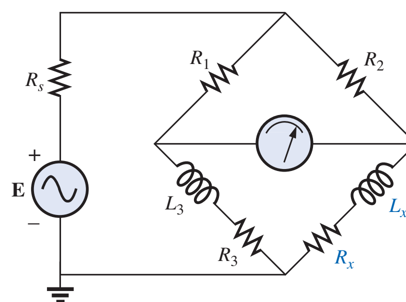


FIGURA 17.83
Problema 31.

SECCIÓN 17.7 Conversiones Δ-Y, Y-Δ

32. Utilizando la conversión Δ-Y o Y-Δ determine la corriente **I** para las redes de la figura 17.84.

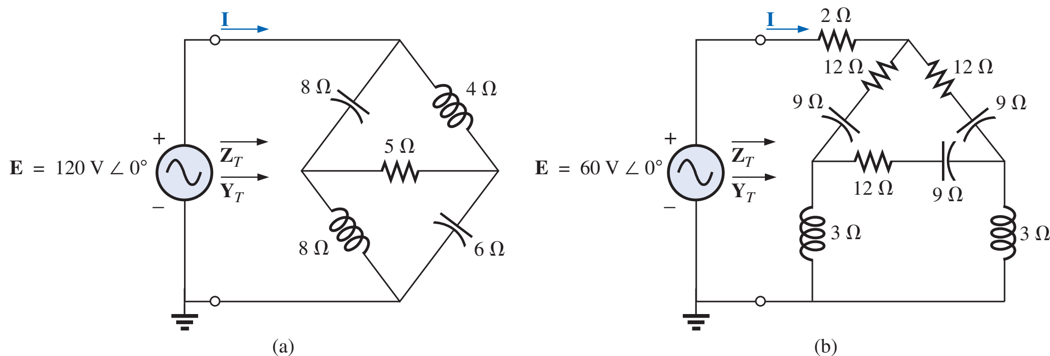
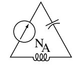


FIGURA 17.84
Problema 32.



33. Utilizando la conversión Δ-Y o Y-Δ determine la corriente **I** para las redes de la figura 17.85. (**E** = 100 V ∠0° en cada caso.)

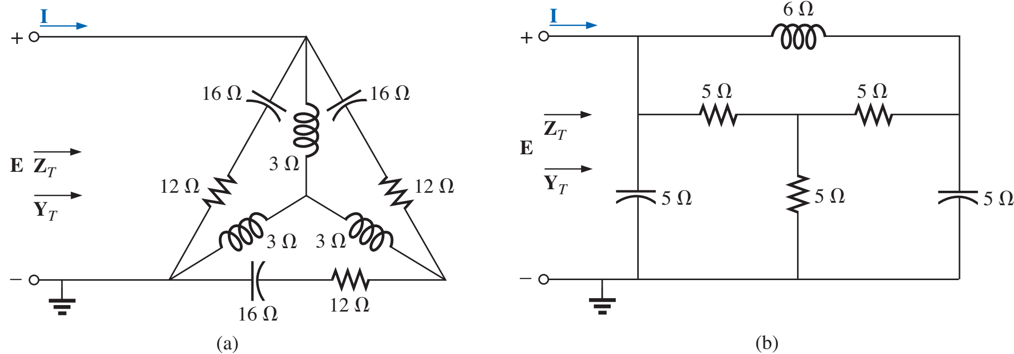


FIGURA 17.85
Problema 33.

SECCIÓN 17.8 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

34. Determine las corrientes de malla para la red de la figura 17.62(a).

35. Determine las corrientes de malla para la red de la figura 17.64(a).

***36.** Determine las corrientes de malla para la red de la figura 17.68.

***37.** Determine las corrientes de malla para la red de la figura 17.69.

***38.** Determine las corrientes de malla para la red de la figura 17.70.

39. Determine los voltajes nodales para la red de la figura 17.71(b).

***40.** Determine los voltajes nodales para la red de la figura 17.74.

***41.** Determine los voltajes nodales para la red de la figura 17.75.

***42.** Determine los voltajes nodales para la red de la figura 17.76.

***43.** Determine los voltajes nodales para la red de la figura 17.77.

Lenguaje de programacón (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

44. Escriba un programa de computadora que proporcione una solución general para la red de la figura 17.10. Es decir, dados la reactancia de cada elemento y los parámetros de las fuentes de voltaje, genere una solución en forma fasorial para ambas corrientes de malla.

45. Repita el programa para determinar los voltajes nodales de la figura 17.30.

46. Dado un puente compuesto por impedancias en serie en cada rama, escriba un programa para verificar la condición de balance según fue definido mediante la ecuación (17.6).



GLOSARIO

Análisis de mallas Método por el cual es posible determinar las corrientes de lazo (o malla) de una red. Las corrientes de rama de la red pueden resolverse entonces directamente a partir de las corrientes de lazo.

Análisis de nodos Método por el cual se pueden determinar los voltajes nodales de una red. Entonces, el voltaje en cada elemento puede resolverse mediante la aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff.

Configuración delta (Δ) Configuración de red que tiene la apariencia de la letra mayúscula griega delta.

Configuración ye (Y) Configuración de red que tiene la apariencia de la letra mayúscula Y.

Conversión de fuente Cambio de una fuente de voltaje a una fuente de corriente, o viceversa, que da por resultado el mismo comportamiento en las terminales de la fuente. En otras palabras, la red externa desconoce el cambio en las fuentes.

Fuente dependiente (controlada) Fuente cuya magnitud y/o ángulo de fase están determinados (controlados) por una corriente o un voltaje del sistema donde aparecen.

Fuente independiente Fuente cuya magnitud es independiente de la red a la que se aplica. Presenta sus características terminales incluso cuando se encuentra completamente aislada.

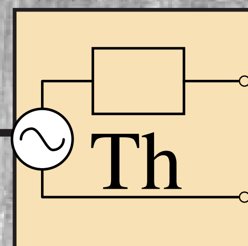
Puente de comparación de capacitancia Configuración de puente que tiene un galvanómetro en el brazo del puente para determinar una capacitancia desconocida y la resistencia asociada.

Puente Hay Configuración de puente utilizada para medir la resistencia e inductancia de bobinas en aquellos casos donde la resistencia es una pequeña fracción de la reactancia de la bobina.

Puente Maxwell Configuración de puente utilizada en mediciones de inductancia donde la resistencia de la bobina es lo suficientemente grande como para no requerir un puente Hay.

Red puente Configuración de red que tiene la apariencia de un diamante y en la cual no existen dos ramas en serie o en paralelo.

18



Teoremas de redes (ca)

18.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo es análogo al capítulo 9, el cual trata acerca de los teoremas de redes según se aplican a las redes de cd. Sería conveniente revisar cada teorema del capítulo 9 antes de comenzar este capítulo ya que muchos de los comentarios presentados ahí no se repetirán.

Debido a la necesidad de desarrollar confianza en la aplicación de los distintos teoremas a las redes con fuentes controladas (dependientes), algunas secciones se han dividido en dos partes: fuentes independientes y fuentes dependientes.

Los teoremas que se revisarán con todo detalle incluyen el teorema de superposición, los teoremas de Thévenin y Norton y el teorema de máxima potencia. Los teoremas de sustitución y reciprocidad y el teorema de Millman no se analizarán en detalle aquí debido a que una revisión del capítulo 9 permitirá al lector aplicarlos a redes senoidales de ca sin dificultad.

18.2 TEOREMA DE SUPERPOSICIÓN

Se recordará del capítulo 9 que el **teorema de superposición** elimina la necesidad de resolver ecuaciones lineales simultáneas mediante la consideración de los efectos de cada fuente de manera independiente. Para considerar los efectos de cada fuente, hubo que eliminar las fuentes restantes. Esto se logró al establecer las fuentes de voltaje en cero (representación de corto circuito) y las fuentes de corriente en cero (representación de circuito abierto). Entonces, la corriente a través de, o el voltaje en, una parte de la red producida por cada fuente fue sumada algebraicamente para obtener la solución total para la corriente o el voltaje.

La única variación para aplicar este método a las redes de ca con fuentes independientes es que ahora nos encontraremos trabajando con impedancias y fasores en lugar de sólo con resistores y números reales.

El teorema de superposición no es aplicable a los efectos de potencia en las redes de ca dado que seguimos tratando con una relación no lineal. Podrá aplicarse a las redes con fuentes de frecuencias diferentes solamente si la respuesta

total para *cada* frecuencia se calcula de manera independiente y los resultados se desarrollan en una expresión senoidal, como aparece en el capítulo 25.

Una de las aplicaciones más frecuentes del teorema de superposición es en sistemas electrónicos donde los análisis de cd y ca se tratan de manera separada y la solución total es la suma de los dos. Es una importante aplicación del teorema porque el impacto de los elementos reactivos cambia de manera impresionante en respuesta a los dos tipos de fuentes independientes. Además, el análisis de cd de un sistema electrónico con frecuencia puede definir parámetros importantes para el análisis de ca. El ejemplo 18.4 demostrará el impacto de la fuente aplicada sobre la configuración general de la red.

Primero consideraremos las redes con sólo fuentes independientes para proporcionar una asociación cercana con el análisis del capítulo 9.

Fuentes independientes

EJEMPLO 18.1 Utilizando el teorema de superposición, encuentre la corriente **I** a través de la reactancia de 4 Ω (X_{L_2}) de la figura 18.1.

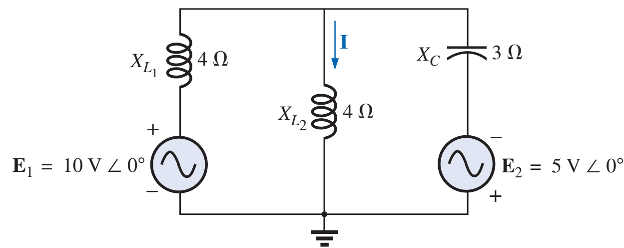


FIGURA 18.1
Ejemplo 18.1.

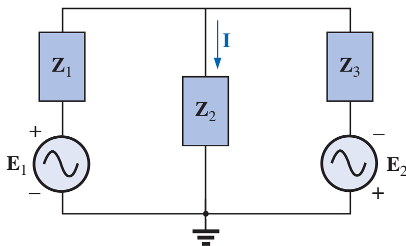


FIGURA 18.2
Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 18.1.

Solución: Para el circuito que se volvió a trazar (Figura 18.2),

$$\mathbf{Z}_1 = +j\,X_{L_1} = j\,4\;\Omega$$
$$\mathbf{Z}_2 = +j\,X_{L_2} = j\,4\;\Omega$$
$$\mathbf{Z}_3 = -j\,X_C = -j\,3\;\Omega$$

Al considerar los efectos de la fuente de voltaje $\mathbf{E}_1$ (Figura 18.3) tenemos:

$$\mathbf{Z}_{2\|3} = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} = \frac{(j\,4\;\Omega)(-j\,3\;\Omega)}{j\,4\;\Omega - j\,3\;\Omega} = \frac{12\;\Omega}{j} = -j\,12\;\Omega$$
$$= 12\;\Omega\;\angle -90^\circ$$
$$I_{s_1} = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_{2\|3} + \mathbf{Z}_1} = \frac{10\text{ V}\;\angle 0^\circ}{-j\,12\;\Omega + j\,4\;\Omega} = \frac{10\text{ V}\;\angle 0^\circ}{8\;\Omega\;\angle -90^\circ}$$
$$= 1.25\text{ A}\;\angle 90^\circ$$

e

$$\mathbf{I}' = \frac{\mathbf{Z}_3\mathbf{I}_{s_1}}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \qquad \text{(regla del divisor de corriente)}$$
$$= \frac{(-j\,3\;\Omega)(j\,1.25\text{ A})}{j\,4\;\Omega - j\,3\;\Omega} = \frac{3.75\text{ A}}{j\,1} = 3.75\text{ A}\;\angle -90^\circ$$

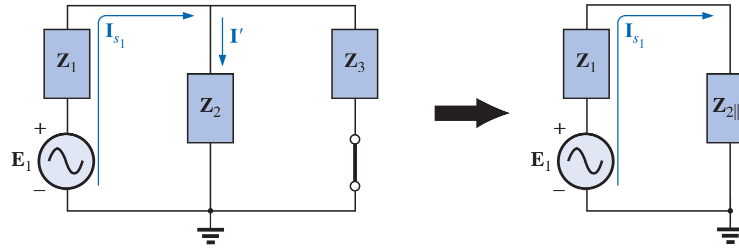


FIGURA 18.3
Determinación del efecto de la fuente de voltaje $\mathbf{E}_1$ *sobre la corriente* **I** *de la red de la figura 18.1.*

Al considerar los efectos de la fuente de voltaje $\mathbf{E}_2$ (Figura 18.4) tenemos:

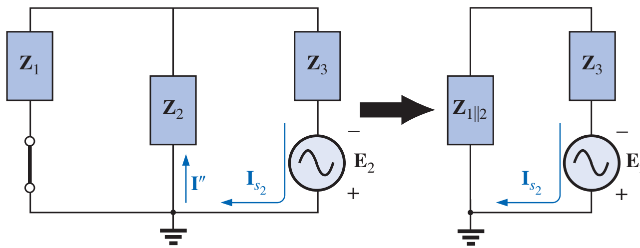


FIGURA 18.4
Determinación del efecto de la fuente de voltaje $\mathbf{E}_2$ *sobre la corriente* **I** *de la red de la figura 18.1.*

$$\mathbf{Z}_{1\|2} = \frac{\mathbf{Z}_1}{N} = \frac{j\,4\,\Omega}{2} = j\,2\,\Omega$$

$$\mathbf{I}_{s_2} = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_{1\|2} + \mathbf{Z}_3} = \frac{5\text{ V}\angle 0^\circ}{j\,2\,\Omega - j\,3\,\Omega} = \frac{5\text{ V}\angle 0^\circ}{1\,\Omega\angle -90^\circ} = 5\text{ A}\angle 90^\circ$$

e
$$\mathbf{I}'' = \frac{\mathbf{I}_{s_2}}{2} = 2.5\text{ A}\angle 90^\circ$$

La corriente resultante a través de la reactancia de 4Ω X_{L_2} (Figura 18.5) es:

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \mathbf{I}' - \mathbf{I}''\\ &= 3.75\text{ A}\angle -90^\circ - 2.50\text{ A}\angle 90^\circ = -j\,3.75\text{ A} - j\,2.50\text{ A}\\ &= -j\,6.25\text{ A}\\ \mathbf{I} &= \mathbf{6.25\text{ A}\angle -90^\circ}\end{aligned}$$

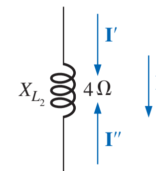


FIGURA 18.5
Determinación de la corriente resultante para la red de la figura 18.1.

EJEMPLO 18.2 Mediante superposición, encuentre la corriente **I** a través del resistor de 6 Ω de la figura 18.6.

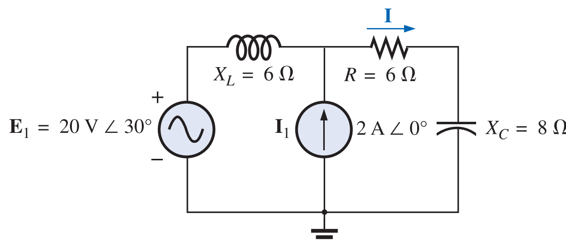


FIGURA 18.6
Ejemplo 18.2.

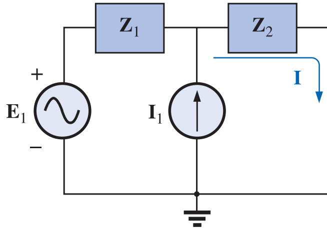


FIGURA 18.7
Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 18.6.

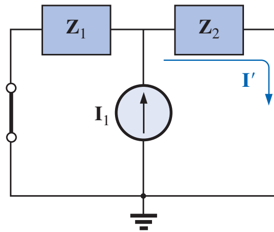


FIGURA 18.8
Determinación del efecto de la fuente de corriente $\mathbf{I}_1$ *sobre la corriente* **I** *de la red de la figura 18.6.*

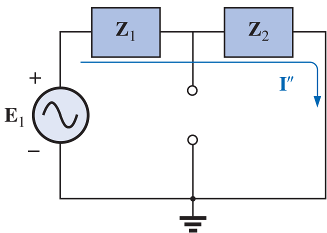


FIGURA 18.9
Determinación del efecto de la fuente de voltaje $\mathbf{E}_1$ *sobre la corriente* **I** *de la red de la figura 18.6.*

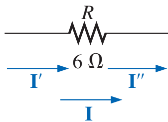


FIGURA 18.10
Determinación de la corriente **I** *resultante para la red de la figura 18.6.*

Solución: Para el circuito que se volvió a trazar (Figura 18.7),

$$\mathbf{Z}_1 = j\,6\,\Omega \qquad \mathbf{Z}_2 = 6 - j\,8\,\Omega$$

Considere los efectos de la fuente de corriente (Figura 18.8). Al aplicar la regla del divisor de corriente tenemos:

$$\mathbf{I}' = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(j\,6\,\Omega)(2\text{ A})}{j\,6\,\Omega + 6\,\Omega - j\,8\,\Omega} = \frac{j\,12\text{ A}}{6 - j\,2}$$
$$= \frac{12\text{ A}\,\angle 90^\circ}{6.32\,\angle -18.43^\circ}$$
$$\mathbf{I}' = 1.9\text{ A}\,\angle 108.43^\circ$$

Considere los efectos de la fuente de voltaje (Figura 18.9). Al aplicar la ley de Ohm se obtiene:

$$\mathbf{I}'' = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_T} = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{20\text{ V}\,\angle 30^\circ}{6.32\,\Omega\,\angle -18.43^\circ}$$
$$= 3.16\text{ A}\,\angle 48.43^\circ$$

La corriente total a través del resistor de 6 Ω (Figura 18.10) es:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \mathbf{I}''$$
$$= 1.9\text{ A}\,\angle 108.43^\circ + 3.16\text{ A}\,\angle 48.43^\circ$$
$$= (-0.60\text{ A} + j\,1.80\text{ A}) + (2.10\text{ A} + j\,2.36\text{ A})$$
$$= 1.50\text{ A} + j\,4.16\text{ A}$$
$$\mathbf{I} = \mathbf{4.42\text{ A}\,\angle 70.2^\circ}$$

EJEMPLO 18.3 Utilizando superposición, encuentre el voltaje en el resistor de 6 Ω en la figura 18.6. Verifique los resultados contra $\mathbf{V}_{6\Omega} = \mathbf{I}(6\,\Omega)$, donde **I** es la corriente que se encuentra a través del resistor de 6 Ω en el ejemplo 18.2.

Solución: Para la fuente de corriente,

$$\mathbf{V}'_{6\Omega} = \mathbf{I}'(6\,\Omega) = (1.9\text{ A}\,\angle 108.43^\circ)(6\,\Omega) = 11.4\text{ V}\,\angle 108.43^\circ$$

Para la fuente de voltaje,

$$\mathbf{V}''_{6\Omega} = \mathbf{I}''(6) = (3.16\text{ A}\,\angle 48.43^\circ)(6\,\Omega) = 18.96\text{ V}\,\angle 48.43^\circ$$

El voltaje total en el resistor de 6 Ω (Figura 18.11) es:

$$\mathbf{V}_{6\Omega} = \mathbf{V}'_{6\Omega} + \mathbf{V}''_{6\Omega}$$
$$= 11.4\text{ V}\,\angle 108.43^\circ + 18.96\text{ V}\,\angle 48.43^\circ$$
$$= (-3.60\text{ V} + j\,10.82\text{ V}) + (12.58\text{ V} + j\,14.18\text{ V})$$
$$= 8.98\text{ V} + j\,25.0\text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{6\Omega} = \mathbf{26.5\text{ V}\,\angle 70.2^\circ}$$

Al comprobar el resultado, tenemos:

$$\mathbf{V}_{6\Omega} = \mathbf{I}(6\,\Omega) = (4.42\text{ A}\,\angle 70.2^\circ)(6\,\Omega)$$
$$= \mathbf{26.5\text{ V}\,\angle 70.2^\circ} \quad \text{(se comprueba)}$$

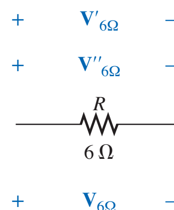


FIGURA 18.11
Determinación del voltaje resultante $\mathbf{V}_{6\Omega}$ *para la red de la figura 18.6.*

EJEMPLO 18.4 Para la red de la figura 18.12, determine la expresión senoidal para el voltaje v_3 utilizando superposición.

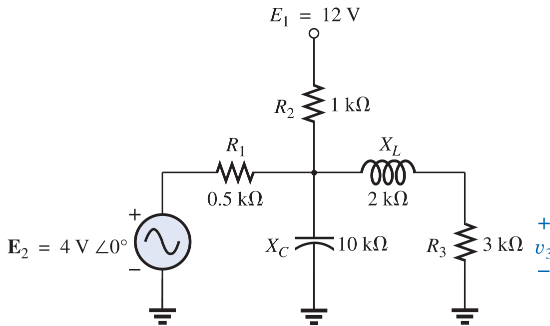


FIGURA 18.12
Ejemplo 18.4.

Solución: Para la fuente de cd, recuerde del análisis de cd, en el estado estable puede reemplazarse el capacitor por un equivalente de circuito abierto y el inductor por un equivalente de corto circuito. El resultado es la red de la figura 18.13.

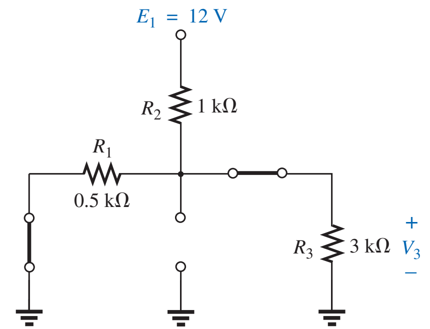


FIGURA 18.13
Determinación del efecto de la fuente de voltaje de cd **E***₁ sobre el voltaje* v_3 *de la red de la figura 18.12.*

Los resistores R_1 y R_3 se encuentran entonces en paralelo, y el voltaje V_3 puede determinarse utilizando la regla del divisor de voltaje:

$$R' = R_1 \parallel R_3 = 0.5\text{ k}\Omega \parallel 3\text{ k}\Omega = 0.429\text{ k}\Omega$$

y
$$V_3 = \frac{R'E_1}{R' + R_2}$$
$$= \frac{(0.429\text{ k}\Omega)(12\text{ V})}{0.429\text{ k}\Omega + 1\text{ k}\Omega} = \frac{5.148\text{ V}}{1.429}$$
$$V_3 \cong \mathbf{3.6\text{ V}}$$

Para el análisis de ca, la fuente de cd se establece en cero y la red se vuelve a trazar, como se muestra en la figura 18.14.

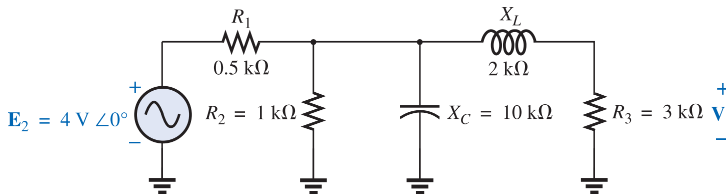


FIGURA 18.14
Red de la figura 18.12 trazada de nuevo para determinar el efecto de la fuente de voltaje de ca **E**$_2$.

Luego se definen las impedancias de bloque como en la figura 18.15, y se aplican las técnicas en serie-paralelo de la siguiente forma:

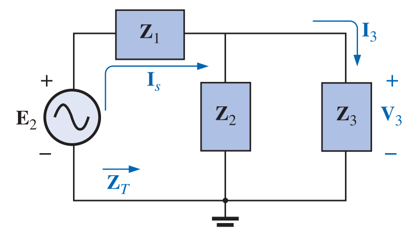
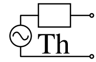


FIGURA 18.15
Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 18.14.

$$\mathbf{Z}_1 = 0.5\text{ k}\Omega\ \angle 0^\circ$$
$$\mathbf{Z}_2 = (R_2\ \angle 0^\circ) \parallel (X_C\ \angle -90^\circ)$$
$$= \frac{(1\text{ k}\Omega\ \angle 0^\circ)(10\text{ k}\Omega\ \angle -90^\circ)}{1\text{ k}\Omega - j\,10\text{ k}\Omega} = \frac{10\text{ k}\Omega\ \angle -90^\circ}{10.05\ \angle -84.29^\circ}$$
$$= 0.995\text{ k}\Omega\ \angle -5.71^\circ$$



$$\mathbf{Z}_3 = R_3 + j\,X_L = 3\text{ k}\Omega + j\,2\text{ k}\Omega = 3.61\text{ k}\Omega\ \angle 33.69^\circ$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_T &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \parallel \mathbf{Z}_3\\ &= 0.5\text{ k}\Omega + (0.995\text{ k}\Omega\ \angle -5.71^\circ) \parallel (3.61\text{ k}\Omega\ \angle 33.69^\circ)\\ &= 1.312\text{ k}\Omega\ \angle 1.57^\circ\end{aligned}$$

Calculadora Al realizar el cálculo anterior en la calculadora TI-86 se obtiene el siguiente resultado:

```
(0.5,0)+((0.995∠−5.71)*(3.61∠33.69))/((0.995∠−5.71)+(3.61∠33.69)) (Enter)
  (1.311E0,35.373E−3)
Ans ► Pol
  (1.312E0∠1.545E0)
```

CÁLCULO 18.1

$$\mathbf{I}_s = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_T} = \frac{4\text{ V}\ \angle 0^\circ}{1.312\text{ k}\Omega\ \angle 1.57^\circ} = 3.05\text{ mA}\ \angle -1.57^\circ$$

La regla del divisor de corriente:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_3 &= \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{I}_s}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} = \frac{(0.995\text{ k}\Omega\ \angle -5.71^\circ)(3.05\text{ mA}\ \angle -1.57^\circ)}{0.995\text{ k}\Omega\ \angle -5.71^\circ + 3.61\text{ k}\Omega\ \angle 33.69^\circ}\\ &= 0.686\text{ mA}\ \angle -32.74^\circ\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_3 &= (I_3\ \angle\theta)(R_3\ \angle 0^\circ)\\ &= (0.686\text{ mA}\ \angle -32.74^\circ)(3\text{ k}\Omega\ \angle 0^\circ)\\ &= \mathbf{2.06\text{ V}\ \angle -32.74^\circ}\end{aligned}$$

La solución total:

$$\begin{aligned}v_3 &= v_3\text{ (cd)} + v_3\text{ (ca)}\\ &= 3.6\text{ V} + 2.06\text{ V}\ \angle -32.74^\circ\\ v_3 &= \mathbf{3.6 + 2.91\ sen(\omega t - 32.74^\circ)}\end{aligned}$$

El resultado es un voltaje senoidal que tiene un valor pico de 2.91 V oscilando sobre un valor promedio de 3.6 V, como se muestra en la figura 18.16.

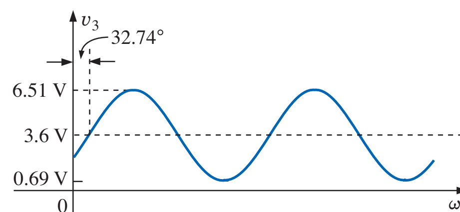


FIGURA 18.16
El voltaje resultante v_3 para la red de la figura 18.12.

Fuentes dependientes

Para fuentes dependientes donde *la variable de control no está determinada por la red a la que se aplicará el teorema de superposición*, la aplicación del

teorema será básicamente la misma que para las fuentes independientes. La solución obtenida sólo estará en términos de las variables de control.

EJEMPLO 18.5 Utilizando el teorema de superposición, determine la corriente $\mathbf{I}_2$ para la red de la figura 18.17. Las cantidades μ y h son constantes.

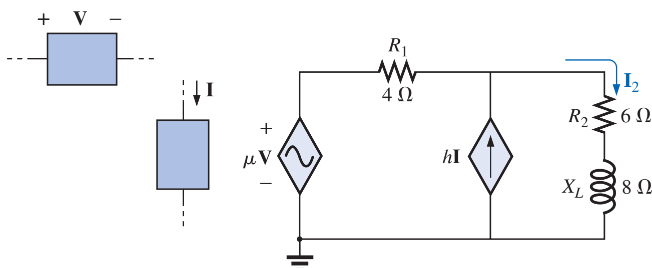


FIGURA 18.17
Ejemplo 18.5.

Solución: Con una parte del sistema vuelto a trazar (Figura 18.18),

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 = 4\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_2 = R_2 + j\,X_L = 6 + j\,8\ \Omega$$

Para la fuente de voltaje (Figura 18.19),

$$\mathbf{I}' = \frac{\mu\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{\mu\mathbf{V}}{4\ \Omega + 6\ \Omega + j\,8\ \Omega} = \frac{\mu\mathbf{V}}{10\ \Omega + j\,8\ \Omega}$$

$$= \frac{\mu\mathbf{V}}{12.8\ \Omega\ \angle 38.66^\circ} = 0.078\ \mu\mathbf{V}/\Omega\ \angle -38.66^\circ$$

Para la fuente de corriente (Figura 18.20),

$$\mathbf{I}'' = \frac{\mathbf{Z}_1(h\mathbf{I})}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(4\ \Omega)(h\mathbf{I})}{12.8\ \Omega\ \angle 38.66^\circ} = 4(0.078)h\mathbf{I}\ \angle -38.66^\circ$$

$$= 0.312h\mathbf{I}\ \angle -38.66^\circ$$

La corriente $\mathbf{I}_2$ es:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}' + \mathbf{I}''$$
$$= 0.078\ \mu\mathbf{V}/\Omega\ \angle -38.66^\circ + 0.312h\mathbf{I}\ \angle -38.66^\circ$$

Para $\mathbf{V} = 10\ \text{V}\ \angle 0^\circ$, $\mathbf{I} = 20\ \text{mA}\ \angle 0^\circ$, $\mu = 20$, y $h = 100$,

$$\mathbf{I}_2 = 0.078(20)(10\ \text{V}\ \angle 0^\circ)/\Omega\ \angle -38.66^\circ$$
$$+\ 0.312(100)(20\ \text{mA}\ \angle 0^\circ)\angle -38.66^\circ$$
$$= 15.60\ \text{A}\ \angle -38.66^\circ + 0.62\ \text{A}\ \angle -38.66^\circ$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{16.22\ A\ \angle -38.66^\circ}$$

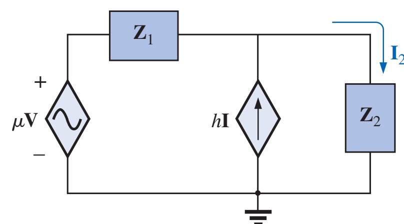


FIGURA 18.18
Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 18.17.

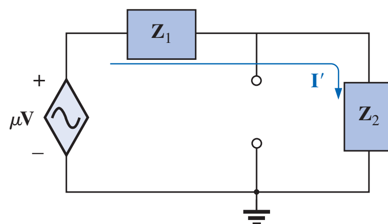


FIGURA 18.19
Determinación del efecto de la fuente de voltaje controlada por voltaje en la corriente $\mathbf{I}_2$ *para la red de la figura 18.17.*

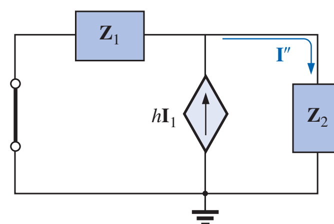
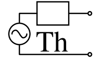


FIGURA 18.20
Determinación del efecto de la fuente de corriente controlada por corriente en la corriente $\mathbf{I}_2$ *para la red de la figura 18.17.*

Para fuentes dependientes donde *la variable de control está determinada por la red a la que el teorema se aplicará,* la fuente dependiente no podrá establecerse en cero a menos que la variable de control también sea cero. Para redes que contienen fuentes dependientes tal como la indicada en el ejemplo 18.5 y fuentes dependientes del tipo recién presentado, se aplica el teorema de superposición para cada fuente independiente y para cada fuente dependiente que no tenga una variable de control en las partes de la red bajo análisis. Se



debe volver a enfatizar que las fuentes dependientes no son fuentes de energía en el sentido de que, si todas las fuentes independientes se eliminan de un sistema, todas las corrientes y voltajes deberán ser cero.

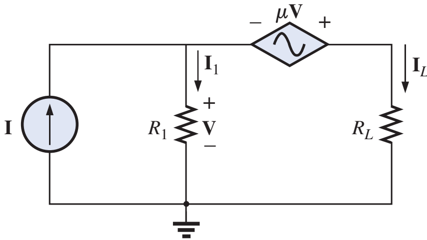


FIGURA 18.21
Ejemplo 18.6.

EJEMPLO 18.6 Determine la corriente $\mathbf{I}_L$ a través del resistor R_L de la figura 18.21.

Solución: Observe que la variable de control **V** está determinada por la red que se analizará. De la argumentación anterior, se entiende que la fuente dependiente no podrá establecerse en cero a menos que **V** sea cero. Si establecemos a **I** en cero, la red carecerá de una fuente de voltaje, y $\mathbf{V} = 0$ con $\mu\mathbf{V} = 0$. resultante bajo esta condición será cero. Por tanto, resulta obvio que la red deberá analizarse como aparece en la figura 18.21, con el resultado de que ninguna fuente podrá eliminarse, como normalmente se hace al utilizar el teorema de superposición.

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff tenemos:

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V} + \mu\mathbf{V} = (1 + \mu)\mathbf{V}$$

e
$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_L}{R_L} = \frac{(1 + \mu)\mathbf{V}}{R_L}$$

Sin embargo, el resultado deberá calcularse en términos de **I** dado que **V** y $\mu\mathbf{V}$ son únicamente variables dependientes.

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff obtenemos:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}}{R_1} + \frac{(1 + \mu)\mathbf{V}}{R_L}$$

e
$$\mathbf{I} = \mathbf{V}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1 + \mu}{R_L}\right)$$

o bien:
$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{(1/R_1) + [(1 + \mu)/R_L]}$$

Al sustituir en el resultado anterior llegamos a:

$$\mathbf{I}_L = \frac{(1 + \mu)\mathbf{V}}{R_L} = \frac{(1 + \mu)}{R_L}\left(\frac{\mathbf{I}}{(1/R_1) + [(1 + \mu)/R_L]}\right)$$

Por tanto,
$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{(1 + \mu)R_1 I}}{\mathbf{R_L + (1 + \mu)R_1}}$$

18.3 TEOREMA DE THÉVENIN

El **teorema de Thévenin**, según se estableció para los circuitos senoidales de ca, se modifica sólo para incluir el término *impedancia* en lugar de *resistencia*; es decir,

cualquier red de ca lineal de dos terminales podrá ser reemplazada con un circuito equivalente que conste de una fuente de voltaje y una impedancia en serie, como se muestra en la figura 18.22.

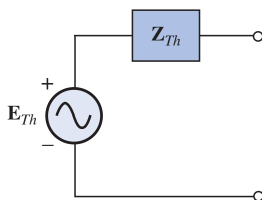
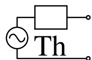


FIGURA 18.22
Circuito equivalente de Thévenin para redes de ca.

Dado que las reactancias de un circuito dependen de la frecuencia, el circuito de Thévenin para una red particular será aplicable sólo a *una* frecuencia.

Los pasos requeridos para aplicar este método a los circuitos de cd se repiten con modificaciones para los circuitos senoidales de ca. Como antes, el



único cambio es el reemplazo del término *resistencia* por *impedancia*. Nuevamente, las fuentes dependientes e independientes serán tratadas de manera separada.

El ejemplo 18.9, el último de la sección de fuentes dependientes, incluirá una red con fuentes de ca y cd para establecer el fundamento para su posible utilización en el área electrónica.

Fuentes independientes

1. ***Elimine la parte de la red en la cual se obtendrá el circuito equivalente de Thévenin.***
2. ***Marque (con ○, ●, así por el estilo) las terminales de la red restante de dos terminales.***
3. ***Calcule $\mathbf{Z}_{Th}$ estableciendo primero todas las fuentes de voltaje y de corriente en cero (corto circuito y circuito abierto, respectivamente) y calculando luego la impedancia resultante entre las dos terminales marcadas.***
4. ***Calcule $\mathbf{E}_{Th}$ reemplazando primero las fuentes de voltaje y de corriente y calculando luego el voltaje de circuito abierto entre las terminales marcadas.***
5. ***Trace el circuito equivalente de Thévenin con la parte del circuito previamente eliminado reemplazada entre las terminales del circuito equivalente de Thévenin.***

EJEMPLO 18.7 Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor *R* en la figura 18.23.

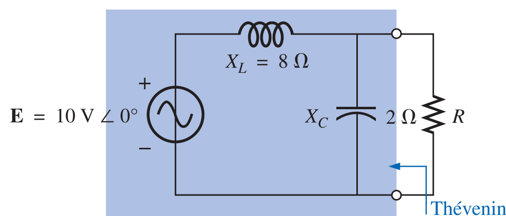


FIGURA 18.23
Ejemplo 18.7.

Solución:

Los *pasos 1* y *2* (Figura 18.24):

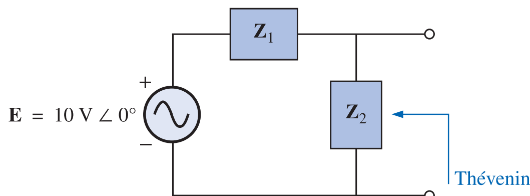


FIGURA 18.24
Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 18.23.

$$\mathbf{Z}_1 = j\,X_L = j\,8\,\Omega \qquad \mathbf{Z}_2 = -j\,X_C = -j\,2\,\Omega$$

Paso 3 (Figura 18.25):

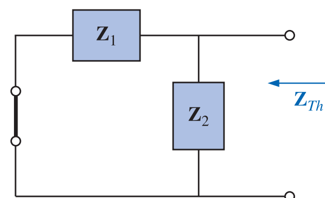
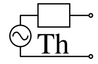


FIGURA 18.25
Determinación de la impedancia de Thévenin para la red de la figura 18.23.



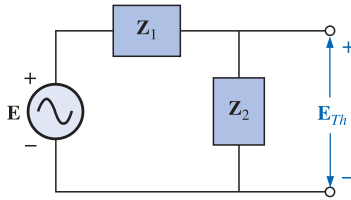


FIGURA 18.26
Determinación del voltaje de Thévenin de circuito abierto para la red de la figura 18.23.

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(j\,8\,\Omega)(-j\,2\,\Omega)}{j\,8\,\Omega - j\,2\,\Omega} = \frac{-j^2 16\,\Omega}{j\,6} = \frac{16\,\Omega}{6\,\angle 90^\circ}$$

$$= \mathbf{2.67\,\Omega\,\angle -90^\circ}$$

Paso 4 (Figura 18.26):

$$\mathbf{E}_{Th} = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \qquad \text{(regla del divisor de voltaje)}$$

$$= \frac{(-j\,2\,\Omega)(10\,\text{V})}{j\,8\,\Omega - j\,2\,\Omega} = \frac{-j\,20\,\text{V}}{j\,6} = \mathbf{3.33\,V\,\angle -180^\circ}$$

Paso 5: El circuito equivalente de Thévenin se muestra en la figura 18.27.

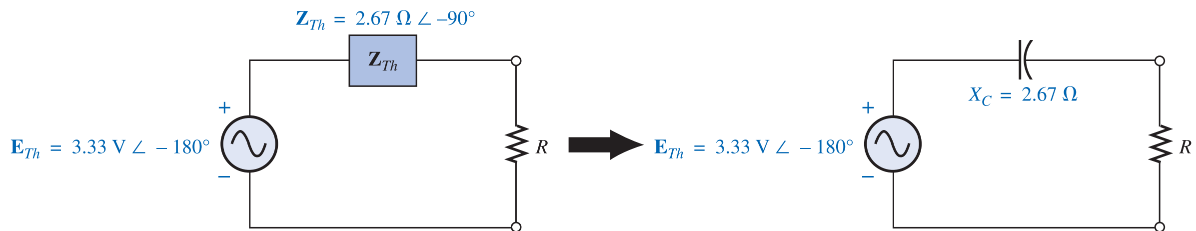


FIGURA 18.27
Circuito equivalente de Thévenin para la red de la figura 18.23.

EJEMPLO 18.8 Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para la red externa a la rama *a*-*a*′ en la figura 18.28.

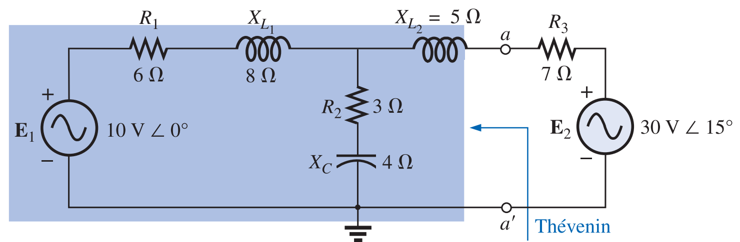


FIGURA 18.28
Ejemplo 18.8.

Solución:
Los *pasos 1* y *2* (Figura 18.29): Observe la reducida complejidad que se presenta con las impedancias con subíndice:

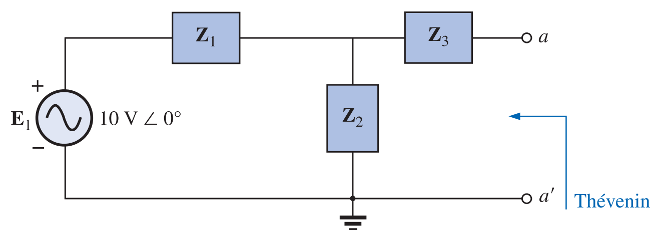


FIGURA 18.29
Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 18.28.

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j\,X_{L_1} = 6\ \Omega + j\,8\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_2 = R_2 - j\,X_C = 3\ \Omega - j\,4\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_3 = +j\,X_{L_2} = j\,5\ \Omega$$

Paso 3 (Figura 18.30):

$$\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{Z}_3 + \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = j\,5\ \Omega + \frac{(10\ \Omega\ \angle 53.13^\circ)(5\ \Omega\ \angle -53.13^\circ)}{(6\ \Omega + j\,8\ \Omega) + (3\ \Omega - j\,4\ \Omega)}$$
$$= j\,5 + \frac{50\ \angle 0^\circ}{9 + j\,4} = j\,5 + \frac{50\ \angle 0^\circ}{9.85\ \angle 23.96^\circ}$$
$$= j\,5 + 5.08\ \angle -23.96^\circ = j\,5 + 4.64 - j\,2.06$$
$$\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{4.64\ \Omega + j\,2.94\ \Omega = 5.49\ \Omega\ \angle 32.36^\circ}$$

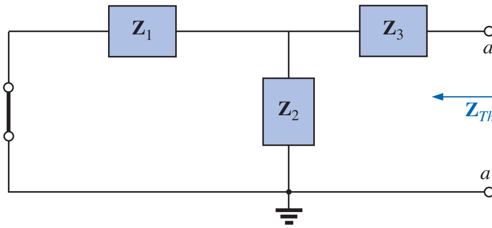


FIGURA 18.30
Determinación de la impedancia de Thévenin para la red de la figura 18.28.

Paso 4 (Figura 18.31): Dado que *a-a′* es un circuito abierto, $\mathbf{I}_{\mathbf{Z}_3} = 0$. Entonces $\mathbf{E}_{Th}$ es la caída de voltaje en $\mathbf{Z}_2$:

$$\mathbf{E}_{Th} = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1} \qquad \text{(regla del divisor de voltaje)}$$
$$= \frac{(5\ \Omega\ \angle -53.13^\circ)(10\ \text{V}\ \angle 0^\circ)}{9.85\ \Omega\ \angle 23.96^\circ}$$
$$\mathbf{E}_{Th} = \frac{50\ \text{V}\ \angle -53.13^\circ}{9.85\ \angle 23.96^\circ} = \mathbf{5.08\ V\ \angle -77.09^\circ}$$

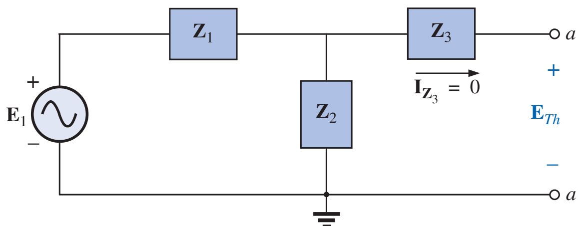


FIGURA 18.31
Determinación del voltaje de Thévenin de circuito abierto para la red de la figura 18.28.

Paso 5: El circuito equivalente de Thévenin se muestra en la figura 18.32.

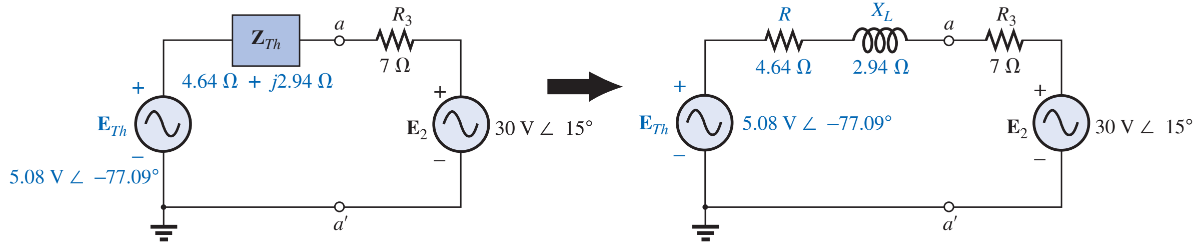


FIGURA 18.32
Circuito equivalente de Thévenin para la red de la figura 18.28.

El siguiente ejemplo demuestra la forma en que se aplica la superposición a los circuitos electrónicos para permitir una *separación de los análisis de cd y ca*. El hecho de que la variable de control en este análisis no se encuentre en la parte de la red conectada directamente a las terminales de interés permite efectuar un análisis de la red en la misma forma que la aplicada antes para las fuentes independientes.

EJEMPLO 18.9 Determine el circuito equivalente de Thévenin para la red del transistor externa al resistor R_L en la red de la figura 18.33. Luego determine $\mathbf{V}_L$.

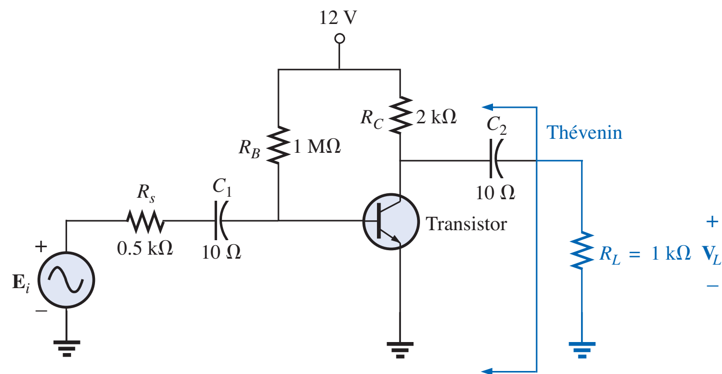
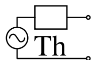


FIGURA 18.33
Ejemplo 18.9.

Solución: Aplicando superposición.

Condiciones de cd Al sustituir el equivalente de circuito abierto para el capacitor de acoplamiento C_2 se aislarán la fuente de cd y las corrientes resultantes del resistor de carga. El resultado es que para las condiciones de cd, $V_L =$ 0 V. Aunque el voltaje de cd de salida sea cero, la aplicación del voltaje de cd es primordial para la operación básica del transistor por varias razones importantes, una de las cuales es determinar los parámetros del "circuito equivalente" que aparecerán en el análisis de ca que viene a continuación.

Condiciones de ca En el análisis de ca, un circuito equivalente se sustituye para el transistor, según lo establecen las condiciones de cd anteriores, el cual



se comportará como el transistor real. Posteriormente se tratará más acerca de los circuitos equivalentes y las operaciones realizadas para obtener la red de la figura 18.34, pero por ahora limitaremos nuestra atención a la forma en que se obtiene el circuito equivalente de Thévenin. Observe en la figura 18.34 que el circuito equivalente incluye un resistor de 2.3 kΩ y una fuente de corriente controlada cuya magnitud está determinada por el producto de un factor de 100 y la corriente I_1 en otra parte de la red.

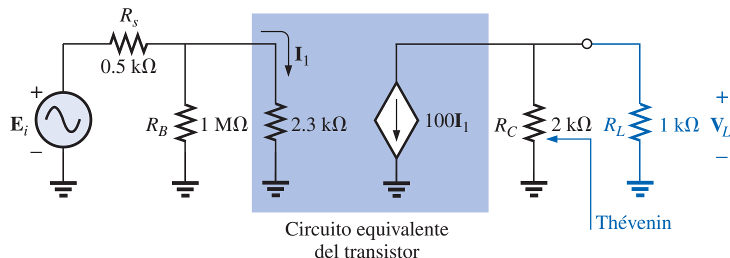


FIGURA 18.34
Red equivalente de ca para el amplificador con transistor de la figura 18.33.

Observe en la figura 18.34 la ausencia de los capacitores de acoplamiento para el análisis de ca. En general, los capacitores de acoplamiento están diseñados para trabajar como circuitos abiertos en el análisis de cd y como corto circuitos en el análisis de ca. El equivalente de corto circuito es válido debido a que las otras impedancias en serie con los capacitores de acoplamiento son tan grandes en magnitud que el efecto de los capacitores de acoplamiento puede ignorarse. Tanto R_B como R_C están ahora conectados a tierra debido a que la fuente de cd se estableció en cero volts (superposición) y se reemplazó por un corto circuito equivalente a tierra.

En el análisis siguiente, se ignorará el efecto del resistor R_B ya que es mucho más grande que el resistor en paralelo de 2.3 kΩ.

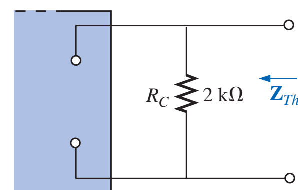


FIGURA 18.35
Determinación de la impedancia de Thévenin para la red de la figura 18.34.

$\mathbf{Z}_{Th}$ Cuando $\mathbf{E}_i$ se establece en cero volts, la corriente $\mathbf{I}_1$ será de cero ampere, y la fuente controlada $100\mathbf{I}_1$ también será de cero ampere. El resultado es un circuito abierto equivalente para la fuente, como aparece en la figura 18.35.

A partir de la figura 18.35 resulta obvio que:

$$\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{2\ k\Omega}$$

$\mathbf{E}_{Th}$ Para $\mathbf{E}_{Th}$, la corriente $\mathbf{I}_1$ de la figura 18.34 será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}_i}{R_s + 2.3\ \text{k}\Omega} = \frac{\mathbf{E}_i}{0.5\ \text{k}\Omega + 2.3\ \text{k}\Omega} = \frac{\mathbf{E}_i}{2.8\ \text{k}\Omega}$$

y
$$100\mathbf{I}_1 = (100)\left(\frac{\mathbf{E}_i}{2.8\ \text{k}\Omega}\right) = 35.71 \times 10^{-3}/\Omega\ \mathbf{E}_i$$

En referencia a la figura 18.36, encontramos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{Th} &= -(100\mathbf{I}_1)R_C \\ &= -(35.71 \times 10^{-3}/\Omega\ \mathbf{E}_i)(2 \times 10^3\ \Omega) \\ \mathbf{E}_{Th} &= \mathbf{-71.42E}_i\end{aligned}$$

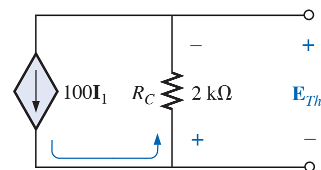


FIGURA 18.36
Determinación del voltaje de Thévenin para la red de la figura 18.34.

El circuito equivalente de Thévenin aparece en la figura 18.37 con la carga original R_L.

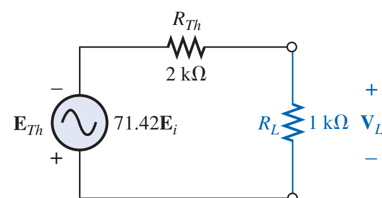


FIGURA 18.37
Circuito equivalente de Thévenin para la red de la figura 18.34.

Voltaje de salida V_L

$$\mathbf{V}_L = \frac{-R_L\mathbf{E}_{Th}}{R_L + \mathbf{Z}_{Th}} = \frac{-(1\text{ k}\Omega)(71.42\mathbf{E}_i)}{1\text{ k}\Omega + 2\text{ k}\Omega}$$

y
$$\mathbf{V}_L = \mathbf{-23.81E}_i$$

lo cual revela que el voltaje de salida es 23.81 veces el voltaje aplicado con un desplazamiento de fase de 180° debido al signo negativo.

Fuentes dependientes

El procedimiento anterior podrá aplicarse en fuentes dependientes con una *variable de control que no esté en la red bajo análisis*. Sin embargo, en fuentes dependientes de otro tipo, donde la *variable de control es parte de la red a la cual se aplicará el teorema*, deberá utilizarse otro método. La necesidad de un enfoque diferente se demostrará en el ejemplo siguiente. El método *no se limita a fuentes dependientes* como las del último tipo analizado, también puede aplicarse a cualquier red de cd o senoidal de ca. Sin embargo, para las redes con fuentes independientes, el método de aplicación utilizado en el capítulo 9 y presentado en la primera parte de esta sección es, por lo general, más directo, con los habituales ahorros en tiempo y errores.

El nuevo enfoque al teorema de Thévenin puede presentarse mejor en esta etapa del desarrollo al considerar el circuito equivalente de Thévenin de la figura 18.38(a). Como se indica en la figura 18.38(b), el voltaje en las terminales de circuito abierto ($\mathbf{E}_{oc}$) (oc, *open circuit*) del circuito equivalente de Thévenin es el voltaje equivalente de Thévenin, es decir,

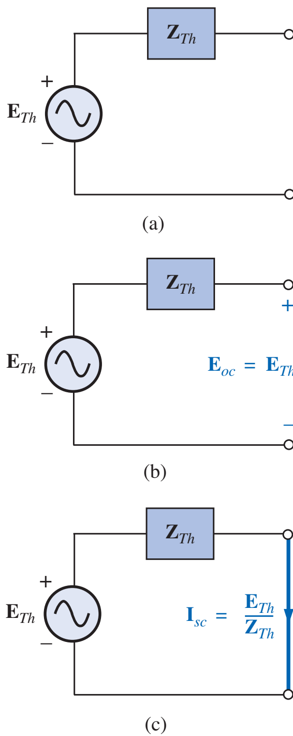


FIGURA 18.38
Definición de un método alternativo para determinar la impedancia de Thévenin.

$$\mathbf{E}_{oc} = \mathbf{E}_{Th} \tag{18.1}$$

Si las terminales externas están en corto circuito (sc, *short circuit*) como en la figura 18.38(c), la corriente resultante de corto circuito se determinará mediante:

$$\mathbf{I}_{sc} = \frac{\mathbf{E}_{Th}}{\mathbf{Z}_{Th}} \tag{18.2}$$

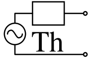
o, al reacomodar,

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_{Th}}{\mathbf{I}_{sc}}$$

y
$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} \tag{18.3}$$

Las ecuaciones (18.1) y (18.3) indican que para cualquier red de ca o cd lineal bilateral con o sin fuentes dependientes de cualquier tipo, si el voltaje en las terminales de circuito abierto de una parte de una red puede determinarse junto con la corriente de corto circuito entre las mismas dos terminales, el circuito equivalente de Thévenin se conocerá efectivamente. Algunos ejemplos volverán más claro este método cuya ventaja, enfatizada anteriormente en esta sección para las fuentes independientes, ahora deberá resultar obvia. La corriente $\mathbf{I}_{sc}$, que es necesaria para calcular $\mathbf{Z}_{Th}$, en general es más difícil de obtener dado que todas las fuentes están presentes.

Existe un tercer enfoque al circuito equivalente de Thévenin que también es útil desde un punto de vista práctico. En este método el voltaje deThévenin se



calcula como en los dos métodos previos. Sin embargo, la impedancia de Thévenin se obtiene al aplicar una fuente de voltaje a las terminales de interés y determinando la corriente de fuente como se indica en la figura 18.39. Para este método, el voltaje de fuente de la red original se establece en cero. La impedancia de Thévenin se determina entonces mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{I}_g} \tag{18.4}$$

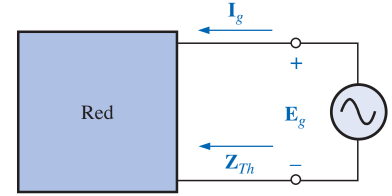


FIGURA 18.39
Determinación de $\mathbf{Z}_{Th}$ utilizando el método $\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{E}_g/\mathbf{I}_g$.

Observe que para cada técnica $\mathbf{E}_{Th} = \mathbf{E}_{oc}$, pero la impedancia de Thévenin se calcula de distintas formas.

EJEMPLO 18.10 Utilizando cada una de las tres técnicas descritas en esta sección, determine el circuito equivalente de Thévenin para la red de la figura 18.40.

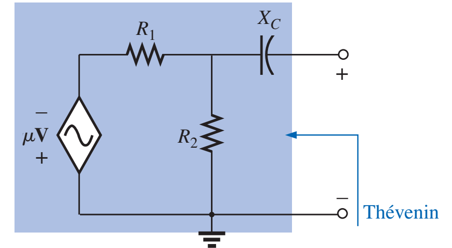


FIGURA 18.40
Ejemplo 18.10.

Solución: Dado que para cada método el voltaje de Thévenin se calcula exactamente de la misma forma, éste se determinará primero. A partir de la figura 18.40, donde $\mathbf{I}_{X_C} = 0$,

Debido a la polaridad de **V** y las polaridades definidas en las terminales

$$\mathbf{V}_{R_1} = \mathbf{E}_{Th} = \mathbf{E}_{oc} = \downarrow -\frac{R_2(\mu\mathbf{V})}{R_1 + R_2} = -\frac{\boldsymbol{\mu R_2 \mathbf{V}}}{\boldsymbol{R_1 + R_2}}$$

Los siguientes tres métodos para determinar la impedancia de Thévenin aparecen en el orden en que se presentaron en esta sección.

Método 1: Vea la figura 18.41

$$\mathbf{Z}_{Th} = \boldsymbol{R_1 \parallel R_2 - j\,X_C}$$

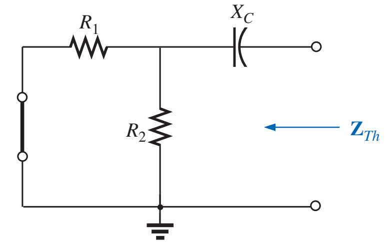


FIGURA 18.41
Determinación de la impedancia de Thévenin para la red de la figura 18.40.

Método 2: Vea la figura 18.42. Al convertir la fuente de voltaje a una fuente de corriente (Figura 18.43), tenemos (regla del divisor de corriente):

$$\mathbf{I}_{sc} = \frac{-(R_1 \parallel R_2)\dfrac{\mu\mathbf{V}}{R_1}}{(R_1 \parallel R_2) - j\,X_C} = \frac{-\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\left(\dfrac{\mu\mathbf{V}}{R_1}\right)}{(R_1 \parallel R_2) - j\,X_C}$$

$$= \frac{-\mu R_2\mathbf{V}}{R_1 + R_2}$$

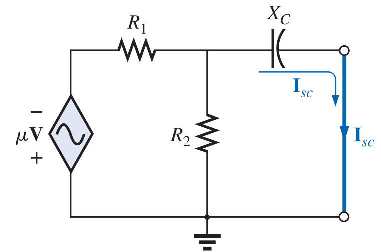


FIGURA 18.42
Determinación de la corriente de corto circuito para la red de la figura 18.40.

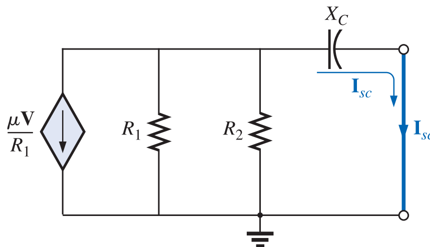


FIGURA 18.43
Conversión de la fuente de voltaje de la figura 18.42 a una fuente de corriente.

y

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{\dfrac{-\mu R_2\mathbf{V}}{R_1 + R_2}}{\dfrac{-\mu R_2\mathbf{V}}{(R_1 \parallel R_2) - j X_C}} = \frac{1}{\dfrac{1}{(R_1 \parallel R_2) - j X_C}}$$

$$= \boldsymbol{R_1 \parallel R_2 - j\, X_C}$$

Método 3: Vea la figura 18.44.

$$\mathbf{I}_g = \frac{\mathbf{E}_g}{(R_1 \parallel R_2) - j\, X_C}$$

y

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{I}_g} = \boldsymbol{R_1 \parallel R_2 - j\, X_C}$$

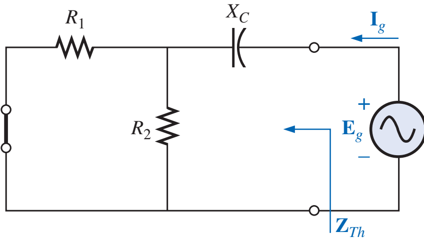


FIGURA 18.44
Determinación de la impedancia de Thévenin para la red de la figura 18.40 utilizando el método $\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{E}_g/\mathbf{I}_g$.

En cada caso, la impedancia de Thévenin es la misma. El circuito equivalente de Thévenin resultante se muestra en la figura 18.45.

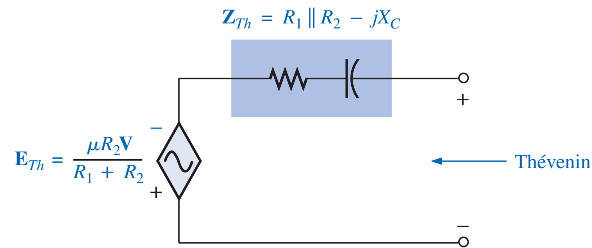


FIGURA 18.45
Circuito equivalente de Thévenin para la red de la figura 18.40.

EJEMPLO 18.11 Repita el ejemplo 18.10 para la red de la figura 18.46.

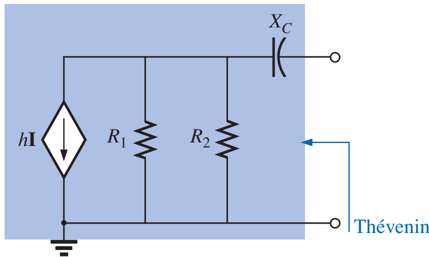


FIGURA 18.46
Ejemplo 18.11.

Solución: A partir de la figura 18.46, $\mathbf{E}_{Th}$ es:

$$\mathbf{E}_{Th} = \mathbf{E}_{oc} = -h\mathbf{I}(R_1 \parallel R_2) = -\frac{\boldsymbol{hR_1R_2\mathbf{I}}}{\boldsymbol{R_1 + R_2}}$$

Método 1: Vea la figura 18.47.

$$\mathbf{Z}_{Th} = \boldsymbol{R_1 \parallel R_2 - j\, X_C}$$

Observe la similitud entre esta solución y la obtenida para el ejemplo anterior.

Método 2: Vea la figura 18.48.

$$\mathbf{I}_{sc} = \frac{-(R_1 \parallel R_2)h\mathbf{I}}{(R_1 \parallel R_2) - j\, X_C}$$

y

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{-h\mathbf{I}(R_1 \parallel R_2)}{\dfrac{-(R_1 \parallel R_2)h\mathbf{I}}{(R_1 \parallel R_2) - j\, X_C}} = \boldsymbol{R_1 \parallel R_2 - j\, X_C}$$

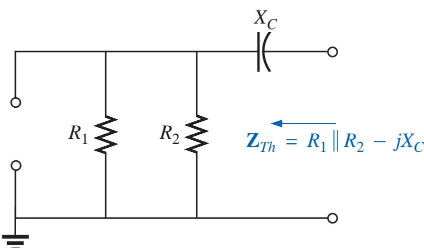
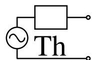


FIGURA 18.47
Determinación de la impedancia de Thévenin para la red de la figura 18.46.



Método 3: Vea la figura. 18.49.

$$\mathbf{I}_g = \frac{\mathbf{E}_g}{(R_1 \parallel R_2) - j\,X_C}$$

y
$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{I}_g} = \boldsymbol{R_1 \parallel R_2 - j\,X_C}$$

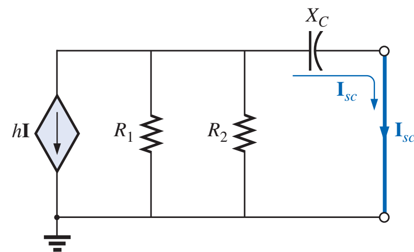


FIGURA 18.48
Determinación de la corriente de corto circuito para la red de la figura 18.46.

El siguiente ejemplo tiene una fuente dependiente que no permitirá el uso del método descrito al comienzo de esta sección para las fuentes independientes. Sin embargo, se aplicarán los tres métodos para que los resultados puedan compararse.

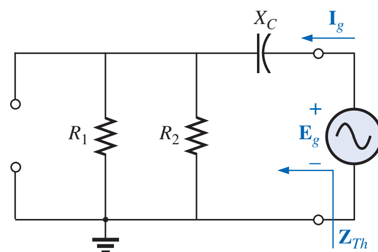


FIGURA 18.49
Determinación de la impedancia de Thévenin utilizando el método $\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{E}_g/\mathbf{I}_g$.

EJEMPLO 18.12 Para la red de la figura 18.50 (presentada en el ejemplo 18.6), determine el circuito equivalente de Thévenin entre las terminales indicadas utilizando cada método descrito en esta sección. Compare los resultados.

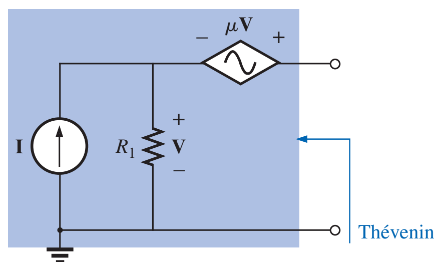


FIGURA 18.50
Ejemplo 18.12.

Solución: Primero, utilizando la ley de voltaje de Kirchhoff, se escribe $\mathbf{E}_{Th}$ (que es la misma para cada método):

$$\mathbf{E}_{Th} = \mathbf{V} + \mu\mathbf{V} = (1 + \mu)\mathbf{V}$$

Sin embargo,
$$\mathbf{V} = \mathbf{I}R_1$$
por lo que:
$$\mathbf{E}_{Th} = \boldsymbol{(1 + \mu)\mathbf{I}R_1}$$

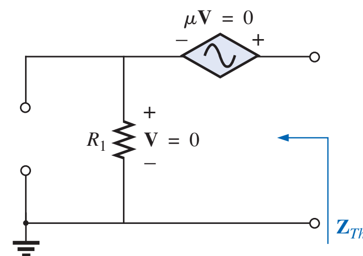


FIGURA 18.51
Determinación incorrecta de $\mathbf{Z}_{Th}$.

$\mathbf{Z}_{Th}$

Método 1: Vea la figura 18.51. Dado que $\mathbf{I} = 0$, $\mathbf{V}$ y $\mu\mathbf{V} = 0$, y

$$\mathbf{Z}_{Th} = R_1 \qquad \text{(incorrecto)}$$

Método 2: Vea la figura 18.52. La ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo indicado genera:

$$\mathbf{V} + \mu\mathbf{V} = 0$$

y
$$\mathbf{V}(1 + \mu) = 0$$

Dado que μ es una constante positiva, la ecuación anterior puede satisfacerse solamente cuando $\mathbf{V} = 0$. La sustitución de este resultado en la figura 18.52 generará la configuración de la figura 18.53, y

$$\mathbf{I}_{sc} = \mathbf{I}$$

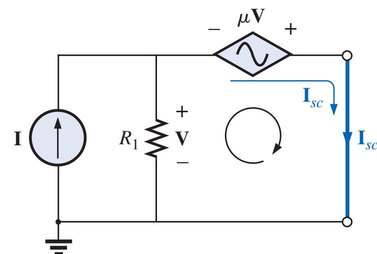
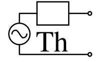


FIGURA 18.52
Determinación de $\mathbf{I}_{sc}$ *para la red de la figura 18.50.*



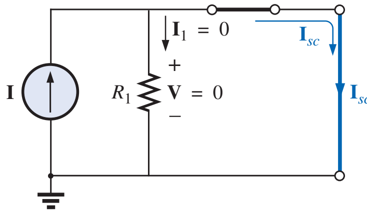


FIGURA 18.53
Sustitución de **V** *= 0 en la red de la figura 18.52.*

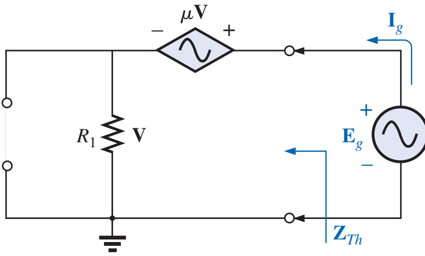


FIGURA 18.54
Determinación de $\mathbf{Z}_{Th}$ *utilizando el método* $\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{E}_g/\mathbf{I}_g$.

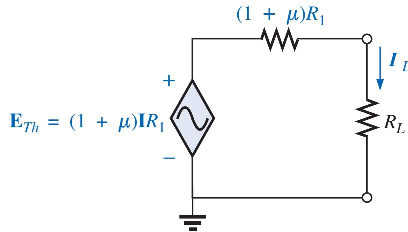


FIGURA 18.55
Circuito equivalente de Thévenin para la red de la figura 18.50.

con:

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{(1 + \mu)\mathbf{I}R_1}{\mathbf{I}} = \mathbf{(1 + \mu)}\boldsymbol{R_1} \qquad \text{(correcta)}$$

Método 3: Vea la figura 18.54.

$$\mathbf{E}_g = \mathbf{V} + \mu\mathbf{V} = (1 + \mu)\mathbf{V}$$

o bien:
$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{E}_g}{1 + \mu}$$

e
$$\mathbf{I}_g = \frac{\mathbf{V}}{R_1} = \frac{\mathbf{E}_g}{(1 + \mu)R_1}$$

y
$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{I}_g} = \mathbf{(1 + \mu)}\boldsymbol{R_1} \qquad \text{(correcta)}$$

El circuito equivalente de Thévenin aparece en la figura 18.55, y

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{(1 + \mu)}\boldsymbol{R_1}\mathbf{I}}{\boldsymbol{R_L} + \mathbf{(1 + \mu)}\boldsymbol{R_1}}$$

lo cual se compara con el resultado del ejemplo 18.6.

La red de la figura 18.56 es la configuración básica del circuito equivalente del transistor aplicada con mayor frecuencia en la actualidad (aunque muchos libros de electrónica utilizarán la figura del círculo en lugar de la de diamante para simbolizar la fuente). Por supuesto, es necesario conocer sus características y ser experto en su uso. Observe que existe tanto una fuente de voltaje controlada como una fuente de corriente controlada, cada una controlada a su vez por variables dentro de la configuración.

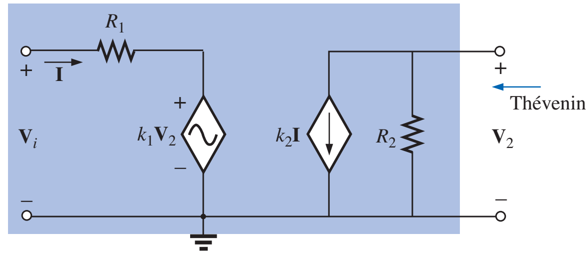


FIGURA 18.56
Ejemplo 18.13: red equivalente del transistor.

EJEMPLO 18.13 Determine el circuito equivalente de Thévenin para las terminales indicadas de la red que aparece en la figura 18.56.

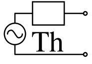
Solución: Se aplica el segundo método presentado en esta sección.

$\mathbf{E}_{Th}$

$$\mathbf{E}_{oc} = \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_i - k_1\mathbf{V}_2}{R_1} = \frac{\mathbf{V}_i - k_1\mathbf{E}_{oc}}{R_1}$$

y
$$\mathbf{E}_{oc} = -k_2\mathbf{I}R_2 = -k_2R_2\left(\frac{\mathbf{V}_i - k_1\mathbf{E}_{oc}}{R_1}\right)$$
$$= \frac{-k_2R_2\mathbf{V}_i}{R_1} + \frac{k_1k_2R_2\mathbf{E}_{oc}}{R_1}$$



o bien: $$\mathbf{E}_{oc}\left(1 - \frac{k_1k_2R_2}{R_1}\right) = \frac{-k_2R_2\mathbf{V}_i}{R_1}$$

y $$\mathbf{E}_{oc}\left(\frac{R_1 - k_1k_2R_2}{\not{R}_1}\right) = \frac{-k_2R_2\mathbf{V}_i}{\not{R}_1}$$

de manera que: $$\mathbf{E}_{oc} = \frac{-k_2R_2\mathbf{V}_i}{R_1 - k_1k_2R_2} = \mathbf{E}_{Th} \tag{18.5}$$

$\mathbf{I}_{sc}$ Para la red de la figura 18.57, donde:

$$\mathbf{V}_2 = 0 \qquad k_1\mathbf{V}_2 = 0 \qquad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_i}{R_1}$$

e $$\mathbf{I}_{sc} = -k_2\mathbf{I} = \frac{-k_2\mathbf{V}_i}{R_1}$$

de manera que: $$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{\dfrac{-k_2R_2\mathbf{V}_i}{R_1 - k_1k_2R_2}}{} = \frac{R_1R_2}{R_1 - k_1k_2R_2}$$

y $$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{R_2}{1 - \dfrac{k_1k_2R_2}{R_1}} \tag{18.6}$$

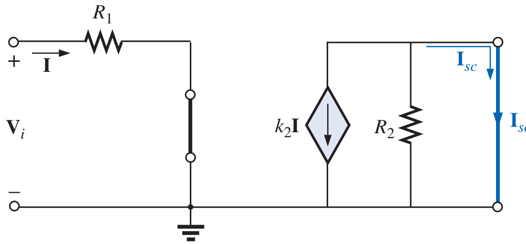


FIGURA 18.57
Determinación de $\mathbf{I}_{sc}$ *para la red de la figura 18.56.*

Con frecuencia se aplica la aproximación $k_1 \cong 0$. Entonces el voltaje y la impedancia de Thévenin son:

$$\mathbf{E}_{Th} = \frac{-k_2R_2\mathbf{V}_i}{R_1} \qquad k_1 = 0 \tag{18.7}$$

$$\mathbf{Z}_{Th} = R_2 \qquad k_1 = 0 \tag{18.8}$$

Al aplicar $\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{E}_g/\mathbf{I}_g$ a la red de la figura 18.58, donde:

$$\mathbf{I} = \frac{-k_1\mathbf{V}_2}{R_1}$$

Pero: $$\mathbf{V}_2 = \mathbf{E}_g$$

de manera que: $$\mathbf{I} = \frac{-k_1\mathbf{E}_g}{R_1}$$

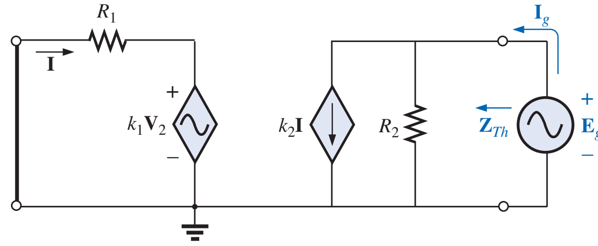


FIGURA 18.58
Determinación de $\mathbf{Z}_{Th}$ utilizando el procedimiento $\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{E}_g/\mathbf{I}_g$.

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff tenemos:

$$\mathbf{I}_g = k_2\mathbf{I} + \frac{\mathbf{E}_g}{R_2} = k_2\left(-\frac{k_1\mathbf{E}_g}{R_1}\right) + \frac{\mathbf{E}_g}{R_2}$$

$$= \mathbf{E}_g\left(\frac{1}{R_2} - \frac{k_1k_2}{R_1}\right)$$

e
$$\frac{\mathbf{I}_g}{\mathbf{E}_g} = \frac{R_1 - k_1k_2R_2}{R_1R_2}$$

o bien:
$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{I}_g} = \frac{\boldsymbol{R_1R_2}}{\boldsymbol{R_1 - k_1k_2R_2}}$$

como se obtuvo antes.

Los últimos dos métodos presentados en esta sección se aplicaron sólo a redes donde las magnitudes de las fuentes controladas eran dependientes de una variable dentro de la red para la cual se obtendría el circuito equivalente de Thévenin. El lector debe comprender que ambos métodos también pueden aplicarse a cualquier red de cd o senoidal de ca que contenga sólo fuentes independientes o fuentes dependientes del otro tipo.

18.4 TEOREMA DE NORTON

Los tres métodos descritos para el teorema de Thévenin serán modificados para permitir su uso con el **teorema de Norton**. Dado que las impedancias de Thévenin y de Norton son las mismas para una red en particular, ciertas partes del análisis serán similares a las encontradas en la sección anterior. Primero consideraremos las fuentes independientes y el método desarrollado en el capítulo 9, seguido por las fuentes dependientes y las nuevas técnicas desarrolladas para el teorema de Thévenin.

Del capítulo 9, recuérdese que el teorema de Norton permite reemplazar cualquier red de ca bilateral lineal de dos terminales con un circuito equivalente que consta de una fuente de corriente y una impedancia, como en la figura 18.59.

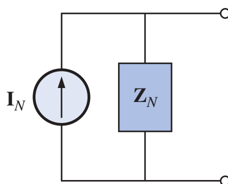


FIGURA 18.59
Circuito equivalente de Norton para redes de ca.

El circuito equivalente de Norton, de la misma forma que el circuito equivalente de Thévenin, es aplicable sólo a una frecuencia dado que las reactancias son dependientes de la frecuencia.

Fuentes independientes

El procedimiento presentado a continuación para obtener el equivalente de Norton de una red de ca senoidal se modifica (a partir del que aparece en el capítulo 9), sólo en un aspecto: el reemplazo del término *resistencia* por el de *impedancia*.

1. ***Elimine la parte de la red en la cual se obtendrá el circuito equivalente de Norton.***
2. ***Marque (○, ●, y así por el estilo) las terminales de la red de dos terminales restante.***
3. ***Calcule $\mathbf{Z}_N$ estableciendo primero todas las fuentes de voltaje y de corriente en cero (corto circuito y circuito abierto, respectivamente) y obteniendo luego la impedancia resultante entre las dos terminales marcadas.***
4. ***Calcule $\mathbf{I}_N$ reemplazando primero las fuentes de voltaje y de corriente y obteniendo luego la corriente de corto circuito entre las terminales marcadas.***
5. ***Trace el circuito equivalente de Norton con la parte del circuito anteriormente eliminado reemplazada entre las terminales del circuito equivalente de Norton.***

Los circuitos equivalentes de Norton y Thévenin pueden obtenerse uno a partir del otro utilizando la transformación de fuentes que se muestra en la figura 18.60. La transformación de fuentes es aplicable a cualquier circuito equivalente de Thévenin o Norton determinado a partir de una red con cualquier combinación de fuentes independientes o dependientes.

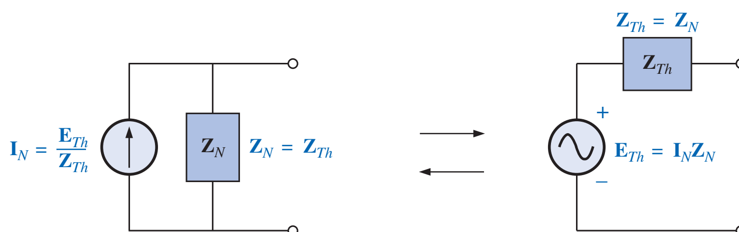


FIGURA 18.60
Conversión entre los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton.

EJEMPLO 18.14 Determine el circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor de 6 Ω de la figura 18.61.

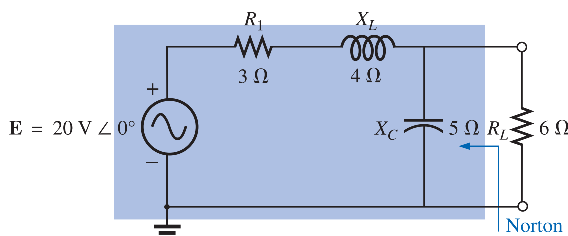


FIGURA 18.61
Ejemplo 18.14.

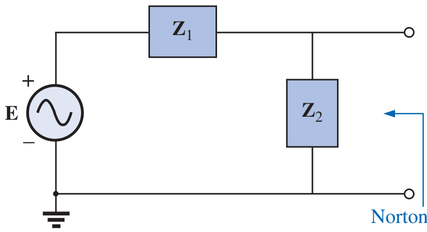


FIGURA 18.62
Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 18.61.

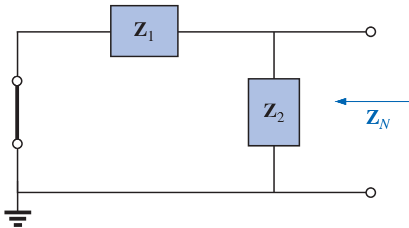


FIGURA 18.63
Determinación de la impedancia de Norton para la red de la figura 18.61.

Solución:

Los *Pasos 1* y *2* (Figura 18.62):

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j\,X_L = 3\;\Omega + j\,4\;\Omega = 5\;\Omega\;\angle 53.13^\circ$$
$$\mathbf{Z}_2 = -j\,X_C = -j\,5\;\Omega$$

Paso 3 (Figura 18.63):

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(5\;\Omega\;\angle 53.13^\circ)(5\;\Omega\;\angle -90^\circ)}{3\;\Omega + j\,4\;\Omega - j\,5\;\Omega} = \frac{25\;\Omega\;\angle -36.87^\circ}{3 - j\,1}$$
$$= \frac{25\;\Omega\;\angle -36.87^\circ}{3.16\;\angle -18.43^\circ} = 7.91\;\Omega\;\angle -18.44^\circ = \mathbf{7.50\;\Omega - \mathit{j}\,2.50\;\Omega}$$

Paso 4 (Figura 18.64):

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{20\;\text{V}\;\angle 0^\circ}{5\;\Omega\;\angle 53.13^\circ} = \mathbf{4\;A\;\angle -53.13^\circ}$$

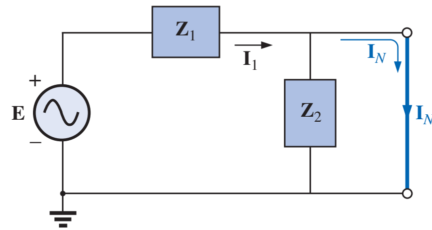


FIGURA 18.64
Determinación de $\mathbf{I}_N$ *para la red de la figura 18.61.*

Paso 5: El circuito equivalente de Norton se muestra en la figura 18.65.

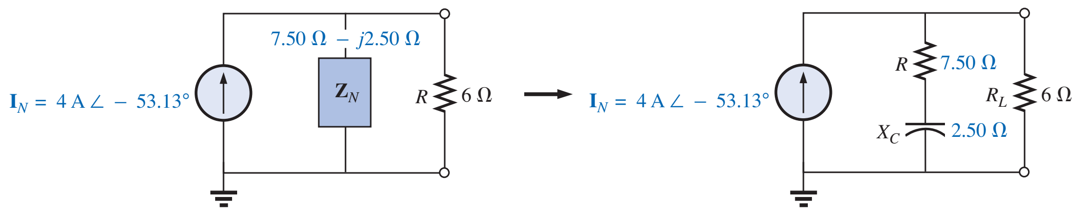


FIGURA 18.65
Circuito equivalente de Norton para la red de la figura 18.61.

EJEMPLO 18.15 Obtenga el circuito equivalente de Norton para la red externa a la reactancia capacitiva de 7 Ω en la figura 18.66.

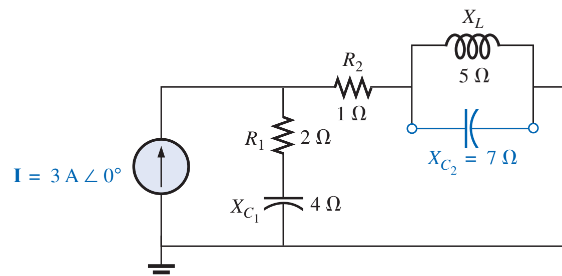


FIGURA 18.66
Ejemplo 18.15.

Solución:

Los *Pasos 1* y *2* (Figura 18.67):

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 - j\,X_{C_1} = 2\ \Omega - j\,4\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_2 = R_2 = 1\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_3 = +j\,X_L = j\,5\ \Omega$$

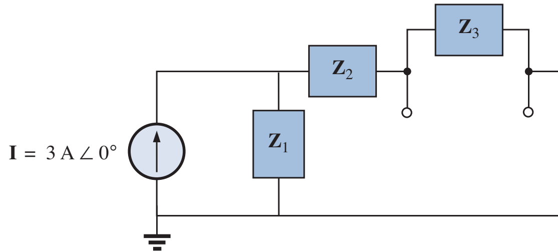


FIGURA 18.67
Asignación de las impedancias con subíndice a la red de la figura 18.66.

Paso 3 (Figura 18.68):

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{Z}_3(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)}{\mathbf{Z}_3 + (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)}$$
$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 2\ \Omega - j\,4\ \Omega + 1\ \Omega = 3\ \Omega - j\,4\ \Omega = 5\ \Omega\ \angle -53.13^\circ$$
$$\mathbf{Z}_N = \frac{(5\ \Omega\ \angle 90^\circ)(5\ \Omega\ \angle -53.13^\circ)}{j\,5\ \Omega + 3\ \Omega - j\,4\ \Omega} = \frac{25\ \Omega\ \angle 36.87^\circ}{3 + j\,1}$$
$$= \frac{25\ \Omega\ \angle 36.87^\circ}{3.16\ \angle +18.43^\circ}$$
$$\mathbf{Z}_N = 7.91\ \Omega\ \angle 18.44^\circ = \mathbf{7.50\ \Omega + j\,2.50\ \Omega}$$

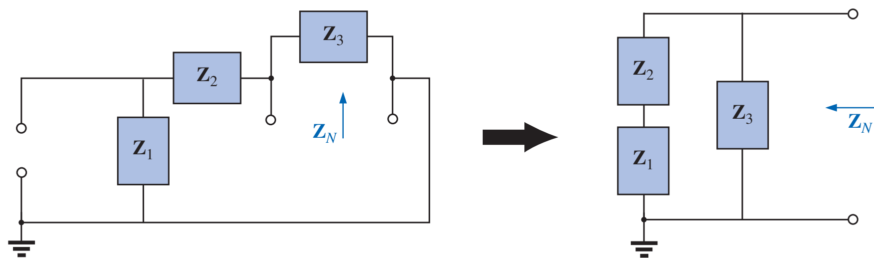


FIGURA 18.68
Obtención de la impedancia de Norton para la red de la figura 18.66.

Calculadora Al realizar los cálculos anteriores en la calculadora TI-86 se obtiene lo siguiente:

```
((0,5)*((2,−4)+(1,0)))/((0,5)+((2,−4)+(1,0)))
    (7.500E0,2.500E0)
Ans ► Pol
    (7.906E0∠18.435E0)
```

CÁLCULO 18.2

Paso 4 (Figura 18.69):

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{I}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \qquad \text{(regla del divisor de corriente)}$$

$$= \frac{(2\,\Omega - j\,4\,\Omega)(3\,\text{A})}{3\,\Omega - j\,4\,\Omega} = \frac{6\,\text{A} - j\,12\,\text{A}}{5\,\angle -53.13^\circ} = \frac{13.4\,\text{A}\,\angle -63.43^\circ}{5\,\angle -53.13^\circ}$$

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{2.68\,A\,\angle -10.3^\circ}$$

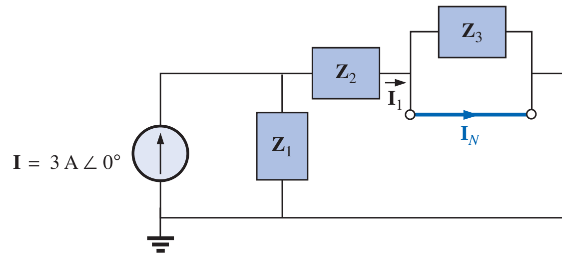


FIGURA 18.69
Determinación de $\mathbf{I}_N$ para la red de la figura 18.66.

Paso 5: El circuito equivalente de Norton se muestra en la figura 18.70.

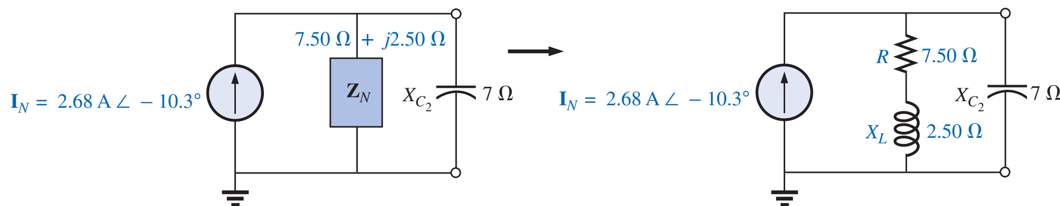


FIGURA 18.70
Circuito equivalente de Norton para la red de la figura 18.66.

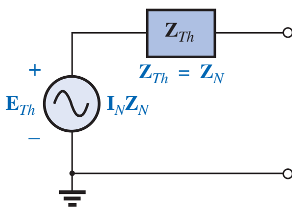


FIGURA 18.71
Determinación del circuito equivalente de Thévenin para el circuito equivalente de Norton de la figura 18.70.

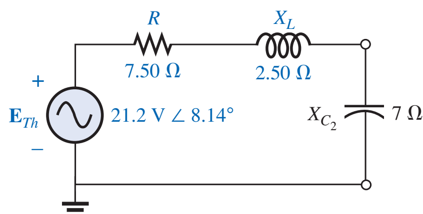


FIGURA 18.72
Circuito equivalente de Thévenin para la red de la figura 18.66.

EJEMPLO 18.16 Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para la red externa a la reactancia capacitiva de 7 Ω en la figura 18.66.

Solución: Utilizando la conversión entre fuentes (Figura 18.71) obtenemos:

$$\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{Z}_N = \mathbf{7.50\,\Omega + \mathit{j}\,2.50\,\Omega}$$

$$\mathbf{E}_{Th} = \mathbf{I}_N\mathbf{Z}_N = (2.68\,\text{A}\,\angle -10.3^\circ)(7.91\,\Omega\,\angle 18.44^\circ)$$

$$= \mathbf{21.2\,V\,\angle 8.14^\circ}$$

El circuito equivalente de Thévenin se muestra en la figura 18.72.

Fuentes dependientes

Como se establece para el teorema de Thévenin, *fuentes dependientes donde la variable de control no está determinada por la red* para la cual se obtendrá el circuito equivalente de Norton no alteran el procedimiento presentado antes.

Para las fuentes dependientes de otro tipo deberá aplicarse uno de los dos procedimientos siguientes; ambos pueden aplicarse también a las redes con cualquier combinación de fuentes independientes y fuentes dependientes no controladas por la red bajo análisis.

El circuito equivalente de Norton aparece en la figura 18.73(a). En la figura 18.73(b) encontramos que:

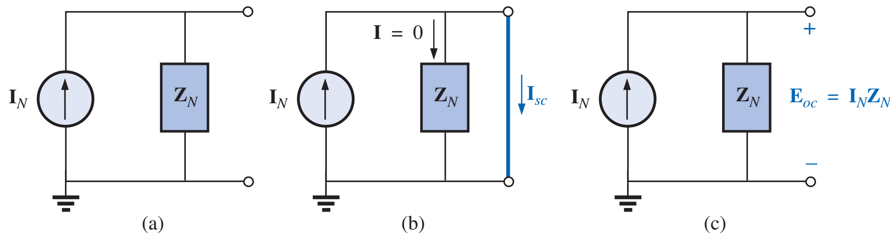


FIGURA 18.73
Definición de un método alternativo para determinar $\mathbf{Z}_N$.

$$\mathbf{I}_{sc} = \mathbf{I}_N \tag{18.9}$$

y en la figura 18.73(c) vemos que:

$$\mathbf{E}_{oc} = \mathbf{I}_N\mathbf{Z}_N$$

O, al reagrupar términos, tenemos:

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{E}_{oc}}{\mathbf{I}_N}$$

y

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{E}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} \tag{18.10}$$

La impedancia de Norton también puede determinarse mediante la aplicación de una fuente de voltaje $\mathbf{E}_g$ a las terminales de interés y obteniendo la $\mathbf{I}_g$ resultante, como se muestra en la figura 18.74. Todas las fuentes independientes y las fuentes dependientes no controladas por una variable dentro de la red de interés se establecen en cero, y

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{I}_g} \tag{18.11}$$

Para este último método, la corriente de Norton sigue estando determinada por la corriente de corto circuito.

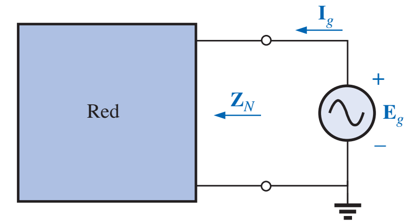


FIGURA 18.74
Determinación de la impedancia de Norton utilizando el método $\mathbf{Z}_N = \mathbf{E}_g/\mathbf{I}_g$.

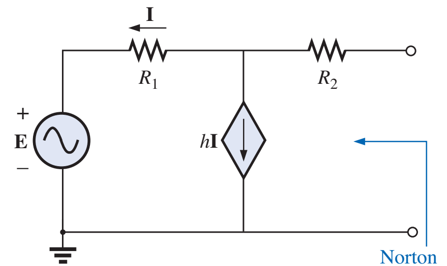


FIGURA 18.75
Ejemplo 18.17.

EJEMPLO 18.17 Utilizando cada uno de los métodos descritos para las fuentes dependientes, obtenga el circuito equivalente de Norton para la red de la figura 18.75.

Solución:

$\mathbf{I}_N$ Para cada método, $\mathbf{I}_N$ está determinada en la misma forma. A partir de la figura 18.76, utilizando la ley de corriente de Kirchhoff, tenemos:

$$0 = \mathbf{I} + h\mathbf{I} + \mathbf{I}_{sc}$$

o bien:

$$\mathbf{I}_{sc} = -(1 + h)\mathbf{I}$$

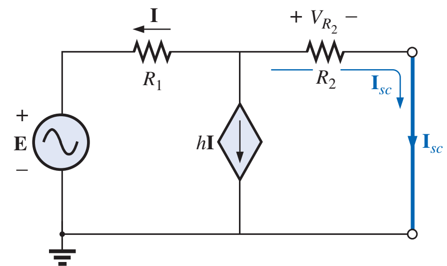


FIGURA 18.76
Determinación de $\mathbf{I}_{sc}$ *para la red de la figura 18.75.*

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff se obtiene:

$$\mathbf{E} + \mathbf{I}R_1 - \mathbf{I}_{sc}R_2 = 0$$

e

$$\mathbf{I}R_1 = \mathbf{I}_{sc}R_2 - \mathbf{E}$$

o bien:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{I}_{sc}R_2 - \mathbf{E}}{R_1}$$

de manera que:

$$\mathbf{I}_{sc} = -(1+h)\mathbf{I} = -(1+h)\left(\frac{\mathbf{I}_{sc}R_2 - \mathbf{E}}{R_1}\right)$$

o bien:

$$R_1\mathbf{I}_{sc} = -(1+h)\mathbf{I}_{sc}R_2 + (1+h)\mathbf{E}$$

$$\mathbf{I}_{sc}[R_1 + (1+h)R_2] = (1+h)\mathbf{E}$$

$$\mathbf{I}_{sc} = \frac{\mathbf{(1+h)E}}{\boldsymbol{R_1 + (1+h)R_2}} = \mathbf{I}_N$$

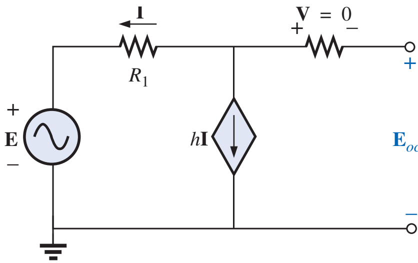


FIGURA 18.77
Determinación de $\mathbf{E}_{oc}$ *para la red de la figura 18.75.*

$\mathbf{Z}_N$

Método 1: $\mathbf{E}_{oc}$ está determinado a partir de la red de la figura 18.77. Mediante la ley de corriente de Kirchhoff,

$$0 = \mathbf{I} + h\mathbf{I} \quad \text{o} \quad \mathbf{I}(h+1) = 0$$

Para h, una constante positiva $\mathbf{I}$ deberá ser igual a cero para satisfacer lo anterior. Por tanto,

$$\mathbf{I} = 0 \quad \text{y} \quad h\mathbf{I} = 0$$

y

$$\mathbf{E}_{oc} = \mathbf{E}$$

con:

$$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{E}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{\mathbf{E}}{\dfrac{(1+h)\mathbf{E}}{R_1 + (1+h)R_2}} = \frac{\boldsymbol{R_1 + (1+h)R_2}}{\boldsymbol{(1+h)}}$$

Método 2: Observe la figura 18.78. Mediante la ley de corriente de Kirchhoff,

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{I} + h\mathbf{I} = (1+h)\mathbf{I}$$

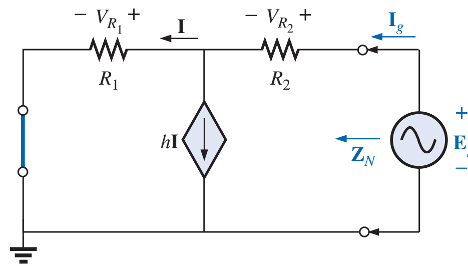


FIGURA 18.78
Determinación de la impedancia de Norton utilizando el método $\mathbf{Z}_N = \mathbf{E}_g/\mathbf{I}_g$.

Mediante la ley de voltaje de Kirchhoff,

$$\mathbf{E}_g - \mathbf{I}_gR_2 - \mathbf{I}R_1 = 0$$

o bien:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}_g - \mathbf{I}_gR_2}{R_1}$$

Al sustituir tenemos:

$$\mathbf{I}_g = (1+h)\mathbf{I} = (1+h)\left(\frac{\mathbf{E}_g - \mathbf{I}_gR_2}{R_1}\right)$$

e

$$\mathbf{I}_gR_1 = (1+h)\mathbf{E}_g - (1+h)\mathbf{I}_gR_2$$

de manera que: $\mathbf{E}_g(1 + h) = \mathbf{I}_g[R_1 + (1 + h)R_2]$

o bien: $$\mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{E}_g}{\mathbf{I}_g} = \frac{R_1 + (1 + h)R_2}{1 + h}$$

lo cual coincide con lo anterior.

EJEMPLO 18.18 Obtenga el circuito equivalente de Norton para la configuración de red de la figura 18.56.

Solución: Mediante conversión de fuente,

$$\mathbf{I}_N = \frac{\mathbf{E}_{Th}}{\mathbf{Z}_{Th}} = \frac{\dfrac{-k_2R_2\mathbf{V}_i}{R_1 - k_1k_2R_2}}{}$$

e $$\mathbf{I}_N = \frac{-k_2\mathbf{V}_i}{R_1} \tag{18.12}$$

lo cual es $\mathbf{I}_{sc}$ como fue determinado en el ejemplo 18.13, y

$$\mathbf{Z}_N = \mathbf{Z}_{Th} = \frac{R_2}{1 - \dfrac{k_1k_2R_2}{R_1}} \tag{18.13}$$

Para $k_1 \cong 0$, tenemos:

$$\mathbf{I}_N = \frac{-k_2\mathbf{V}_i}{R_1} \qquad k_1 = 0 \tag{18.14}$$

$$\mathbf{Z}_N = R_2 \qquad k_1 = 0 \tag{18.15}$$

18.5 TEOREMA DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

Al aplicarse a circuitos de ca, el **teorema de máxima transferencia de potencia** establece que

se entregará máxima potencia a una carga cuando la impedancia de carga es el conjugado de la impedancia de Thévenin a través de sus terminales.

Es decir, para la figura 18.79, para la máxima transferencia de potencia hacia la carga,

$$Z_L = Z_{Th} \quad \text{y} \quad \theta_L = -\theta_{Th_Z} \tag{18.16}$$

o, en forma rectangular,

$$R_L = R_{Th} \quad \text{y} \quad \pm j\,X_{\text{carga}} = \mp j\,X_{Th} \tag{18.17}$$

Las condiciones recién mencionadas harán que la impedancia total del circuito aparezca como puramente resistiva, como se indica en la figura 18.80:

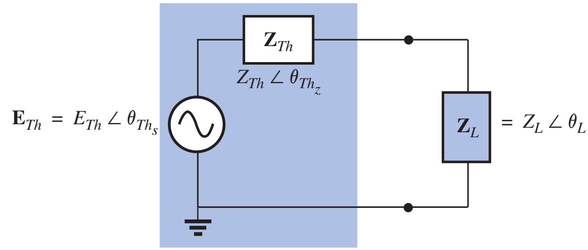


FIGURA 18.79
Definición de las condiciones para máxima transferencia de potencia hacia una carga.

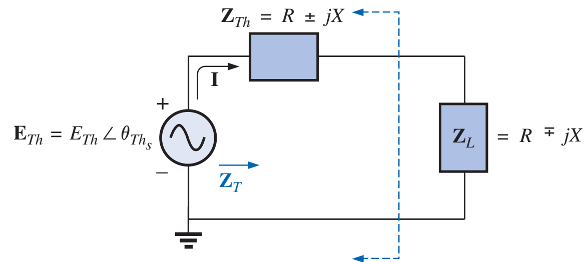


FIGURA 18.80
Condiciones para máxima transferencia de potencia a $\mathbf{Z}_L$.

$$\mathbf{Z}_T = (R \pm j\,X) + (R \mp j\,X)$$

y

$$\boxed{\mathbf{Z}_T = 2R} \tag{18.18}$$

Dado que el circuito es puramente resistivo, el factor de potencia del circuito bajo condiciones de potencia máxima será 1; es decir,

$$\boxed{F_p = 1} \qquad \text{(máxima transferencia de potencia)} \tag{18.19}$$

La magnitud de la corriente **I** de la figura 18.80 es:

$$I = \frac{E_{Th}}{Z_T} = \frac{E_{Th}}{2R}$$

La máxima potencia hacia la carga es:

$$P_{\text{máx}} = I^2R = \left(\frac{E_{Th}}{2R}\right)^2 R$$

y

$$\boxed{P_{\text{máx}} = \frac{E_{Th}^2}{4R}} \tag{18.20}$$

EJEMPLO 18.19 Obtenga la impedancia de carga en la figura 18.81 para una máxima potencia hacia la carga, y obtenga la potencia máxima.

Solución: Determine $\mathbf{Z}_{Th}$ [Figura 18.82(a)]:

$$\mathbf{Z}_1 = R - j\,X_C = 6\,\Omega - j\,8\,\Omega = 10\,\Omega \angle -53.13^\circ$$
$$\mathbf{Z}_2 = +j\,X_L = j\,8\,\Omega$$

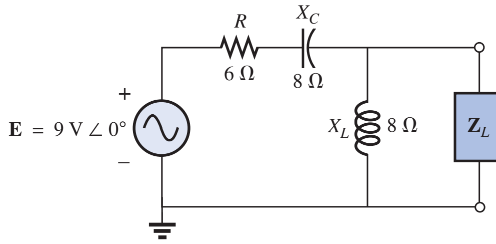


FIGURA 18.81
Ejemplo 18.19.

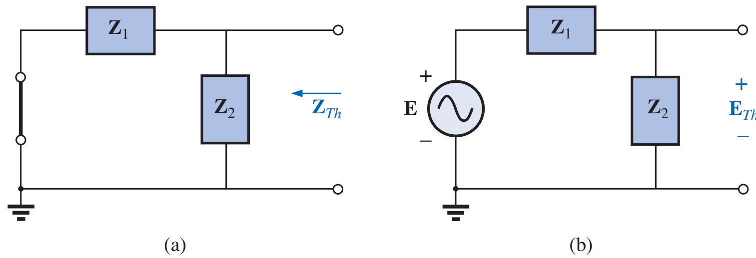


FIGURA 18.82
Determinación de (a) $\mathbf{Z}_{Th}$ *y (b)* $\mathbf{E}_{Th}$ *para la red externa a la carga en la figura 18.81.*

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{(10\ \Omega\ \angle -53.13°)(8\ \Omega\ \angle 90°)}{6\ \Omega - j\,8\ \Omega + j\,8\ \Omega} = \frac{80\ \Omega\ \angle 36.87°}{6\ \angle 0°}$$

$$= 13.33\ \Omega\ \angle 36.87° = 10.66\ \Omega + j\,8\ \Omega$$

y $$\mathbf{Z}_L = 13.3\ \Omega\ \angle -36.87° = \mathbf{10.66\ \Omega - \mathit{j}\,8\ \Omega}$$

Para obtener la potencia máxima, primero debemos encontrar $\mathbf{E}_{Th}$ [Figura 18.82(b)], como sigue:

$$\mathbf{E}_{Th} = \frac{\mathbf{Z}_2\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1} \qquad \text{(regla del divisor de voltaje)}$$

$$= \frac{(8\ \Omega\ \angle 90°)(9\ \text{V}\ \angle 0°)}{j\,8\ \Omega + 6\ \Omega - j\,8\ \Omega} = \frac{72\ \text{V}\ \angle 90°}{6\ \angle 0°} = 12\ \text{V}\ \angle 90°$$

Entonces: $$P_{\text{máx}} = \frac{E_{Th}^2}{4R} = \frac{(12\ \text{V})^2}{4(10.66\ \Omega)} = \frac{144}{42.64} = \mathbf{3.38\ W}$$

EJEMPLO 18.20 Obtenga la impedancia de carga en la figura 18.83 para una máxima potencia hacia la carga, y obtenga la potencia máxima.

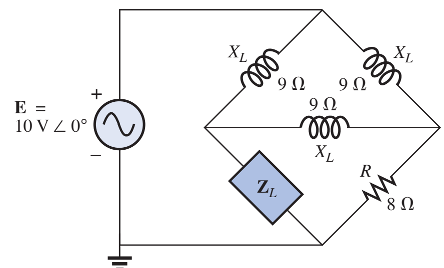


FIGURA 18.83
Ejemplo 18.20.

Solución: Primero debemos obtener $\mathbf{Z}_{Th}$ (Figura 18.84).

$$\mathbf{Z}_1 = +j\,X_L = j\,9\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_2 = R = 8\ \Omega$$

Al convertir de una Δ a una Y (Figura 18.85), tenemos,

$$\mathbf{Z}'_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{3} = j\,3\ \Omega \qquad \mathbf{Z}_2 = 8\ \Omega$$

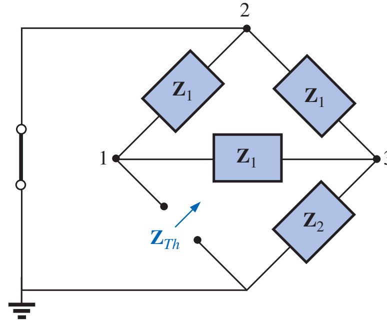


FIGURA 18.84
Definición de las impedancias con subíndice para la red de la figura 18.83.

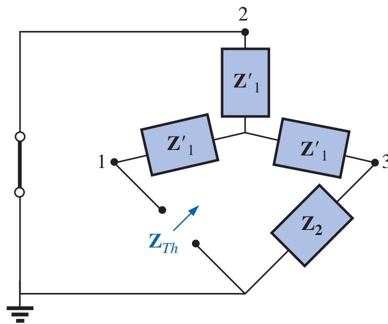


FIGURA 18.85
Sustitución del equivalente Y para la configuración Δ superior de la figura 18.84.

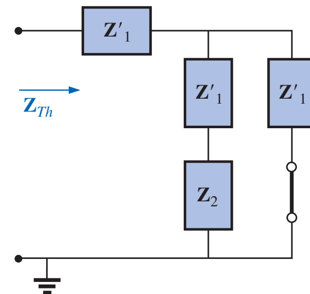


FIGURA 18.86
Determinación de $\mathbf{Z}_{Th}$ para la red de la figura 18.83.

El circuito vuelto a trazar (Figura 18.86) muestra:

$$\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{Z}'_1 + \frac{\mathbf{Z}'_1(\mathbf{Z}'_1 + \mathbf{Z}_2)}{\mathbf{Z}'_1 + (\mathbf{Z}'_1 + \mathbf{Z}_2)}$$

$$= j\,3\ \Omega + \frac{3\ \Omega\ \angle 90^\circ(j\,3\ \Omega + 8\ \Omega)}{j\,6\ \Omega + 8\ \Omega}$$

$$= j\,3 + \frac{(3\ \angle 90^\circ)(8.54\ \angle 20.56^\circ)}{10\ \angle 36.87^\circ}$$

$$= j\,3 + \frac{25.62\ \angle 110.56^\circ}{10\ \angle 36.87^\circ} = j\,3 + 2.56\ \angle 73.69^\circ$$

$$= j\,3 + 0.72 + j\,2.46$$

$$\mathbf{Z}_{Th} = 0.72\ \Omega + j\,5.46\ \Omega$$

y

$$\mathbf{Z}_L = \mathbf{0.72\ \Omega - \mathit{j}\,5.46\ \Omega}$$

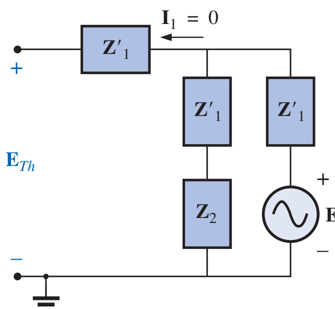


FIGURA 18.87
Obtención del voltaje de Thévenin para la red de la figura 18.83.

Para $\mathbf{E}_{Th}$, se utiliza el circuito modificado de la figura 18.87 con la fuente de voltaje reemplazada en su posición original. Dado que $I_1 = 0$, $\mathbf{E}_{Th}$ es el voltaje en la impedancia en serie de $\mathbf{Z}'_1$ y $\mathbf{Z}_2$. Al emplear la regla del divisor de voltaje se obtiene:

$$\mathbf{E}_{Th} = \frac{(\mathbf{Z}'_1 + \mathbf{Z}_2)\mathbf{E}}{\mathbf{Z}'_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}'_1} = \frac{(j\,3\ \Omega + 8\ \Omega)(10\ \text{V}\ \angle 0^\circ)}{8\ \Omega + j\,6\ \Omega}$$

$$= \frac{(8.54\ \angle 20.56^\circ)(10\ \text{V}\ \angle 0^\circ)}{10\ \angle 36.87^\circ}$$

$$\mathbf{E}_{Th} = 8.54\ \text{V}\ \angle -16.31^\circ$$

y $$P_{\text{máx}} = \frac{E_{Th}^2}{4R} = \frac{(8.54\text{ V})^2}{4(0.72\ \Omega)} = \frac{72.93}{2.88}\text{ W}$$
$$= \mathbf{25.32\ W}$$

Si la resistencia de carga es ajustable pero la magnitud de la reactancia de carga no puede establecerse igual a la magnitud de la reactancia de Thévenin, entonces la potencia máxima *que puede entregarse* a la carga se presentará cuando la reactancia de carga esté lo más cercana posible a la reactancia de Thévenin, y la resistencia de carga se establece en el siguiente valor:

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_{\text{carga}})^2} \tag{18.21}$$

donde cada reactancia lleva un signo positivo si es inductiva y un signo negativo si es capacitiva.

La potencia entregada estará determinada por:

$$P = E_{Th}^2/4R_{\text{promedio}} \tag{18.22}$$

donde:
$$R_{\text{promedio}} = \frac{R_{Th} + R_L}{2} \tag{18.23}$$

La deducción de las ecuaciones anteriores se presenta en el apéndice G de este libro. El siguiente ejemplo demuestra el uso de lo expuesto líneas arriba.

EJEMPLO 18.21 Para la red de la figura 18.88:

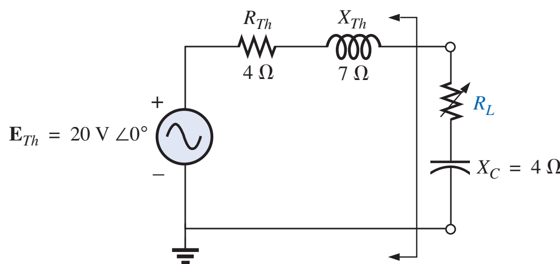
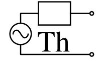


FIGURA 18.88
Ejemplo 18.21.

a. Determine el valor de R_L para una potencia máxima hacia la carga si la reactancia de carga se fija en 4 Ω.
b. Obtenga la potencia entregada a la carga bajo las condiciones del inciso (a).
c. Obtenga la potencia máxima hacia la carga si la reactancia de carga se hace ajustable a cualquier valor, y compare el resultado con el inciso (b).

Soluciones:

a. Ecuación (18.21): $R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_{\text{carga}})^2}$
$$= \sqrt{(4\ \Omega)^2 + (7\ \Omega - 4\ \Omega)^2}$$



$$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$$

$$R_L = \mathbf{5\ \Omega}$$

b. Ecuación (18.23): $R_{\text{promedio}} = \dfrac{R_{Th} + R_L}{2} = \dfrac{4\ \Omega + 5\ \Omega}{2}$

$$= \mathbf{4.5\ \Omega}$$

ecuación (18.22): $P = \dfrac{E_{Th}^2}{4R_{\text{promedio}}}$

$$= \frac{(20\text{ V})^2}{4(4.5\ \Omega)} = \frac{400}{18}\text{ W}$$

$$\cong \mathbf{22.22\ W}$$

c. Para $\mathbf{Z}_L = 4\ \Omega - j\ 7\ \Omega$,

$$P_{\text{máx}} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{(20\text{ V})^2}{4(4\ \Omega)}$$

$$= \mathbf{25\ W}$$

lo cual excede el resultado del inciso (b) por 2.78 W.

18.6 TEOREMAS DE SUSTITUCIÓN, RECIPROCIDAD Y DE MILLMAN

Como se indicó en la introducción a este capítulo, los **teoremas de sustitución** y **reciprocidad** y el **teorema de Millman** no se considerarán aquí en detalle. Una revisión cuidadosa del capítulo 9 permitirá aplicar estos teoremas a las redes de ca senoidales con poca dificultad. En la sección de problemas al final de este capítulo se incluyeron algunos problemas acerca del uso de estos teoremas.

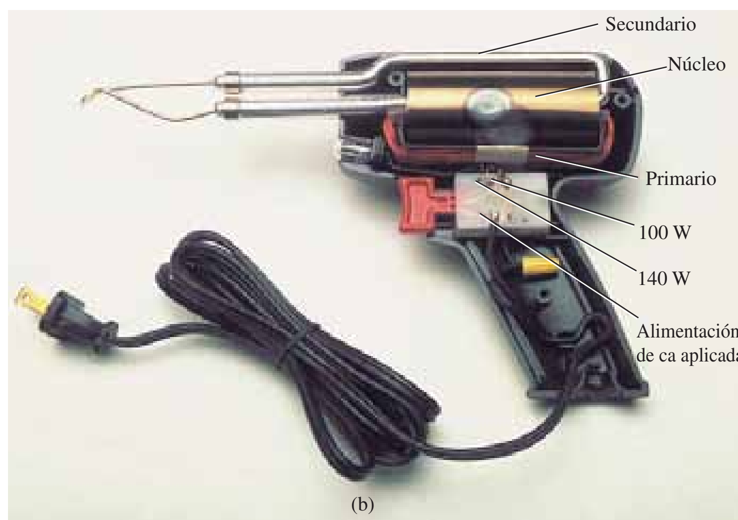
18.7 APLICACIONES

Pistola de soldar

El estañado y la soldadura son dos operaciones que se efectúan mejor mediante la aplicación de calor que no se vea afectado por las características térmicas de los materiales involucrados. En otras palabras, el calor aplicado no deberá ser sensible a los parámetros cambiantes de los materiales de soldadura, de los metales involucrados, o a las condiciones de soldado. El arco (una corriente intensa) establecido en el proceso de soldado debe permanecer fijo en magnitud para asegurar una soldadura uniforme. Esto se logra mejor al asegurar una corriente fija a través del sistema a pesar de que las características de carga puedan cambiar (es decir, asegurando una fuente de corriente constante de suficiente amperaje como para establecer el arco requerido para el equipo de soldadura o el calentamiento uniforme de la punta del cautín). Otro requerimiento más del proceso de soldado es que el calor desarrollado sea suficiente para llevar la soldadura hasta su punto de fundición cercano a 800°F.

La pistola de soldar mostrada en la figura 18.89(a) emplea un método único para establecer una corriente fija a través del cautín. El cautín es en realidad una parte del devanado secundario de un transformador (Capítulo 21) que tiene sólo una vuelta como su secundario según se muestra en la figura 18.89(b). Debido a las corrientes intensas que se establecerán en este secundario de una sola vuelta, su tamaño es bastante grande para asegurar que puede soportar la corriente y para minimizar su valor de resistencia. El primario del transfor-





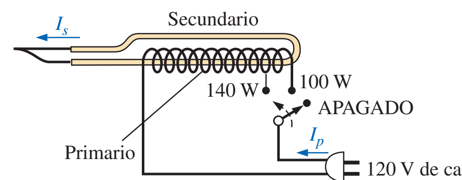
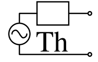


FIGURA 18.89
Pistola de soldar: (a) apariencia externa; (b) construcción interna; (c) control de la razón de vueltas.

mador consta de muchas vueltas de alambre más delgado con el fin de constituir la razón de vueltas necesaria para establecer la corriente requerida en el secundario. La unidad Universal® de la figura 18.89 está clasificada como de 140 W/100 W, lo cual indica que tiene dos niveles de potencia controlados por el gatillo. Al oprimir el gatillo, el primer nivel será de 140 W, y con el gatillo completamente presionado se proporcionarán 100 W de potencia. La inductancia del primario es de 285 mH en el nivel de 140 W y de 380 mH en el de 100 W, con lo cual se indica que el interruptor controla cuántos devanados del primario formarán parte de la acción del transformador para cada nivel de potencia en watts, como se muestra en la figura 18.89(c). Dado que la inductancia está en función directa del número de vueltas, el nivel de 140 W tiene menos vueltas que el de 100 W. La resistencia de cd del primario se calculó ser de aproximadamente 11.2 Ω en el nivel de 140 W y de 12.8 Ω en el nivel de 100 W, lo cual tiene sentido ya que más vueltas requerirán un alambre más largo y, en consecuencia, la resistencia se incrementará.

Bajo las condiciones de operación especificadas, la corriente del primario para cada nivel puede determinarse aplicando la ley de Ohm de la siguiente forma:



Para 140 W,

$$I_p = \frac{P}{V_p} = \frac{140 \text{ W}}{120 \text{ V}} = \mathbf{1.17\ A}$$

Para 100 W,

$$I_p = \frac{P}{V_p} = \frac{100 \text{ W}}{120 \text{ V}} = \mathbf{0.83\ A}$$

Como se esperaba, la demanda de corriente es mayor para el nivel de 140 W que para el de 100 W. Utilizando los valores medidos de inductancia y resistencia de entrada para el nivel de 140 W, se obtendrá el circuito equivalente de la figura 18.90(a). Utilizando los 60 Hz aplicados para determinar la reactancia de la bobina y determinando entonces la impedancia total observada mediante el primario se obtendrá lo siguiente para la corriente de fuente:

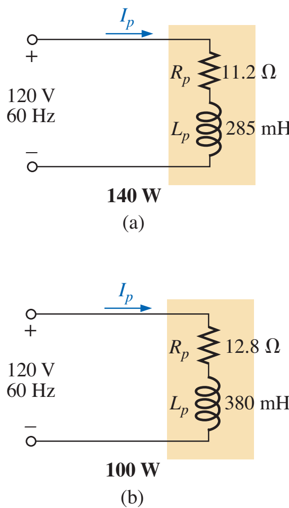


FIGURA 18.90
Circuitos equivalentes para el cautín de la figura 18.89(a): (a) al nivel de 140 W; (b) al nivel de 100 W.

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi(60 \text{ Hz})(285 \text{ mH}) = 107.44\ \Omega$$

y $$\mathbf{Z}_T = R + j\,X_L = 11.2\ \Omega + j\,107.44\ \Omega = 108.02\ \Omega\ \angle 84.05°$$

de manera que: $$|I_p| = \left|\frac{E}{Z_T}\right| = \frac{120 \text{ V}}{108.02\ \Omega} = \mathbf{1.11\ A}$$

lo cual coincide cercanamente con el nivel especificado.

Para el nivel de 100 W de la figura 18.90(b) resultaría el siguiente análisis:

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi(60 \text{ Hz})(380 \text{ mH}) = 143.26\ \Omega$$

y $$\mathbf{Z}_T = R + j\,X_L = 12.8\ \Omega + j\,143.26\ \Omega = 143.83\ \Omega\ \angle 84.89°$$

de manera que: $$|I_p| = \left|\frac{E}{Z_T}\right| = \frac{120 \text{ V}}{143.83\ \Omega} = \mathbf{0.83\ A}$$

lo cual corresponde hasta una precisión de centésimas con el valor calculado a partir de las condiciones especificadas.

Eliminar la punta y medir los voltajes primario y secundario resultó en 120 V /0.38 V para el nivel de 140 W y 120 V/0.31 V para el nivel de 100 W, respectivamente. Ya que los voltajes de un transformador se relacionan de manera directa con la razón de vueltas, el número de vueltas en el primario (N_p) en relación con las del secundario (N_s) puede estimarse por medio de lo siguiente para cada nivel:

Para 140 W,

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{120 \text{ V}}{0.38 \text{ V}} \cong \mathbf{316}$$

Para 100 W,

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{120 \text{ V}}{0.31 \text{ V}} \cong \mathbf{387}$$

Al observar la fotografía de la figura 18.89(b), parecería que hay 300 o más vueltas en el devanado primario.

Las corrientes de un transformador se relacionan mediante la razón de vueltas de la siguiente forma, permitiendo un cálculo de las corrientes secundarias para cada nivel:

Para 140 W,

$$I_s = \frac{N_p}{N_s} I_p = 316(1.17 \text{ A}) \cong \mathbf{370\ A}$$

Para 100 W,

$$I_s = \frac{N_p}{N_s} I_p = 387(0.83\text{ A}) \cong \mathbf{321\text{ A}}$$

Es evidente, la corriente secundaria es mucho mayor para el nivel de 140 W. Los niveles de corriente resultantes son probablemente mayores de lo que se podría haber esperado, pero tenga presente que el análisis anterior no incluye el efecto de la impedancia reflejada del secundario al primario que reducirá el nivel de corriente primario (a ser analizado en el capítulo 21). Además, a medida que la punta de soldadura se calienta, su resistencia se incrementa, reduciendo aún más los niveles de corriente resultantes. Utilizando un Amp-Clamp®, se encontró que la corriente en el secundario excedía de 300 A cuando la energía se aplicaba por primera vez y la punta de soldadura estaba fría. Sin embargo, a medida que la punta se calentaba debido a los altos niveles de corriente, la corriente a través del primario caía a cerca de 215 A para el nivel de 140 W y a 180 A para el de 100 W. Estas altas corrientes son parte de la razón por la que la vida de la mayoría de las puntas de cautín en las pistolas de soldar es de cerca de 20 horas. Al final, la punta comenzará a fundirse. Utilizando estos niveles de corriente y el nivel de potencia dado, la resistencia del secundario puede aproximarse de la siguiente forma:

Para 140 W,

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{140\text{ W}}{(215\text{ A})^2} \cong \mathbf{3\text{ m}\Omega}$$

Para 100 W,

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{100\text{ W}}{(180\text{ A})^2} \cong \mathbf{3\text{ m}\Omega}$$

la cual es tan baja como se esperaba al considerar el área transversal del secundario y el hecho de que la punta es una pequeña sección de cobre estañado de baja resistencia.

Una de las ventajas obvias de la pistola de soldar contra un cautín simple es que la pistola de soldar se apaga cuando se suelta el gatillo, reduciendo así los costos por energía y ampliando la vida de la punta. La aplicación de cd en lugar de ca para desarrollar una corriente constante no sería práctico debido a que la alta demanda de corriente requeriría toda una serie de grandes baterías en paralelo.

El análisis anterior resultó particularmente interesante debido a la forma en que se establecieron tanto la característica de corriente constante como los niveles de corriente, y a la excelente manera en que se verificó una parte de la teoría presentada en el texto.

Sistemas electrónicos

Una de las ventajas del análisis de sistemas electrónicos es que puede aplicarse el teorema de superposición de manera que los análisis de cd y ca pueden realizarse por separado. El análisis del sistema de cd afectará la respuesta del de ca, pero el análisis de cada sistema es un proceso independiente y distinto. Aunque los sistemas electrónicos no se han analizado en este texto, se pueden observar varios puntos importantes en la descripción siguiente que apoyan parte de la teoría presentada en éste y en los últimos capítulos, por lo que su incorporación aquí es totalmente válida. Considere la red de la figura 18.91 con un amplificador de potencia con transistor, una bocina de 8 Ω como la carga, y una fuente con resistencia interna de 800 Ω. Observe que cada componente se aisló mediante un recuadro sombreado para enfatizar que deben ponderarse cuidadosamente en todo buen diseño.

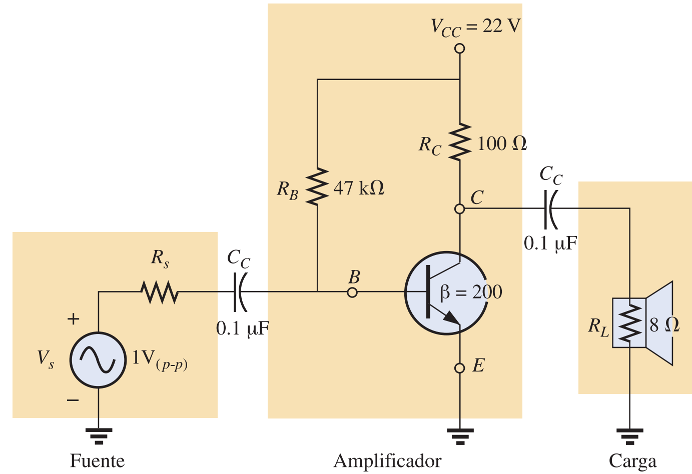


FIGURA 18.91
Amplificador con transistor.

Como se mencionó, el análisis puede separarse en un componente de cd y uno de ca. Para el análisis de cd los dos capacitores pueden reemplazarse por un equivalente de circuito abierto (Capítulo 10), dando por resultado el aislamiento de la red de amplificación como se muestra en la figura 18.92. Dado que V_{BE} será aproximadamente de 0.7 V de cd para cualquier transistor en operación, la corriente de base I_B puede obtenerse utilizando la ley de voltaje de Kirchhoff como sigue:

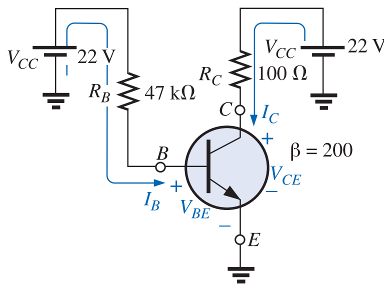


FIGURA 18.92
Equivalente de cd para la red con transistor de la figura 18.91.

$$I_B = \frac{V_{R_B}}{R_B} = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} = \frac{22\text{ V} - 0.7\text{ V}}{47\text{ k}\Omega} = \mathbf{453.2\ \mu A}$$

Para los transistores, la corriente de colector I_C está relacionada con la corriente de base mediante $I_C = \beta I_B$, e

$$I_C = \beta I_B = (200)(453.2\ \mu\text{A}) = \mathbf{90.64\ mA}$$

Por último, mediante la ley de voltaje de Kirchhoff, el voltaje de colector (también el voltaje colector-emisor dado que el emisor está aterrizado) puede determinarse de la siguiente forma:

$$V_C = V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C = 22\text{ V} - (90.64\text{ mA})(100\ \Omega) = \mathbf{12.94\ V}$$

Para el análisis de cd, por tanto,

$$I_B = \mathbf{453.2\ \mu A} \qquad I_C = \mathbf{90.64\ mA} \qquad V_{CE} = \mathbf{12.94\ V}$$

lo cual definirá un punto de operación de cd para el transistor. Esto es un aspecto importante del diseño electrónico dado que el punto de operación de cd tendrá cierto efecto sobre la ganancia de ca de la red.

Ahora, al utilizar superposición, podemos analizar la red desde un punto de vista de ca estableciendo todas las fuentes de cd en cero (reemplazadas por conexiones a tierra) y reemplazando ambos capacitores con corto circuitos como se muestra en la figura 18.93. La sustitución del equivalente de corto circuito para los capacitores es válida porque a 10 kHz (el intervalo medio para la respuesta audible humana) la reactancia del capacitor está determinada por $X_C = 1/2\pi fC = 15.92\ \Omega$ la cual puede ignorarse cuando se compara con los resistores en serie en la fuente y en la carga. En otras palabras, el capacitor ha jugado el importante papel de aislar al amplificador de la respuesta de cd y completar la red para la respuesta de ca.

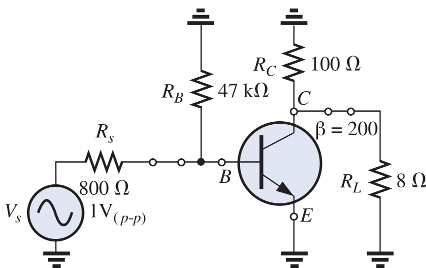


FIGURA 18.93
Equivalente de ca para la red con transistor de la figura 18.91.

Volver a trazar la red como se muestra en la figura 18.94(a) permitirá efectuar un análisis en ca de su respuesta. El transistor ha sido reemplazado por una red equivalente que representará el comportamiento del dispositivo. Este proceso se cubre con todo detalle en los cursos básicos de electrónica. Esta configuración de transistor tiene impedancia de entrada de 200 Ω y una fuente de corriente cuya magnitud es sensible a la corriente de base en el circuito de entrada y al factor de amplificación para este transistor de 200. El resistor de 47 kΩ en paralelo con la impedancia de entrada de 200 Ω del transistor puede ignorarse, de manera que la corriente de entrada I_i y la corriente de base I_b están determinadas por:

$$I_i \cong I_b = \frac{V_s}{R_s + R_i} = \frac{1\text{ V }(p\text{-}p)}{800\ \Omega + 200\ \Omega} = \frac{1\text{ V }(p\text{-}p)}{1\text{ k}\Omega} = 1\text{ mA }(p\text{-}p)$$

La corriente de colector I_C es entonces:

$$I_C = \beta I_b = (200)(1\text{ mA }(p\text{-}p)) = 200\text{ mA }(p\text{-}p)$$

y la corriente a la bocina se determina mediante la regla del divisor de corriente como sigue:

$$I_L = \frac{100\ \Omega(I_C)}{100\ \Omega + 8\ \Omega} = 0.926 I_C = 0.926(200\text{ mA }(p\text{-}p))$$
$$= 185.2\text{ mA }(p\text{-}p)$$

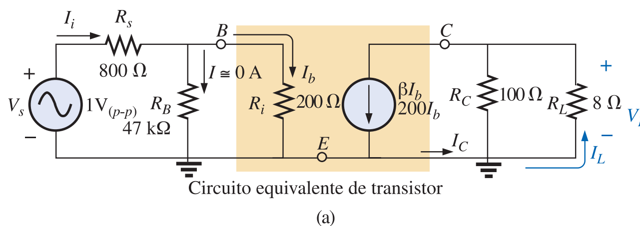
con el voltaje en la bocina igual a:

$$V_L = -I_L R_L = -(185.2\text{ mA }(p\text{-}p))(8\ \Omega) = -1.48\text{ V}$$

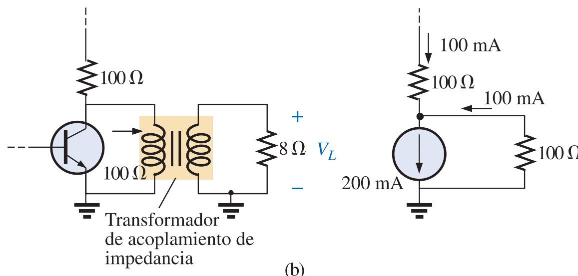
La potencia a la bocina se determina entonces de la siguiente forma:

$$P_{\text{bocina}} = V_{L_{\text{rms}}} \cdot I_{L_{\text{rms}}} = \frac{(V_{L(p\text{-}p)})(I_{L(p\text{-}p)})}{8} = \frac{(1.48\text{ V})(185.2\text{ mA }(p\text{-}p))}{8}$$
$$= \mathbf{34.26\ mW}$$

lo cual es bajo. Inicialmente pudo parecer que lo anterior era un buen diseño para la distribución de la potencia a la bocina debido a que la mayor parte de



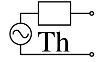
(a)



(b)

FIGURA 18.94

(a) Red de la figura 18.93 posterior a la sustitución de la red equivalente del transistor; (b) efecto del transformador de acoplamiento.



la corriente de colector pasa a la bocina. Sin embargo, siempre debemos tener presente que la potencia es el producto del voltaje y la corriente. Una corriente alta con voltaje muy bajo dará por resultado un menor nivel de potencia. En este caso, el nivel de voltaje es muy bajo. No obstante, si se introduce un transformador de acoplamiento que haga que la carga resistiva de 8 Ω "parezca como" de 100 Ω como se muestra en la figura 18.94(b), estableciendo condiciones de máxima potencia, la corriente a la carga caerá a la mitad de la cantidad anterior debido a que se divide a través de resistores iguales. Pero el voltaje en la carga se incrementará a:

$$V_L = I_L R_L = (100 \text{ mA } (p\text{-}p))(100\ \Omega) = 10 \text{ V } (p\text{-}p)$$

y el nivel de potencia a:

$$P_{\text{bocina}} = \frac{(V_{L(p\text{-}p)})(I_{L(p\text{-}p)})}{8} = \frac{(10 \text{ V})(100 \text{ mA})}{8} = \mathbf{125\ mW}$$

lo cual es 3.6 veces la ganancia sin el transformador de acoplamiento.

Para la carga de 100 Ω, las condiciones de cd no se ven afectadas debido al aislamiento del capacitor C_C, y el voltaje en el colector es de 12.94 V como se muestra en la figura 18.95(a). Para la respuesta de ca con una carga de 100 Ω, el voltaje de salida como se determinó líneas arriba será de 10 V pico a pico (5 V pico) según muestra la figura 18.95(b). Observe la relación fuera de fase con la entrada debido a la polaridad opuesta de V_L. La respuesta completa en la terminal del colector del transistor podrá entonces trazarse mediante la sobreposición de la respuesta de ca en la respuesta de cd como se muestra en la figura 18.95(c) (otra aplicación del teorema de superposición). En otras palabras, el nivel de cd simplemente desplazará la forma de onda de ca hacia arriba o hacia abajo y no afectará su aspecto. El valor pico a pico permanece igual, y la relación de fase no se altera. La forma de onda total en la carga incluirá solamente la respuesta de ca de la figura 18.95(b) dado que el componente de cd fue bloqueado por el capacitor.

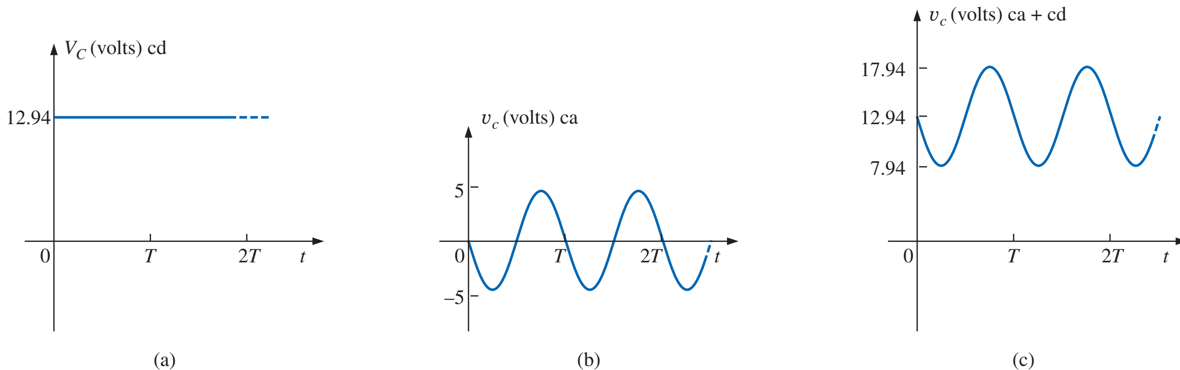


FIGURA 18.95
Voltaje de colector para la red de la figura 18.91: (a) cd; (b) ca; (c) cd y ca.

El voltaje en la fuente aparecerá como se muestra en la figura 18.96(a), mientras que el voltaje en la base del transistor aparecerá como se muestra en la figura 18.96(b) debido a la presencia del componente de cd.

Probablemente uno o dos de los importantes conceptos presentados en la argumentación anterior dejarán alguna duda debido a cierta falta de experiencia del lector con los transistores. No obstante, si sólo una cuestión resultara evidente de lo expuesto líneas arriba, debiera ser el poder del teorema de superposición para permitir un aislamiento en las respuestas de cd y ca y la habilidad para combinar ambas si se desea encontrar la respuesta total.

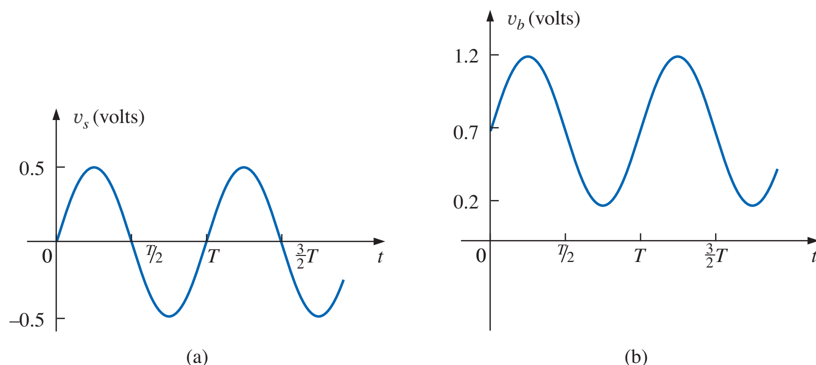


FIGURA 18.96
Señal aplicada: (a) en la fuente; (b) en la base del transistor.

18.8 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Superposición El análisis comenzará con la red de la figura 18.12 del ejemplo 18.4 ya que tiene una red de ca y una de cd. El lector verá que no es necesario especificar un análisis para cada sistema, aun cuando uno de ellos es básicamente un barrido de ca y el otro un cálculo del punto de polarización. Cuando se seleccione la opción de barrido de ca, **AC Sweep**, el programa realizará automáticamente los cálculos de polarización y desplegará los resultados del archivo de salida.

El esquema resultante aparece en la figura 18.97 con **VSIN** y **VDC** como los voltajes de fuente, **SOURCE**. La colocación de todos los elementos *R-L-C*

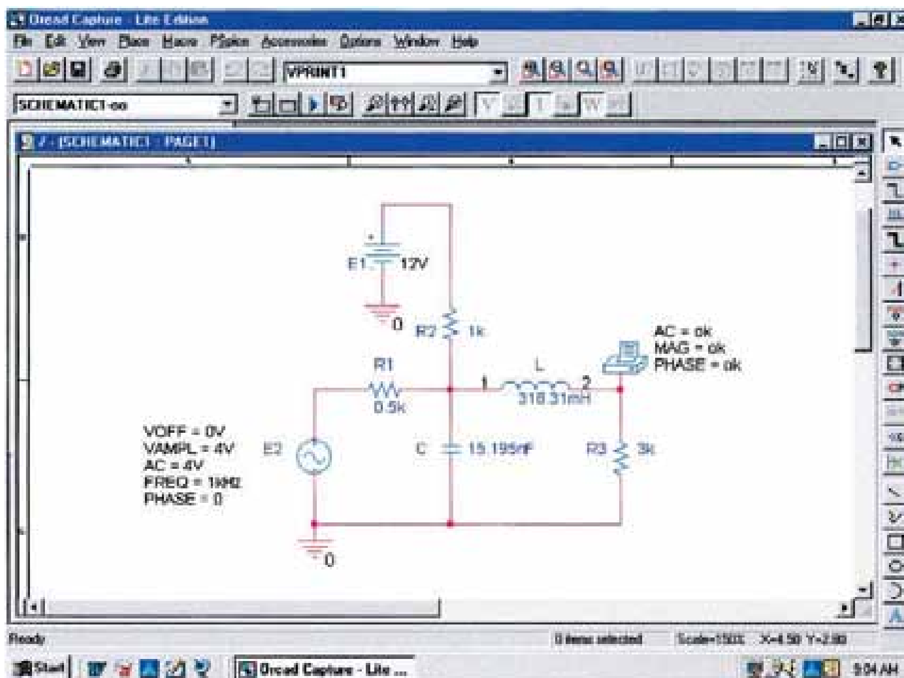


FIGURA 18.97
Utilización de PSpice para aplicar la superposición a la red de la figura 18.12.

y de la fuente de cd deberá resultar bastante sencilla a estas alturas. Para la fuente de ca, asegúrese de hacer doble clic sobre el símbolo de la fuente para obtener el cuadro de diálogo del editor de propiedades, **Property Editor**. Luego establezca **AC** en 4 V, **FREQ** en 1 kHz, **PHASE** en 0°, **VAMPL** en 4 V, y **VOFF** en 0 V. En cada caso seleccione el encabezado **Name and Value** bajo **Display** de manera que se tenga un resumen de los parámetros en la pantalla. También asegúrese de seleccionar **Apply** antes de salir del cuadro de diálogo. Obtenga la opción **VPRINT1** de la biblioteca **SPECIAL**, colóquela como se muestra y luego haga doble clic para obtener su editor de propiedades, **Property Editor**. Los parámetros **AC**, **MAG** y **PHASE** deberán recibir el listado de **OK**, y deberá aplicarse **Name and Value** a cada uno bajo **Display** antes de seleccionar **Apply** y **OK**. Con esto la red estará lista para la simulación.

Después de haber seleccionado el icono **New Simulation Profile**, aparecerá el cuadro de diálogo de simulación nueva, **New Simulation**, en el que se ingresa **SuperpositionAC** como el nombre, **Name**. Posterior a la selección de **Create**, aparecerá el cuadro de diálogo **Simulation Settings** en el cual se selecciona **AC Sweep/Noise**. Las frecuencias inicial y final, **Start** y **End Frequencies,** se establecen en 1 kHz, y se asigna el valor de 1 para la opción **Points/Decade**. Haga clic en **OK** y luego seleccione la tecla **Run PSpice**, aparecerá el cuadro de diálogo **SCHEMATIC1** con un eje que abarca desde 0.5 kHz hasta 1.5 kHz. Mediante la secuencia **Trace-Add Trace-V(R3:1)-OK** se obtendrá el punto de graficación que aparece en la parte inferior de la figura 18.98. Su valor es ligeramente superior al nivel de 2 V y podría leerse como 2.05 V, lo cual se compara adecuadamente con la solución calculada a mano de 2.06 V. Mediante **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace-P(V(R3:1))** puede obtenerse un ángulo de fase cercano a −33°. Se puede añadir mayor precisión a la gráfica de fase mediante la secuencia **Plot-Axis Settings-Y Axis-User Defined −40d to −30d-OK**, obteniéndose la lectura de −32.5° que aparece en la figura 18.98 —lo cual nuevamente se acerca mucho a la solución

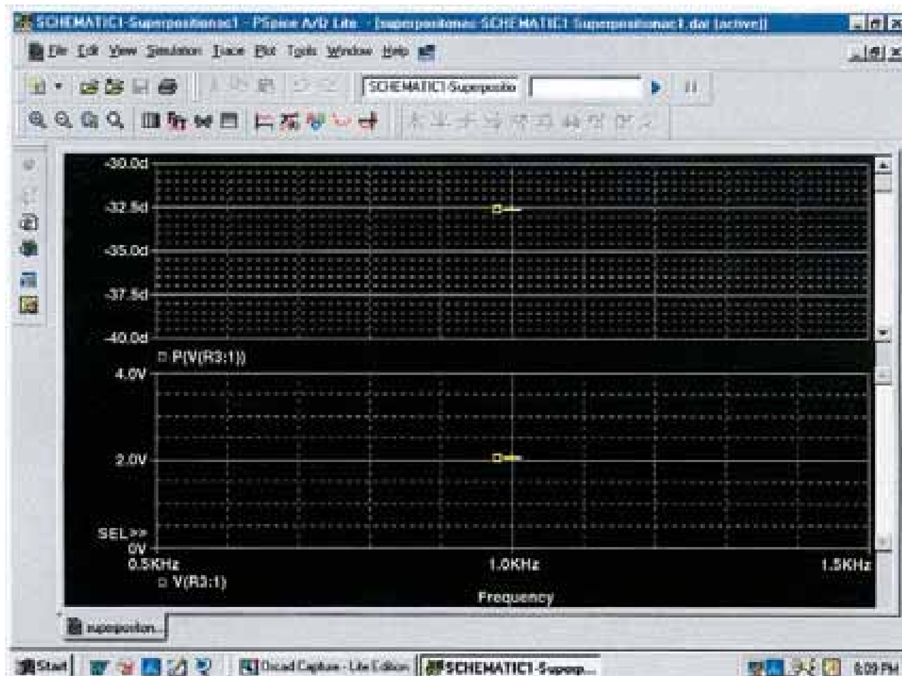


FIGURA 18.98
Resultados de salida a partir de la simulación de la red mostrada en la figura 18.97.

calculada a mano de –32.74° en el ejemplo 18.4. Esta solución es adecuada para la señal de ca, pero no dice nada con respecto al componente de cd.

Al abandonar la pantalla de **SCHEMATIC1** obtendremos la ventana de **Orcad Capture** donde podremos seleccionar **PSpice** seguido por **View Output File**, vea archivo de salida. El resultado será la impresión de la figura 18.99, la cual presenta las soluciones de ca y cd. La solución de polarización en señal pequeña, **SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION**, incluye los nodos de la red y sus niveles de cd. Los números de nodo están definidos bajo la lista que comienza en la línea 63. Observe en particular el nivel de cd de 3.6 V en el nodo **N00676**, el cual se encuentra arriba del resistor R_3 en la figura 18.97. También advierta que el nivel de cd para ambos extremos del inductor es el mismo valor debido a la sustitución del equivalente de corto circuito en el inductor bajo el análisis de cd. La solución de ca aparece bajo el encabezado **AC ANALYSIS** como 2.06 V a −32.66°, lo cual nuevamente es una verificación acertada de los resultados del ejemplo 18.4.

```
49:
50:  ** Profile: "SCHEMATIC1-Superpositionac1"  [ C:\PSpice\superpositonac-SCHEMATIC
    1-Superpositionac1.sim ]
51:
52:
53:  ****     SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION       TEMPERATURE =   27.000 DEG C
54:
55:
56: ******************************************************************************
57:
58:
59:
60:  NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE
61:
62:
63: (N00530)    0.0000 (N00596)    3.6000 (N00623)   12.0000 (N00676)    3.6000
64:
65:
66:
67:
68:    VOLTAGE SOURCE CURRENTS
69:    NAME         CURRENT
70:
71:    V_E1        -8.400E-03
72:    V_E2         7.200E-03
73:
74:    TOTAL POWER DISSIPATION   1.01E-01  WATTS
75:
76:
77: **** 07/01/01 20:07:27 ************** PSpice Lite (Mar 2000) *****************
78:
79:  ** Profile: "SCHEMATIC1-Superpositionac1"  [ C:\PSpice\superpositonac-SCHEMATIC
    1-Superpositionac1.sim ]
80:
81:
82:  ****     AC ANALYSIS                      TEMPERATURE =   27.000 DEG C
83:
84:
85: ******************************************************************************
86:
87:
88:
89:   FREQ        VM(N00676)  VP(N00676)
90:
91:
92:    1.000E+03   2.060E+00  -3.266E+01
93:
```

FIGURA 18.99

Archivo de salida para el análisis de cd (***SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION***) *y el análisis de ca* (***AC ANALYSIS***) *para la red de la figura 18.97.*

Por último, si se desea una gráfica del voltaje en el resistor R_3, debe regresarse a **New Simulation Profile** e ingresar un nuevo nombre, **Name**, tal como **SuperpositionAC1** seguido por **Create fill** en el cuadro de diálogo **Simulation Profile**. Sin embargo, en esta ocasión elegiremos la opción **Time Domain-(Transient)** de manera que podamos obtener una gráfica en función del tiempo. El hecho de que la fuente tenga una frecuencia definida de 1 kHz le indicará al programa la frecuencia a aplicar. La opción **Run to time** se establece en 5 ms, con lo que se obtendrá un despliegue de cinco ciclos de la señal de 1 kHz. La opción **Start saving data after** permanecerá en 0 s, y **Maximum step size** será de 5 ms/1000 = 5 μs. Haga clic en **OK** y seleccione el icono **Run PSpice**; con ello aparecerá nuevamente la pantalla de **SCHEMATIC1**. En esta ocasión la secuencia **Trace-Add Trace-V(R3:1)-OK** dará por resultado la gráfica de la figura 18.100, la cual muestra claramente un nivel de cd de 3.6 V. Establecer un cursor en $t = 0$ s **(A1)** resultará en 3.6 V en el cuadro de diálogo **Probe Cursor**. Al colocar el otro cursor en el valor pico de 2.34 ms (**A2**) se obtendrá un valor pico de cerca de 5.66 V. La diferencia entre el nivel pico y el nivel de cd proporciona el valor pico de la señal de ca y también se encuentra registrado como de 2.06 V en **Probe Cursor**. Hasta aquí, ya han sido presentadas varias alternativas para obtener un voltaje o una corriente particulares dentro de una red con fuentes tanto de ca como de cd. Por supuesto, resulta satisfactorio que todas comprueben la solución teórica.

Teorema de Thévenin La siguiente aplicación será paralela a los métodos utilizados al determinar el circuito equivalente de Thévenin para los circuitos de cd. La red de la figura 18.28 aparecerá como se muestra en la figura 18.101 cuando se determine el voltaje de Thévenin de circuito abierto. El circuito abierto se simula mediante el uso de un resistor de 1 T (1 millón de MΩ). El resistor es necesario para establecer una conexión entre el lado derecho del

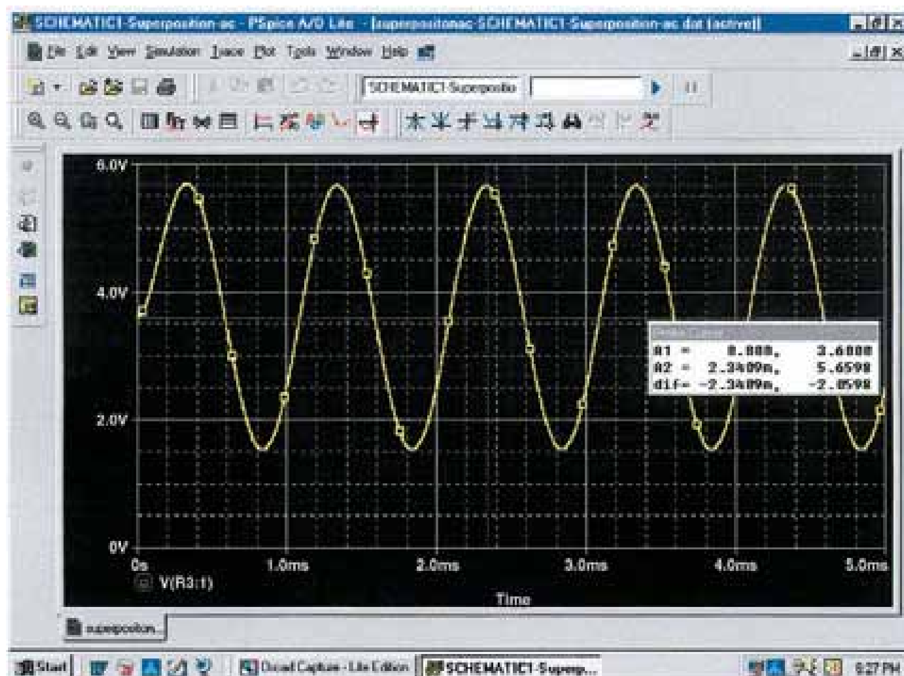


FIGURA 18.100
Utilización de PSpice para desplegar el voltaje en R_3 para la red de la figura 18.97.

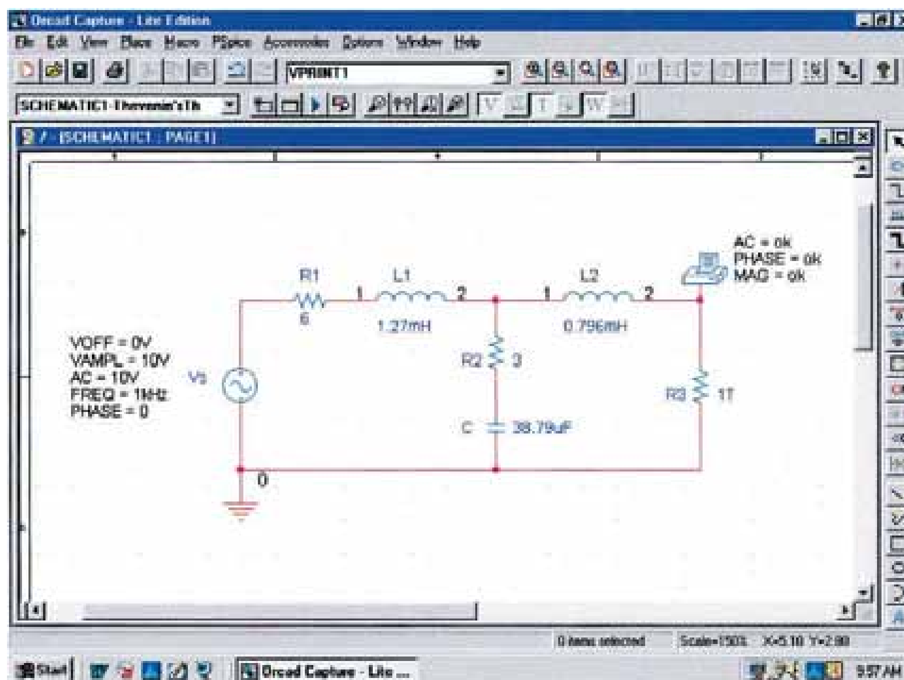


FIGURA 18.101

Utilización de PSpice para determinar el voltaje deThévenin de circuito abierto.

inductor L_2 y tierra —los nodos no pueden dejarse flotando en las simulaciones de Orcad. Dado que se requieren la magnitud y el ángulo del voltaje, se introduce **VPRINT1** como se muestra en la figura 18.101. La simulación fue una **AC Sweep** a 1 kHz, y cuando se obtuvo la ventana de **Orcad Capture** se tomaron los resultados que aparecen en la figura 18.102 del listado resultante en **PSpice-View Output File**. La magnitud del voltaje de Thévenin es de 5.187 V a comparar con los 5.08 V del ejemplo 18.8, mientras que el ángulo de fase es de −77.13° a comparar con los –77.09° del mismo ejemplo —los cuales son resultados excelentes.

```

 ** Profile: "SCHEMATIC1-Thevenin'sTh"  [ C:\PSpice\thevenin'sth-SCHEMATIC1-Thevenin'sTh.si
m ]


 ****     AC ANALYSIS                       TEMPERATURE =   27.000 DEG C


******************************************************************************



  FREQ        VM(N00433)  VP(N00433)


   1.000E+03   5.187E+00  -7.713E+01

```

FIGURA 18.102

Archivo de salida para el voltaje de Thévenin de circuito abierto para la red de la figura 18.101.

A continuación, se determinará la corriente de corto circuito utilizando **IPRINT** como se muestra en la figura 18.103 para permitir una determinación de la impedancia de Thévenin. Tuvo que introducirse la resistencia R_{bobina} de 1 $\mu\Omega$ debido a que los inductores no pueden tratarse como elementos ideales al utilizar PSpice; éstos deben mostrar siempre cierta resistencia interna en serie. Observe que la corriente de corto circuito pasará directamente a través del símbolo de impresora en **IPRINT**. A propósito, no hay necesidad de abandonar el esquema **SCHEMATIC1** desarrollado antes para determinar el voltaje de Thévenin. Simplemente se eliminan **VPRINT** y **R3**, y se inserta **IPRINT**. Luego se ejecuta una nueva simulación para obtener los resultados de la figura 18.104. La magnitud de la corriente de corto circuito es de 0.936 A a un ángulo de –108°. Entonces, la impedancia de Thévenin se define mediante:

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_{Th}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{5.187\text{ V} \angle -77.13°}{0.936\text{ A} \angle -108.0°} = 5.54\ \Omega \angle 30.87°$$

lo cual coincide muy bien con el resultado de 5.49 Ω ∠32.36° obtenido en el ejemplo 18.8.

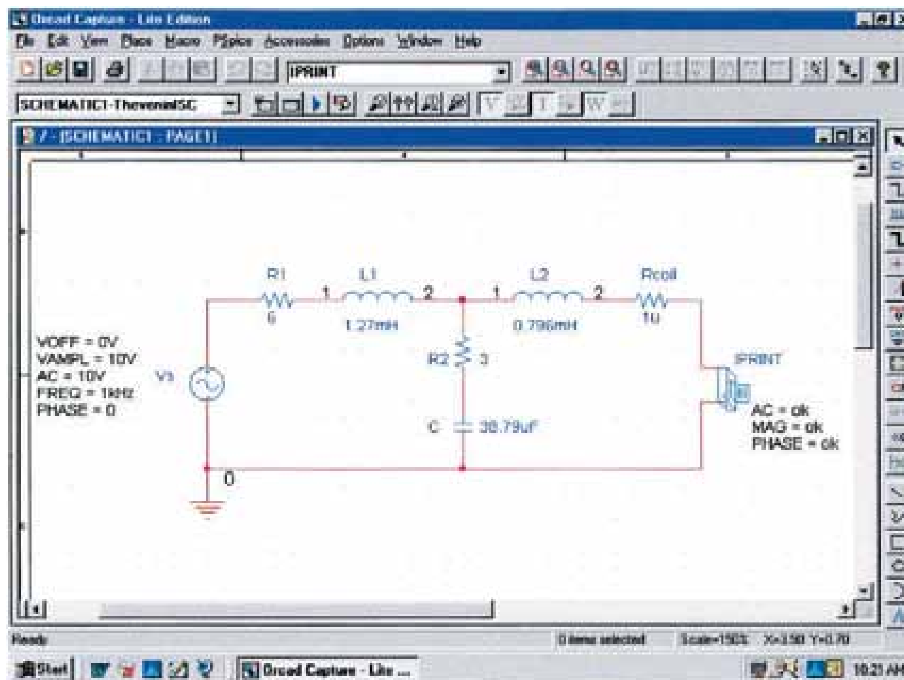


FIGURA 18.103
Utilización de PSpice para determinar la corriente de corto circuito.

FVCV La última aplicación de esta sección será para verificar los resultados del ejemplo 18.12 y obtener cierta práctica utilizando fuentes dependientes (controladas). La red de la figura 18.50, con su **fuente de voltaje controlada por voltaje (FVCV)**, tendrá la apariencia esquemática de la figura 18.105. La FVCV aparece como **E** en la biblioteca **ANALOG**, con el voltaje **E1** siendo el voltaje de control y **E** el voltaje controlado. En el cuadro de diálogo del editor de propiedades, **Property Editor**, la ganancia, **GAIN**, debe modificarse a 20

```
 ** Profile: "SCHEMATIC1-TheveninISC"  [ C:\PSpice\thevenin'sth-SCHEMATIC1-Thev
eninISC.sim ]

 ****     AC ANALYSIS                          TEMPERATURE =   27.000 DEG C

******************************************************************************

  FREQ         IM(V_PRINT2)IP(V_PRINT2)

   1.000E+03   9.361E-01  -1.086E+02
```

FIGURA 18.104
Archivo de salida para la corriente de corto circuito mostrada en la red de la figura 18.103.

mientras que el resto de las columnas puede dejarse como está. Después de las opciones **Display-Name and Value**, se selecciona **Apply** y se abandona el cuadro de diálogo para obtener **GAIN = 20** cerca de la fuente controlada. Observe particularmente la segunda tierra insertada cerca de **E** para evitar un cable largo a tierra que pudiera traslapar otros elementos. En este ejercicio se utilizará la fuente de corriente **ISRC** porque tiene una flecha en su símbolo y la frecuencia

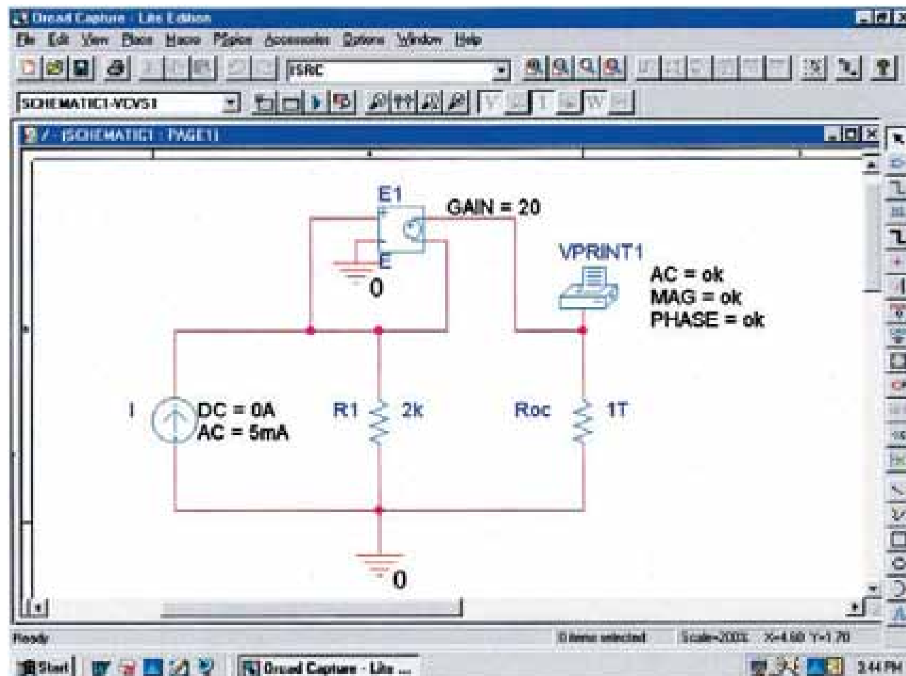
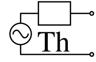


FIGURA 18.105
Utilización de PSpice para determinar el voltaje deThévenin de circuito abierto para la red de la figura 18.50.



no es importante para el análisis ya que sólo están presentes elementos resistivos. En el cuadro de diálogo de **Property Editor**, el nivel de **AC** se establece en 5 mA, y el nivel de **DC** en 0 A; ambos se desplegaron utilizando **Display-Name and value**. **VPRINT1** se configura como en los ejercicios anteriores. Al resistor **Roc** (circuito abierto) se le asignó un valor muy grande de manera que apareciera como un circuito abierto en el resto de la red. **VPRINT1** proporcionará el voltaje de Thévenin de circuito abierto entre los puntos de interés. Al ejecutar la simulación en el modo **AC Sweep** a 1 kHz se obtendrá el archivo de salida que aparece en la figura 18.106, revelando que el voltaje de Thévenin es de 210 V $\angle 0°$. Al sustituir los valores numéricos de este ejemplo en la ecuación obtenida en el ejemplo 18.12 se confirma el resultado:

$$\mathbf{E}_{Th} = (1 + \mu)\mathbf{I}R_1 = (1 + 20)\ (5 \text{ mA} \angle 0°)(2 \text{ k}\Omega)$$
$$= \mathbf{210\ V\angle 0°}$$

```
** Profile: "SCHEMATIC1-VCVS1"  [ C:\PSpice\vcvs-SCHEMATIC1-VCVS1.sim ]


****     AC ANALYSIS                        TEMPERATURE =   27.000 DEG C


******************************************************************************



 FREQ        VM(N01658)  VP(N01658)


  1.000E+03   2.100E+02   0.000E+00

```

FIGURA 18.106
Archivo de salida del voltaje de Thévenin de circuito abierto para la red de la figura 18.105.

A continuación, deberá determinarse la corriente de corto circuito utilizando la opción **IPRINT**. Observe en la figura 18.107 que la única diferencia entre esta red y la de la figura 18.106 es el reemplazo de **Roc** con **IPRINT** y la eliminación de **VPRINT1**. Por tanto, no es necesario "redibujar" completamente la red. Sólo se realizan los cambios y se ejecuta una nueva simulación; cuyo resultado se muestra en la figura 18.108 con una corriente de 5 mA a un ángulo de 0°.

La razón de las dos cantidades medidas dará por resultado la impedancia de Thévenin:

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{E}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{\mathbf{E}_{Th}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{210 \text{ V} \angle 0°}{5 \text{ mA} \angle 0°} = \mathbf{42\ k\Omega}$$

lo cual también coincide con la solución manual del ejemplo 18.12:

$$\mathbf{Z}_{Th} = (1 + \mu)R_1 = (1 + 20)2 \text{ k}\Omega = (21)2 \text{ k}\Omega = \mathbf{42\ k\Omega}$$

El análisis de toda la red equivalente del transistor de la figura 18.56 con dos fuentes controladas puede encontrarse en la sección de PSpice del capítulo 26.

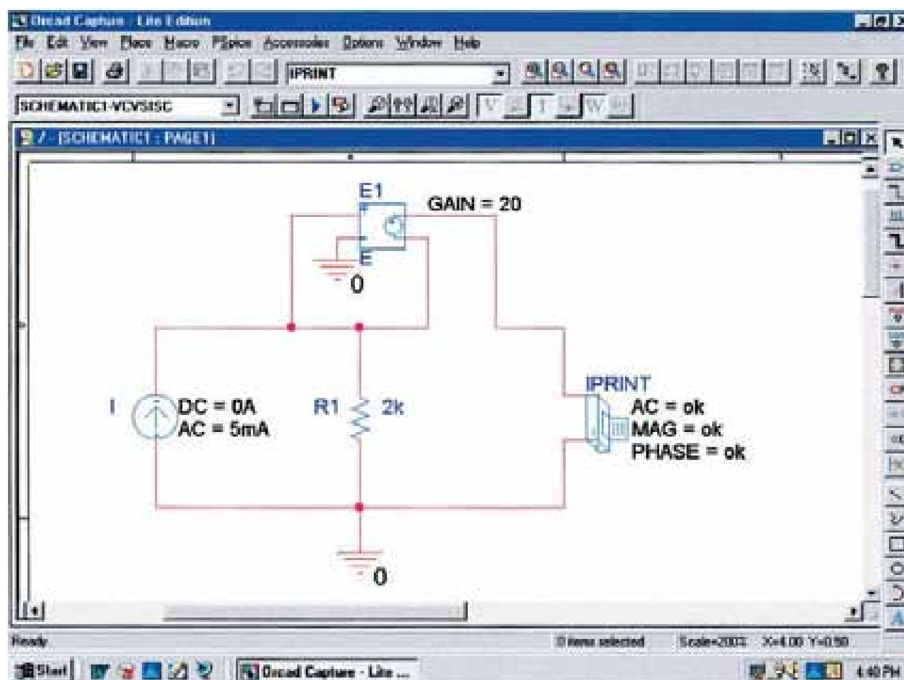


FIGURA 18.107
Utilización de PSpice para determinar la corriente de corto circuito para la red de la figura 18.50.

```

 ** Profile: "SCHEMATIC1-VCVSISC"  [ C:\PSpice\vcvs-SCHEMATIC1-VCVSISC.sim ]


 ****     AC ANALYSIS                          TEMPERATURE =   27.000 DEG C


******************************************************************************



  FREQ        IM(V_PRINT3)IP(V_PRINT3)


   1.000E+03   5.000E-03   0.000E+00

```

FIGURA 18.108
Archivo de salida para la corriente de corto circuito para la red de la figura 18.107.

PROBLEMAS

SECCIÓN 18.2 Teorema de superposición

1. Utilizando superposición, determine la corriente a través de la inductancia X_L para cada red de la figura 18.109.

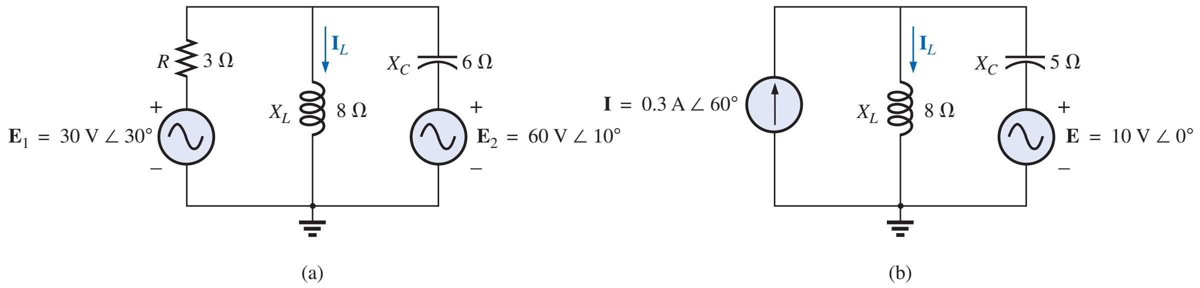


FIGURA 18.109
Problema 1.

***2.** Utilizando superposición, determine la corriente $\mathbf{I}_L$ para cada red de la figura 18.110.

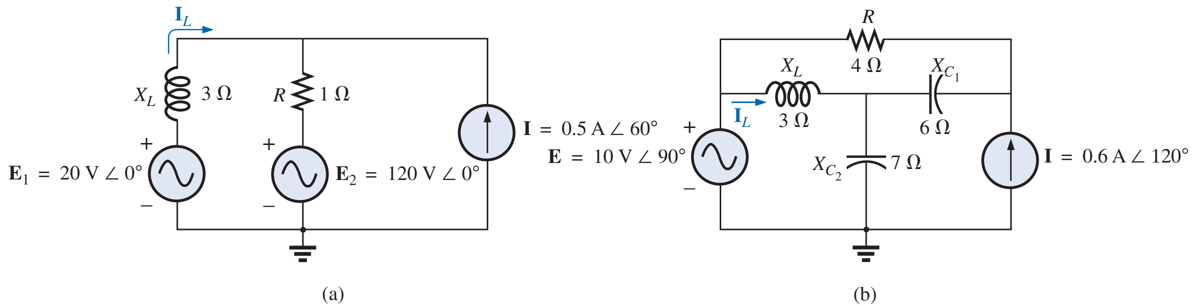


FIGURA 18.110
Problema 2.

***3.** Utilizando superposición, encuentre la expresión senoidal para la corriente i de la red de la figura 18.111.

4. Utilizando superposición, obtenga la expresión senoidal para el voltaje v_C de la red de la figura 18.112.

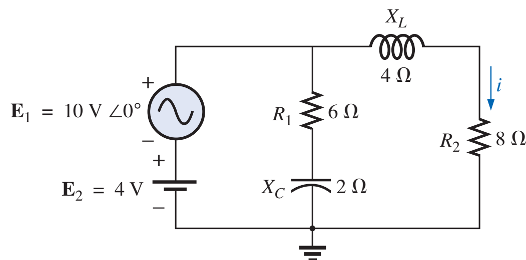


FIGURA 18.111
Problemas 3, 15, 30 y 42.

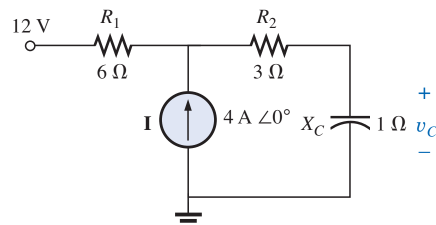


FIGURA 18.112
Problemas 4, 16 31 y 43.

***5.** Utilizando superposición, obtenga la corriente **I** para la red de la figura 18.113.

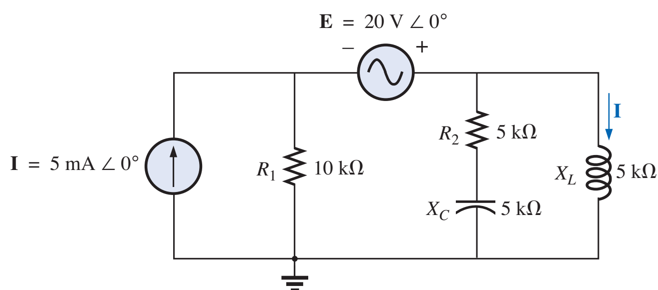


FIGURA 18.113
Problemas 5, 17, 32 y 44.

6. Utilizando superposición, determine la corriente $\mathbf{I}_L$ ($h = 100$) para la red de la figura 18.114.

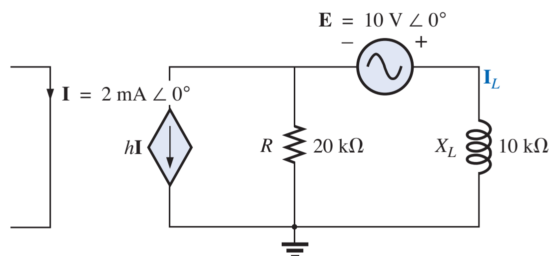


FIGURA 18.114
Problemas 6 y 20.

7. Utilizando superposición, determine el voltaje $\mathbf{V}_L$ ($\mu = 20$) para la red de la figura 18.115.

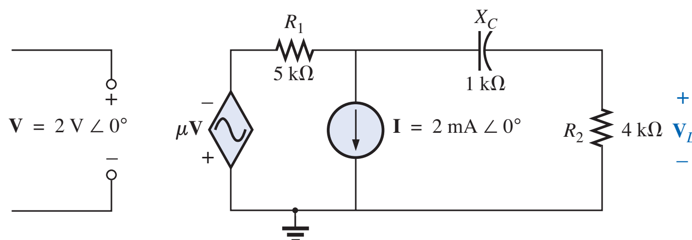


FIGURA 18.115
Problemas 7, 21 y 35.

***8.** Utilizando superposición, determine la corriente $\mathbf{I}_L$ para la red de la figura 18.116 ($\mu = 20$; $h = 100$).

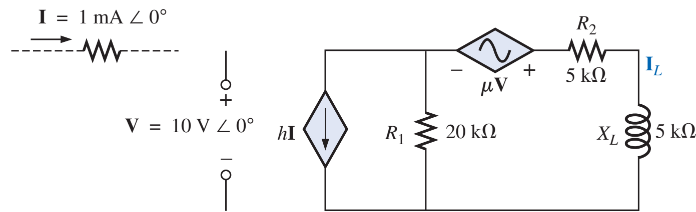


FIGURA 18.116
Problemas 8, 22 y 36.

***9.** Determine $\mathbf{V}_L$ para la red de la figura 18.117 ($h = 50$).

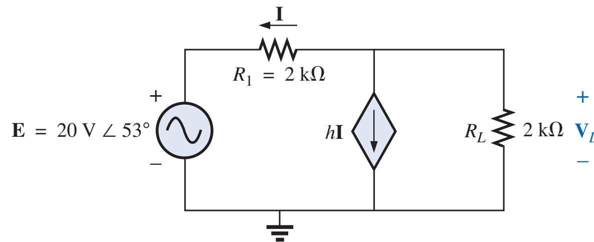


FIGURA 18.117
Problemas 9 y 23.

***10.** Calcule la corriente **I** para la red de la figura 18.118.

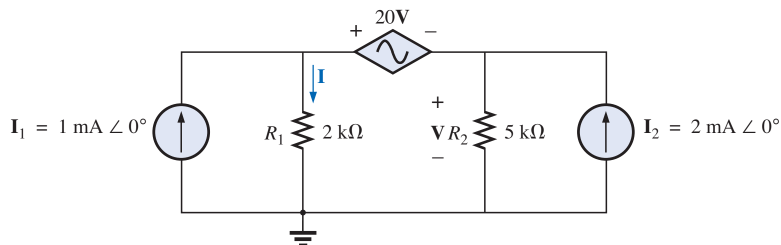


FIGURA 18.118
Problemas 10, 24 y 38.

11. Encuentre el voltaje $\mathbf{V}_s$ para la red de la figura 18.119.

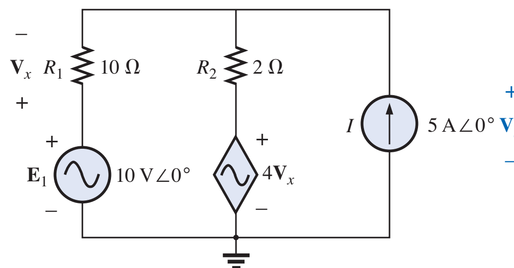
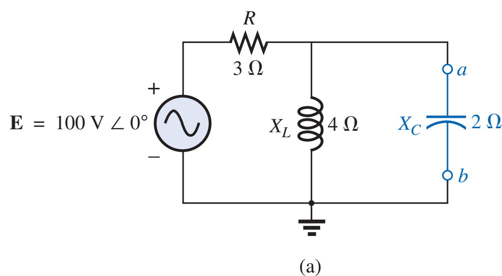


FIGURA 18.119
Problema 11.

SECCIÓN 18.3 Teorema de Thévenin

12. Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para las partes de las redes de la figura 18.120 externas a los elementos entre los puntos *a* y *b*.



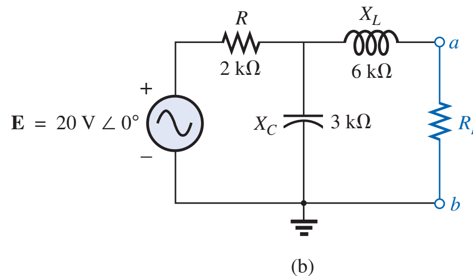
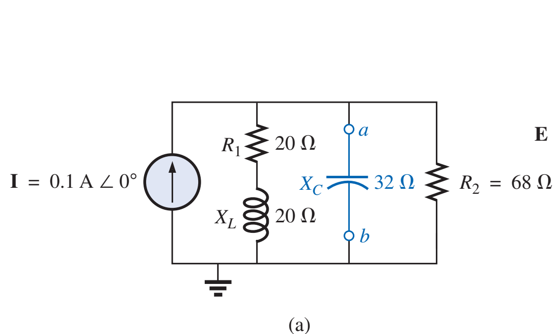


FIGURA 18.120
Problemas 12 y 26.

***13.** Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para las partes de las redes de la figura 18.121 externas a los elementos entre los puntos *a* y *b*.



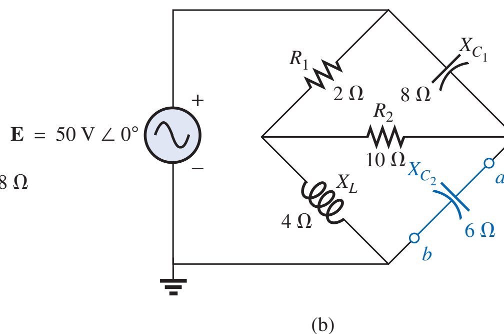
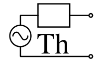


FIGURA 18.121
Problemas 13 y 27.



***14.** Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para las partes de las redes de la figura 18.122 externas a los elementos entre los puntos *a* y *b*.

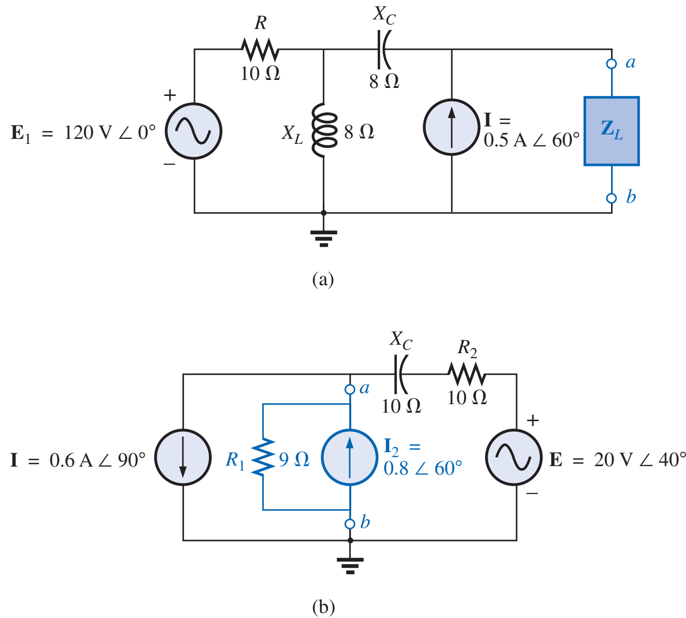


FIGURA 18.122
Problemas 14 y 28.

***15. a.** Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor R_2 de la figura 18.111.

b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine la corriente *i* de la misma figura.

16. a. Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al capacitor de la figura 18.112.

b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine el voltaje V_C para la misma figura.

***17. a.** Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al inductor de la figura 18.113.

b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine la corriente **I** de la misma figura.

18. Determine el circuito equivalente de Thévenin para la red externa a la reactancia inductiva de 5 kΩ de la figura 18.123 (en términos de **V**).

19. Determine el circuito equivalente de Thévenin para la red externa a la reactancia inductiva de 4 kΩ de la figura 18.124 (en términos de **I**).

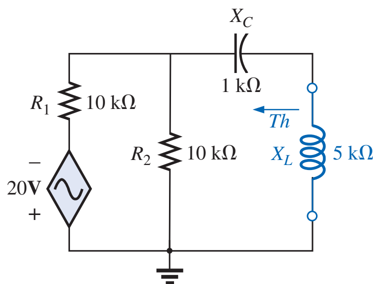


FIGURA 18.123
Problemas 18 y 33.

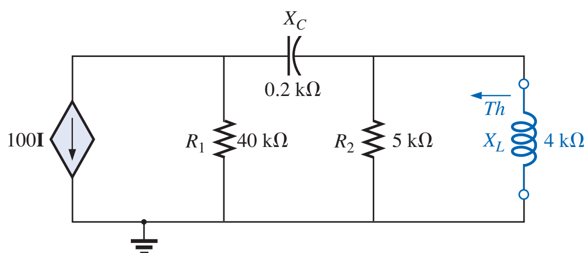


FIGURA 18.124
Problemas 19 y 34.

20. Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para la red externa a la reactancia inductiva de 10 kΩ de la figura 18.114.

21. Determine el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor de 4 kΩ de la figura 18.115.

***22.** Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para la red externa a la reactancia inductiva de 5 kΩ de la figura 18.116.

***23.** Determine el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor de 2 kΩ de la figura 18.117.

***24.** Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para la red externa al resistor R_1 de la figura 18.118.

***25.** Obtenga el circuito equivalente de Thévenin para la red a la izquierda de las terminales *a-a'* de la figura 18.125.

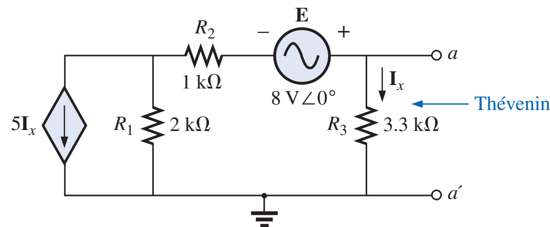


FIGURA 18.125
Problema 25.

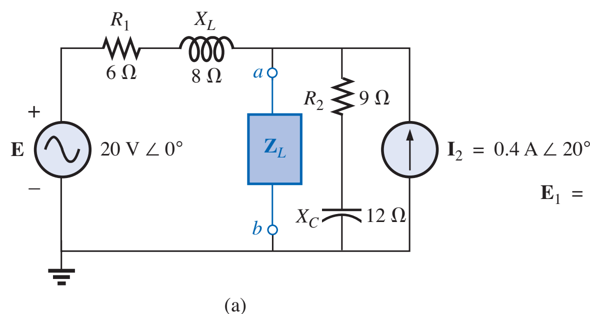
SECCIÓN 18.4 Teorema de Norton

26. Obtenga el circuito equivalente de Norton para la red externa a los elementos entre *a* y *b* en las redes de la figura 18.120.

27. Obtenga el circuito equivalente de Norton para la red externa a los elementos entre *a* y *b* en las redes de la figura 18.121.

28. Obtenga el circuito equivalente de Norton para la red externa a los elementos entre *a* y *b* en las redes de la figura 18.122.

***29.** Obtenga el circuito equivalente de Norton para las partes de las redes de la figura 18.126 externas a los elementos entre los puntos *a* y *b*.



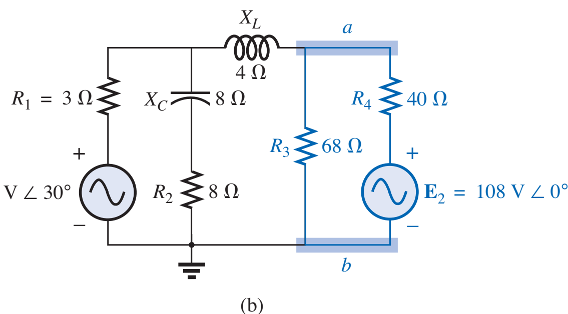


FIGURA 18.126
Problema 29.

***30.** **a.** Obtenga el circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor R_2 de la figura 18.111.
b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine la corriente **I** de la misma figura.

***31.** **a.** Encuentre el circuito equivalente de Norton para la red externa al capacitor de la figura 18.112.
b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine el voltaje $\mathbf{V}_C$ de la misma figura.

***32.** **a.** Obtenga el circuito equivalente de Norton para la red externa al inductor de la figura 18.113.
b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine la corriente **I** de la misma figura.

33. Determine el circuito equivalente de Norton para la red externa a la reactancia inductiva de 5 kΩ de la figura 18.123.

34. Determine el circuito equivalente de Norton para la red externa a la reactancia inductiva de 4 kΩ de la figura 18.124.

35. Encuentre el circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor de 4 kΩ de la figura 18.115.

***36.** Obtenga el circuito equivalente de Norton para la red externa a la reactancia inductiva de 5 kΩ de la figura 18.116.

***37.** Para la red de la figura 18.127, obtenga el circuito equivalente de Norton para la red externa al resistor de 2 kΩ.

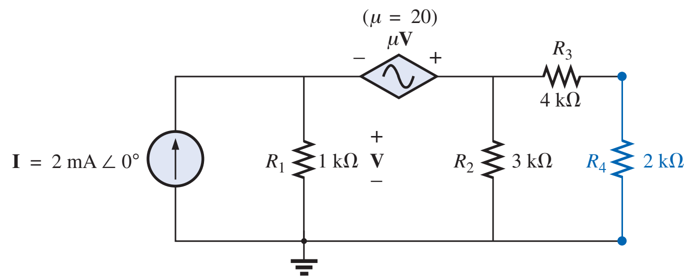


FIGURA 18.127
Problema 37.

***38.** Obtenga el circuito equivalente de Norton para la red externa a la fuente de corriente $\mathbf{I}_1$ de la figura 18.118.

SECCIÓN 18.5 Teorema de máxima transferencia de potencia

39. Encuentre la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ para las redes de la figura 18.128 para una potencia máxima hacia la carga, y obtenga la máxima potencia hacia la carga.

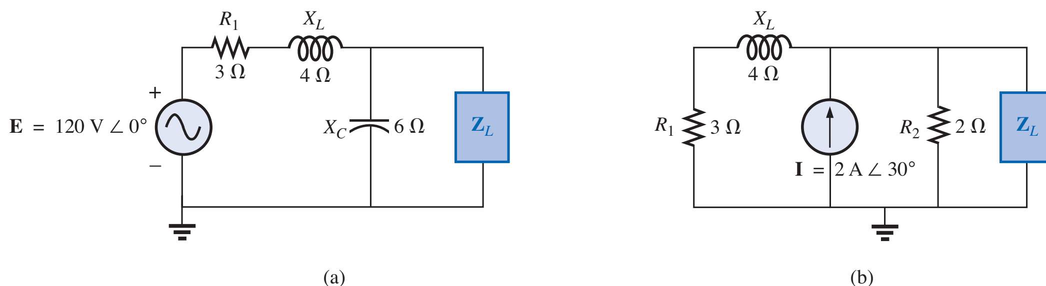


FIGURA 18.128
Problema 39.

*40. Encuentre la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ para las redes de la figura 18.129 para una potencia máxima hacia la carga, y obtenga la máxima potencia hacia la carga.

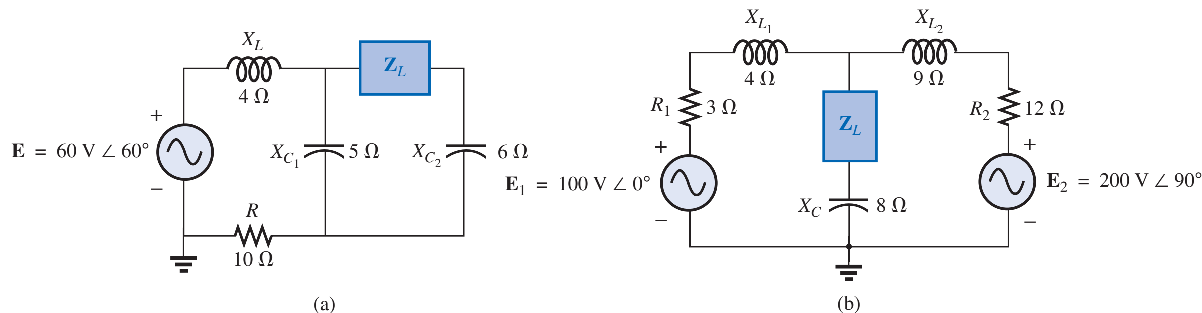


FIGURA 18.129
Problema 40.

41. Encuentre la impedancia de carga R_L para la red de la figura 18.130 para una potencia máxima hacia la carga, y obtenga la máxima potencia hacia la carga.

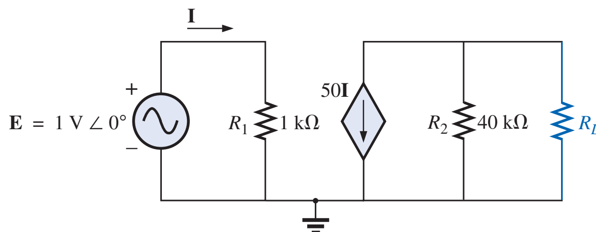


FIGURA 18.130
Problema 41.

*42. a. Determine la impedancia de carga para reemplazar al resistor R_2 de la figura 18.111 y asegurar una potencia máxima hacia la carga.
b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine la potencia máxima hacia la carga.

*43. a. Determine la impedancia de carga para reemplazar al capacitor X_C de la figura 18.112 y asegurar una potencia máxima hacia la carga.
b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine la potencia máxima hacia la carga.

*44. a. Determine la impedancia de carga para reemplazar al inductor X_L de la figura 18.113 y asegurar una potencia máxima hacia la carga.
b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine la potencia máxima hacia la carga.

45. a. Para la red de la figura 18.131, determine el valor de R_L que ocasionará una potencia máxima hacia la carga.
b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine la potencia máxima entregada.

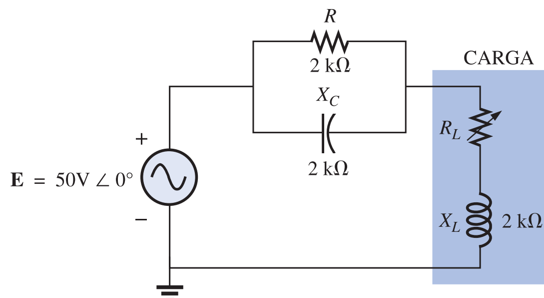
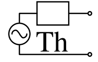


FIGURA 18.131
Problema 45.



***46.** **a.** Para la red de la figura 18.132, determine el valor de capacitancia que asegurará una potencia máxima hacia la carga si el intervalo de capacitancia está limitado de 1 nF a 5 nF.

b. Utilizando los resultados del inciso (a), determine el valor de R_L que asegurará una potencia máxima hacia la carga.

c. Utilizando los resultados de los incisos (a) y (b), determine la potencia máxima hacia la carga.

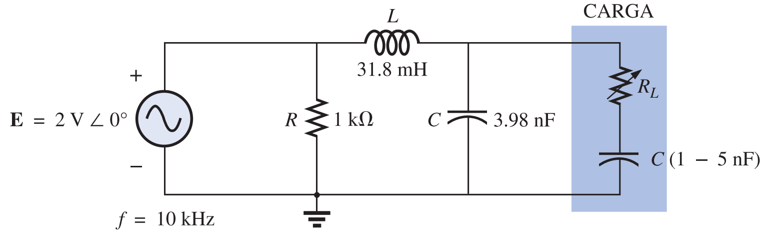


FIGURA 18.132
Problema 46.

SECCIÓN 18.6 Teoremas de sustitución, reciprocidad y de Millman

47. Para la red de la figura 18.133, determine dos ramas equivalentes mediante el teorema de sustitución para la rama *a-b*.

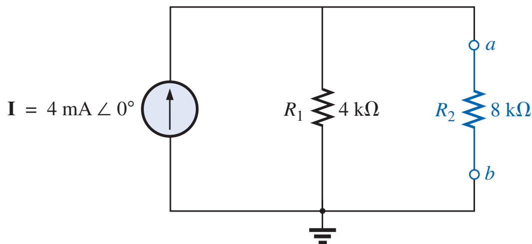
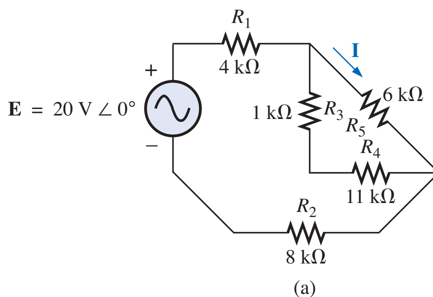


FIGURA 18.133
Problema 47.

48. **a.** Para la red de la figura 18.134(a), encuentre la corriente **I**.

b. Repita el inciso (a) para la red de la figura 18.134(b).

c. ¿Son equivalentes los resultados de los incisos (a) y (b)?



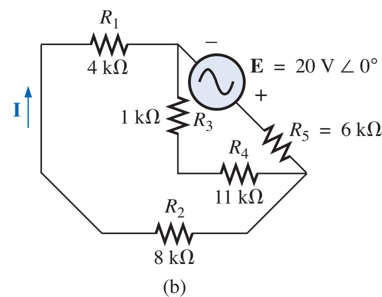


FIGURA 18.134
Problema 48.

49. Utilizando el teorema de Millman, determine la corriente a través de la reactancia capacitiva de 4 kΩ de la figura 18.135.

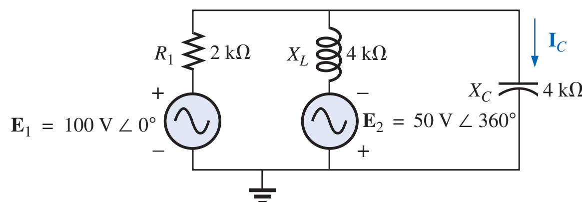


FIGURA 18.135
Problema 49.

SECCIÓN 18.8 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

50. Aplique superposición a la red de la figura 18.6. Es decir, determine la corriente **I** debida a cada fuente, y luego obtenga la corriente resultante.

***51.** Determine la corriente $\mathbf{I}_L$ para la red de la figura 18.21 utilizando captura esquemática.

***52.** Mediante captura esquemática, determine $\mathbf{V}_2$ para la red de la figura 18.56 si $\mathbf{V}_i = 1\text{ V} \angle 0°$, $R_1 = 0.5\text{ k}\Omega$, $k_1 = 3 \times 10^{-4}$, $k_2 = 50$, y $R_2 = 20\text{ k}\Omega$.

***53.** Obtenga el circuito equivalente de Norton para la red de la figura 18.75 utilizando captura esquemática.

***54.** Mediante captura esquemática, grafique la potencia hacia la carga *R-C* de la figura 18.88 para valores de R_L desde 1 Ω hasta 10 Ω.

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

55. Dada la red de la figura 18.1, escriba un programa para determinar una solución general para la corriente **I** utilizando superposición. Es decir, dada la reactancia de los mismos elementos de red, determine **I** para fuentes de voltaje de cualquier magnitud pero mismo ángulo.

56. Dada la red de la figura 18.23, escriba un programa para determinar el voltaje y la impedancia de Thévenin para cualquier valor de reactancia en cada elemento y cualquier magnitud de voltaje en la fuente de voltaje. El ángulo de la fuente de voltaje deberá permanecer en cero grados.

57. Dada la configuración de la figura 18.136, demuestre que la potencia máxima se entrega hacia la carga cuando $X_C = X_L$ tabulando la potencia hacia la carga para una X_C variable desde 0.1 kΩ hasta 2 kΩ en incrementos de 0.1 kΩ.

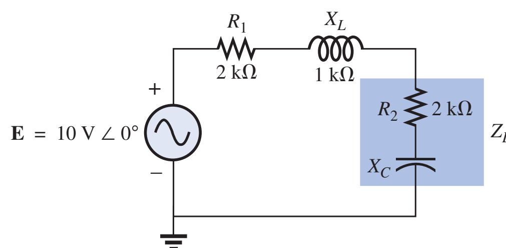


FIGURA 18.136
Problema 57.

GLOSARIO

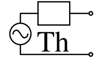
Fuente de voltaje controlada por voltaje (FVCV) Fuente de voltaje cuyos parámetros están controlados por un voltaje desarrollado en cualquier otro lugar del sistema.

Teorema de máxima transferencia de potencia Teorema utilizado para determinar la impedancia de carga necesaria que asegure una potencia máxima hacia la carga.

Teorema de Millman Método que utiliza conversiones de fuente de voltaje a corriente que permitirán la determinación de variables desconocidas en una red multilazos.

Teorema de Norton Teorema que permite la reducción de cualquier red lineal de ca de dos terminales a una que tenga una sola fuente de corriente e impedancia en paralelo. La configuración resultante podrá ser utilizada entonces para determinar una corriente o un voltaje particulares en la red original, o para examinar los efectos de una parte específica de la red sobre una variable en particular.

Teorema de reciprocidad Este teorema establece que para redes de una sola fuente, la magnitud de la corriente en cualquier rama de la red —debida a una sola fuente de voltaje en cualquier otro lugar de la red— será igual a la magnitud de la corriente a través de la rama en la que la fuente en un principio se localizaba si la fuente está colocada en la rama donde la corriente fue originalmente medida.



Teorema de superposición Método de análisis de redes que permite considerar los efectos de cada fuente de manera independiente. La corriente y/o el voltaje resultantes serán la suma fasorial de las corrientes y/o voltajes desarrollados por cada fuente independiente.

Teorema de sustitución Teorema que establece que si el voltaje en y la corriente a través de cualquier rama de una red bilateral de ca se conocen, la rama podrá reemplazarse por cualquier combinación de elementos que mantengan los mismos voltaje en y corriente a través de la rama elegida.

Teorema de Thévenin Teorema que permite la reducción de cualquier red lineal de ca de dos terminales a una que tenga una sola fuente de voltaje e impedancia en serie. La configuración resultante podrá ser utilizada entonces para determinar una corriente o un voltaje particulares en la red original, o para examinar los efectos de una parte específica de la red sobre una variable en particular.

19

P_s^q

Potencia (ca)

19.1 INTRODUCCIÓN

El análisis de la potencia efectuado en el capítulo 14 incluyó únicamente la potencia promedio entregada a una red de ca. En este capítulo analizaremos la ecuación de potencia total de una forma ligeramente distinta y presentaremos dos tipos adicionales de potencia: **aparente** y **reactiva**.

Para todo sistema tal como el que aparece en la figura 19.1, la potencia entregada a una carga en cualquier instante está definida por el producto del voltaje aplicado y la corriente resultante; es decir,

$$p = vi$$

En esta circunstancia, dado que v e i son cantidades senoidales, se establece un caso general donde:

$$v = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

e

$$i = I_m \operatorname{sen} \omega t$$

La i y la v seleccionadas incluyen todas las posibilidades ya que, si la carga es resistiva, $\theta = 0°$. Si la carga es sólo inductiva o capacitiva, $\theta = 90°$ o $\theta = -90°$, respectivamente. Para una red que es en su mayoría inductiva, θ es positiva (v adelanta a i), y para una red que es en mayor parte capacitiva, θ es negativa (i adelanta a v).

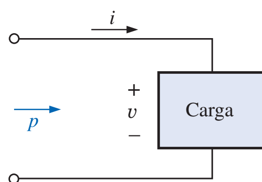


FIGURA 19.1
Definición de la potencia entregada a una carga.

Al sustituir las ecuaciones anteriores para v e i en la ecuación de potencia se obtendrá:

$$p = V_m I_m \text{ sen } \omega t \text{ sen}(\omega t + \theta)$$

Si aplicamos ahora algunas identidades trigonométricas, resultará la siguiente forma para la ecuación de potencia:

$$p = VI \cos \theta(1 - \cos 2\omega t) + VI \text{ sen } \theta(\text{sen } 2\omega t) \qquad \textbf{(19.1)}$$

donde V e I son los valores rms. La conversión de valores pico V_m e I_m a valores rms se obtuvo a partir de las operaciones realizadas utilizando las identidades trigonométricas.

Inicialmente parecería que no se obtuvo nada al poner la ecuación (19.1) en esta forma. Sin embargo, la utilidad de la forma se demostrará en las siguientes secciones. La derivación de la ecuación (19.1) desde su forma inicial aparecerá como una tarea al final del capítulo.

Si la ecuación (19.1) se amplía hasta la forma:

$$p = \underbrace{VI \cos \theta}_{\text{Promedio}} - \underbrace{VI \cos \theta}_{\text{Pico}} \cos \underbrace{2\omega t}_{2x} + \underbrace{VI \text{ sen } \theta}_{\text{Pico}} \text{ sen } \underbrace{2\omega t}_{2x}$$

existen dos observaciones que pueden hacerse. Primero, la potencia promedio sigue apareciendo como un término aislado independiente del tiempo. Segundo, los dos términos que le siguen varían a una frecuencia del doble del voltaje o de la corriente aplicada, con valores pico que tienen un formato muy similar.

En un esfuerzo por asegurar integridad y orden en la presentación, cada elemento básico (R, L y C) se tratará por separado.

19.2 EL CIRCUITO RESISTIVO

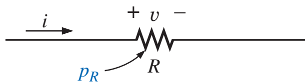


FIGURA 19.2
Determinación de la potencia entregada a una carga puramente resistiva.

Para un circuito puramente resistivo (como el de la figura 19.2), v e i se encuentran en fase, y $\theta = 0°$, como aparece en la figura 19.3. Al sustituir $\theta = 0°$ en la ecuación (19.1) obtenemos:

$$p_R = VI \cos(0°)(1 - \cos 2\omega t) + VI \text{ sen}(0°) \text{ sen } 2\omega t$$
$$= VI(1 - \cos 2\omega t) + 0$$

o bien:

$$p_R = VI - VI \cos 2\omega t \qquad \textbf{(19.2)}$$

donde VI es el término de cd o promedio y $-VI \cos 2\omega t$ es una onda cosenoidal negativa con el doble de la frecuencia de cualquier cantidad de entrada (v o i) y un valor pico de VI.

Al graficar la forma de onda para p_R (Figura 19.3), vemos que:

$$T_1 = \text{periodo de las cantidades de entrada}$$
$$T_2 = \text{periodo de la curva de potencia } p_R$$

Observe que en la figura 19.3, la curva de potencia pasa a través de dos ciclos sobre su valor promedio de VI para cada ciclo de v o i ($T_1 = 2T_2$ o $f_2 = 2f_1$). Considere también que dado que los valores pico y promedio de la curva de potencia son iguales, la curva siempre está por encima del eje horizontal. Esto indica que

toda la potencia entregada a un resistor se disipará en forma de calor.

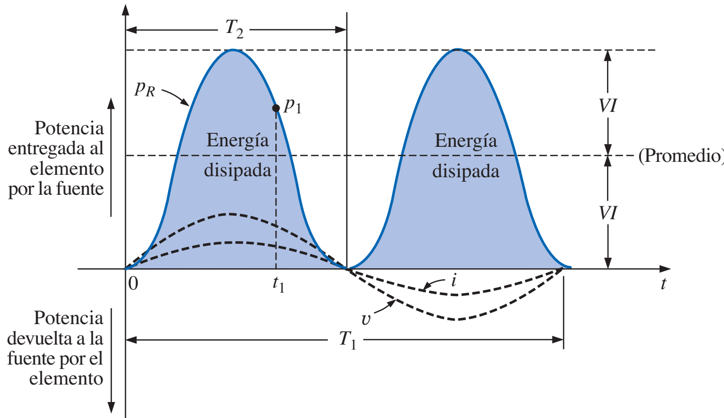


FIGURA 19.3
Potencia en función del tiempo para una carga puramente resistiva.

La potencia devuelta a la fuente está representada mediante la parte de la curva por debajo del eje, la cual es cero en este caso. La potencia disipada por el resistor en cualquier instante t_1 puede obtenerse simplemente al sustituir el tiempo t_1 en la ecuación (19.2) para obtener p_1, como se indica en la figura 19.3. La **potencia promedio (real)** a partir de la ecuación (19.2), o de la figura 19.3, es VI; o, recordando lo visto en el capítulo 14.

$$P = VI = \frac{V_m I_m}{2} = I^2 R = \frac{V^2}{R} \qquad \text{(watts, W)} \qquad \textbf{(19.3)}$$

La energía disipada por el resistor (W_R) durante un ciclo completo del voltaje aplicado (Figura 19.3) se puede obtener utilizando la siguiente ecuación:

$$W = Pt$$

donde P es el valor promedio y t es el periodo del voltaje aplicado; es decir,

$$W_R = VIT_1 \qquad \text{(joules, J)} \qquad \textbf{(19.4)}$$

o, dado que $T_1 = 1/f_1$,

$$W_R = \frac{VI}{f_1} \qquad \text{(joules, J)} \qquad \textbf{(19.5)}$$

19.3 POTENCIA APARENTE

A partir de nuestro análisis de las redes de cd (y de los elementos resistivos anteriores), resultaría *aparente* que la potencia entregada a la carga de la figura 19.4 está determinada simplemente por el producto de la corriente y el voltaje aplicados, sin importar los componentes de la carga; es decir, $P = VI$. Sin embargo, vimos en el capítulo 14 que el factor de potencia (cos θ) de la carga tendrá un efecto importante sobre la potencia disipada, el cual será menos pronunciado para cargas más reactivas. Aunque el producto del voltaje y la corriente no siempre es la potencia entregada, es un indicador de potencia de gran

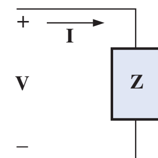


FIGURA 19.4
Definición de la potencia aparente hacia una carga.

utilidad para la descripción y el análisis de redes de ca senoidales y para fijar niveles máximos de muchos componentes y sistemas eléctricos. A este producto se le denomina **potencia aparente** y está representado de forma simbólica por S.* Dado que simplemente es el producto del voltaje y la corriente, sus unidades son *volt-ampere*, cuya abreviatura es VA. Su magnitud está determinada por:

$$S = VI \quad \text{(volt-ampere, VA)} \tag{19.6}$$

o, dado que: $V = IZ$ e $I = \dfrac{V}{Z}$

entonces:

$$S = I^2Z \quad \text{(VA)} \tag{19.7}$$

y

$$S = \frac{V^2}{Z} \quad \text{(VA)} \tag{19.8}$$

La potencia promedio para la carga de la figura 19.4 es:

$$P = VI\cos\theta$$

Sin embargo, $S = VI$

Por tanto,

$$P = S\cos\theta \quad \text{(W)} \tag{19.9}$$

y el factor de potencia de un sistema F_p es:

$$F_p = \cos\theta = \frac{P}{S} \quad \text{(adimensional)} \tag{19.10}$$

Por tanto, el factor de potencia de un circuito es la razón de la potencia promedio a la potencia aparente. Para un circuito puramente resistivo tenemos que:

$$P = VI = S$$

y

$$F_p = \cos\theta = \frac{P}{S} = 1$$

En general, los equipos de potencia se valoran en volt-ampere (VA) o en kilo-volt-ampere (kVA) y no en watts. Al conocer el nivel en volt-ampere y el voltaje especificado de un dispositivo, rápidamente podremos determinar el nivel de corriente *máxima*. Por ejemplo, un dispositivo especificado en 10 kVA a 200 V tendrá un nivel de corriente máxima de $I = 10{,}000\ \text{VA}/200\ \text{V} = 50\ \text{A}$ cuando se opere bajo las condiciones especificadas. La especificación volt-ampere de una pieza de equipo es igual a la especificación en watts sólo cuando la F_p es igual a 1. Por tanto, éste es un nivel máximo de disipación de potencia. Esta condición existirá solamente cuando la impedancia total de un sistema $Z\angle\theta$ sea tal que $\theta = 0°$.

La demanda exacta de corriente de un dispositivo, cuando se utiliza bajo condiciones normales de operación, podría determinarse si se contara con el nivel en watts y el factor de potencia en lugar del valor en volt-ampere. Sin embargo, en ocasiones el factor de potencia no está disponible o puede variar con la carga.

---

*Antes de 1968, el símbolo para la potencia aparente era otro más descriptivo: P_a.

La razón para que las características de cierto equipo eléctrico se especifiquen en kilovolt-ampere en lugar de kilowatts se puede describir utilizando la configuración de la figura 19.5. La carga tiene un valor de potencia aparente de 10 kVA y nivel de corriente de 50 A al voltaje aplicado de 200 V. Como se indica, la demanda de corriente de 70 A está por encima del valor especificado y podría dañar al elemento de carga, sin embargo la lectura en el watímetro es relativamente baja dado que la carga es muy reactiva. En otras palabras, la lectura del watímetro es una señal de los watts disipados y podría no reflejar la magnitud de la corriente consumida. En teoría, si la carga fuera sólo reactiva, la lectura del watímetro sería cero incluso si la carga estuviera siendo dañada por un nivel de corriente alto.

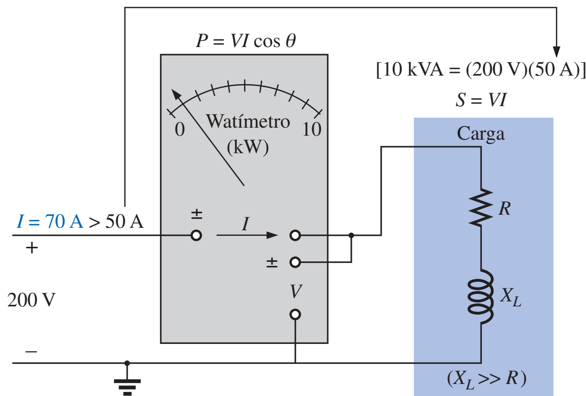


FIGURA 19.5
Demostración del motivo para especificar una carga en kVA en lugar de hacerlo en kW.

19.4 CIRCUITO INDUCTIVO Y POTENCIA REACTIVA

Para un circuito puramente inductivo (semejante al de la figura 19.6), v adelanta a i por 90°, como se muestra en la figura 19.7. Por tanto, en la ecuación (19.1), $\theta = 90°$. Al sustituir $\theta = 90°$ en la ecuación (19.1) resulta:

$$p_L = VI\cos(90°)(1 - \cos 2\omega t) + VI\,\text{sen}(90°)(\text{sen}\, 2\omega t)$$
$$= 0 + VI\,\text{sen}\, 2\omega t$$

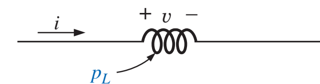


FIGURA 19.6
Definición del nivel de potencia para una carga puramente inductiva.

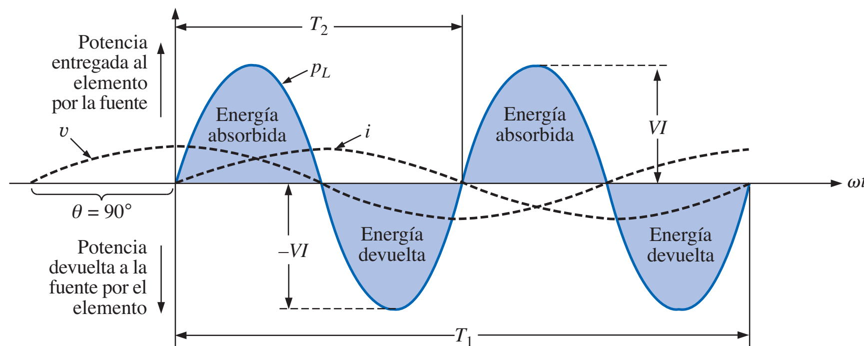


FIGURA 19.7
Curva de potencia para una carga puramente inductiva.

P_s^q

o bien: $$p_L = VI \text{ sen } 2\omega t \tag{19.11}$$

donde VI sen $2\omega t$ es una onda senoidal con el doble de la frecuencia de cualquier cantidad de entrada (v o i) y un valor pico de VI. Observe la ausencia de un término constante o promedio en la ecuación.

Al graficar la forma de onda para p_L (Figura 19.7) obtenemos:

T_1 = periodo de cualquier cantidad de entrada
T_2 = periodo de la curva de p_L

Observe que durante un ciclo completo de p_L (T_2), el área por encima del eje horizontal en la figura 19.7 es exactamente igual al área por debajo del eje. Esto indica que durante un ciclo completo de p_L, la potencia entregada por la fuente al inductor es igual a la devuelta a la fuente por el inductor.

El flujo neto de potencia al inductor puro (ideal) es cero durante un ciclo completo, y no se pierde energía en la transacción.

La potencia absorbida o devuelta por el inductor en cualquier instante t_1 puede obtenerse simplemente al sustituir t_1 en la ecuación (19.11). El valor pico de la curva VI está definido como la **potencia reactiva** asociada con un inductor puro.

En general, la potencia reactiva asociada con cualquier circuito está definida como VI sen θ, un factor que aparece en el segundo término de la ecuación (19.1). Observe que es el valor pico de este término de la ecuación de potencia total el que no produce una transferencia neta de energía. El símbolo para la potencia reactiva es Q, y su unidad de medición es el *volt-ampere reactivo* (VAR).* La Q se deriva a partir de la relación de cuadratura (90°) entre las distintas potencias; se analizará con todo detalle en una sección posterior. Por tanto,

$$Q = VI \text{ sen } \theta \qquad \text{(volt-ampere reactivo, VAR)} \tag{19.12}$$

donde θ es el ángulo de fase entre V e I.

Para el inductor,

$$Q_L = VI \qquad \text{(VAR)} \tag{19.13}$$

o, dado que $V = IX_L$ o $I = V/X_L$,

$$Q_L = I^2 X_L \qquad \text{(VAR)} \tag{19.14}$$

o bien: $$Q_L = \frac{V^2}{X_L} \qquad \text{(VAR)} \tag{19.15}$$

La potencia aparente asociada con un inductor es $S = VI$, y la potencia promedio es $P = 0$, como se observa en la figura 19.7. Por tanto, el factor de potencia es:

$$F_p = \cos \theta = \frac{P}{S} = \frac{0}{VI} = 0$$

*Antes de 1968, el símbolo para la potencia reactiva era otro más descriptivo: P_q.

Si la potencia promedio es cero, y la energía suministrada se devuelve en un ciclo, ¿por qué es importante la potencia reactiva? La razón no resulta obvia, pero puede explicarse utilizando la curva de la figura 19.7. En todo instante durante el cual la curva de potencia esté por encima del eje (positiva), la energía deberá suministrarse al inductor, aun cuando será devuelta durante la parte negativa del ciclo. Tal requerimiento de potencia durante la parte positiva del ciclo exige que la planta de generación proporcione esta energía durante ese intervalo. Por consiguiente, el efecto de elementos reactivos tales como el inductor puede ser la elevación del requerimiento de potencia de la planta de generación, aun cuando la potencia reactiva no sea disipada sino simplemente "prestada". La mayor demanda de potencia durante estos intervalos es un factor de costo que deberá transferirse al consumidor industrial. De hecho, la mayoría de los grandes usuarios de energía eléctrica pagan por la demanda de potencia aparente en lugar de hacerlo por los watts disipados dado que los volts-ampere utilizados son sensibles al requerimiento de potencia reactiva (vea la sección 19.6). En otras palabras, mientras más cerca se encuentre el factor de potencia de un equipo industrial a 1, más eficiente será la operación de la planta dado que ésta limita su utilización de la potencia "prestada".

La energía almacenada por el inductor durante la parte positiva del ciclo (Figura 19.7) es igual a la potencia devuelta durante la parte negativa y podrá determinarse utilizando la siguiente ecuación:

$$W = Pt$$

donde P es el valor promedio para el intervalo y t es el intervalo de tiempo asociado.

Recuérdese del capítulo 14 que el valor promedio de la parte positiva de una senoidal es igual a 2(valor pico/π) y $t = T_2/2$. En consecuencia,

$$W_L = \left(\frac{2VI}{\pi}\right) \times \left(\frac{T_2}{2}\right)$$

y

$$\boxed{W_L = \frac{VIT_2}{\pi}} \qquad \text{(J)} \qquad \textbf{(19.16)}$$

o, dado que $T_2 = 1/f_2$, donde f_2 es la frecuencia de la curva de p_L, tenemos:

$$\boxed{W_L = \frac{VI}{\pi f_2}} \qquad \text{(J)} \qquad \textbf{(19.17)}$$

Dado que la frecuencia f_2 de la curva de potencia es el doble que la frecuencia de la cantidad de entrada, si sustituimos la frecuencia f_1 del voltaje o de la corriente de entrada, la ecuación (19.17) se convierte en:

$$W_L = \frac{VI}{\pi(2f_1)} = \frac{VI}{\omega_1}$$

Sin embargo,

$$V = IX_L = I\omega_1 L$$

de manera que:

$$W_L = \frac{(I\omega_1 L)I}{\omega_1}$$

y

$$\boxed{W_L = LI^2} \qquad \text{(J)} \qquad \textbf{(19.18)}$$

lo cual proporciona una ecuación para la energía almacenada o liberada por el inductor en un semiciclo del voltaje aplicado en términos de la inductancia y del valor rms de la corriente al cuadrado.

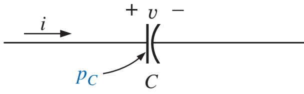


FIGURA 19.8
Definición del nivel de potencia para una carga puramente capacitiva.

19.5 CIRCUITO CAPACITIVO

Para un circuito puramente capacitivo (semejante al de la figura 19.8), i adelanta a v por 90°, como se muestra en la figura 19.9. Por consiguiente, en la ecuación (19.1), $\theta = -90°$. Al sustituir $\theta = -90°$ en la ecuación (19.1) obtenemos:

$$p_C = VI\cos(-90°)(1 - \cos 2\omega t) + VI\,\text{sen}(-90°)(\text{sen}\,2\omega t)$$
$$= 0 - VI\,\text{sen}\,2\omega t$$

o bien:

$$p_C = -VI\,\text{sen}\,2\omega t \qquad (19.19)$$

donde $-VI$ sen $2\omega t$ es una onda senoidal negativa con el doble de la frecuencia de cualquier entrada (v o i) y un valor pico de VI. Nuevamente, observe la ausencia de un término constante o promedio.

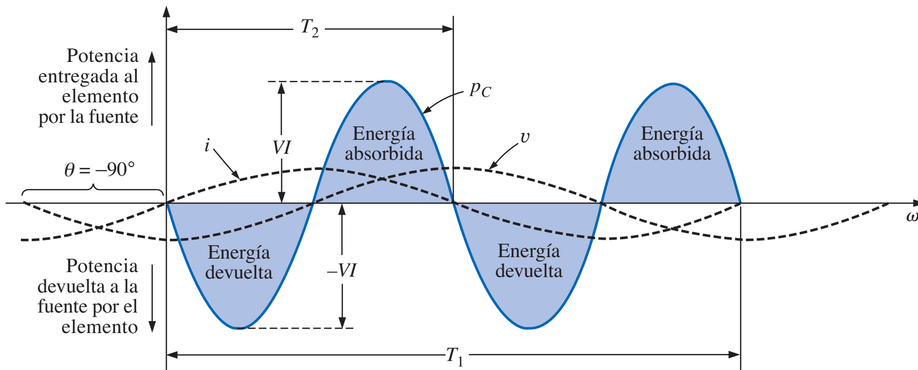


FIGURA 19.9
Curva de potencia para una carga puramente capacitiva.

Al graficar la forma de onda para p_C (Figura 19.9) tenemos:

T_1 = Periodo de cualquier cantidad de entrada
T_2 = Periodo de la curva de p_C

Observe que aquí se presenta la misma situación para la curva de p_C como se presentó para la curva de p_L. La potencia entregada por la fuente al capacitor es exactamente igual a la potencia devuelta a la fuente por el capacitor sobre un ciclo completo.

El flujo neto de potencia al capacitor puro (ideal) es cero durante un ciclo completo,

y no se pierde energía en la transacción. La potencia absorbida o devuelta por el capacitor en cualquier instante t_1 puede obtenerse al sustituir t_1 en la ecuación (19.9).

La potencia reactiva asociada con el capacitor es igual al valor pico de la curva p_C, como sigue:

$$Q_C = VI \qquad \text{(VAR)} \qquad (19.20)$$

Pero, dado que $V = IX_C$ e $I = V/X_C$, la potencia reactiva hacia el capacitor también puede escribirse como:

$$Q_C = I^2X_C \qquad \text{(VAR)} \qquad (19.21)$$

y $$Q_C = \frac{V^2}{X_C} \quad \text{(VAR)} \tag{19.22}$$

La potencia aparente asociada con el capacitor es:

$$S = VI \quad \text{(VA)} \tag{19.23}$$

y la potencia promedio es $P = 0$, como se observa a partir de la ecuación (19.19) o de la figura 19.9. Por consiguiente, el factor de potencia es,

$$F_p = \cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{0}{VI} = 0$$

La energía almacenada por el capacitor durante la parte positiva del ciclo (Figura 19.9) es igual a la energía devuelta durante la parte negativa y puede determinarse utilizando la ecuación $W = Pt$.

Al proceder de una forma similar a la empleada para el inductor, podemos mostrar que:

$$W_C = \frac{VIT_2}{\pi} \quad \text{(J)} \tag{19.24}$$

o, dado que $T_2 = 1/f_2$, donde f_2 es la frecuencia de la curva de p_C,

$$W_C = \frac{VI}{\pi f_2} \quad \text{(J)} \tag{19.25}$$

En términos de la frecuencia f_1 de las cantidades de entrada v e i,

$$W_C = \frac{VI}{\pi(2f_1)} = \frac{VI}{\omega_1} = \frac{V(V\omega_1 C)}{\omega_1}$$

y $$W_C = CV^2 \quad \text{(J)} \tag{19.26}$$

lo cual proporciona una ecuación para la energía almacenada o liberada por el capacitor en un semiciclo del voltaje aplicado en términos de la capacitancia y del valor rms del voltaje al cuadrado.

19.6 EL TRIÁNGULO DE POTENCIA

Las tres cantidades: **potencia promedio**, **potencia aparente** y **potencia reactiva** pueden relacionarse en el dominio vectorial mediante:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} \tag{19.27}$$

con:

$$\mathbf{P} = P\angle 0° \qquad \mathbf{Q}_L = Q_L\angle 90° \qquad \mathbf{Q}_C = Q_C\angle -90°$$

Para una carga inductiva, el *fasor de potencia* **S**, como se le denomina con frecuencia, está definido por:

$$\mathbf{S} = P + j\,Q_L$$

como se muestra en la figura 19.10.

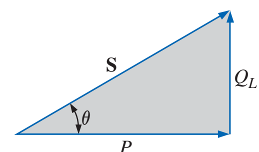


FIGURA 19.10
Diagrama de potencia para cargas inductivas.

El desplazamiento de 90° en Q_L a partir de P es la razón de otro nombre para la potencia reactiva: *potencia en cuadratura*.

Para una carga capacitiva, el fasor de potencia **S** está definido por:

$$\mathbf{S} = P - j\,Q_C$$

como se muestra en la figura 19.11.

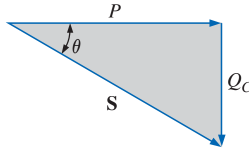


FIGURA 19.11
Diagrama de potencia para cargas capacitivas.

Si una red tiene elementos tanto capacitivos como inductivos, el componente reactivo del triángulo de potencia estará determinado por la *diferencia* entre la potencia reactiva entregada a cada uno. Si $Q_L > Q_C$, el triángulo de potencia resultante será similar al de la figura 19.10. Si $Q_C > Q_L$, el triángulo de potencia resultante será similar al de la figura 19.11.

El que la potencia reactiva total sea la diferencia entre las potencias reactivas de los elementos inductivos y capacitivos puede demostrarse mediante la consideración de las ecuaciones (19.11) y (19.19). Al utilizar estas ecuaciones, la potencia reactiva entregada a cada elemento reactivo se ha graficado para un circuito *L-C* en serie sobre el mismo conjunto de ejes en la figura 19.12. Los elementos reactivos se eligieron de tal forma que $X_L > X_C$. Observe que la curva de potencia para cada uno está exactamente 180º fuera de fase. Por tanto, la curva para la potencia reactiva resultante estará determinada por la resultante algebraica de las dos curvas en cada instante. Dado que la potencia reactiva está definida como el valor pico, el componente reactivo del triángulo de potencia es como el indicado en la figura: $I^2(X_L - X_C)$.

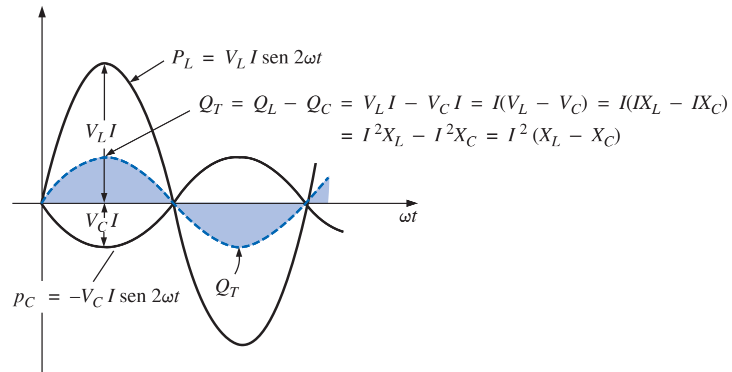


FIGURA 19.12
Demostración del porqué la potencia reactiva neta es la diferencia entre la potencia entregada a los elementos capacitivos e inductivos.

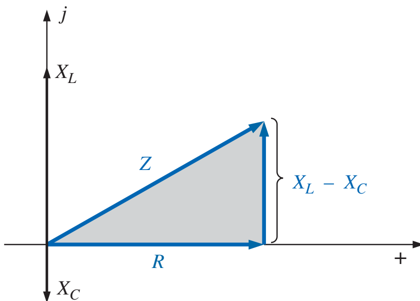


FIGURA 19.13
Diagrama de impedancia para un circuito R-L-C en serie.

Es posible deducir una comprobación adicional al considerar primero el diagrama de impedancia de un circuito en serie *R-L-C* (Figura 19.13). Si multiplicamos cada vector radial por la corriente al cuadrado (I^2) obtendremos los resultados que se muestran en la figura 19.14, los cuales son el triángulo de potencia para un circuito predominantemente inductivo.

Dado que la potencia reactiva y la potencia promedio siempre están a un ángulo de 90° una con respecto a la otra, las tres potencias que estamos analizando se relacionan mediante el teorema de Pitágoras; es decir,

$$S^2 = P^2 + Q^2 \qquad \textbf{(19.28)}$$

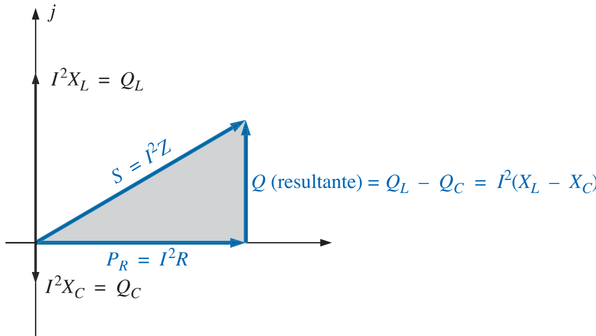


FIGURA 19.14
Resultado de multiplicar cada vector de la figura 19.13 por I^2 para un circuito R-L-C en serie.

Por consiguiente, siempre podrá obtenerse la tercer potencia si se conocen las otras dos.

Resulta particularmente interesante que la ecuación:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}^* \quad \textbf{(19.29)}$$

proporcionará la forma vectorial de la potencia aparente de un sistema. Aquí, **V** es el voltaje en el sistema e $\mathbf{I}^*$ el conjugado complejo de la corriente.

Considere, por ejemplo, el circuito simple *R-L* de la figura 19.15, donde:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{10 \text{ V} \angle 0°}{3\ \Omega + j\,4\ \Omega} = \frac{10 \text{ V} \angle 0°}{5\ \Omega \angle 53.13°} = 2 \text{ A} \angle -53.13°$$

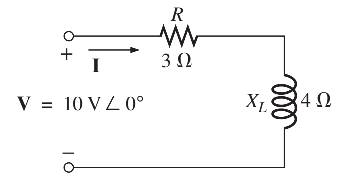


FIGURA 19.15
Demostración de la validez de la ecuación (19.29).

La potencia real (el término *real* se toma del eje real positivo del plano complejo) es:

$$P = I^2R = (2 \text{ A})^2(3\ \Omega) = 12 \text{ W}$$

y la potencia reactiva es:

$$Q_L = I^2X_L = (2 \text{ A})^2(4\ \Omega) = 16 \text{ VAR } (L)$$

con: $\mathbf{S} = P + j\,Q_L = 12 \text{ W} + j\,16 \text{ VAR } (L) = 20 \text{ VA} \angle 53.13°$

como se muestra en la figura 19.16. Al aplicar la ecuación (19.29) tenemos:

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = (10 \text{ V} \angle 0°)(2 \text{ A} \angle +53.13°) = 20 \text{ VA} \angle 53.13°$$

como se obtuvo antes.

El ángulo θ asociado con **S**, y que aparece en las figuras 19.10, 19.11 y 19.16, es el ángulo del factor de potencia de la red. Dado que:

$$P = VI\cos\theta$$

o bien:

$$P = S\cos\theta$$

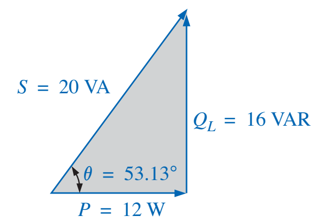


FIGURA 19.16
Triángulo de potencia para el circuito de la figura 19.15.

entonces:

$$F_p = \cos\theta = \frac{P}{S} \quad \textbf{(19.30)}$$

P_S^q

19.7 LAS P, Q Y S TOTALES

El número total de watts, de volt-ampere reactivos y de volt-ampere, así como el factor de potencia de cualquier sistema pueden obtenerse utilizando el siguiente procedimiento:

1. ***Encuentre la potencia real y la potencia reactiva para cada rama del circuito.***
2. ***La potencia real total del sistema (P_T) será entonces la suma de la potencia promedio entregada a cada rama.***
3. ***La potencia reactiva total (Q_T) será la diferencia entre la potencia reactiva de las cargas inductivas y la de las cargas capacitivas.***
4. ***La potencia aparente total es $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$.***
5. ***El factor de potencia total es P_T/S_T.***

Existen dos puntos importantes en la lista anterior. Primero, la potencia aparente total deberá determinarse a partir de las potencias promedio y reactiva totales y *no podrá* determinarse a partir de las potencias aparentes de cada rama. Segundo, y más importante, *no es necesario* considerar el arreglo serie-paralelo de las ramas. En otras palabras, la potencia real total, reactiva o aparente es independiente de si las cargas están en serie, en paralelo o en serie-paralelo. Los siguientes ejemplos demostrarán la relativa facilidad con que se pueden obtener todas las cantidades de interés.

EJEMPLO 19.1 Obtenga el número total de watts, volt-ampere reactivos y volt-ampere, así como el factor de potencia F_p de la red que aparece en la figura 19.17. Dibuje el triángulo de potencia y encuentre la corriente en forma fasorial.

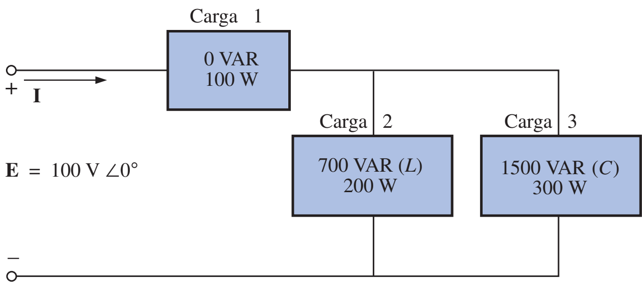


FIGURA 19.17
Ejemplo 19.1.

Solución: Elabore una tabla como la mostrada en la tabla 19.1.

TABLA 19.1

Carga	W	VAR	VA
1	100	0	100
2	200	700 (L)	$\sqrt{(200)^2 + (700)^2} = 728.0$
3	300	1500 (C)	$\sqrt{(300)^2 + (1500)^2} = 1529.71$
	$P_T = \mathbf{600}$ Potencia total disipada	$Q_T = \mathbf{800\ (C)}$ Potencia reactiva resultante de la red	$S_T = \sqrt{(600)^2 + (800)^2} = \mathbf{1000}$ (Observe que $S_T \neq$ a la suma de cada rama: $1000 \neq 100 + 728 + 1529.71$)

De este modo,

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{600\ \text{W}}{1000\ \text{VA}} = \textbf{0.6 adelantado } (\boldsymbol{C})$$

El triángulo de potencia se muestra en la figura 19.18.

Dado que $S_T = VI = 1000$ VA, $I = 1000$ VA/100 V $= 10$ A; y θ, a partir de $\cos\theta = F_p$ es el ángulo entre el voltaje y la corriente de entrada:

$$\mathbf{I} = \mathbf{10\ A\ \angle{+53.13^\circ}}$$

El signo más está asociado con el ángulo de fase dado que el circuito es predominantemente capacitivo.

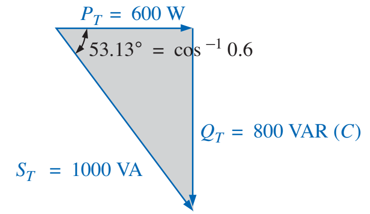


FIGURA 19.18
Triángulo de potencia para el ejemplo 19.1.

EJEMPLO 19.2

a. Encuentre el número total de watts, volt-ampere reactivos y volt-ampere, así como el factor de potencia F_p para la red de la figura 19.19.

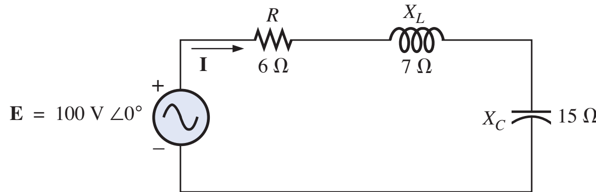


FIGURA 19.19
Ejemplo 19.2.

b. Trace el triángulo de potencia.
c. Encuentre la energía disipada por el resistor durante un ciclo completo del voltaje de entrada si la frecuencia de las cantidades de entrada es de 60 Hz.
d. Encuentre la energía almacenada en, o devuelta por, el capacitor o el inductor durante un semiciclo de la curva de potencia para cada uno si la frecuencia de las cantidades de entrada es de 60 Hz.

Soluciones:

a. $$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z_T}} = \frac{100\ \text{V}\ \angle 0^\circ}{6\ \Omega + j\,7\ \Omega - j\,15\ \Omega} = \frac{100\ \text{V}\ \angle 0^\circ}{10\ \Omega\ \angle{-53.13^\circ}}$$
$$= 10\ \text{A}\ \angle 53.13^\circ$$
$$\mathbf{V}_R = (10\ \text{A}\ \angle 53.13^\circ)(6\ \Omega\ \angle 0^\circ) = 60\ \text{V}\ \angle 53.13^\circ$$
$$\mathbf{V}_L = (10\ \text{A}\ \angle 53.13^\circ)(7\ \Omega\ \angle 90^\circ) = 70\ \text{V}\ \angle 143.13^\circ$$
$$\mathbf{V}_C = (10\ \text{A}\ \angle 53.13^\circ)(15\ \Omega\ \angle{-90^\circ}) = 150\ \text{V}\ \angle{-36.87^\circ}$$
$$P_T = EI\cos\theta = (100\ \text{V})(10\ \text{A})\cos 53.13^\circ = \mathbf{600\ W}$$
$$= I^2R = (10\ \text{A})^2(6\ \Omega) = \mathbf{600\ W}$$
$$= \frac{V_R^2}{R} = \frac{(60\ \text{V})^2}{6} = \mathbf{600\ W}$$
$$S_T = EI = (100\ \text{V})(10\ \text{A}) = \mathbf{1000\ VA}$$
$$= I^2Z_T = (10\ \text{A})^2(10\ \Omega) = \mathbf{1000\ VA}$$
$$= \frac{E^2}{Z_T} = \frac{(100\ \text{V})^2}{10\ \Omega} = \mathbf{1000\ VA}$$
$$Q_T = EI\,\text{sen}\,\theta = (100\ \text{V})(10\ \text{A})\,\text{sen}\,53.13^\circ = \mathbf{800\ VAR}$$
$$= Q_C - Q_L$$
$$= I^2(X_C - X_L) = (10\ \text{A})^2(15\ \Omega - 7\ \Omega) = \mathbf{800\ VAR}$$

$$Q_T = \frac{V_C^2}{X_C} - \frac{V_L^2}{X_L} = \frac{(150\text{ V})^2}{15\ \Omega} - \frac{(70\text{ V})^2}{7\ \Omega}$$
$$= 1500\text{ VAR} - 700\text{ VAR} = \mathbf{800\ VAR}$$
$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{600\text{ W}}{1000\text{ VA}} = \mathbf{0.6\ adelantado\ (\mathit{C})}$$

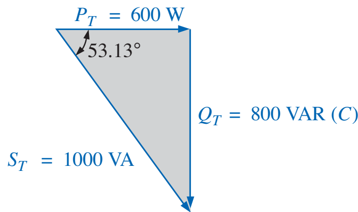


FIGURA 19.20
Triángulo de potencia para el ejemplo 19.2.

b. El triángulo de potencia es como el mostrado en la figura 19.20.

c. $W_R = \frac{V_R I}{f_1} = \frac{(60\text{ V})(10\text{ A})}{60\text{ Hz}} = \mathbf{10\ J}$

d. $W_L = \frac{V_L I}{\omega_1} = \frac{(70\text{ V})(10\text{ A})}{(2\pi)(60\text{ Hz})} = \frac{700\text{ J}}{377} = \mathbf{1.86\ J}$

$$W_C = \frac{V_C I}{\omega_1} = \frac{(150\text{ V})(10\text{ A})}{377\text{ rad/s}} = \frac{1500\text{ J}}{377} = \mathbf{3.98\ J}$$

EJEMPLO 19.3 Para el sistema de la figura 19.21,

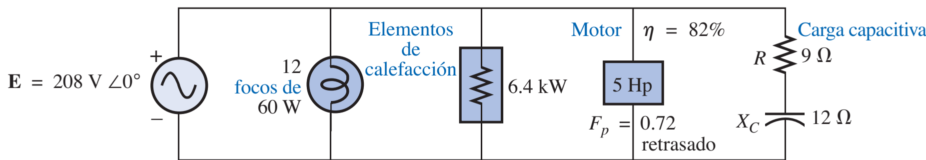


FIGURA 19.21
Ejemplo 19.3.

a. Encuentre la potencia promedio, la potencia aparente, la potencia reactiva y F_p para cada rama.
b. Encuentre el número total de watts, volt-ampere reactivos y volt-ampere, así como el factor de potencia del sistema. Trace el triángulo de potencia.
c. Encuentre la fuente de corriente I.

Soluciones:

a. *Focos:*

Disipación total de la potencia aplicada:

$$P_1 = 12(60\text{ W}) = \mathbf{720\ W}$$
$$Q_1 = \mathbf{0\ VAR}$$
$$S_1 = P_1 = \mathbf{720\ VA}$$
$$F_{p_1} = \mathbf{1}$$

Elementos de calefacción:

Disipación total de la potencia aplicada:

$$P_2 = \mathbf{6.4\ kW}$$
$$Q_2 = \mathbf{0\ VAR}$$
$$S_2 = P_2 = \mathbf{6.4\ kVA}$$
$$F_{p_2} = \mathbf{1}$$

Motor:

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} \longrightarrow P_i = \frac{P_o}{\eta} = \frac{5(746\text{ W})}{0.82} = \mathbf{4548.78\ W} = P_3$$

$$F_p = \mathbf{0.72\ retrasado}$$

$$P_3 = S_3 \cos\theta \longrightarrow S_3 = \frac{P_3}{\cos\theta} = \frac{4548.78\text{ W}}{0.72} = \mathbf{6317.75\ VA}$$

También, $\theta = \cos^{-1} 0.72 = 43.95°$, de manera que:

$$Q_3 = S_3 \text{ sen } \theta = (6317.75\text{ VA})(\text{sen } 43.95°)$$
$$= (6317.75\text{ VA})(0.694) = \mathbf{4384.71\ VAR\ (\mathit{L})}$$

Carga capacitiva:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{208\text{ V}\angle 0°}{9\ \Omega - j\,12\ \Omega} = \frac{208\text{ V}\angle 0°}{15\ \Omega\angle -53.13°} = 13.87\text{ A}\angle 53.13°$$

$$P_4 = I^2R = (13.87\text{ A})^2 \cdot 9\ \Omega = \mathbf{1731.39\ W}$$

$$Q_4 = I^2X_C = (13.87\text{ A})^2 \cdot 12\ \Omega = \mathbf{2308.52\ VAR\ (\mathit{C})}$$

$$S_4 = \sqrt{P_4^2 + Q_4^2} = \sqrt{(1731.39\text{ W})^2 + (2308.52\text{ VAR})^2}$$
$$= \mathbf{2885.65\ VA}$$

$$F_p = \frac{P_4}{S_4} = \frac{1731.39\text{ W}}{2885.65\text{ VA}} = \mathbf{0.6\ adelantado}$$

b. $P_T = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

$$= 720\text{ W} + 6400\text{ W} + 4548.78\text{ W} + 1731.39\text{ W}$$
$$= \mathbf{13{,}400.17\ W}$$

$$Q_T = \pm Q_1 \pm Q_2 \pm Q_3 \pm Q_4$$
$$= 0 + 0 + 4384.71\text{ VAR }(L) - 2308.52\text{ VAR }(C)$$
$$= \mathbf{2076.19\ VAR\ (\mathit{L})}$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{(13{,}400.17\text{ W})^2 + (2076.19\text{ VAR})^2}$$
$$= 13{,}560.06\text{ VA}$$

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{13.4\text{ kW}}{13{,}560.06\text{ VA}} = \mathbf{0.988\ atrasado}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0.988 = 8.89°$$

Observe la figura 19.22.

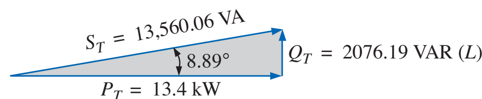


FIGURA 19.22
Triángulo de potencia para el ejemplo 19.3.

c. $S_T = EI \longrightarrow I = \dfrac{S_T}{E} = \dfrac{13{,}559.89\text{ VA}}{208\text{ V}} = 65.19\text{ A}$

Factor de potencia atrasado: **E** adelanta a **I** por 8.89°, e

$$\mathbf{I} = \mathbf{65.19\ A}\angle\mathbf{-8.89°}$$

EJEMPLO 19.4 Un dispositivo eléctrico está especificado en 5 kVA, 100 V a un factor de potencia atrasado de 0.6. ¿Cuál es la impedancia del dispositivo en coordenadas rectangulares?

Solución:

$$S = EI = 5000 \text{ VA}$$

En consecuencia,
$$I = \frac{5000 \text{ VA}}{100 \text{ V}} = 50 \text{ A}$$

Para $F_p = 0.6$, tenemos:

$$\theta = \cos^{-1} 0.6 = 53.13°$$

Dado que el factor de potencia está atrasado, el circuito es predominantemente inductivo, e **I** está atrasada con respecto a **E**. O, para $\mathbf{E} = 100 \text{ V} \angle 0°$,

$$\mathbf{I} = 50 \text{ A} \angle -53.13°$$

Sin embargo,

$$\mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}} = \frac{100 \text{ V} \angle 0°}{50 \text{ A} \angle -53.13°} = 2 \ \Omega \angle 53.13° = \mathbf{1.2 \ \Omega + j\,1.6 \ \Omega}$$

lo cual es la impedancia del circuito de la figura 19.23.

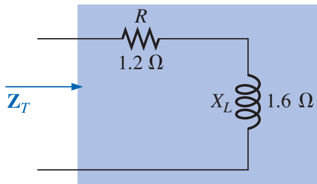


FIGURA 19.23
Ejemplo 19.4.

19.8 CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA

El diseño de todo sistema de transmisión de potencia es muy sensible a la magnitud de la corriente en las líneas según lo determinen las cargas aplicadas. Mayores corrientes dan por resultado mayores pérdidas de potencia (por un factor cuadrático dado que $P = I^2R$) en las líneas de transmisión debido a la resistencia de las líneas. Las grandes corrientes requieren también conductores más grandes, incrementando la cantidad de cobre necesario para el sistema, y, obviamente, demandarán mayor capacidad de generación por parte de la compañía que proporcione el suministro.

Deberá realizarse todo esfuerzo posible para mantener los niveles de corriente al mínimo. Dado que el voltaje de línea de un sistema de transmisión es fijo, la potencia aparente está relacionada directamente con el nivel de corriente. A su vez, mientras menor sea la potencia aparente neta, menor será la corriente extraída de la fuente. Por tanto, se extraerá la mínima corriente de la fuente cuando $S = P$ y $Q_T = 0$. Observe el efecto de niveles decrecientes de Q_T sobre la longitud (y magnitud) de S en la figura 19.24 para la misma potencia real. También advierta que el ángulo del factor de potencia se aproxima a cero grados y que F_p se aproxima a 1, mostrando que la red aparece más y más resistiva en las terminales de entrada.

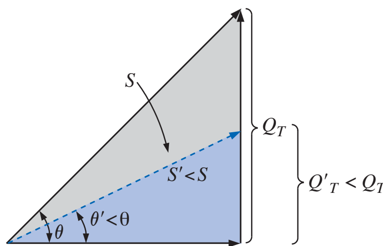


FIGURA 19.24
Demostración del impacto de corregir el factor de potencia sobre el triángulo de potencia de una red.

El proceso de introducir elementos reactivos para llevar al factor de potencia lo más cercano a la unidad se denomina **corrección del factor de potencia**. Dado que la mayoría de las cargas son inductivas, el proceso involucra normalmente la introducción de elementos con características terminales capacitivas cuyo único propósito es mejorar el factor de potencia.

Por ejemplo, en la figura 19.25(a), una carga inductiva está extrayendo una corriente I_L que posee un componente real y uno imaginario. En la figura 19.25(b), se añadió una carga capacitiva en paralelo con la carga original para elevar el factor de potencia del sistema total al nivel de factor de potencia unitario. Observe que al colocar todos los elementos en paralelo, la carga sigue recibiendo el mismo voltaje terminal y extrae la misma corriente I_L. En otras palabras, la carga se mantiene al margen de si está conectada como se muestra en la figura 19.25(a) o como en la figura 19.25(b).

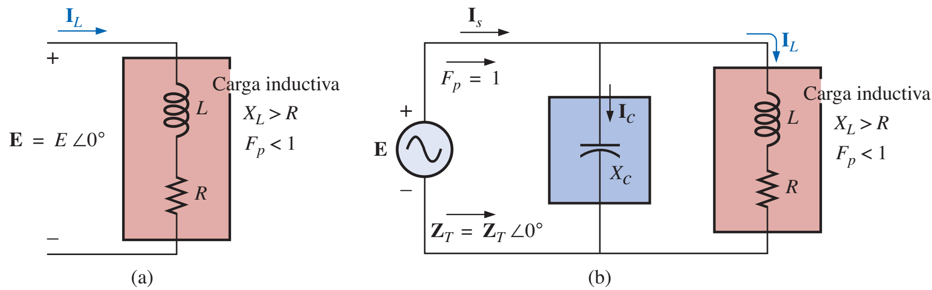


FIGURA 19.25
Demostración del impacto de un elemento capacitivo sobre el factor de potencia de una red.

Al resolver para la corriente de fuente en la figura 19.25(b):

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_s &= \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_L \\ &= j\, I_C(I_{\text{magnitud}}) + I_L(R_e) + j\, I_L(I_{\text{magnitud}}) \\ &= I_L(R_e) + j\,[I_L(I_{\text{magnitud}}) + I_C(I_{\text{magnitud}})]\end{aligned}$$

Si se elige X_C de tal forma que $I_C(I_{\text{magnitud}}) = I_L(I_{\text{magnitud}})$, entonces:

$$\mathbf{I}_s = I_L(R_e) + j\,(0) = I_L(R_e) \angle 0°$$

El resultado es una corriente de fuente cuya magnitud será igual a la parte real de la corriente de carga, la cual puede ser considerablemente menor que la magnitud de la corriente de carga de la figura 19.25(a). Además, dado que el ángulo de fase asociado tanto con el voltaje aplicado como con la corriente de fuente es el mismo, el sistema aparece como "resistivo" en las terminales de entrada, y toda la potencia suministrada se absorberá, creando una eficiencia máxima para la empresa generadora de energía.

EJEMPLO 19.5 Un motor de 5 hp con factor de potencia atrasado de 0.6 y eficiencia de 92% está conectado a una fuente de 208 V, 60 Hz.

a. Establezca el triángulo de potencia para la carga.
b. Determine el capacitor de factor de potencia que deberá colocarse en paralelo con la carga para elevar el factor de potencia a la unidad.
c. Determine el cambio en la corriente suministrada desde el sistema no compensado hasta el sistema compensado.
d. Encuentre la red equivalente de lo anterior, y verifique las conclusiones.

Soluciones:

a. Dado que 1 hp = 746 W,

$$P_o = 5 \text{ hp} = 5(746 \text{ W}) = 3730 \text{ W}$$

y $\quad P_i \text{ (extraída de la línea)} = \dfrac{P_o}{\eta} = \dfrac{3730 \text{ W}}{0.92} = 4054.35 \text{ W}$

También, $\quad F_P = \cos\theta = 0.6$

y $\quad \theta = \cos^{-1} 0.6 = 53.13°$

Al aplicar: $\quad \tan\theta = \dfrac{Q_L}{P_i}$

obtenemos: $\quad Q_L = P_i \tan\theta = (4054.35 \text{ W}) \tan 53.13° = 5405.8 \text{ VAR } (L)$

y

$$S = \sqrt{P_i^2 + Q_L^2} = \sqrt{(4054.35 \text{ W})^2 + (5405.8 \text{ VAR})^2} = 6757.25 \text{ VA}$$

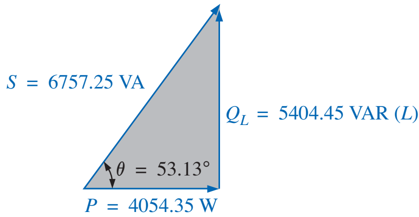


FIGURA 19.26
Triángulo de potencia inicial para la carga del ejemplo 19.5.

El triángulo de potencia aparece en la figura 19.26.

b. Se establece un nivel neto unitario en el factor de potencia mediante la introducción de un nivel de potencia reactiva capacitiva de 5405.8 VAR para balancear a Q_L. Dado que:

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C}$$

entonces: $$X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{(208\text{ V})^2}{5405.8\text{ VAR }(C)} = 8\ \Omega$$

y $$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{(2\pi)(60\text{ Hz})(8\ \Omega)} = \mathbf{331.6\ \mu F}$$

c. **A 0.6F_p,**

$$S = VI = 6757.25\text{ VA}$$

e $$I = \frac{S}{V} = \frac{6757.25\text{ VA}}{208\text{ V}} = \mathbf{32.49\text{ A}}$$

A un F_p unitario,

$$S = VI = 4054.35\text{ VA}$$

e $$I = \frac{S}{V} = \frac{4054.35\text{ VA}}{208\text{ V}} = \mathbf{19.49\text{ A}}$$

generando una reducción de 40% en la corriente de la fuente.

d. Para el motor, al ángulo por el cual el voltaje aplicado adelanta a la corriente es:

$$\theta = \cos^{-1} 0.6 = 53.13°$$

y $P = EI_m \cos\theta = 4054.35$ W, a partir de lo anterior, por lo que:

$$I_m = \frac{P}{E\cos\theta} = \frac{4054.35\text{ W}}{(208\text{ V})(0.6)} = \mathbf{32.49\text{ A}} \qquad \text{(como antes)}$$

dando por resultado:

$$\mathbf{I}_m = 32.49\text{ A}\ \angle -53.13°$$

Por tanto,

$$\mathbf{Z}_m = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}_m} = \frac{208\text{ V}\ \angle 0°}{32.49\text{ A}\ \angle -53.13°} = 6.4\ \Omega\ \angle 53.13°$$
$$= 3.84\ \Omega + j\,5.12\ \Omega$$

como se muestra en la figura 19.27(a).

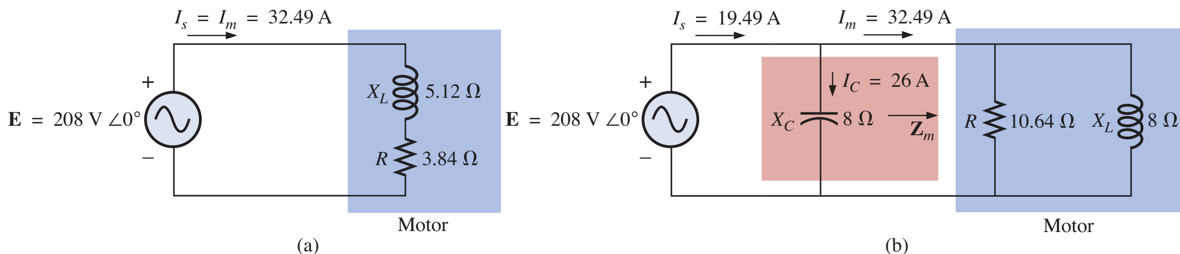


FIGURA 19.27
Demostración del impacto de corregir el factor de potencia en la corriente de fuente.

La carga equivalente en paralelo se determina a partir de:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{6.4\ \Omega\ \angle 53.13^\circ}$$
$$= 0.156\ \text{S}\ \angle -53.13^\circ = 0.094\ \text{S} - j\,0.125\ \text{S}$$
$$= \frac{1}{10.64\ \Omega} + \frac{1}{j\,8\ \Omega}$$

como se muestra en la figura 19.27(b).

Ahora resulta claro que puede compensarse el efecto de la reactancia inductiva de 8 Ω mediante una reactancia capacitiva en paralelo de 8 Ω utilizando un capacitor de corrección del factor de potencia de 332 μF.

Dado que:

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{-j\,X_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{+j\,X_L} = \frac{1}{R}$$

$$I_s = EY_T = E\left(\frac{1}{R}\right) = (208\ \text{V})\left(\frac{1}{10.64\ \Omega}\right) = \mathbf{19.54\ A} \qquad \text{(como antes)}$$

Además, la magnitud de la corriente capacitiva puede determinarse de la siguiente forma:

$$I_C = \frac{E}{X_C} = \frac{208\ \text{V}}{8\ \Omega} = \mathbf{26\ A}$$

EJEMPLO 19.6

a. Una pequeña planta industrial posee una carga térmica de 10 kW y una carga inductiva de 20 kVA debido a un bloque de motores de inducción. Los elementos térmicos se consideran puramente resistivos ($F_p = 1$), y los motores de inducción tienen un factor de potencia atrasado de 0.7. Si la alimentación es de 1000 V a 60 Hz, determine el elemento capacitivo requerido para elevar el factor de potencia a 0.95.
b. Compare los niveles de corriente extraída de la fuente.

Soluciones:

a. Para los motores de inducción,

$$S = VI = 20\ \text{kVA}$$
$$P = S\cos\theta = (20 \times 10^3\ \text{VA})(0.7) = 14 \times 10^3\ \text{W}$$
$$\theta = \cos^{-1} 0.7 \cong 45.6^\circ$$

y

$$Q_L = VI\,\text{sen}\,\theta = (20 \times 10^3\ \text{VA})(0.714) = 14.28 \times 10^3\ \text{VAR}\ (L)$$

El triángulo de potencia para el sistema completo aparece en la figura 19.28.

Observe la adición de potencias reales y la S_T resultante:

$$S_T = \sqrt{(24\ \text{kW})^2 + (14.28\ \text{kVAR})^2} = 27.93\ \text{kVA}$$

con: $$I_T = \frac{S_T}{E} = \frac{27.93\ \text{kVA}}{1000\ \text{V}} = \mathbf{27.93\ A}$$

El factor de potencia deseado de 0.95 resulta en un ángulo entre S y P de:

$$\theta = \cos^{-1} 0.95 = 18.19^\circ$$

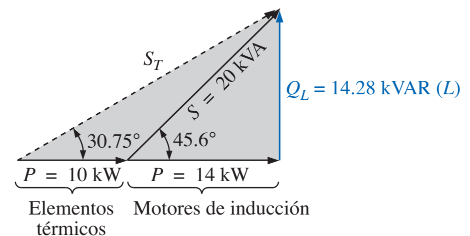


FIGURA 19.28
Triángulo de potencia inicial para la carga del ejemplo 19.6.

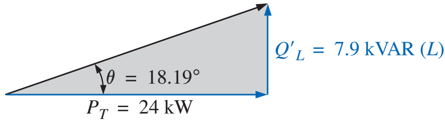


FIGURA 19.29
Triángulo de potencia para la carga del ejemplo 19.6 después de elevar el factor de potencia a 0.95.

que modifica el triángulo de potencia al de la figura 19.29:

$$\text{con } \tan\theta = \frac{Q'_L}{P_T} \longrightarrow Q'_L = P_T \tan\theta = (24 \times 10^3 \text{ W})(\tan 18.19°)$$
$$= (24 \times 10^3 \text{ W})(0.329) = 7.9 \text{ kVAR } (L)$$

La potencia reactiva inductiva debe, por tanto, ser reducida mediante:

$$Q_L - Q'_L = 14.28 \text{ kVAR } (L) - 7.9 \text{ kVAR } (L) = 6.38 \text{ kVAR } (L)$$

En consecuencia, $Q_C = 6.38$ kVAR, y empleando:

$$Q_C = \frac{E^2}{X_C}$$

obtenemos:

$$X_C = \frac{E^2}{Q_C} = \frac{(10^3 \text{ V})^2}{6.38 \times 10^3 \text{ VAR}} = 156.74\ \Omega$$

$$\text{y} \qquad C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{(2\pi)(60 \text{ Hz})(156.74\ \Omega)} = \mathbf{16.93\ \mu F}$$

b. $S_T = \sqrt{(24 \text{ kW})^2 + [7.9 \text{ kVAR } (L)]^2}$
$= 25.27$ kVA

$$I_T = \frac{S_T}{E} = \frac{25.27 \text{ kVA}}{1000 \text{ V}} = \mathbf{25.27\ A}$$

La nueva I_T es:

$$I_T = 25.27 \text{ A } \angle 27.93 \text{ A} \qquad \text{(original)}$$

19.9 WATÍMETROS Y MEDIDORES DE FACTOR DE POTENCIA

En la sección 4.4 se presentó el watímetro electrodinamómetro, junto con su movimiento y sus conexiones terminales, el cual puede utilizarse para medir la potencia en una red de cd o de ca empleando la misma estrategia de conexión; de hecho, puede utilizarse para medir la potencia en watts de cualquier red con entrada periódica o no periódica.

El watímetro con pantalla digital que se muestra en la figura 19.30 utiliza un sofisticado paquete electrónico para detectar los niveles de voltaje y de corriente y, mediante el uso de una unidad de conversión analógica-digital, presentar los dígitos adecuados en la pantalla. Es capaz de proporcionar una lectura digital para formas de onda no senoidales distorsionadas, y puede presentar la potencia de fase, la potencia total, la potencia aparente, la potencia reactiva y el factor de potencia.



FIGURA 19.30
Watímetro digital. (Cortesía de Yokogawa Corporation of America.)

Al utilizar un watímetro, el operador debe tener cuidado de no exceder los límites máximos de corriente, voltaje o potencia en watts. El producto de la especificación de voltaje y de corriente máximos puede o no ser igual a la especificación de la potencia máxima en watts. En el watímetro de alto factor de potencia, el producto de los valores de voltaje y de corriente es, por lo general, igual al valor de la potencia en watts, o al menos al 80% de ese valor. En un watímetro de bajo factor de potencia, el producto de los valores de voltaje y de corriente es mucho mayor que el valor de la potencia en watts. Por obvias razones, el medidor de bajo factor de potencia se utiliza sólo en circuitos con bajos factores de potencia (impedancia total altamente reactiva). Las especificaciones típicas para medidores de alto factor de potencia (HPF, *High-Power-Factor*) y de bajo factor de potencia (LPF, *Low-Power-Factor*) se muestran en la tabla 19.2. Los medidores tanto de alto como de bajo factor de potencia tienen una precisión de 0.5 a 1% de la escala completa.

TABLA 19.2

Medidor	Especificación de corriente	Especificación de voltaje	Especificación de potencia (watts)
HPF	2.5 A 5.0 A	150 V 300 V	1500/750/375
LPF	2.5 A 5.0 A	150 V 300 V	300/150/75

Como su nombre lo indica, los medidores de factor de potencia están diseñados para identificar el factor de potencia de una carga bajo condiciones de operación. La mayoría puede utilizarse en sistemas de una o de tres fases. Tanto el voltaje como la corriente se miden, por lo general, empleando métodos no invasores; es decir, para medir el voltaje, las conexiones se realizan directamente hacia las terminales, mientras que para detectar el nivel de corriente se utilizan transformadores de corriente de gancho, como se muestra en el medidor de factor de potencia que aparece en la figura 19.31.

La mayoría de los medidores de factor de potencia vienen con un conjunto de tablas que ayudan a definir, una vez que se conoce el factor de potencia, el capacitor que deberá utilizarse para mejorar dicho factor de potencia. Los capacitores de factor de potencia se especifican, por lo general, en kVAR, con niveles característicos que van desde 1 hasta 25 kVAR a 240 V, y desde 1 hasta 50 kVAR a 480 o 600 V.



FIGURA 19.31
Medidor de gancho para identificar el factor de potencia. (Cortesía de AEMC Corporation.)

19.10 RESISTENCIA EFECTIVA

La resistencia de un conductor, de acuerdo con lo que determina la ecuación $R = \rho(l/A)$, con frecuencia se denomina *resistencia geométrica, óhmica* o de *cd*. Es una cantidad constante determinada únicamente por el material utilizado y sus dimensiones físicas. En circuitos de ca, la resistencia real de un conductor (denominada **resistencia efectiva**) difiere de la resistencia de cd debido a las corrientes y voltajes variantes que introducen efectos no presentes en los circuitos de cd.

Estos efectos incluyen pérdidas por radiación, efectos de superficie, corrientes de fuga y pérdidas por histéresis. Los primeros dos efectos se aplican a cualquier red, mientras que los últimos dos tienen que ver con las pérdidas adicionales introducidas por la presencia de materiales ferromagnéticos dentro de un campo magnético cambiante.

Procedimiento experimental

La resistencia efectiva de un circuito de ca no puede medirse por la proporción V/I dado que esta razón es ahora la impedancia de un circuito que puede tener tanto resistencia como reactancia. Sin embargo, la resistencia efectiva puede obtenerse mediante el uso de la ecuación de potencia $P = I^2R$, donde:

$$R_{\text{efectiva}} = \frac{P}{I^2} \tag{19.31}$$

Por tanto, serán necesarios un watímetro y un amperímetro para medir la resistencia efectiva de un circuito de ca.

Pérdidas por radiación

Analicemos ahora las distintas pérdidas con mayor detalle. La **pérdida por radiación** es la pérdida de energía en forma de ondas electromagnéticas durante

la transferencia de energía de un elemento a otro. Esta pérdida requiere que la potencia de entrada sea mayor para establecer la misma corriente I, ocasionando que R se incremente como lo determina la ecuación (19.31). A una frecuencia de 60 Hz, los efectos de las pérdidas por radiación pueden ignorarse por completo. Sin embargo, a frecuencias de radio, éste es un efecto importante y, de hecho, podría convertirse en el efecto principal en un dispositivo electromagnético como una antena.

Efecto de superficie

La explicación del **efecto de superficie** requiere el uso de algunos conceptos básicos descritos anteriormente. Recuérdese del capítulo 11 que existe un campo magnético alrededor de todo conductor que porta corriente (Figura 19.32). Dado que la cantidad de flujo de carga en circuitos de ca cambia con el tiempo, el campo magnético que rodea a la carga en movimiento (corriente) cambia también. Asimismo, se vio que un cable colocado dentro de un campo magnético cambiante tendrá un voltaje inducido en sus terminales según lo determina la ley de Faraday, $e = N \times (d\phi/dt)$. Mientras mayor sea la frecuencia del flujo cambiante como lo determina una corriente alterna, mayor será el voltaje inducido.

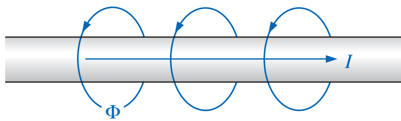


FIGURA 19.32
Demostración del efecto de superficie en la resistencia efectiva de un conductor.

Para un conductor que porta corriente alterna, el campo magnético cambiante que rodea al cable enlaza al cable mismo, desarrollando de esta forma un voltaje interno inducido que se opone al flujo original de carga o corriente. Estos efectos son más pronunciados en el centro del conductor que en la superficie, ya que el centro está enlazado por el flujo cambiante dentro del cable así como por el flujo externo al cable. A medida que la frecuencia de la señal aplicada se incremente, el flujo que enlaza al cable cambiará a una velocidad mayor. Por tanto, un incremento en la frecuencia aumentará el voltaje contrario inducido en el centro del cable hasta un punto en que la corriente fluirá, para todo propósito práctico, sobre la superficie del conductor. A 60 Hz, el efecto de superficie apenas es observable. Sin embargo, a frecuencias de radio el efecto de superficie es tan pronunciado que los conductores a menudo se fabrican huecos dado que la parte central es relativamente inefectiva. El efecto de superficie, por tanto, reduce el área efectiva a través de la cual puede fluir la corriente y ocasiona que la resistencia del conductor, dada por la ecuación $R\uparrow = \rho(l/A\downarrow)$, se incremente.

Pérdidas por corrientes de fuga y por histéresis

Como se mencionó, se presentarán pérdidas por corrientes de fuga y por histéresis cuando se coloque un material ferromagnético en la región de un campo magnético cambiante. Para describir con mayor detalle las pérdidas por corriente de fuga, consideraremos los efectos de una corriente alterna que pasa a través de una bobina enrollada alrededor de un núcleo ferromagnético. A medida que la corriente alterna pase a través de la bobina, generará un flujo magnético cambiante Φ que enlazará tanto a la bobina como al núcleo, el cual desarrollará un voltaje interno inducido según lo determina la ley de Faraday. Este voltaje inducido y la resistencia geométrica del núcleo $R_C = \rho(l/A)$ ocasionan que se generen corrientes dentro del núcleo, $i_{núcleo} = (e_{\text{inducida}}/R_C)$, denominadas **corrientes de fuga**. Las corrientes fluyen en trayectorias circulares, como se muestra en la figura 19.33, modificando su dirección con el potencial de ca aplicado.

Las pérdidas por corrientes de fuga están determinadas por:

$$P_{\text{fuga}} = i^2_{\text{fuga}}R_{\text{núcleo}}$$

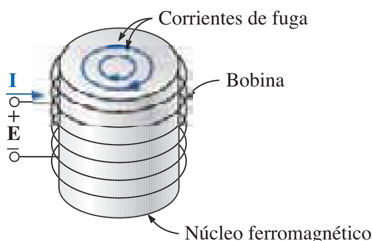


FIGURA 19.33
Definición de las pérdidas por corrientes de fuga de un núcleo ferromagnético.

La magnitud de estas pérdidas está determinada principalmente por el tipo de núcleo utilizado. Si el núcleo no es ferromagnético (y tiene una alta resistividad

como la madera o el aire) las pérdidas por corrientes de fuga podrán ignorarse. En términos de la frecuencia de la señal aplicada y la fuerza del campo magnético producida, la pérdida por corriente de fuga es proporcional al cuadrado de la frecuencia multiplicado por el cuadrado de la fuerza del campo magnético:

$$P_{\text{fuga}} \propto f^2B^2$$

Las pérdidas por corrientes de fuga pueden reducirse si el núcleo se construye a partir de delgadas hojas laminadas de material ferromagnético aisladas una de otra y alineadas paralelamente al flujo magnético. Tal estructura reduce la magnitud de las corrientes de fuga al colocar mayor resistencia en su trayectoria.

Las **pérdidas por histéresis** se presentaron en la sección 11.8. Recordará el lector que en términos de la frecuencia de la señal aplicada y la fuerza del campo magnético generado, la pérdida por histéresis es proporcional al producto de la frecuencia elevada a la primera potencia multiplicada por la fuerza del campo magnético elevada a la enésima potencia:

$$P_{\text{histéresis}} \propto f^1B^n$$

donde n puede variar desde 1.4 hasta 2.6, dependiendo del material bajo consideración.

Las pérdidas por histéresis pueden reducirse efectivamente mediante la inyección de pequeñas cantidades de silicio al núcleo magnético, constituyendo un 2 o 3% de la composición total del núcleo. Sin embargo, esto debe realizarse con cuidado ya que demasiado silicio puede volver quebradizo al núcleo y difícil de darle la forma deseada.

EJEMPLO 19.7

a. Una bobina con núcleo de aire está conectada a una fuente de 120 V, 60 Hz como se muestra en la figura 19.34. Se encuentra que la corriente es de 5 A, y se obtiene una lectura en el watímetro de 75 W. Obtenga la resistencia efectiva y la inductancia de la bobina.

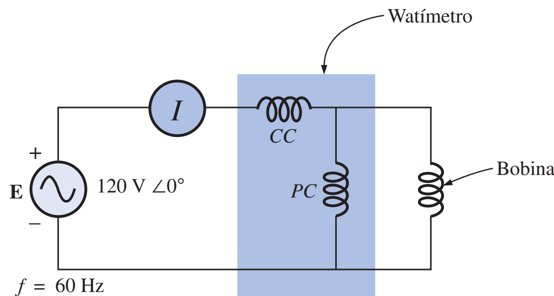


FIGURA 19.34

Componentes básicos requeridos para determinar la resistencia efectiva y la inductancia de la bobina.

b. Luego se inserta un núcleo de latón en la bobina. El amperímetro lee 4 A y el watímetro 80 W. Calcule la resistencia efectiva del núcleo. ¿A qué atribuye el incremento en el valor encontrado en el inciso (a)?

c. Al insertar un núcleo sólido de acero dentro de la bobina, se observa que la corriente es de 2 A y el watímetro proporciona una lectura de 52 W. Calcule la resistencia y la inductancia de la bobina. Compare estos valores con los del inciso (a) y explique los cambios.

Soluciones:

a. $R = \frac{P}{I^2} = \frac{75 \text{ W}}{(5 \text{ A})^2} = \mathbf{3\ \Omega}$

$$Z_T = \frac{E}{I} = \frac{120 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 24\ \Omega$$

$$X_L = \sqrt{Z_T^2 - R^2} = \sqrt{(24\ \Omega)^2 - (3\ \Omega)^2} = 23.81\ \Omega$$

y $\quad X_L = 2\pi f L$

o bien: $\quad L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{23.81\ \Omega}{377 \text{ rad/s}} = \mathbf{63.16\ mH}$

b. $R = \frac{P}{I^2} = \frac{80 \text{ W}}{(4 \text{ A})^2} = \frac{80\ \Omega}{16} = \mathbf{5\ \Omega}$

El núcleo de latón tiene menor reluctancia que el núcleo de aire. En consecuencia, se creará en él una mayor densidad de flujo magnético B. Dado que $P_{\text{fuga}} \propto f^2B^2$, y $P_{\text{histéresis}} \propto f^1B^n$, a medida que la densidad de flujo se incrementa, las pérdidas de núcleo y la resistencia efectiva aumentan.

c. $R = \frac{P}{I^2} = \frac{52 \text{ W}}{(2 \text{ A})^2} = \frac{52\ \Omega}{4} = \mathbf{13\ \Omega}$

$$Z_T = \frac{E}{I} = \frac{120 \text{ V}}{2 \text{ A}} = 60\ \Omega$$

$$X_L = \sqrt{Z_T^2 - R^2} = \sqrt{(60\ \Omega)^2 - (13\ \Omega)^2} = 58.57\ \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{58.57\ \Omega}{377 \text{ rad/s}} = \mathbf{155.36\ mH}$$

El núcleo de acero tiene menor reluctancia que los núcleos de aire o de latón. Por tanto, se generará una mayor densidad de flujo magnético B dentro del núcleo. Nuevamente, dado que $P_{\text{fuga}} \propto f^2B^2$, y $P_{histéresis} \propto f^1B^n$, la mayor densidad de flujo ocasionará que las pérdidas de núcleo y la resistencia efectiva aumenten.

Dado que la inductancia L está relacionada con el cambio en el flujo mediante la ecuación $L = N\,(d\phi/di)$, la inductancia será mayor para el núcleo de acero debido a que el flujo cambiante que enlaza al núcleo se incrementará.

19.11 APLICACIONES

Generadores portátiles de energía

Aunque pudiera parecer que 120 V de ca pueden estar tan cerca como un cable de extensión, hay circunstancias (en una cabaña remota, algún sitio de trabajo o al acampar) que nos recuerdan que no toda esquina del mundo se encuentra conectada a una fuente de energía eléctrica. A medida que nos alejemos de las grandes comunidades urbanas, veremos aparecer cada vez más generadores que trabajan a base de gasolina, como el que se muestra en la figura 19.35, en ferreterías, abastecedoras de aserraderos y otros establecimientos detallistas que cubren las necesidades de una comunidad local. Dado que los generadores de ca son accionados por un motor de gasolina, deben estar adecuadamente ventilados y no pueden utilizarse en interiores. Generalmente, debido al ruido y al humo que ocasionan, se colocan lo más lejos posible y se conectan mediante un largo cable de extensión para trabajo pesado y resistente al clima. Todos los puntos de conexión deben ser protegidos y colocados apropiadamente para asegurar que no se posen en un charco de agua o se vean afectados por lluvia fuerte o nieve. Aunque la instalación de estos generadores involucra cierto esfuerzo y cerciorarse constantemente de que cuentan con suficiente gasolina, la mayoría de los usuarios confirmará que valen su peso en oro.



FIGURA 19.35
Generador portátil de una fase. (Cortesía de Coleman Powermate, Inc.)

La gran mayoría de los generadores portátiles se fabrican para proporcionar entre 1750 y 5000 W de potencia, aunque las unidades más recientes pueden proporcionar hasta 20,000 W. Podría asumirse que con 5000 W es posible accionar casi todo lo eléctricamente necesario. Sin embargo, téngase presente que toda unidad adquirida deberá estar especificada al menos un 20% por encima de su carga esperada debido a las corrientes pico producidas cuando se encienden aparatos, motores, herramientas, etc. Recuerde el lector que incluso un foco de luz desarrolla una alta corriente de encendido debida al estado de baja resistencia del filamento frío. Si un generador portátil trabajara muy cerca de su capacidad nominal, se tendrían experiencias como una fuerte caída en la iluminación cuando se encendiera una sierra eléctrica (hasta un punto en que pareciera que todas las luces se apagaran). Los generadores son como cualquier otra pieza de equipo: si se les aplica una carga muy pesada, se desconectarán. La mayoría cuenta con fusibles de protección o corta circuitos para asegurar que se vigile alguna incursión por encima de las condiciones especificadas y que no exceda más allá de lo razonable. La barrera protectora del 20% hace descender la potencia de salida de una unidad de 5000 W a 4000, y es cuando debe comenzar a preocuparnos la carga que podemos aplicar. Aunque 4000 W serán suficientes para accionar varios focos de 60 W, una televisión, un freidor de aceite, etcétera, se presentan problemas cuando se conecta una unidad para calentamiento directo (como calefactores, secadores de cabello y secadoras de ropa). Incluso los hornos de microondas a 1200 W demandan un fuerte consumo. Acumule las demandas de un pequeño calentador eléctrico de 1500 W, seis focos de 60 W (360 W), una televisión de 250 W y un freidor de aceite de 250 W, y luego encienda una secadora de cabello eléctrica de 1500 W, repentinamente se encontrará muy cercano al máximo de 4000 W. En realidad, no se requiere demasiado para alcanzar los límites en cuanto a artículos que consumen energía se refiere.

La tabla 19.3 proporciona una lista de especificaciones para una amplia gama de generadores portátiles de gasolina. Dado que la parte más pesada del generador es el motor de gasolina, cualquiera por encima de 5 hp será bastante pesado, especialmente cuando se añade el peso de la gasolina. La mayoría de las mejores unidades que proporcionan más de 2400 W tendrán contactos para 120 y 220 V a distintos niveles de corriente, con un conector para 12 V de cd. También están construidos para tolerar condiciones al aire libre de naturaleza razonable y pueden funcionar continuamente por largos lapsos. A 120 V, una unidad de 5000 W puede proporcionar una corriente máxima de 42 A.

TABLA 19.3
Especificaciones para generadores portátiles de ca que trabajan a base de gasolina.

Potencia de salida continua	1750-3000 W	2000-5000 W	2250-7500 W
Caballos de fuerza del motor de gasolina	4-11 hp	5-14 hp	5-16 hp
Corriente de salida continua	A 120 V: 15-25 A A 220 V(3ϕ): 8-14 A	A 120 V: 17-42 A A 220 V(3ϕ): 9-23 A	A 120 V: 19-63 A A 220 V(3ϕ): 10-34 A
Voltaje de salida	120 V o 3ϕ: 120 V/220 V	120 V o 3ϕ: 120 V/220 V	120 V o 3ϕ: 120 V/220 V
Receptáculos	2	2-4	2-4
Tanque de combustible	½ a 2 galones de gasolina	½ a 3 galones de gasolina	1 a 5 galones de gasolina

Sentido económico

Debido a los altos costos involucrados, toda gran planta industrial debe revisar continuamente su factura de servicios eléctricos para asegurar su exactitud y considerar formas de mantenerla bajo control. Como se describió en este capítulo, el

factor de potencia asociado con la planta como un todo puede tener un efecto cuantificable sobre la corriente consumida y, por tanto, en el consumo de kVA sobre la línea de energía. Las compañías productoras de energía están conscientes de este problema y en realidad añaden un sobreprecio si el factor de potencia cae por debajo de 0.9 aproximadamente. En otras palabras, para asegurar que la carga aparezca como de naturaleza resistiva lo más posible, estas empresas piden a cada usuario intentar asegurar que su factor de potencia esté entre 0.9 y 1, de manera que la demanda en kW sea muy cercana a la demanda en kVA. Las compañías de energía dan cierto margen, pero no quieren que se salga de control.

Considere la siguiente facturación mensual para una planta industrial grande:

Consumo en kWh	146.5 MWh
Demanda pico de kW	241 kW
Demanda de kW	233 kW
Demanda de kVA	250 kVA

El plan de tarifas proporcionado por la autoridad local de energía es el siguiente:

Energía	Primeros 450 kWh @ 22.3¢/kWh Siguientes 12 MWh @ 17.1¢/kWh
	Adicionales kWh @ 8.9¢/kWh
Potencia	Primeros 240 kW @ libres
	Adicionales kW @ $12.05/kW

Observe que este plan de tarifas tiene una discontinuidad en el costo de energía y en la potencia. Esta segunda tarifa es la sensible al factor de potencia general de la planta.

La cuenta de electricidad para el mes se calcula entonces de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\text{Costo} &= (450\text{ kWh})(22.3¢/\text{kWh}) + (12\text{ MWh})(17.1¢/\text{kWh})\\ &\quad + [146.2\text{ MWh} - (12\text{ MWh} + 450\text{ kWh})](8.9¢/\text{kWh})\\ &= \$100.35 + \$2052.00 + \$11{,}903.75\\ &= \mathbf{\$14{,}056.10}\end{aligned}$$

Antes de analizar el efecto de la estructura de la tarifa de energía, podemos obtener el factor de potencia general de la carga para el mes con la siguiente proporción tomada de la factura mensual:

$$F_p = \frac{P}{P_a} = \frac{233\text{ kW}}{250\text{ kVA}} = \mathbf{0.932}$$

Como el factor de potencia es mayor que 0.9, hay posibilidades de que no exista sobreprecio o que éste sea mínimo.

Cuando se determina el componente de potencia de la cuenta, la demanda de kVA se multiplica por el mágico número de 0.9 para determinar un nivel de kW para este factor de potencia. Este nivel de kW se compara con el nivel medido y el consumidor paga por el mayor nivel.

En este caso, si multiplicamos los 250 kVA por 0.9 obtenemos 225 kW, lo cual es ligeramente menor que el nivel medido de 233 kW. Sin embargo, ambos niveles son menores que el nivel libre de 240 kW, y así no existe un cargo adicional por el componente de potencia. La cuenta total permanece en $14,056.10.

Si la demanda de kVA de la cuenta fueran 388 kVA con la demanda en kW permaneciendo a 233 kW, la situación cambiaría ya que 0.9 multiplicado por 388 kVA daría como resultado 349.2 kW, lo cual es mucho mayor que los 233 kW medidos. Los 349.2 kW se utilizarían entonces para determinar la cuenta de la siguiente forma:

$$349.2 \text{ kW} - 240 \text{ kW} = 109.2 \text{ kW}$$
$$(109.2 \text{ kW})(\$12.05/\text{kW}) = \mathbf{\$1315.86}$$

lo cual es significativo.

La cuenta total podrá determinarse entonces como sigue:

$$\text{Costo} = \$14{,}056.10 + \$1{,}315.86$$
$$= \mathbf{\$15{,}371.96}$$

De esta forma, el factor de potencia de la carga cayó a 233 kW/388 kVA = 0.6, y esto pondría una carga innecesaria adicional sobre la planta de energía. Es momento de considerar la opción de corrección del factor de potencia como se describió en este texto. En una gran planta industrial, no es raro que, en el punto donde la energía ingresa, se ubiquen grandes capacitores para realizar la corrección de factor de potencia al nivel necesario.

En general, por tanto, es importante comprender completamente el impacto de un factor de potencia deficiente sobre una planta de energía —ya sea que el lector trabaje algún día para el vendedor o para el consumidor.

19.12 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Curva de potencia: Resistor El análisis por computadora comenzará con una verificación de las curvas de la figura 19.3 que muestran la relación en fase entre el voltaje y la corriente de un resistor. En esta figura se aprecia que la curva de potencia está totalmente por encima del eje horizontal, y que tiene una frecuencia del doble de la frecuencia aplicada y un valor pico igual al doble del valor promedio. Primero debe prepararse el sencillo esquema de la figura 19.36. Luego, utilizando la opción **Time Domain(Transient)** para obtener una gráfica

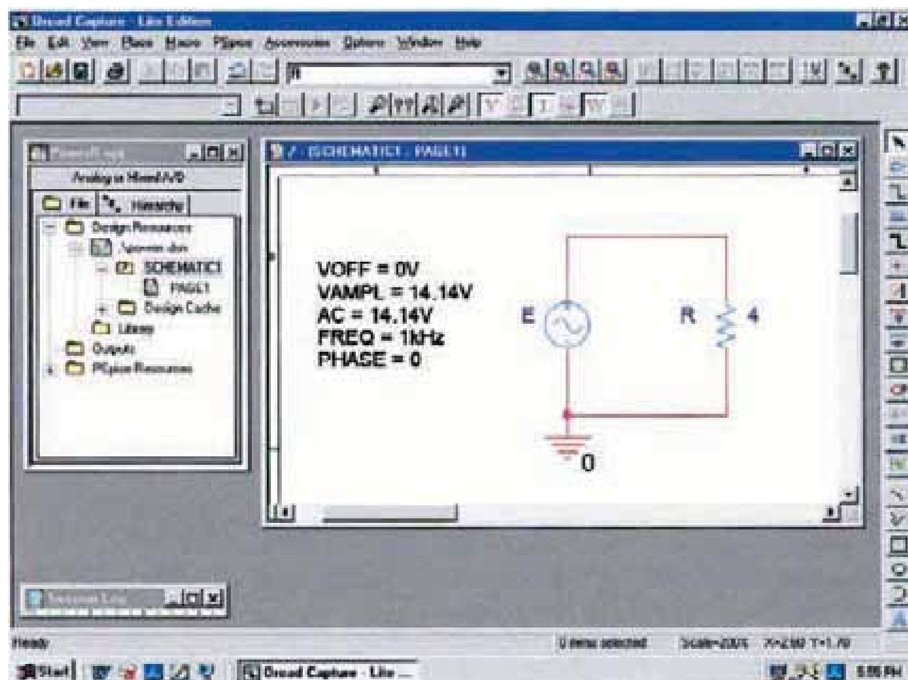


FIGURA 19.36

Utilización de PSpice para revisar la curva de potencia para un elemento resistivo en un circuito de ca.

en función del tiempo, y estableciendo la opción **Run to time** a 1 ms y **Maximun step size** a 1 ms/1000 = 1 μs, seleccionamos **OK** y en seguida el icono de **Run PSpice** para efectuar la simulación. Entonces, mediante **Trace-Add Trace-V1(R)** se obtendrá la curva que aparece en la figura 19.37. A continuación, mediante **Trace-Add Trace-I(R)** se logra la curva de la corriente que aparece en la figura 19.37. Por último, la curva de potencia se graficará utilizando **Trace-Add TraceV1(R)*I(R)** a partir de la ecuación de potencia básica y resultará la curva mayor de la figura 19.37. La gráfica original tenía un eje *y* que se extendía desde −50 hasta +50. Dado que todos los puntos de información se encuentran desde −20 hasta +50, se modificó el eje *y* a este nuevo intervalo mediante **Plot-Axis Settings-Y Axis User Defined-(−20 to +50)-OK** para obtener la gráfica de la figura 19.37.

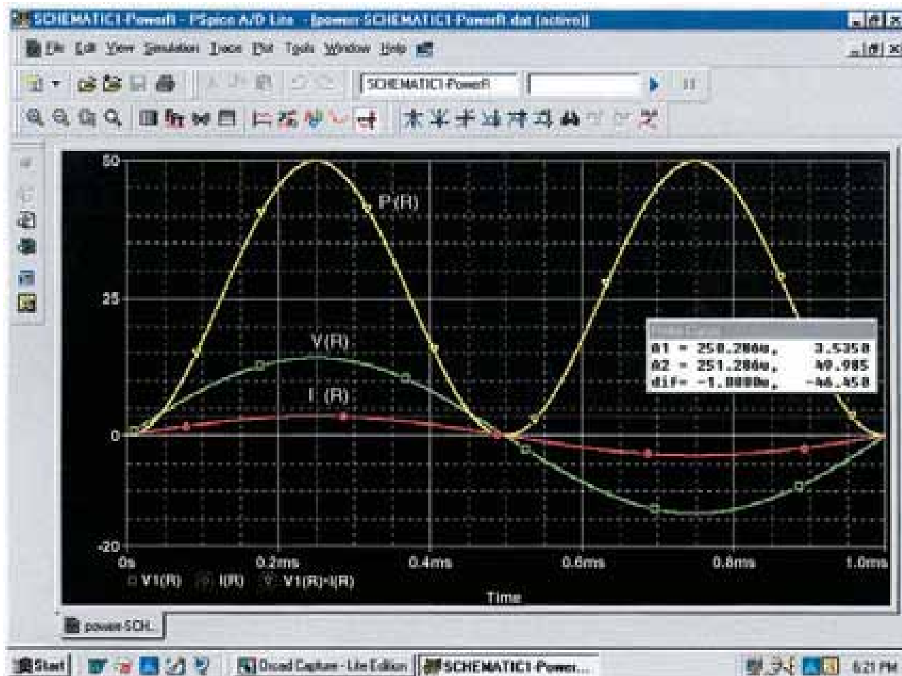


FIGURA 19.37
Gráficas resultantes para la potencia, el voltaje y la corriente para el resistor de la figura 19.36.

Es posible distinguir entre las curvas observando simplemente el símbolo junto a cada cantidad en la parte inferior izquierda de la gráfica. Sin embargo, en este caso, para hacerlo aún más claro se le asignó un color diferente a cada trazo mediante un clic derecho sobre cada uno, seleccionando **Properties**, y eligiendo el color y el grosor de cada curva. También se puede añadir texto a la pantalla utilizando el icono **ABC** para obtener el cuadro de diálogo **Text Label** e ingresando la etiqueta como **P(R)**, y haciendo clic en **OK**. La etiqueta puede ser colocada entonces en cualquier lugar de la pantalla. Al seleccionar la tecla **Toggle cursor** y haciendo clic en **I(R)** en la parte inferior de la pantalla podemos utilizar el cursor para encontrar el máximo valor de la corriente. En **A1** = 250 μs o en ¼ del periodo total del voltaje de entrada el cursor se encuentra en un pico a 3.54 A. El valor pico de la curva de potencia puede encontrarse entonces con un clic derecho sobre **V1(R)*I(R)**, haciendo clic sobre la gráfica (también está disponible haciendo clic sobre el icono **Cursor Peak** a la derecha de la tecla **Toggle cursor**). Ello ocurre en el mismo punto que la corriente

máxima a un nivel de 50 W. En particular, observe que la curva de potencia muestra dos ciclos, mientras que tanto v_R como i_R muestran sólo un ciclo. Claramente, la curva de potencia tiene el doble de la frecuencia de la señal aplicada. También observe que la curva de potencia está completamente por encima de la línea del cero, indicando que el resistor está absorbiendo potencia a través del ciclo completo desplegado. Adicionalmente, el valor pico de la curva de potencia es el doble del valor promedio de la curva; es decir, el valor pico de 50 W es el doble del valor promedio de 25 W.

Los resultados de la simulación anterior pueden verificarse al realizar el cálculo manual utilizando el valor rms del voltaje aplicado. Es decir,

$$P = \frac{V_R^2}{R} = \frac{(10\text{ V})^2}{4\ \Omega} = \mathbf{25\ W}$$

Curvas de potencia: Circuito *R-L-C* en serie La red de la figura 19.38, con su combinación de elementos, se utilizará ahora para demostrar que, sin importar la configuración física de la red, el valor promedio de la curva de potencia establecido por el producto del voltaje aplicado y la corriente de fuente resultante será igual al disipado por la red. A una frecuencia de 1 kHz, la reactancia del inductor de 1.273 mH será de 8, y la reactancia del capacitor será de 4 Ω, dando por resultado un red con atraso. Un análisis de la red dará por resultado:

$$\mathbf{Z}_T = 4\ \Omega + j4\ \Omega = 5.657\ \Omega\ \angle 45°$$

con:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_T} = \frac{10\text{ V}\ \angle 0°}{5.657\ \Omega\ \angle 45°} = 1.768\text{ A}\ \angle -45°$$

y

$$P = I^2R = (1.768\text{ A})^2\ 4\ \Omega = \mathbf{12.5\ W}$$

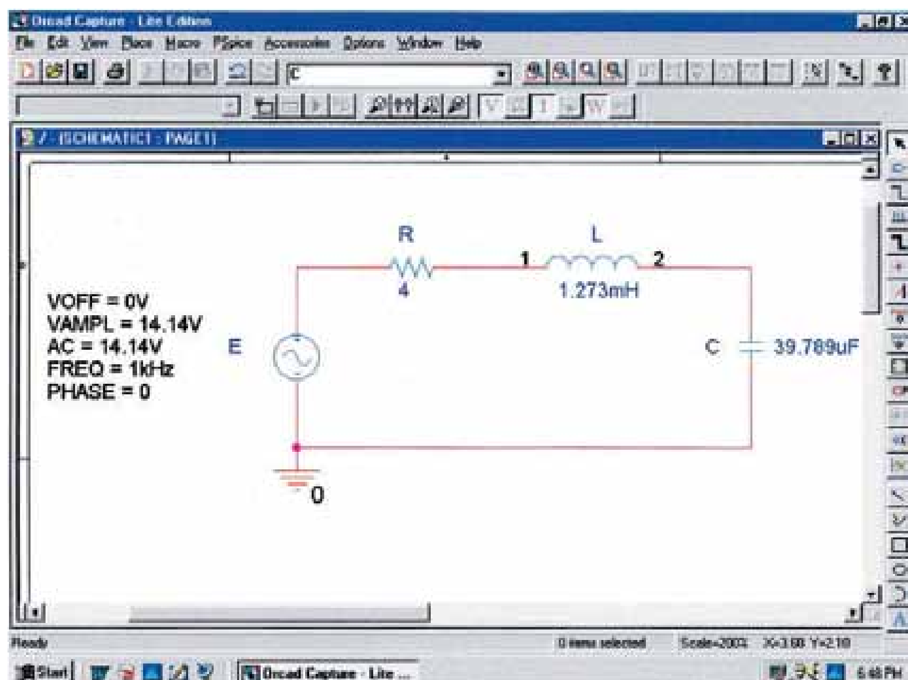


FIGURA 19.38
Utilización de PSpice para analizar la distribución de potencia en un circuito R-L-C en serie.

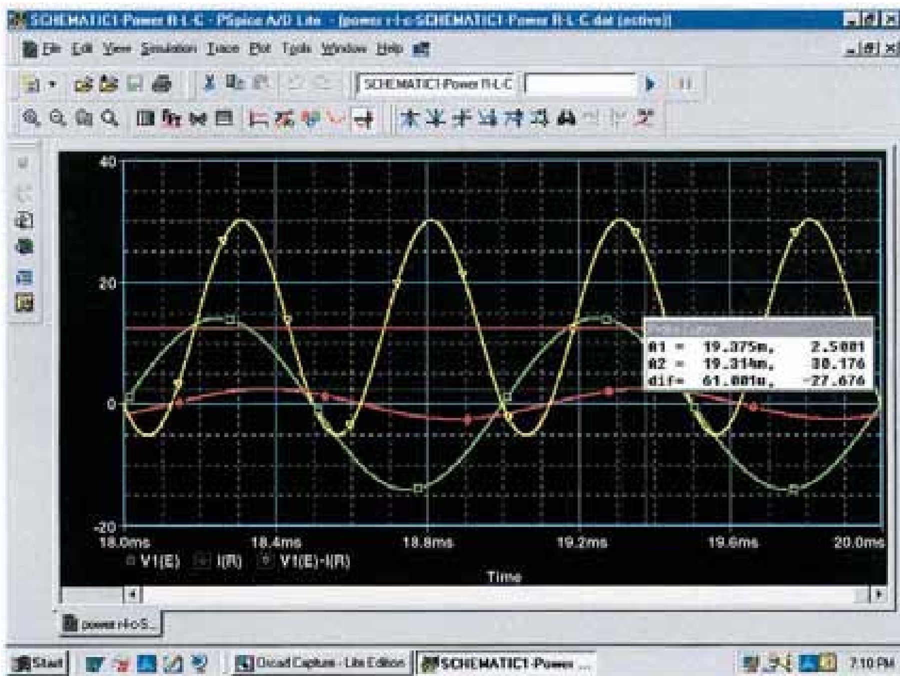


FIGURA 19.39

Gráficas del voltaje aplicado e, la corriente $i_R = i_s$, y la potencia entregada $p_s = e \cdot i_s$ es para el circuito de la figura 19.38.

Las tres curvas de la figura 19.39 se obtuvieron utilizando **Simulation Output Variables V(E:+)**, **I(R)** y **V(E:+)*I(R)**. La opción **Run to time** bajo el listado de **Simulation Profile** se estableció en 20 ms, aunque se seleccionó 1 μs para la opción **Maximum step size** con el propósito de asegurar una gráfica adecuada. En particular, observe que el eje horizontal no comienza sino hasta $t = 18$ ms para asegurar que nos encontramos en un modo de estado estacionario y no en una etapa transitoria (donde los valores pico de las formas de onda podrían cambiar con el tiempo). Los ejes horizontales se establecieron desde 18 ms hasta 20 ms al seleccionar **Plot-Axis Settings-X Axis-User Defined-18ms to 20ms-OK**. Primero observe que la corriente se encuentra atrasada con respecto al voltaje como se esperaba para una red de atraso. El ángulo de fase entre los dos mide 45° como se determinó antes. Segundo, tenga presente que los elementos se seleccionaron de manera que la misma escala pudiera utilizarse para la corriente y el voltaje. El eje vertical no tiene unidades de medición, por lo que las unidades adecuadas deberán añadirse mentalmente para cada gráfica. Al utilizar **Plot-Label-Line** se puede trazar una línea a través de la pantalla en el nivel de potencia promedio de 12.5 W. Aparecerá un lápiz que podrá ubicarse mediante el mantenimiento de un clic en el borde izquierdo en el nivel de 12.5 W. El lápiz podrá desplazarse entonces por la página para trazar la línea deseada. Una vez que se encuentre en el borde derecho, deje de oprimir el ratón y la línea quedará trazada. Los diversos colores para las curvas se obtuvieron haciendo clic derecho sobre cada curva y respondiendo a las opciones presentadas bajo **Properties**. Observe que el nivel de 12.5 W es, en efecto, el valor promedio de la curva de potencia. Resulta interesante observar que la curva de potencia desciende por debajo del eje sólo durante un breve lapso. En otras palabras, durante los dos ciclos visibles, la potencia es absorbida por el

circuito en la mayor parte del tiempo. La pequeña región por debajo del eje es el retorno de energía hacia la red por los elementos reactivos. Por tanto, en general, la fuente debe suministrar potencia al circuito la mayor parte del tiempo, aun cuando un buen porcentaje de la potencia puede estar simplemente entregando energía a los elementos reactivos y no siendo disipada.

PROBLEMAS

SECCIONES DE LA 19.1 A LA 19.7

1. Para la batería de focos (puramente resistiva) que aparece en la figura 19.40:
   a. Determine la disipación de potencia total.
   b. Calcule las potencias aparente y reactiva totales.
   c. Obtenga la corriente de fuente I_s.
   d. Calcule la resistencia de cada foco para las condiciones de operación especificadas.
   e. Determine las corrientes I_1 e I_2.

2. Para la red de la figura 19.41:
   a. Obtenga la potencia promedio entregada a cada elemento.
   b. Obtenga la potencia reactiva para cada elemento.
   c. Obtenga la potencia aparente para cada elemento.
   d. Obtenga el número total de watts, volt-ampere reactivos y volt-ampere, así como el factor de potencia F_p del circuito.
   e. Trace el triángulo de potencia.
   f. Obtenga la energía disipada por el resistor durante un ciclo completo del voltaje de entrada.
   g. Obtenga la energía almacenada o devuelta por el capacitor y el inductor durante un semiciclo de la curva de potencia para cada uno.

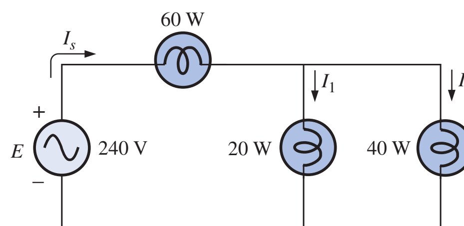


FIGURA 19.40
Problema 1.

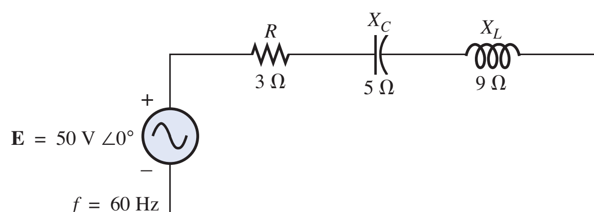


FIGURA 19.41
Problema 2.

3. Para el sistema de la figura 19.42:
  a. Obtenga el número total de watts, volt-ampere reactivos y volt-ampere, así como el factor de potencia F_p.
  b. Trace el triángulo de potencia.
  c. Obtenga la corriente $\mathbf{I}_s$.

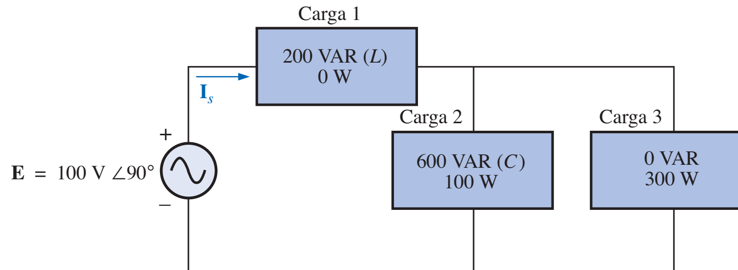


FIGURA 19.42
Problema 3.

4. Para el sistema de la figura 19.43:
  a. Obtenga P_T, Q_T y S_T.
  b. Determine el factor de potencia F_p.
  c. Trace el triángulo de potencia.
  d. Obtenga $\mathbf{I}_s$.

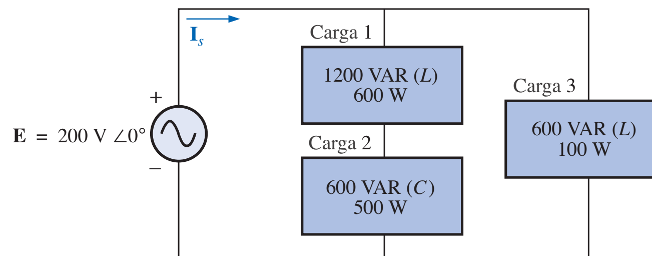


FIGURA 19.43
Problema 4.

5. Para el sistema de la figura 19.44:
  a. Obtenga P_T, Q_T y S_T.
  b. Determine el factor de potencia F_p.
  c. Trace el triángulo de potencia.
  d. Obtenga $\mathbf{I}_s$.

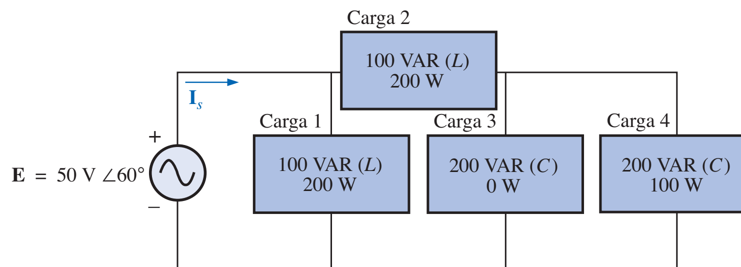


FIGURA 19.44
Problema 5.

6. Para el circuito de la figura 19.45:
   a. Obtenga las potencias promedio, reactiva y aparente para el resistor de 20 Ω.
   b. Repita el inciso (a) para la reactancia inductiva de 10 Ω.
   c. Obtenga el número total de watts, volt-ampere reactivos, volt-ampere y el factor de potencia F_p.
   d. Obtenga la corriente $\mathbf{I}_s$.

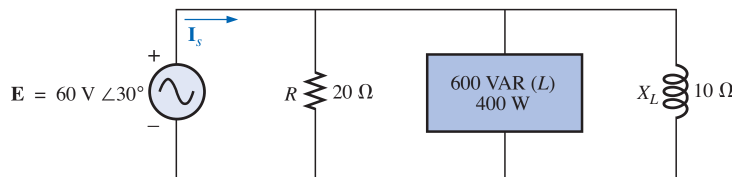


FIGURA 19.45
Problema 6.

7. Para la red de la figura 19.46:
   a. Obtenga la potencia promedio entregada a cada elemento.
   b. Obtenga la potencia reactiva para cada elemento.
   c. Obtenga la potencia aparente para cada elemento.
   d. Obtenga P_T, Q_T, S_T y F_p para el sistema.
   e. Trace el triángulo de potencia.
   f. Obtenga $\mathbf{I}_s$.

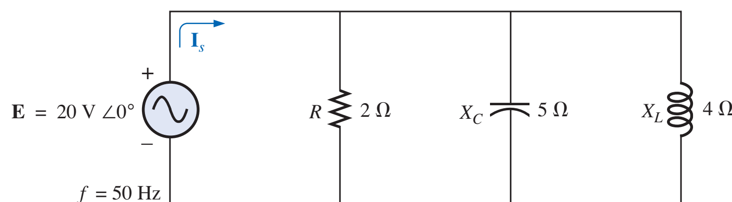


FIGURA 19.46
Problema 7.

8. Repita el problema 7 para el circuito de la figura 19.47.

*9. Para la red de la figura 19.48:
   a. Obtenga la potencia promedio entregada a cada elemento.
   b. Obtenga la potencia reactiva para cada elemento.
   c. Obtenga la potencia aparente para cada elemento.
   d. Obtenga el número total de watts, volt-ampere reactivos, volt-ampere y el factor de potencia F_p del circuito.
   e. Trace el triángulo de potencia.
   f. Obtenga la energía disipada por el resistor durante un ciclo completo del voltaje de entrada.
   g. Obtenga la energía almacenada o devuelta por el capacitor y el inductor durante un semiciclo de la curva de potencia para cada uno.

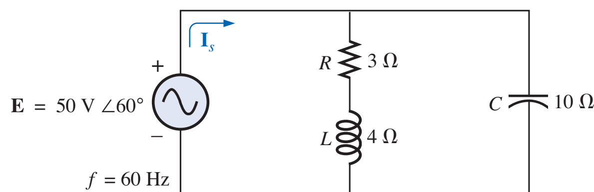


FIGURA 19.47
Problema 8.

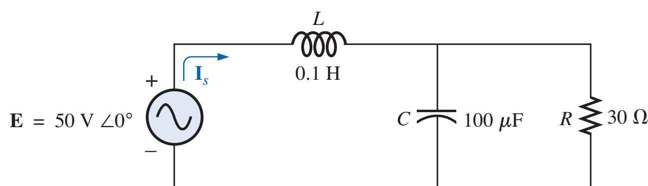


FIGURA 19.48
Problema 9.

10. Un sistema eléctrico está especificado como de 10 kVA, 200 V con un factor de potencia adelantado de 0.5.
   a. Determine la impedancia del sistema en coordenadas rectangulares.
   b. Obtenga la potencia promedio entregada al sistema.

11. Un sistema eléctrico está especificado como de 5 kVA, 120 V con un factor de potencia atrasado de 0.8.
   a. Determine la impedancia del sistema en coordenadas rectangulares.
   b. Encuentre la potencia promedio entregada al sistema.

***12.** Para el sistema de la figura 19.49:
   a. Obtenga el número total de watts, volt-ampere reactivos, volt-ampere y el factor de potencia F_p.
   b. Obtenga la corriente $\mathbf{I}_s$.
   c. Trace el triángulo de potencia.
   d. Obtenga el tipo de elementos y su impedancia en ohms dentro de cada caja eléctrica. (Suponga que todos los elementos de una carga están en serie.)
   e. Verifique si el resultado del inciso (b) es correcto encontrando la corriente $\mathbf{I}_s$ utilizando solo el voltaje de entrada **E** y los resultados del inciso (d). Compare el valor de $\mathbf{I}_s$ con el obtenido en el inciso (b).

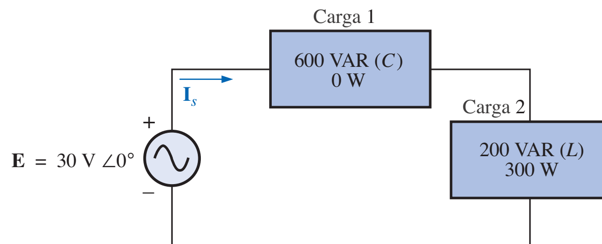


FIGURA 19.49
Problema 12.

***13.** Repita el problema 12 para el sistema de la figura 19.50.

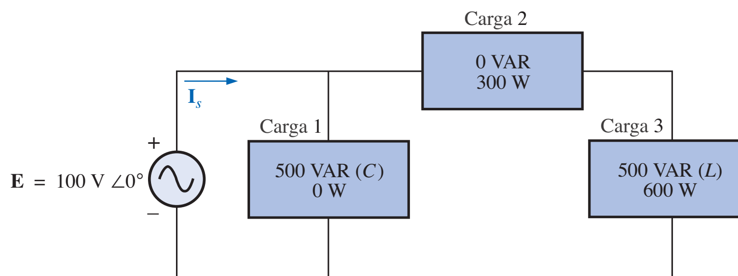


FIGURA 19.50
Problema 13.

***14.** Para el circuito de la figura 19.51:

a. Obtenga el número total de watts, volt-ampere reactivos, volt-ampere y el factor de potencia F_p.

b. Obtenga la corriente $\mathbf{I}_s$.

c. Encuentre el tipo de elementos y su impedancia dentro de cada caja. (Suponga que los elementos dentro de cada caja están en serie.)

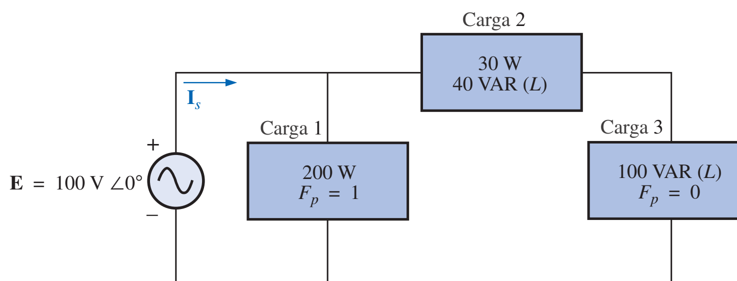


FIGURA 19.51
Problema 14.

15. Para el circuito de la figura 19.52:

a. Obtenga el número total de watts, volt-ampere reactivos, volt-ampere y el factor de potencia F_p.

b. Obtenga el voltaje **E**.

c. Encuentre el tipo de elementos y su impedancia dentro de cada caja. (Suponga que todos los elementos dentro de cada caja están en serie.)

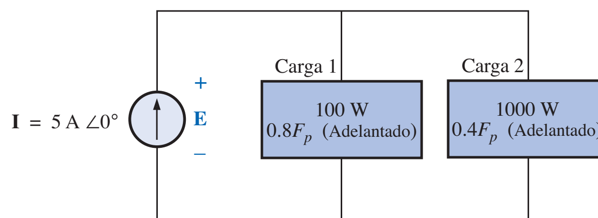


FIGURA 19.52
Problema 15.

SECCIÓN 19.8 Corrección del factor de potencia

***16.** Las cargas del alumbrado y de los motores de una pequeña fábrica establecen una demanda de potencia de 10 kVA a un factor de potencia de 0.7 atrasado sobre una alimentación de 208 V, 60 Hz.

a. Establezca el triángulo de potencia para la carga.

b. Determine el capacitor de factor de potencia que deberá colocarse en paralelo con la carga para elevar el factor de potencia a la unidad.

c. Determine el cambio en la corriente de alimentación desde el sistema no compensado hasta el sistema compensado.

d. Repita los incisos (b) y (c) si el factor de potencia se incrementa a 0.9.

17. La carga sobre una alimentación de 120 V, 60 Hz es de 5 kW (resistiva), 8 kVAR (inductiva) y 2 kVAR (capacitiva).

a. Obtenga los kilovolt-ampere totales.

b. Determine el F_p para las cargas combinadas.

c. Obtenga la corriente extraída de la fuente.
d. Calcule la capacitancia necesaria para establecer un factor de potencia unitario.
e. Obtenga la corriente extraída de la fuente a un factor de potencia unitario y compárela con el nivel no compensado.

18. La carga de una fábrica sobre un sistema de 1000 V, 60 Hz incluye:

Calefacción de 20 kW (factor de potencia unitario)
Motores de inducción de 10 kW (P_i) (factor de potencia de 0.7 atrasado)
Alumbrado de 5 kW (factor de potencia de 0.85 atrasado)

a. Establezca el triángulo de potencia para la carga total sobre la alimentación.
b. Determine el capacitor de factor de potencia requerido para elevar el factor de potencia a la unidad.
c. Determine el cambio en la corriente de alimentación desde el sistema no compensado hasta el sistema compensado.

SECCIÓN 19.9 Watímetros y medidores de factor de potencia

19. **a.** Se conecta un watímetro con su bobina de corriente como se muestra en la figura 19.53 y con la bobina de potencial en los puntos *f*-*g*. ¿Qué lectura presentará el watímetro?
b. Repita el inciso (a) con la bobina de potencial (*PC*) en *a*-*b*, *b*-*c*, *a*-*c*, *a*-*d*, *c*-*d*, *d*-*e* y *f*-*e*.

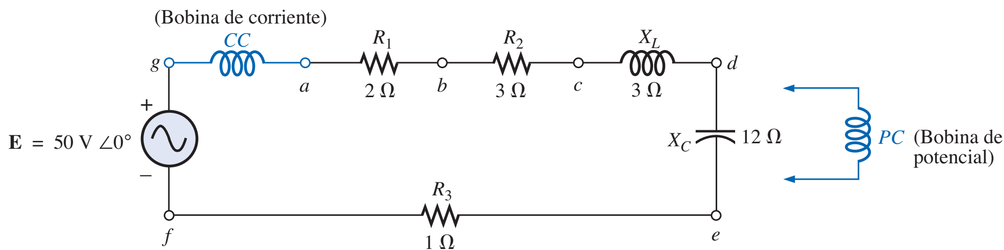


FIGURA 19.53
Problema 19.

20. La fuente de voltaje de la figura 19.54 entrega 660 VA a 120 V, con una corriente de alimentación que está atrasada con respecto al voltaje por un factor de potencia de 0.6.
a. Determine las lecturas de voltímetro, amperímetro y watímetro.
b. Encuentre la impedancia de carga en forma rectangular.

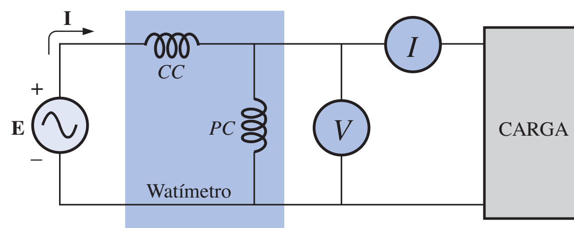


FIGURA 19.54
Problema 20.

SECCIÓN 19.10 Resistencia efectiva

21. a. Una bobina de núcleo de aire está conectada a una fuente de 200 V, 60 Hz. La corriente es de 4 A y se observa una lectura en el watímetro de 80 W. Obtenga la resistencia efectiva y la inductancia de la bobina.

b. Se inserta un núcleo de latón en la bobina. El amperímetro presenta una lectura de 3 A, y el watímetro una de 90 W. Calcule la resistencia efectiva del núcleo. Explique el incremento sobre el valor del inciso (a).

c. Si se inserta un núcleo sólido de acero en la bobina, se observa una corriente de 2 A y el watímetro presenta una lectura de 60 W. Calcule la resistencia y la inductancia de la bobina. Compare estos valores con los del inciso (a) y explique los cambios.

22. a. La inductancia de una bobina de aire es de 0.08 H, y la resistencia efectiva es de 4 Ω cuando se conecta una fuente de 60 V, 50 Hz en la bobina. Encuentre la corriente que pasa a través de la bobina y la lectura de un watímetro colocado en la bobina.

b. Si se inserta un núcleo de latón en la bobina, la resistencia efectiva se incrementa a 7 Ω y el watímetro presenta una lectura de 30 W. Encuentre la corriente que pasa a través de la bobina y la inductancia de ésta.

c. Si un núcleo sólido de acero se inserta en la bobina, la resistencia efectiva de la bobina se incrementa a 10 Ω y la corriente disminuye a 1.7 A. Encuentre la lectura del watímetro y la inductancia de la bobina.

SECCIÓN 19.12 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

23. Utilizando PSpice o EWB, obtenga una gráfica de la potencia reactiva para un capacitor puro de 636.62 μF a una frecuencia de 1 kHz para un ciclo del voltaje de entrada utilizando un voltaje aplicado $\mathbf{E} = 10 \text{ V} \angle 0°$. Sobre la misma gráfica, trace tanto el voltaje aplicado como la corriente resultante. Aplique etiquetas apropiadas a las curvas resultantes para generar resultados similares a los de la figura 19.37.

24. Repita el análisis de la figura 19.38 para una red paralela *R-L-C* con los mismos valores y frecuencia.

25. Grafique tanto el voltaje aplicado como la corriente de fuente sobre el mismo conjunto de ejes para la red de la figura 19.27(b), y muestre que ambos se encuentran en fase debido al factor de potencia unitario resultante.

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

26. Escriba un programa que proporcione una solución general para la red de la figura 19.19. Es decir, que dados la resistencia o la reactancia de cada elemento y el voltaje de fuente con cero grados de fase, calcule las potencias real, reactiva y aparente del sistema.

27. Escriba un programa que demuestre el efecto de una mayor potencia reactiva sobre el factor de potencia de un sistema. Tabule la potencia real, la potencia reactiva y el factor de potencia del sistema para una potencia real fija y una potencia reactiva que inicia a 10% de la potencia real y continúa hasta cinco veces la potencia real en incrementos de 10% de la potencia real.

GLOSARIO

Corrección del factor de potencia Adición de componentes reactivos (típicamente capacitivos) para establecer un factor de potencia del sistema cercano a la unidad.

Corrientes de fuga Pequeñas corrientes circulares dentro de un núcleo paramagnético que ocasionan incrementos en las pérdidas de potencia y en la resistencia efectiva del material.

Efecto de superficie En altas frecuencias, en el centro de un conductor se forma un voltaje contrario inducido, dando por resultado un mayor flujo cerca de la superficie del conductor y una fuerte reducción cerca del centro. En consecuencia, el área efectiva de conducción disminuye y la resistencia aumenta como lo define la ecuación básica para la resistencia geométrica de un conductor.

Pérdidas por histéresis Pérdidas en un material magnético introducidas por los cambios en la dirección del flujo magnético dentro del material.

Pérdidas por radiación Pérdida de energía en la forma de ondas electromagnéticas durante la transferencia de energía de un elemento a otro.

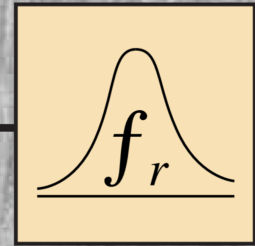
Potencia aparente Potencia entregada a una carga sin considerar los efectos de un ángulo de factor de potencia de la carga. Está determinada únicamente por el producto del voltaje y la corriente terminales de la carga.

Potencia promedio (real) Potencia entregada disipada en forma de calor por una red o sistema.

Potencia reactiva Potencia asociada con elementos reactivos que proporciona una medida de la energía asociada con el establecimiento de campos magnéticos y eléctricos de elementos inductivos y capacitivos, respectivamente.

Resistencia efectiva Valor de resistencia que incluye los efectos de pérdidas por radiación, efecto de superficie, corrientes de fuga y pérdidas por histéresis.

20



Resonancia

20.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo presenta el muy importante *circuito resonante* (o *sintonizado*), que es fundamental en la operación de una amplia variedad de sistemas eléctricos y electrónicos actualmente en uso. El circuito resonante es una combinación de elementos *R, L* y *C* que tienen una característica de respuesta en frecuencia similar a la que aparece en la figura 20.1. Observe en esta figura que la respuesta tiene un máximo para la frecuencia f_r, disminuyendo a la derecha y a la izquierda

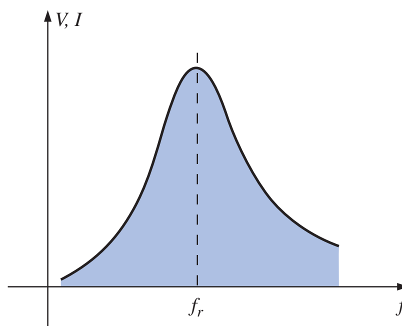


FIGURA 20.1
Curva de resonancia.

de esta frecuencia. En otras palabras, para un intervalo particular de frecuencias la respuesta estará cercana o será igual al máximo. Las frecuencias alejadas hacia la izquierda o la derecha tienen niveles muy bajos de voltaje o corriente y, para todo fin práctico, poco efecto en la respuesta del sistema. Un receptor de radio o de televisión tiene una curva de respuesta del tipo indicado en la figura 20.1 para cada estación transmisora. Cuando el receptor se establece o sintoniza en una estación particular, queda en o cerca de la frecuencia f_r mostrada en la figura 20.1. Las estaciones que transmiten a frecuencias lejanas a la derecha o a la izquierda de esta frecuencia de resonancia no tienen potencia significativa como para afectar el programa de interés. El proceso de sintonizar

(establecer el indicador en f_r), como se describió, es la causa de que se utilice el término *circuito sintonizado*. Cuando la respuesta se sitúa en o cerca del máximo, se dice que el circuito está en estado de **resonancia**.

El concepto de resonancia no se limita a sistemas eléctricos o electrónicos. Si se aplican impulsos mecánicos a un sistema mecánico a la frecuencia apropiada, el sistema entrará en un estado de resonancia donde se desarrollarán vibraciones sostenidas de amplitud muy grande. La frecuencia a la que esto ocurre se denomina *frecuencia natural* del sistema. El ejemplo clásico de este efecto es el puente Tacoma Narrows Bridge construido en 1940 sobre Puget Sound en el estado de Washington, EUA. Cuatro meses después de terminado este puente, con su claro suspendido a 2800 pies, un viento pulsante de 42 mi/h lo puso en un estado de oscilación en su frecuencia natural. La amplitud de las oscilaciones se incrementó hasta el punto en que el claro principal se rompió y cayó al agua. El puente fue reemplazado por el nuevo Tacoma Narrows Bridge, terminado en 1950.

El circuito eléctrico resonante debe tener *tanto* inductancia como capacitancia. Además, la resistencia siempre estará presente debido a la falta de elementos ideales o al control ofrecido por la forma de la curva de resonancia. Cuando ocurre la resonancia debido a la aplicación de la frecuencia apropiada (f_r), la energía absorbida por un elemento reactivo es la misma que la liberada por otro elemento reactivo dentro del sistema. En otras palabras, la energía pulsa de un elemento reactivo al otro. Por tanto, una vez que un sistema ideal (C, L puros) ha alcanzado un estado de resonancia, no requiere potencia reactiva adicional ya que es autosostenible. En un circuito práctico hay cierta resistencia asociada con los elementos reactivos que resultará en el "amortiguamiento" final de las oscilaciones entre los elementos reactivos.

Hay dos tipos de circuitos resonantes: *en serie* y *en paralelo*. Cada uno será considerado con cierto detalle en este capítulo.

RESONANCIA EN SERIE

20.2 CIRCUITO RESONANTE EN SERIE

Un circuito resonante (en serie o en paralelo) debe tener un elemento inductivo y uno capacitivo. Un elemento resistivo siempre estará presente debido a la resistencia interna de la fuente (R_s), a la resistencia interna del inductor (R_l), y a cualquier resistencia agregada para controlar la forma de la curva de respuesta ($R_{\text{diseño}}$). La configuración básica para el circuito resonante en serie aparece en la figura 20.2(a) con los elementos resistivos indicados antes. La apariencia "más clara" de la figura 20.2(b) es el resultado de combinar los elementos resistivos en serie en un solo valor total. Es decir,

$$R = R_s + R_l + R_d \qquad \textbf{(20.1)}$$

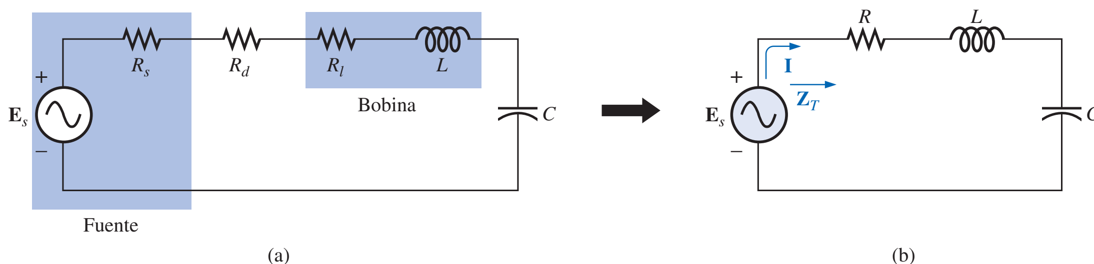


FIGURA 20.2
Circuito resonante en serie.

La impedancia total de esta red a cualquier frecuencia se determina mediante:

$$\mathbf{Z}_T = R + j\,X_L - j\,X_C = R + j\,(X_L - X_C)$$

Las condiciones de resonancia descritas en la introducción a este capítulo ocurrirán cuando:

$$\boxed{X_L = X_C} \qquad \textbf{(20.2)}$$

quitando la componente reactiva de la ecuación de impedancia total. La impedancia total en resonancia es entonces:

$$\boxed{\mathbf{Z}_{T_s} = R} \qquad \textbf{(20.3)}$$

que representa el valor mínimo de $\mathbf{Z}_T$ a cualquier frecuencia. El subíndice s se empleará para indicar condiciones resonantes en serie.

La frecuencia de resonancia puede determinarse en términos de la inductancia y la capacitancia examinando la ecuación que define la resonancia [Ecuación (20.2)]:

$$X_L = X_C$$

Sustituyendo resulta:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{y} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

y

$$\boxed{\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \qquad \textbf{(20.4)}$$

o bien:

$$\boxed{f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \qquad \begin{aligned} f &= \text{hertz (Hz)} \\ L &= \text{henrys (H)} \\ C &= \text{farads (F)} \end{aligned} \qquad \textbf{(20.5)}$$

La corriente a través del circuito en resonancia es:

$$\mathbf{I} = \frac{E\,\angle 0^\circ}{R\,\angle 0^\circ} = \frac{E}{R}\,\angle 0^\circ$$

la cual, como el lector observará, es la corriente máxima para el circuito de la figura 20.2 para un voltaje aplicado **E** ya que $\mathbf{Z}_T$ es un valor mínimo. Considere también que *en resonancia el voltaje y la corriente de entrada están en fase en resonancia*.

Como la corriente es la misma a través del capacitor y el inductor, en resonancia el voltaje en cada uno es igual en magnitud pero 180° fuera de fase:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_L &= (I\,\angle 0^\circ)(X_L\,\angle 90^\circ) = IX_L\,\angle 90^\circ \\ \mathbf{V}_C &= (I\,\angle 0^\circ)(X_C\,\angle -90^\circ) = IX_C\,\angle -90^\circ \end{aligned}\right\} \text{180° fuera de fase}$$

y, como $X_L = X_C$, la magnitud de V_L es igual a V_C en resonancia; es decir,

$$\boxed{V_{L_s} = V_{C_s}} \qquad \textbf{(20.6)}$$

La figura 20.3, un diagrama fasorial de los voltajes y la corriente, indica claramente que el voltaje en el resistor en resonancia es el voltaje de entrada, y **E**, e **I** y $\mathbf{V}_R$ están en fase en resonancia.

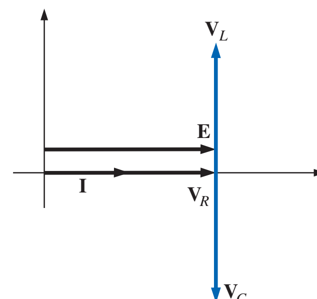


FIGURA 20.3
Diagrama fasorial para el circuito resonante en serie en resonancia.

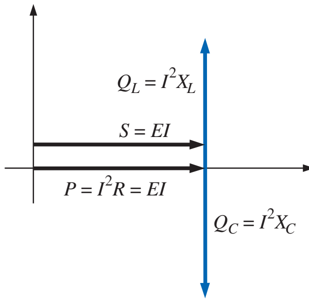


FIGURA 20.4
Triángulo de potencia para el circuito resonante en serie en resonancia.

La potencia promedio en el resistor en resonancia es igual a I^2R, y las potencias reactivas en el capacitor y el inductor son I^2X_C e I^2X_L, respectivamente.

El triángulo de potencia en resonancia (Figura 20.4) muestra que la potencia total aparente es igual a la potencia promedio disipada por el resistor, ya que $Q_L = Q_C$. El factor de potencia del circuito en resonancia es:

$$F_p = \cos\theta = \frac{P}{S}$$

y

$$F_{p_s} = 1 \tag{20.7}$$

Al graficar las curvas de potencia de cada elemento sobre el mismo conjunto de ejes (Figura 20.5) observamos que, aunque la potencia reactiva total en cualquier instante es igual a cero (advierta que $t = t'$), en resonancia aún está siendo absorbida y liberada energía por el inductor y el capacitor.

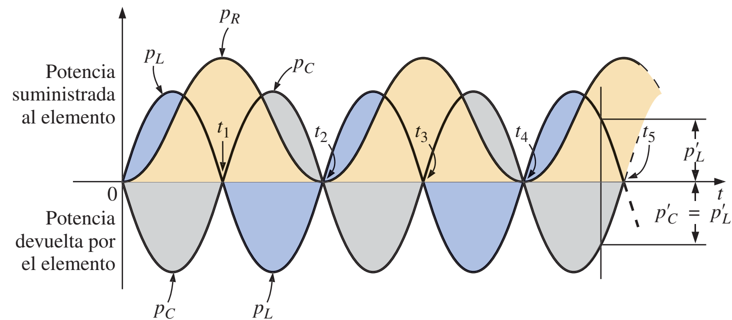


FIGURA 20.5
Curvas de potencia en resonancia para el circuito resonante en serie.

Un examen más minucioso revela que la energía absorbida por el inductor desde el tiempo 0 hasta t_1 es la misma que la liberada por el capacitor desde 0 hasta t_1. De t_1 a t_2 ocurre lo contrario, y así sucesivamente. Por tanto, la potencia total aparente continúa siendo igual a la potencia promedio, aunque el inductor y el capacitor estén absorbiendo y liberando energía. Esta condición ocurre sólo en resonancia. El cambio más ligero en frecuencia introduce una componente reactiva en el triángulo de potencia, la cual incrementará la potencia aparente del sistema por arriba de la potencia promedio de disipación, y la resonancia no existirá más.

20.3 EL FACTOR DE CALIDAD (*Q*)

El **factor de calidad** Q de un circuito resonante en serie se define como la razón de la potencia reactiva del inductor o del capacitor a la potencia promedio del resistor en resonancia; es decir,

$$Q_s = \frac{\text{potencia reactiva}}{\text{potencia promedio}} \tag{20.8}$$

El factor de calidad es también una indicación de cuánta energía se almacena (transferencia continua desde un elemento reactivo hacia el otro) en comparación con la disipada. Entre menor es el nivel de disipación para la misma

potencia reactiva, mayor es el factor Q_s y más concentrada e intensa es la región de resonancia.

Sustituyendo por una reactancia inductiva en la ecuación (20.8) en resonancia obtenemos:

$$Q_s = \frac{I^2 X_L}{I^2 R}$$

y

$$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_s L}{R} \tag{20.9}$$

Si la resistencia R es la resistencia de la bobina (R_l), podemos hablar de la Q de la bobina, donde:

$$Q_{\text{bobina}} = Q_l = \frac{X_L}{R_l} \qquad R = R_l \tag{20.10}$$

Como el factor de calidad de una bobina es la información característica proporcionada por los fabricantes de inductores, a menudo el símbolo Q se da sin un subíndice asociado. A partir de la ecuación (20.10) podría parecer que Q_l aumentará linealmente con la frecuencia ya que $X_L = 2\pi fL$. Es decir, si la frecuencia se duplica, entonces Q_l también crecerá por un factor de 2. Esto es más o menos cierto para el intervalo de bajas a medianas frecuencias, como se muestra en la figura 20.6. Desafortunadamente, sin embargo, conforme la frecuencia sea mayor, la resistencia efectiva de la bobina también aumentará —debido principalmente a fenómenos del efecto de superficie— y la Q_l resultante disminuirá. Además, los efectos capacitivos entre los devanados aumentarán, reduciendo más aún la Q_l de la bobina. Por esta razón, Q_l debe especificarse para una frecuencia particular o para cierto intervalo de frecuencias. En aplicaciones sobre una amplia gama de frecuencias se proporciona a menudo una gráfica de Q_l en función de la frecuencia. La máxima Q_l para bobinas comercialmente disponibles es menor de 200, y la mayor parte de estas bobinas tiene un máximo cercano a 100. En la figura 20.6 observe que para bobinas del mismo tipo, Q_l cae más rápido para niveles de inductancia altos.

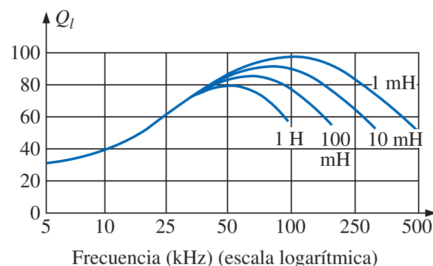


FIGURA 20.6
Q_l en función de la frecuencia para una serie de inductores de construcción similar.

Si sustituimos:

$$\omega_s = 2\pi f_s$$

y entonces:

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

en la ecuación (20.9), tenemos:

$$Q_s = \frac{\omega_s L}{R} = \frac{2\pi f_s L}{R} = \frac{2\pi}{R}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right)L$$

$$= \frac{L}{R}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = \left(\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L}}\right)\frac{L}{R\sqrt{LC}}$$

y

$$Q_s = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{20.11}$$

que proporciona Q_s en términos de los parámetros del circuito.

Para circuitos resonantes en serie usados en sistemas de comunicaciones, Q_s es generalmente mayor que 1. Al aplicar la regla del divisor de voltaje al circuito de la figura 20.2 obtenemos:

$$V_L = \frac{X_L E}{Z_T} = \frac{X_L E}{R} \qquad \text{(en resonancia)}$$

y
$$\boxed{V_{L_s} = Q_s E} \tag{20.12}$$

o bien:
$$V_C = \frac{X_C E}{Z_T} = \frac{X_C E}{R}$$

y
$$\boxed{V_{C_s} = Q_s E} \tag{20.13}$$

Como Q_s por lo general es mayor que 1, el voltaje en el capacitor o el inductor de un circuito resonante en serie puede ser considerablemente mayor que el voltaje de entrada. De hecho, en muchos casos el factor Q_s es tan alto que son obligatorios un diseño y manejo cuidadosos (incluyendo aislamiento adecuado) en lo que se refiere al voltaje en el capacitor y el inductor.

Por ejemplo, en el circuito de la figura 20.7, que está en estado de resonancia,

$$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{480\ \Omega}{6\ \Omega} = 80$$

y
$$V_L = V_C = Q_s E = (80)(10\text{ V}) = \mathbf{800\ V}$$

lo cual es, desde luego, un potencial de magnitud importante.

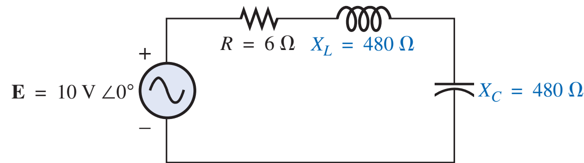


FIGURA 20.7
Circuito resonante en serie de factor Q alto.

20.4 Z_T EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA

La impedancia total del circuito *R-L-C* en serie de la figura 20.2 a cualquier frecuencia está determinada por:

$$\mathbf{Z}_T = R + j X_L - j X_C \quad \text{o} \quad \mathbf{Z}_T = R + j(X_L - X_C)$$

La magnitud de la impedancia $\mathbf{Z}_T$ en función de la frecuencia está determinada por:

$$Z_T = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

La curva de impedancia total en función de la frecuencia para el circuito resonante en serie de la figura 20.2 puede encontrarse aplicando la curva de impedancia en función de la frecuencia para cada elemento de la ecuación recién derivada, escrita en la siguiente forma:

$$\boxed{Z_T(f) = \sqrt{[R(f)]^2 + [X_L(f) - X_C(f)]^2}} \tag{20.14}$$

donde $Z_T(f)$ “significa” la impedancia total como una *función* de la frecuencia. Para el intervalo de interés de la frecuencia, supondremos que la resistencia *R* no cambia con la frecuencia, resultando la gráfica de la figura 20.8. La curva para la

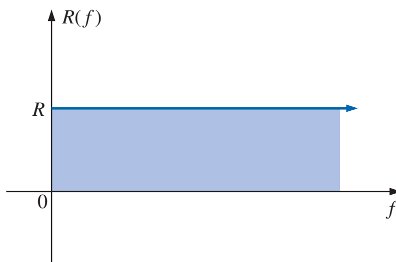


FIGURA 20.8
Resistencia en función de la frecuencia.

inductancia, de acuerdo con la ecuación de la reactancia, es una línea recta que interseca al origen con una pendiente igual a la inductancia de la bobina. La expresión matemática de cualquier línea recta en un plano bidimensional está dada por:

$$y = mx + b$$

Así, para la bobina,

$$\begin{array}{ccccc} X_L = 2\pi f L + 0 = & (2\pi L) & (f) & + 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y = & m & \cdot\ x & + b \end{array}$$

(donde $2\pi L$ es la pendiente), produciendo los resultados mostrados en la figura 20.9.

Para el capacitor,

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \quad \text{o} \quad X_C f = \frac{1}{2\pi C}$$

que se vuelve $yx = k$, la ecuación de una hipérbola, donde:

$$y \text{ (variable)} = X_C$$
$$x \text{ (variable)} = f$$
$$k \text{ (constante)} = \frac{1}{2\pi C}$$

La curva hiperbólica para $X_C(f)$ está graficada en la figura 20.10. En particular, observe su gran magnitud a bajas frecuencias y su rápida caída cuando la frecuencia aumenta.

Si colocamos las figuras 20.9 y 20.10 sobre el mismo conjunto de ejes, obtendremos las curvas de la figura 20.11. La condición de resonancia se define claramente ahora mediante el punto de intersección, donde $X_L = X_C$. Para frecuencias menores que f_s, queda también bastante claro que la red es principalmente capacitiva ($X_C > X_L$). Para frecuencias por arriba de la condición de resonancia $X_L > X_C$, y la red es inductiva.

Aplicando:

$$Z_T(f) = \sqrt{[R(f)]^2 + [X_L(f) - X_C(f)]^2}$$
$$= \sqrt{[R(f)]^2 + [X(f)]^2}$$

a las curvas de la figura 20.11, donde $X(f) = X_L(f) - X_C(f)$, se obtiene la curva para $Z_T(f)$ como se muestra en la figura 20.12. La impedancia mínima ocurre en la frecuencia de resonancia y es igual a la resistencia R. Observe que la curva no es simétrica con respecto a la frecuencia de resonancia (especialmente a valores mayores de Z_T).

El ángulo de fase asociado con la impedancia total es:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(X_L - X_C)}{R} \qquad \textbf{(20.15)}$$

Para la función $\tan^{-1} x$ (resulta cuando $X_L > X_C$), entre mayor es x, mayor es el ángulo θ (más cercano a 90°). Sin embargo, para regiones donde $X_C > X_L$, debe ser claro que:

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x \qquad \textbf{(20.16)}$$

A bajas frecuencias $X_C > X_L$, y θ se acercará a $-90°$ (capacitiva), como se muestra en la figura 20.13, mientras que en altas frecuencias $X_L > X_C$ y θ se acercará a 90°. Por tanto, en general, para un circuito resonante en serie:

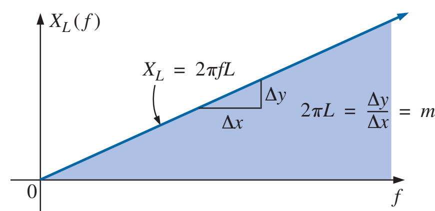


FIGURA 20.9
Reactancia inductiva en función de la frecuencia.

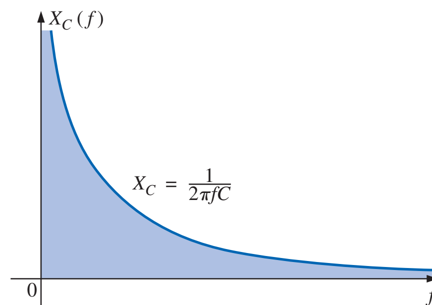


FIGURA 20.10
Reactancia capacitiva en función de la frecuencia.

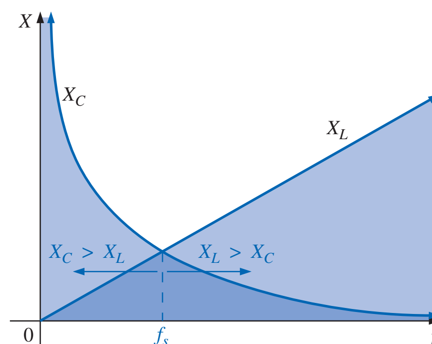


FIGURA 20.11
Colocación de la respuesta en frecuencia de las reactancias inductiva y capacitiva de un circuito R-L-C en serie sobre el mismo conjunto de ejes.

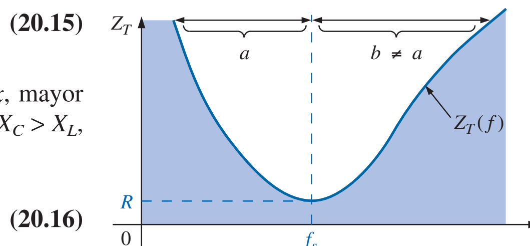


FIGURA 20.12
Z_T en función de la frecuencia para el circuito resonante en serie.

$f < f_s$:	red capacitiva; **I** adelanta a **E**
$f > f_s$:	red inductiva; **E** adelanta a **I**
$f = f_s$:	red resistiva; **E** e **I** están en fase

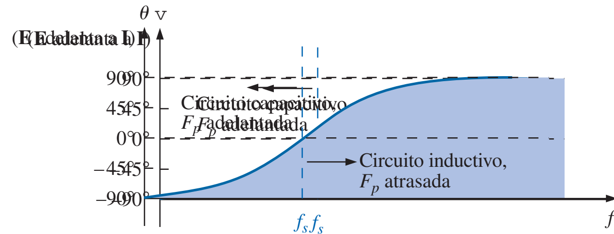


FIGURA 20.13
Gráfica de fase para el circuito resonante en serie.

20.5 SELECTIVIDAD

En este punto, al graficar la magnitud de la corriente $I = E/Z_T$ en función de la frecuencia para un voltaje aplicado *fijo* E, obtendremos la curva mostrada en la figura 20.14, la cual se eleva desde cero hasta un valor máximo de E/R (donde Z_T es un mínimo) y luego desciende hacia cero (cuando Z_T aumenta) a una razón más lenta que la de elevación hasta su valor pico. La curva es en realidad la inversa de la curva de impedancia en función de la frecuencia. Como la curva Z_T no es absolutamente simétrica con respecto a la frecuencia de resonancia, la curva de la corriente en función de la frecuencia tiene la misma propiedad.

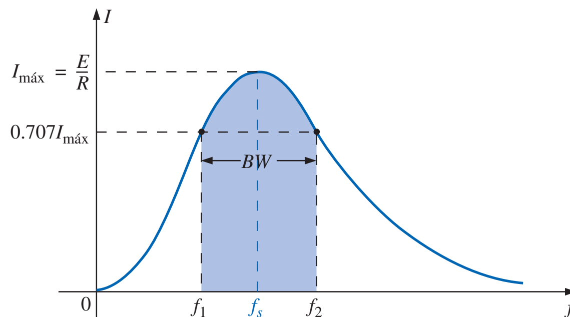


FIGURA 20.14
I en función de la frecuencia para el circuito resonante en serie.

Existe un intervalo de frecuencias definido en el que la corriente está cerca de su valor máximo y la impedancia está a un mínimo. Tales frecuencias, correspondientes a 0.707 de la corriente máxima, son llamadas **frecuencias de banda**, **frecuencias de corte** o **frecuencias de media potencia**. En la figura 20.14 están identificadas por f_1 y f_2. El intervalo de frecuencias entre las dos se denomina **ancho de banda** (*BW*, *bandwidth*) del circuito resonante.

Las frecuencias de media potencia son aquellas en que la potencia entregada es la mitad de la entregada en la frecuencia de resonancia; es decir,

$$P_{HPF} = \frac{1}{2} P_{máx} \qquad \textbf{(20.17)}$$

La condición anterior se deriva de que:

$$P_{máx} = I^2_{máx}R$$

y $$P_{HPF} = I^2R = (0.707I_{máx})^2R = (0.5)(I^2_{máx}R) = \frac{1}{2}P_{máx}$$

Como el circuito resonante se ajusta para seleccionar una banda de frecuencias, la curva de la figura 20.14 se denomina **curva de selectividad**. El término se deriva de que se debe ser *selectivo* al escoger la frecuencia para asegurarse de que esté en el ancho de banda. Entre menor es el ancho de banda, mayor es la selectividad. La forma de la curva, como se muestra en la figura 20.15, depende de cada elemento del circuito *R-L-C* en serie. Si la resistencia se vuelve menor con una inductancia y una capacitancia fijas, el ancho de banda disminuye y la selectividad aumenta. Similarmente, si la razón *L*/*C* aumenta con una resistencia fija, el ancho de banda disminuye y de nuevo aumenta la selectividad.

En términos de Q_s, si R es mayor para la misma X_L, entonces Q_s es menor, como lo determina la ecuación $Q_s = \omega_s L/R$.

Por tanto, un factor Q_s pequeño está asociado con una curva resonante que tiene un ancho de banda grande y selectividad pequeña, mientras que un factor Q_s grande indica lo opuesto.

Para circuitos donde $Q_s \geq 10$, una aproximación aceptada ampliamente es que la frecuencia de resonancia biseca el ancho de banda y que la curva resonante es simétrica con respecto a la frecuencia de resonancia.

Estas condiciones se muestran en la figura 20.16, indicando que las frecuencias de corte son entonces equidistantes de la frecuencia de resonancia.

Para cualquier Q_s, lo anterior no es cierto. Las frecuencias de corte f_1 y f_2 pueden encontrarse para el caso general (cualquier Q_s) empleando primero el hecho de que una caída en corriente a 0.707 de su valor resonante corresponde a un incremento en impedancia igual a $1/0.707 = \sqrt{2}$ veces el valor resonante, que es R.

Sustituyendo $\sqrt{2}R$ en la ecuación para la magnitud de Z_T encontramos que:

$$Z_T = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

se vuelve: $$\sqrt{2}R = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

o, elevando al cuadrado ambos lados, que:

$$2R^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

y $$R^2 = (X_L - X_C)^2$$

Sacando la raíz cuadrada de ambos lados obtenemos:

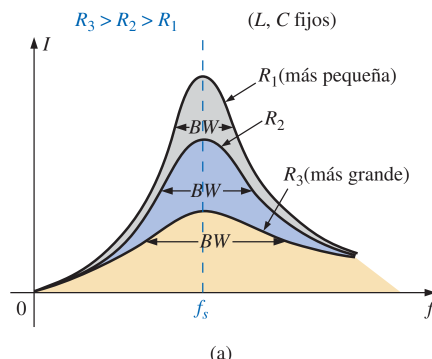
$$R = X_L - X_C \quad \text{o} \quad R - X_L + X_C = 0$$

Consideremos primero el caso en que $X_L > X_C$, el cual relaciona a f_2 u ω_2. Sustituyendo $\omega_2 L$ por X_L y $1/\omega_2 C$ por X_C, y llevando ambas cantidades a la izquierda del signo de igual, tenemos:

$$R - \omega_2 L + \frac{1}{\omega_2 C} = 0 \quad \text{o} \quad R\omega_2 - \omega_2^2 L + \frac{1}{C} = 0$$

que puede escribirse como:

$$\omega_2^2 - \frac{R}{L}\omega_2 - \frac{1}{LC} = 0$$



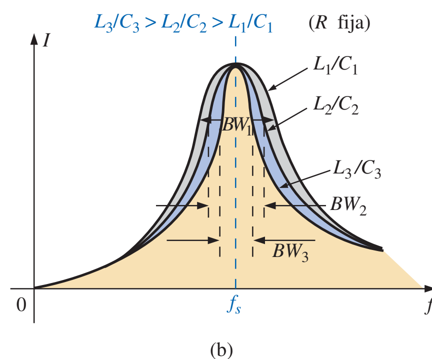


FIGURA 20.15
Efecto de R, L y C sobre la curva de selectividad para el circuito resonante en serie.

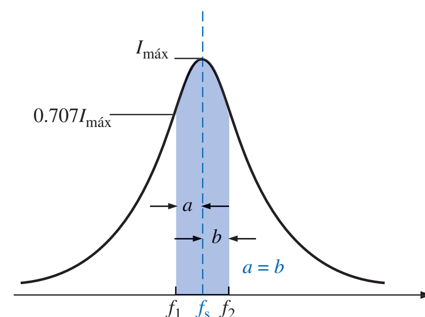


FIGURA 20.16
Curva de resonancia en serie aproximada para $Q_s \geq 10$.

Resolviendo la ecuación cuadrática tenemos:

$$\omega_2 = \frac{-(-R/L) \pm \sqrt{[-(R/L)]^2 - [-(4/LC)]}}{2}$$

y

$$\omega_2 = +\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

con:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right] \quad \text{(Hz)} \qquad \textbf{(20.18)}$$

El signo negativo frente al segundo factor fue cancelado porque $(1/2)\sqrt{(R/L)^2 + 4/LC}$ es siempre mayor que $R/(2L)$. Si no se cancelara, habría una solución negativa para la frecuencia en radianes ω.

Si repetimos el mismo procedimiento para $X_C > X_L$, el cual relaciona a ω_1 o a f_1 en forma tal que $Z_T = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$, la solución para f_1 es entonces:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right] \quad \text{(Hz)} \qquad \textbf{(20.19)}$$

El ancho de banda (BW) es:

$$BW = f_2 - f_1 = \text{ecuación (20.18)} - \text{ecuación (20.19)}$$

y

$$BW = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} \qquad \textbf{(20.20)}$$

Sustituyendo $R/L = \omega_s/Q_s$ a partir de $Q_s = \omega_s L/R$ y $1/2\pi = f_s/\omega_s$ a partir de $\omega_s = 2\pi f_s$ obtenemos:

$$BW = \frac{R}{2\pi L} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{R}{L}\right) = \left(\frac{f_s}{\omega_s}\right)\left(\frac{\omega_s}{Q_s}\right)$$

o bien:

$$BW = \frac{f_s}{Q_s} \qquad \textbf{(20.21)}$$

la cual es una forma muy conveniente ya que relaciona el ancho de banda con la Q_s del circuito. Como se mencionó, la ecuación (20.21) verifica que a mayor Q_s, menor el ancho de banda y viceversa.

Escribir en forma ligeramente distinta la ecuación (20.21) resulta en:

$$\frac{f_2 - f_1}{f_s} = \frac{1}{Q_s} \qquad \textbf{(20.22)}$$

La razón $(f_2 - f_1)/f_s$ a veces se llama *ancho de banda fraccional*, y da una indicación de la amplitud del ancho de banda comparado con la frecuencia de resonancia.

También puede mostrarse mediante manipulaciones matemáticas de las ecuaciones pertinentes que la frecuencia de resonancia está relacionada con la media geométrica de las frecuencias de corte; es decir,

$$f_s = \sqrt{f_1 f_2} \tag{20.23}$$

20.6 V_R, V_L Y V_C

Al graficar la magnitud (valor efectivo) de los voltajes $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_C$ y la corriente $\mathbf{I}$ en función de la frecuencia para el circuito resonante en serie sobre el mismo conjunto de ejes, se obtienen las curvas mostradas en la figura 20.17. Observe que la curva V_R tiene la misma forma que la curva I, y un valor pico igual a la magnitud del voltaje de entrada E. La curva V_C se eleva primero lentamente desde un valor igual al voltaje de entrada ya que la reactancia del capacitor es infinita (circuito abierto) a frecuencia cero y la reactancia del inductor es cero (corto circuito) a esta frecuencia. Conforme la frecuencia aumenta, $1/\omega C$ de la ecuación:

$$V_C = IX_C = (I)\left(\frac{1}{\omega C}\right)$$

FIGURA 20.17

V_R, V_L, V_C e I en función de la frecuencia para un circuito resonante en serie.

se vuelve más pequeña, pero I aumenta a una razón más rápida que a la cual $1/\omega C$ disminuye. Por tanto, V_C se eleva y continúa haciéndolo debido a la corriente rápidamente creciente, hasta que la frecuencia se acerca a la resonancia. Al acercarse a la condición de resonancia, la razón de cambio de I disminuye. Cuando esto ocurra, el factor $1/\omega C$, que disminuyó cuando la frecuencia aumentó, superará la razón de cambio de I, y V_C empezará a caer. El valor pico ocurrirá a una frecuencia justo anterior a la de resonancia. Después de la resonancia, V_C e I caen en magnitud, y V_C tiende a cero.

Entre mayor sea el factor Q_s del circuito, más cerca estará $f_{C_{\text{máx}}}$ de f_s, y más cerca estará $V_{C_{\text{máx}}}$ de Q_sE. Para circuitos con $Q_s \geq 10$, $f_{C_{\text{máx}}} \cong f_s$, y $V_{C_{\text{máx}}} \cong Q_sE$.

La curva para V_L crece continuamente desde cero hasta la frecuencia de resonancia ya que ambas cantidades, ωL e I, de la ecuación $V_L = IX_L = (I)(\omega L)$ crecen sobre este intervalo de frecuencias. En resonancia, I ha alcanzado su valor máximo, pero ωL aún está elevándose. Por tanto, V_L alcanzará su valor máximo después de la resonancia. Después de alcanzar su valor pico, el voltaje V_L caerá hacia E ya que la caída en I superará la elevación en ωL. El voltaje tenderá a E porque X_L finalmente será infinito, y X_C será cero.

A medida que aumenta el factor Q_s del circuito, la frecuencia $f_{L_{máx}}$ cae hacia f_s, y $V_{L_{máx}}$ se acerca a Q_sE. Para circuitos con $Q_s \geq 10$, $f_{L_{máx}} \cong f_s$, y $V_{L_{máx}} \cong Q_sE$.

La curva V_L tiene una mayor magnitud que la curva V_C para cualquier frecuencia por arriba de la resonancia, y la curva V_C tiene una mayor magnitud que la curva V_L para cualquier frecuencia por debajo de la resonancia. Esto confirma de nuevo que el circuito *R-L-C* en serie es en su mayoría capacitivo desde cero hasta la frecuencia de resonancia, y predominantemente inductivo para cualquier frecuencia por arriba de la resonancia.

Para la condición $Q_s \geq 10$, las curvas de la figura 20.17 se verán como se muestra en la figura 20.18. Observe que alcanzan su pico (aproximadamente) en la frecuencia de resonancia y tienen un aspecto similar.

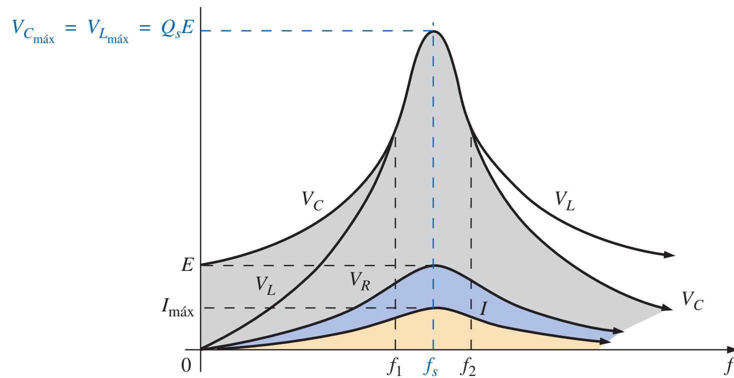


FIGURA 20.18
V_R, V_L, V_C e I para un circuito resonante en serie donde $Q_s \geq 10$.

En resumen,

1. V_C y V_L están en sus valores máximos en, o cerca de, la resonancia (dependiendo de Q_s).
2. A frecuencias muy bajas, V_C está muy cerca del voltaje de la fuente y V_L muy cerca de cero volts, mientras que a frecuencias muy altas, V_L se acerca al voltaje de la fuente y V_C a cero volts.
3. V_R e I alcanzan sus picos en la frecuencia de resonancia y tienen la misma forma.

20.7 EJEMPLOS (RESONANCIA EN SERIE)

EJEMPLO 20.1

a. Para el circuito resonante en serie de la figura 20.19, encuentre **I**, $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_C$ en resonancia.
b. ¿Cuál es la Q_s del circuito?
c. Si la frecuencia de resonancia es de 5000 Hz, encuentre el ancho de banda.
d. ¿Cuál es la potencia disipada en el circuito en las frecuencias de media potencia?

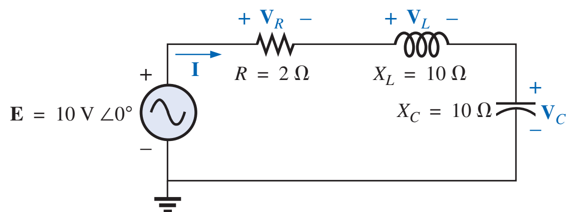


FIGURA 20.19
Ejemplo 20.1.

Soluciones:

a. $\mathbf{Z}_{T_s} = R = 2\ \Omega$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_{T_s}} = \frac{10\ \text{V}\ \angle 0°}{2\ \Omega\ \angle 0°} = \mathbf{5\ A\ \angle 0°}$$

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{E} = 10\ \text{V}\ \angle 0°$$

$$\mathbf{V}_L = (I\ \angle 0°)(X_L\ \angle 90°) = (5\ \text{A}\ \angle 0°)(10\ \Omega\ \angle 90°) = \mathbf{50\ V\ \angle 90°}$$

$$\mathbf{V}_C = (I\ \angle 0°)(X_C\ \angle -90°) = (5\ \text{A}\ \angle 0°)(10\ \Omega\ \angle -90°) = \mathbf{50\ V\ \angle -90°}$$

b. $$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{10\ \Omega}{2\ \Omega} = \mathbf{5}$$

c. $$BW = f_2 - f_1 = \frac{f_s}{Q_s} = \frac{5000\ \text{Hz}}{5} = \mathbf{1000\ Hz}$$

d. $$P_{\text{HPF}} = \frac{1}{2}P_{\text{máx}} = \frac{1}{2}I^2_{\text{máx}}R = \left(\frac{1}{2}\right)(5\ \text{A})^2(2\ \Omega) = \mathbf{25\ W}$$

EJEMPLO 20.2 El ancho de banda de un circuito resonante en serie es de 400 Hz.

a. Si la frecuencia de resonancia es de 4000 Hz, ¿cuál es el valor de Q_s?
b. Si $R = 10\ \Omega$, ¿cuál es el valor de X_L en resonancia?
c. Encuentre la inductancia L y la capacitancia C del circuito.

Soluciones:

a. $$BW = \frac{f_s}{Q_s} \quad \text{o} \quad Q_s = \frac{f_s}{BW} = \frac{4000\ \text{Hz}}{400\ \text{Hz}} = \mathbf{10}$$

b. $$Q_s = \frac{X_L}{R} \quad \text{o} \quad X_L = Q_sR = (10)(10\ \Omega) = \mathbf{100\ \Omega}$$

c. $$X_L = 2\pi f_sL \quad \text{o} \quad L = \frac{X_L}{2\pi f_s} = \frac{100\ \Omega}{2\pi(4000\ \text{Hz})} = \mathbf{3.98\ mH}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_sC} \quad \text{o} \quad C = \frac{1}{2\pi f_sX_C} = \frac{1}{2\pi(4000\ \text{Hz})(100\ \Omega)}$$

$$= \mathbf{0.398\ \mu F}$$

EJEMPLO 20.3 Un circuito *R-L-C* en serie tiene una frecuencia de resonancia en serie de 12,000 Hz.

a. Si $R = 5\ \Omega$, y si en resonancia X_L es de 300 Ω, encuentre el ancho de banda.
b. Encuentre las frecuencias de corte.

Soluciones:

a. $$Q_s = \frac{X_L}{R} = \frac{300\ \Omega}{5\ \Omega} = 60$$

$$BW = \frac{f_s}{Q_s} = \frac{12{,}000\ \text{Hz}}{60} = \mathbf{200\ Hz}$$

b. Como $Q_s \geq 10$, el ancho de banda está bisecado por f_s. Por tanto,

$$f_2 = f_s + \frac{BW}{2} = 12{,}000 \text{ Hz} + 100 \text{ Hz} = \mathbf{12{,}100\ Hz}$$

y $$f_1 = 12{,}000 \text{ Hz} - 100 \text{ Hz} = \mathbf{11{,}900\ Hz}$$

EJEMPLO 20.4

a. Determine el factor Q_s y el ancho de banda para la curva de respuesta de la figura 20.20.
b. Para $C = 101.5$ nF, determine L y R para el circuito resonante en serie.
c. Determine el voltaje aplicado.

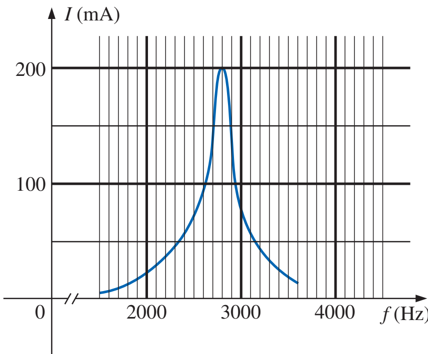


FIGURA 20.20
Ejemplo 20.4.

Soluciones:

a. La frecuencia de resonancia es de 2800 Hz. En 0.707 veces el valor pico,

$$BW = \mathbf{200\ Hz}$$

y $$Q_s = \frac{f_s}{BW} = \frac{2800 \text{ Hz}}{200 \text{ Hz}} = \mathbf{14}$$

b. $$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{o} \quad L = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 C}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2(2.8 \times 10^3 \text{ Hz})^2(101.5 \times 10^{-9} \text{ F})}$$

$$= \mathbf{31.832\ mH}$$

$$Q_s = \frac{X_L}{R} \quad \text{o} \quad R = \frac{X_L}{Q_s} = \frac{2\pi(2800 \text{ Hz})(31.832 \times 10^{-3} \text{ H})}{14}$$

$$= \mathbf{40\ \Omega}$$

c. $$I_{máx} = \frac{E}{R} \quad \text{o} \quad E = I_{máx}R$$

$$= (200 \text{ mA})(40\ \Omega) = \mathbf{8\ V}$$

EJEMPLO 20.5 Un circuito *R-L-C* en serie diseñado para resonar en $\omega_s = 10^5$ rad/s, tiene un ancho de banda de $0.15\omega_s$, y extrae 16 W de una fuente de 120 V en resonancia.

a. Determine el valor de R.
b. Encuentre el ancho de banda en hertz.
c. Encuentre los valores nominales de L y C.
d. Determine el factor Q_s del circuito.
e. Determine el ancho de banda fraccional.

Soluciones:

a. $$P = \frac{E^2}{R} \quad \text{y} \quad R = \frac{E^2}{P} = \frac{(120 \text{ V})^2}{16 \text{ W}} = \mathbf{900\ \Omega}$$

b. $$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{10^5 \text{ rad/s}}{2\pi} = 15{,}915.49 \text{ Hz}$$

$$BW = 0.15 f_s = 0.15(15{,}915.49 \text{ Hz}) = \mathbf{2387.32\ Hz}$$

c. Ecuación (20.20):

$$BW = \frac{R}{2\pi L} \quad \text{y} \quad L = \frac{R}{2\pi BW} = \frac{900\ \Omega}{2\pi(2387.32 \text{ Hz})} = \mathbf{60\ mH}$$

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 L} = \frac{1}{4\pi^2(15{,}915.49 \text{ Hz})^2(60 \times 10^{-3} \text{ H})}$$

$$= \mathbf{1.67\ nF}$$

d. $Q_s = \dfrac{X_L}{R} = \dfrac{2\pi f_s L}{R} = \dfrac{2\pi(15{,}915.49\ \text{Hz})(60\ \text{mH})}{900\ \Omega} = \mathbf{6.67}$

e. $\dfrac{f_2 - f_1}{f_s} = \dfrac{BW}{f_s} = \dfrac{1}{Q_s} = \dfrac{1}{6.67} = \mathbf{0.15}$

RESONANCIA EN PARALELO

20.8 CIRCUITO RESONANTE EN PARALELO

El formato básico del circuito resonante en serie es una combinación *R-L-C* en serie con una fuente de voltaje aplicado. El circuito resonante en paralelo tiene la configuración básica de la figura 20.21, una combinación *R-L-C* en paralelo con una fuente de corriente aplicada.

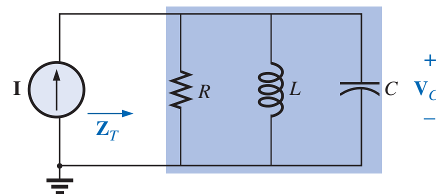


FIGURA 20.21
Red resonante en paralelo ideal.

Para el circuito en serie, la impedancia fue un mínimo en resonancia, produciendo una corriente significativa que resultó en un alto voltaje de salida para $\boldsymbol{V}_c$ y $\boldsymbol{V}_L$. En el circuito resonante en paralelo, la impedancia es relativamente alta en resonancia, produciendo un voltaje significativo para $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_L$ de acuerdo con la relación de la ley de Ohm ($\mathbf{V}_C = \mathbf{I}\mathbf{Z}_T$). Para la red de la figura 20.21, la resonancia ocurrirá cuando $X_L = X_C$, y la frecuencia de resonancia tendrá el mismo formato obtenido para la resonancia en serie.

Si el equivalente práctico de la figura 20.21 tuviese el formato de esta figura, el análisis sería tan directo y claro como el experimentado para la resonancia en serie. Sin embargo, en la práctica, la resistencia interna de la bobina debe colocarse en serie con el inductor, como se muestra en la figura 20.22. La resistencia R_l ya no puede ser incluida en una combinación simple en serie o en paralelo con la resistencia de la fuente y cualquier otra resistencia agregada para fines de diseño. Aunque R_l es, por lo general, relativamente pequeña en magnitud comparada con otros niveles de resistencia y reactancia de la red, tiene un impacto importante sobre la condición de resonancia en paralelo, como se demostrará en las secciones que siguen. En otras palabras, la red de la figura 20.21 es una situación ideal que sólo puede ser supuesta para condiciones específicas de redes.

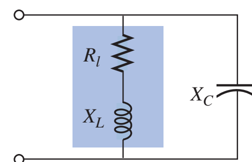


FIGURA 20.22
Red L-C en paralelo práctica.

Nuestro primer esfuerzo será encontrar una red en paralelo equivalente (en las terminales) para la rama *R-L* en serie de la figura 20.22 usando la técnica presentada en la sección 15.10. Es decir,

$$\mathbf{Z}_{R\text{-}L} = R_l + j\,X_L$$

e

$$\mathbf{Y}_{R\text{-}L} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{R\text{-}L}} = \frac{1}{R_l + j\,X_L} = \frac{R_l}{R_l^2 + X_L^2} - j\,\frac{X_L}{R_l^2 + X_L^2}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{R_l^2 + X_L^2}{R_l}} + \frac{1}{j\left(\dfrac{R_l^2 + X_L^2}{X_L}\right)} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\,X_{Lp}}$$

con:

$$R_p = \frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l} \qquad \textbf{(20.24)}$$

y

$$X_{L_p} = \frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L} \qquad \textbf{(20.25)}$$

como se muestra en la figura 20.23.

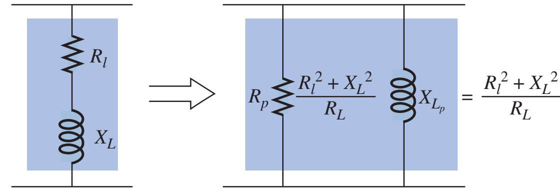


FIGURA 20.23
Red en paralelo equivalente para una combinación R-C en serie.

Al trazar de nuevo la red de la figura 20.22 con la equivalente de la figura 20.23 y una fuente práctica de corriente con resistencia interna R_s obtendremos la red de la figura 20.24.

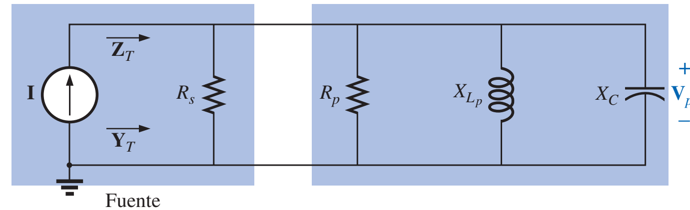


FIGURA 20.24
Sustitución de la red en paralelo equivalente por la combinación R-L en serie de la figura 20.22.

Si definimos la combinación en paralelo de R_s y R_p mediante la notación:

$$R = R_s \| R_p \qquad \textbf{(20.26)}$$

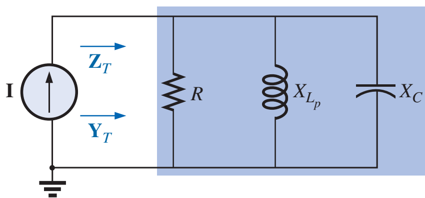


FIGURA 20.25
Sustitución de $R = R_s \| R_p$ para la red de la figura 20.24.

resultará la red de la figura 20.25. La cual tiene el mismo formato que la configuración ideal de la figura 20.21.

Estamos ahora en un punto donde podemos definir las condiciones de resonancia para la configuración resonante en paralelo práctica. Recuerde que para la resonancia en serie, la frecuencia de resonancia era la frecuencia donde la impedancia era un mínimo, la corriente un máximo, la impedancia de entrada puramente resistiva, y la red tenía un factor de potencia unitaria. Para redes en paralelo, como la resistencia R_p en nuestro modelo equivalente es dependiente de la frecuencia, la frecuencia en que se obtiene el máximo V_C no es la misma que la requerida por la característica de factor de potencia unitaria. Como ambas condiciones a menudo son usadas para definir el estado resonante, la frecuencia a la que ocurre cada una será designada con subíndices diferentes.

Factor de potencia unitaria, f_p

Para la red de la figura 20.25,

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\,X_{L_p}} + \frac{1}{-j\,X_C}$$

$$= \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{X_{L_p}}\right) + j\left(\frac{1}{X_C}\right)$$

e

$$\mathbf{Y}_T = \frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_{L_p}}\right) \tag{20.27}$$

Para el factor de potencia unitaria, la componente reactiva debe ser cero de acuerdo con lo definido por:

$$\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_{L_p}} = 0$$

Por tanto,

$$\frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_{L_p}}$$

y

$$X_{L_p} = X_C \tag{20.28}$$

Sustituyendo para X_{L_p} resulta:

$$\frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L} = X_C \tag{20.29}$$

La frecuencia de resonancia, f_p, ahora se puede determinar a partir de la ecuación (20.29) como sigue:

$$R_l^2 + X_L^2 = X_C\,X_L = \left(\frac{1}{\omega C}\right)\omega L = \frac{L}{C}$$

o bien:

$$X_L^2 = \frac{L}{C} - R_l^2$$

con:

$$2\pi f_p L = \sqrt{\frac{L}{C} - R_l^2}$$

y

$$f_p = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{L}{C} - R_l^2}$$

Al multiplicar las partes superior e inferior del factor que está dentro del radical por C/L se obtiene:

$$f_p = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{1 - R_l^2(C/L)}{C/L}} = \frac{1}{2\pi L\sqrt{C/L}}\sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}}$$

y

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}} \tag{20.30}$$

o bien:

$$f_p = f_s\sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}} \tag{20.31}$$

donde f_p es la frecuencia de resonancia de un circuito resonante en paralelo (para $F_p = 1$), y f_s es la frecuencia de resonancia determinada por $X_L = X_C$ para la resonancia en serie. Observe que a diferencia de un circuito resonante en

serie, la frecuencia de resonancia f_p es una función de la resistencia (en este caso R_l). Sin embargo, también advierta la ausencia de la resistencia de fuente R_s en las ecuaciones (20.30) y (20.31). Como el factor $\sqrt{1 - (R_l^2 C/L)}$ es menor que 1, f_p es menor que f_s. Vea también que cuando la magnitud de R_l tiende a cero, f_p se acerca rápidamente a f_s.

Impedancia máxima, f_m

En $f = f_p$ la impedancia de entrada de un circuito resonante en paralelo estará cerca de su valor máximo, pero no exactamente en su valor máximo debido a la dependencia de la frecuencia de R_p. La frecuencia a la que ocurrirá la impedancia máxima está definida por f_m y es ligeramente mayor que f_p, como se demostró en la figura 20.26. La frecuencia f_m se determina diferenciando (cálculo diferencial) la ecuación general para Z_T con respecto a la frecuencia y determinando entonces la frecuencia a la que la ecuación resultante es igual a cero. El álgebra es bastante extensa y laboriosa y no se incluirá aquí. Sin embargo, la ecuación resultante es la siguiente:

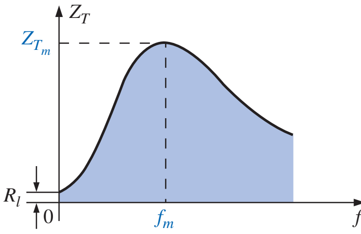


FIGURA 20.26
Z_T en función de la frecuencia para el circuito resonante en paralelo.

$$f_m = f_s\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{R_l^2 C}{L}\right)} \qquad \textbf{(20.32)}$$

Observe las semejanzas con la ecuación (20.31). Como el factor dentro de la raíz cuadrada de la ecuación (20.32) es siempre mayor que el factor similar de la ecuación (20.31), f_m está siempre más cerca a f_s y más que f_p. En general,

$$f_s > f_m > f_p \qquad \textbf{(20.33)}$$

Una vez determinada f_m, la red de la figura 20.25 puede usarse para determinar la magnitud y el ángulo de fase de la impedancia total en la condición de resonancia sustituyendo $f = f_m$ y efectuando los cálculos requeridos. Es decir,

$$Z_{T_m} = R \parallel X_{L_p} \parallel X_C \Big|_{f = f_m} \qquad \textbf{(20.34)}$$

20.9 CURVA DE SELECTIVIDAD PARA CIRCUITOS RESONANTES EN PARALELO

La curva Z_T en función de la frecuencia de la figura 20.26 revela claramente que un circuito resonante en paralelo exhibe una impedancia máxima en resonancia (f_m), a diferencia de un circuito resonante en serie que experimenta niveles de resistencia mínima en resonancia. Observe también que Z_T es aproximadamente R_l en $f = 0$ Hz ya que $Z_T = R_s \parallel R_l \cong R_l$.

Como la corriente I de la fuente de corriente es constante para cualquier valor de Z_T o de la frecuencia, el voltaje en el circuito en paralelo tendrá la misma forma que la impedancia total Z_T, como se muestra en la figura 20.27.

Para el circuito en paralelo, la curva de resonancia de interés es la del voltaje V_C en el capacitor. La razón para este interés en V_C se deriva de consideraciones electrónicas que a menudo colocan el capacitor a la entrada de otra etapa de una red.

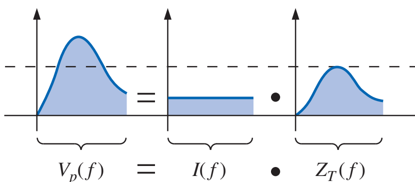


FIGURA 20.27
Definición de la forma de la curva $V_p(f)$.

Como el voltaje en elementos en paralelo es el mismo,

$$V_C = V_p = IZ_T \quad \textbf{(20.35)}$$

En consecuencia, el valor resonante de V_C está determinado por el valor de Z_{Tm} y la magnitud de la corriente de la fuente I.

El factor de calidad del circuito resonante en paralelo aún está determinado por la razón de la potencia reactiva a la potencia real. Es decir,

$$Q_p = \frac{V_p^2/X_{L_p}}{V_p^2/R}$$

donde $R = R_s \| R_p$ y V_p es el voltaje en las ramas paralelas.
El resultado es:

$$Q_p = \frac{R}{X_{L_p}} = \frac{R_s \| R_p}{X_{L_p}} \quad \textbf{(20.36a)}$$

o, como $X_{L_p} = X_C$ en resonancia,

$$Q_p = \frac{R_s \| R_p}{X_C} \quad \textbf{(20.36b)}$$

Para la fuente de corriente ideal ($R_s = \infty\ \Omega$) o cuando R_s es lo suficientemente grande comparada con R_p, podemos hacer la siguiente aproximación:

$$R = R_s \| R_p \cong R_p$$

y

$$Q_p = \frac{R_s \| R_p}{X_{L_p}} = \frac{R_p}{X_{L_p}} = \frac{(R_l^2 + X_L^2)/R_l}{(R_l^2 + X_L^2)/X_L}$$

de manera que:

$$Q_p = \frac{X_L}{R_l} = Q_l \qquad R_s \gg R_p \quad \textbf{(20.37)}$$

la cual es simplemente el factor de calidad Q_l de la bobina.

En general, el ancho de banda continúa relacionado con la frecuencia de resonancia y el factor de calidad mediante:

$$BW = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{Q_p} \quad \textbf{(20.38)}$$

Las frecuencias f_1 y f_2 pueden determinarse usando la red equivalente de la figura 20.25 y la condición de potencia unitaria en resonancia. Las frecuencias de media potencia están definidas por la condición de que el voltaje de salida es 0.707 veces el valor máximo. Sin embargo, para resonancia en paralelo con una fuente de corriente alimentando la red, la respuesta en frecuencia para la impedancia en el punto de alimentación es la misma que para el voltaje de salida. Esta semejanza permite definir cada frecuencia de corte como la frecuencia en la que la impedancia de entrada es 0.707 veces su valor máximo. Como el valor máximo es la resistencia equivalente R de la figura 20.25, las frecuencias de corte estarán asociadas con una impedancia igual a $0.707R$ o $(1/\sqrt{2})R$.

Establecer la impedancia de entrada para la red de la figura 20.25 igual a este valor da lugar a la siguiente relación:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\quad} = 0.707R$$

que puede ser escrita como:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R}\left[1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

o bien:

$$\frac{R}{1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

y finalmente:

$$\frac{1}{1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La única manera en que la igualdad puede ser satisfecha es cuando la magnitud del término imaginario (en la parte inferior izquierda) es igual a 1 porque la magnitud de $1 + j\,1$ debe ser igual a $\sqrt{2}$.

Por tanto, la siguiente relación define las frecuencias de corte para el sistema:

$$R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 1$$

Al sustituir $\omega = 2\pi f$ y reordenar los términos resultará la siguiente ecuación cuadrática:

$$f^2 - \frac{f}{2\pi RC} - \frac{1}{4\pi^2 LC} = 0$$

que tiene la forma: $af^2 + bf + c = 0$

con: $a = 1 \qquad b = -\frac{1}{2\pi RC} \quad \text{y} \quad c = -\frac{1}{4\pi^2 LC}$

Sustituyendo en la ecuación:

$$f = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

da lugar a lo siguiente luego de una serie de cuidadosas manipulaciones matemáticas:

$$f_1 = \frac{1}{4\pi C}\left[\frac{1}{R} - \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}}\right] \tag{20.39a}$$

$$f_2 = \frac{1}{4\pi C}\left[\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}}\right] \tag{20.39b}$$

Como el término en los corchetes de la ecuación (20.39a) siempre será negativo, la magnitud del resultado se asocia simplemente con f_1.

El efecto de R_l, L y C sobre la forma de la curva resonante en paralelo, como se muestra en la figura 20.28 para la impedancia de entrada, es muy similar a

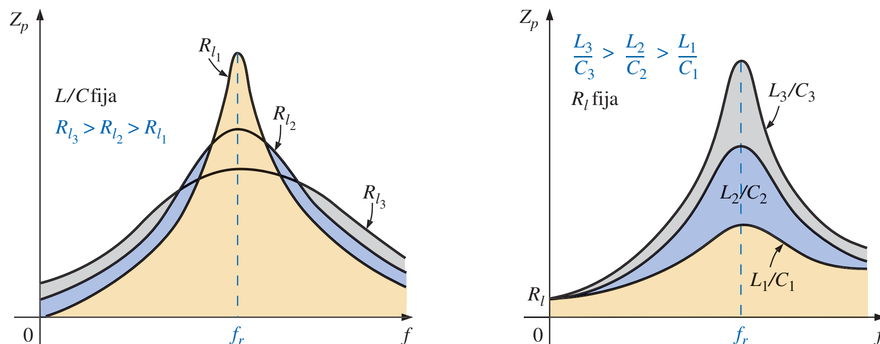


FIGURA 20.28
Efecto de R_l, L y C sobre la curva resonante en paralelo.

su efecto sobre la curva resonante en serie. Ya sea R_l cero o no, el circuito resonante en paralelo aparecerá a menudo en un esquema de red como se muestra en la figura 20.28.

En resonancia, un aumento en R_l o una disminución en la razón L/C resultará en una disminución en la impedancia resonante, con un aumento correspondiente en la corriente. El ancho de banda de las curvas resonantes está dado por la ecuación (20.38). Para una R_l creciente o una L que disminuye (o L/C para C constante), el ancho de banda crecerá como se muestra en la figura 20.28.

A bajas frecuencias, la reactancia capacitiva es bastante alta, y la reactancia inductiva es baja. Como los elementos están en paralelo, la impedancia total a bajas frecuencias será por ello inductiva. En altas frecuencias, lo inverso es cierto, y la red es capacitiva. En resonancia (f_p), la red aparece resistiva. Estos hechos conducen al diagrama de fase de la figura 20.29. Observe que este diagrama es el inverso del que aparece para el circuito resonante en serie, ello se debe a que a bajas frecuencias el circuito resonante en serie fue capacitivo y en altas frecuencias fue inductivo.

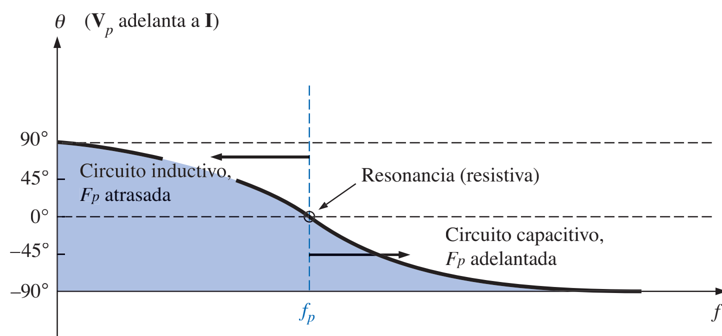


FIGURA 20.29
Gráfica de fase para el circuito resonante en paralelo.

20.10 EFECTO DE $Q_l \geq 10$

El contenido de la sección previa podría sugerir que el análisis de los circuitos resonantes en paralelo es considerablemente más complejo que el de los circuitos resonantes en serie. Por fortuna, sin embargo, éste no es el caso ya que, para la mayoría de los circuitos resonantes en paralelo, el factor de calidad de la bobina Q_l es lo suficientemente grande como para permitir algunas aproximaciones que simplifican el análisis requerido.

Reactancia inductiva, X_{L_p}

Si desarrollamos X_{L_p} como:

$$X_{L_p} = \frac{R_l^2 + X_L^2}{X_L} = \frac{R_l^2(X_L)}{X_L(X_L)} + X_L = \frac{X_L}{Q_l^2} + X_L$$

entonces, para $Q_l \geq 10$, $X_L/Q_l^2 \cong 0$ comparado con X_L, y

$$\boxed{X_{L_p} \cong X_L} \quad Q_l \geq 10 \tag{20.40}$$

y como la resonancia está definida por $X_{L_p} = X_C$, la condición resultante para la resonancia se reduce a:

$$\boxed{X_L \cong X_C} \quad Q_l \geq 10 \tag{20.41}$$

Frecuencia de resonancia, f_p (Factor de potencia unitaria)

Podemos reescribir el factor R_l^2C/L de la ecuación (20.31) como:

$$\frac{R_l^2C}{L} = \frac{1}{\dfrac{L}{R_l^2C}} = \frac{1}{\dfrac{(\omega)}{(\omega)}\dfrac{L}{R_l^2C}} = \frac{1}{\dfrac{\omega L}{R_l^2\omega C}} = \frac{1}{\dfrac{X_LX_C}{R_l^2}}$$

y sustituir la ecuación (20.41) ($X_L \cong X_C$):

$$\frac{1}{\dfrac{X_LX_C}{R_l^2}} = \frac{1}{\dfrac{X_L^2}{R_l^2}} = \frac{1}{Q_l^2}$$

La ecuación (20.31) se convierte entonces en:

$$\boxed{f_p = f_s\sqrt{1 - \frac{1}{Q_l^2}}} \quad Q_l \geq 10 \tag{20.42}$$

mostrando claramente que cuando Q_l aumenta, f_p se acerca cada vez más a f_s.

Para $Q_l \geq 10$,

$$1 - \frac{1}{Q_l^2} \cong 1$$

y

$$\boxed{f_p \cong f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \quad Q_l \geq 10 \tag{20.43}$$

Frecuencia de resonancia, f_m (V_C máximo)

Usando la equivalencia $R_l^2C/L = 1/Q_l^2$ derivada para la ecuación (20.42), la ecuación (20.32) tomará la siguiente forma:

$$\boxed{f_m \cong f_s\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q_l^2}\right)}} \quad Q_l \geq 10 \tag{20.44}$$

El hecho de que el término negativo bajo el radical será siempre menor que el que aparece en la ecuación para f_p revela que f_m siempre estará más cerca a f_s que f_p.

Para $Q_l \geq 10$ el término negativo se vuelve muy pequeño y puede dejar de ser considerado, quedando:

$$f_m \cong f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad Q_l \geq 10 \tag{20.45}$$

Por tanto, en total, para $Q_l \geq 10$,

$$f_p \cong f_m \cong f_s \quad Q_l \geq 10 \tag{20.46}$$

R_p

$$R_p = \frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l} = R_l + \frac{X_L^2}{R_l}\left(\frac{R_l}{R_l}\right) = R_l + \frac{X_L^2}{R_l^2}R_l$$
$$= R_l + Q_l^2 R_l = (1 + Q_l^2)R_l$$

Para $Q_l \geq 10$, $1 + Q_l^2 \cong Q_l^2$, y

$$R_p \cong Q_l^2 R_l \quad Q_l \geq 10 \tag{20.47}$$

Aplicar las aproximaciones recién derivadas a la red de la figura 20.24 resultará en la red equivalente aproximada para $Q_l \geq 10$ de la figura 20.30, que por cierto es más "clara" en apariencia general.

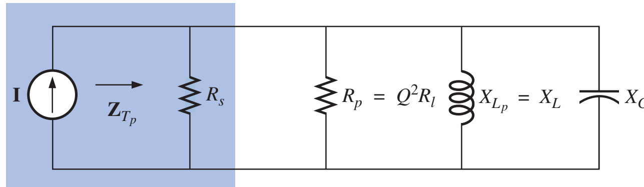


FIGURA 20.30
Circuito equivalente aproximado para $Q_l \geq 10$.

Sustituyendo $Q_l = \dfrac{X_L}{R_l}$ en la ecuación (20.47),

$$R_p \cong Q_l^2 R_l = \left(\frac{X_L}{R_l}\right)^2 R_l = \frac{X_L^2}{R_l} = \frac{X_L X_C}{R_l} = \frac{2\pi f L}{R_l(2\pi f C)}$$

y

$$R_p \cong \frac{L}{R_l C} \quad Q_l \geq 10 \tag{20.48}$$

Z_{T_p}

La impedancia total en resonancia está definida ahora por:

$$Z_{T_p} \cong R_s \parallel R_p = R_s \parallel Q_l^2 R_l \quad Q_l \geq 10 \tag{20.49}$$

Para una fuente de corriente ideal ($R_s = \infty\ \Omega$), o si $R_s \gg R_p$, la ecuación se reduce a:

$$Z_{T_p} \cong Q_l^2 R_l \qquad Q_l \geq 10,\ R_s \gg R_p \tag{20.50}$$

Q_p

El factor de calidad está definido ahora por:

$$Q_p = \frac{R}{X_{L_p}} \cong \frac{R_s \parallel Q_l^2 R_l}{X_L} \tag{20.51}$$

Por tanto, resulta bastante obvio que R_s no tiene impacto en el factor de calidad de la red ni en la forma de las curvas de resonancia.

Si se emplea una fuente de corriente ideal ($R_s = \infty\ \Omega$), o si $R_s \gg R_p$,

$$Q_p \cong \frac{R_s \parallel Q_l^2 R_l}{X_L} = \frac{Q_l^2 R_l}{X_L} = \frac{Q_l^2}{X_L/R_l} = \frac{Q_l^2}{Q_l}$$

y

$$Q_p \cong Q_l \qquad Q_l \geq 10,\ R_s \gg R_p \tag{20.52}$$

BW

El ancho de banda definido por f_p es:

$$BW = f_2 - f_1 = \frac{f_p}{Q_p} \tag{20.53}$$

Sustituyendo Q_p en la ecuación anterior y efectuando algunas manipulaciones algebraicas podemos mostrar que:

$$BW = f_2 - f_1 \cong \frac{1}{2\pi}\left[\frac{R_l}{L} + \frac{1}{R_s C}\right] \tag{20.54}$$

lo cual muestra claramente el impacto de R_s sobre el ancho de banda resultante. Por supuesto, si $R_s = \infty\ \Omega$ (fuente de corriente ideal):

$$BW = f_2 - f_1 \cong \frac{R_l}{2\pi L} \qquad R_s = \infty\ \Omega \tag{20.55}$$

I_L e I_C

Una parte de la figura 20.30 está reproducida en la figura 20.31, con I_T definida como se muestra.

En resonancia, Z_{T_p} es $Q_l^2 R_l$, tal como se indica. El voltaje en la red en paralelo es, por tanto,

$$V_C = V_L = V_R = I_T Z_{T_p} = I_T Q_l^2 R_l$$

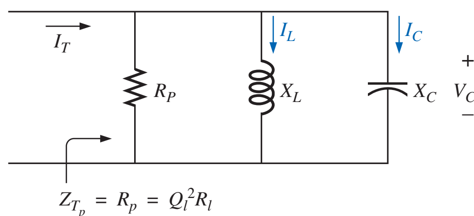


FIGURA 20.31
Establecimiento de la relación entre I_C e I_L y la corriente I_T.

La magnitud de la corriente I_C puede determinarse entonces mediante la ley de Ohm, como sigue:

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{I_T Q_l^2 R_l}{X_C}$$

Sustituyendo $X_C = X_L$ cuando $Q_l \geq 10$,

$$I_C = \frac{I_T Q_l^2 R_l}{X_L} = I_T \frac{Q_l^2}{\dfrac{X_L}{R_l}} = I_T \frac{Q_l^2}{Q_l}$$

e

$$I_C \cong Q_l I_T \qquad Q_l \geq 10 \qquad \textbf{(20.56)}$$

lo cual revela que la corriente capacitiva es Q_l veces la magnitud de la corriente que entra al circuito resonante en paralelo. Para un factor Q_l grande, la corriente I_C puede ser importante.

Una derivación similar resulta en:

$$I_L \cong Q_l I_T \qquad Q_l \geq 10 \qquad \textbf{(20.57)}$$

Conclusiones

Las ecuaciones resultantes de aplicar la condición $Q_l \geq 10$ desde luego son mucho más fáciles de emplear que las obtenidas antes. Se trata entonces de una condición que debe verificarse al inicio del análisis para determinar qué enfoque debe aplicarse. Aunque la condición $Q_l \geq 10$ se aplicó en todas las ecuaciones, muchas de éstas resultan aún buenas aproximaciones para $Q_l < 10$. Por ejemplo, si $Q_l = 5$, $X_{L_p} = (X_L/Q_l^2) + X_l = (X_L/25) + X_L = 1.04X_L$, lo cual está muy cercano a X_L. De hecho, para $Q_l = 2$, $X_{L_p} = (X_L/4) + X_L = 1.25X_L$, que no se parece a X_L, pero está sólo un 25% más allá de su valor. En general, el lector debe tener presente que las ecuaciones aproximadas pueden aplicarse con buena precisión cuando $Q_l < 10$. Sin embargo, a medida que el nivel de Q_l sea menor, menos válida será la aproximación. Por supuesto que las ecuaciones aproximadas son válidas para un intervalo de valores de $Q_l < 10$ si se desea una aproximación burda a la respuesta real en vez de una exacta hasta centésimos.

20.11 TABLA DE RESUMEN

La tabla de resumen 20.1 fue desarrollada en un esfuerzo por restringir cualquier tipo de confusión resultante de la introducción de f_p y f_m y del enfoque aproximado dependiente de Q_l. Aunque siempre es posible emplear las ecua-

TABLA 20.1
Circuito resonante en paralelo ($f_s = 1/(2\pi\sqrt{LC})$).

	Cualquier Q_l	**$Q_l \geq 10$**	**$Q_l \geq 10, R_s \gg Q_l^2 R_l$**
f_p	$f_s\sqrt{1 - \frac{R_l^2 C}{L}}$	f_s	f_s
f_m	$f_s\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left[\frac{R_l^2 C}{L}\right]}$	f_s	f_s
Z_{T_p}	$R_s \parallel R_p = R_s \parallel \left(\frac{R_l^2 + X_L^2}{R_l}\right)$	$R_s \parallel Q_l^2 R_l$	$Q_l^2 R_l$
Z_{T_m}	$R_s \parallel \mathbf{Z}_{R-L} \parallel \mathbf{Z}_C$	$R_s \parallel Q_l^2 R_l$	$Q_l^2 R_l$
Q_p	$\frac{Z_{T_p}}{X_{L_p}} = \frac{Z_{T_p}}{X_C}$	$\frac{Z_{T_p}}{X_L} = \frac{Z_{T_p}}{X_C}$	Q_l
BW	$\frac{f_p}{Q_p}$ o $\frac{f_m}{Q_p}$	$\frac{f_p}{Q_p} = \frac{f_s}{Q_p}$	$\frac{f_p}{Q_l} = \frac{f_s}{Q_l}$
I_L, I_C	Análisis de red	$I_L = I_C = Q_l I_T$	$I_L = I_C = Q_l I_T$

ciones para cualquier Q_l, cierta destreza en aplicar las ecuaciones aproximadas definidas por Q_l pagará dividendos a largo plazo.

En el futuro, el análisis de una red resonante en paralelo podría efectuarse como sigue:

1. Determine f_s para obtener alguna idea de la frecuencia de resonancia. Recuerde que en la mayoría de los casos, f_s, f_m y f_p estarán relativamente cerca una de otra.
2. Calcule un factor Q_l aproximado usando la f_s anterior, y compárelo con la condición $Q_l \geq 10$. Si la condición se satisface, el enfoque aproximado debe ser la trayectoria escogida a menos que se requiera un alto grado de precisión.
3. Si Q_l es menor que 10, puede aplicarse el enfoque aproximado, pero debe quedar claro que entre menor sea el nivel de Q_l, menos precisa será la solución. Sin embargo, considerando las variaciones típicas de los valores nominales para muchas de nuestras componentes y que rara vez se requiere una frecuencia de resonancia con décimas de aproximación, el uso del enfoque aproximado es válido en la mayoría de las situaciones prácticas.

20.12 EJEMPLOS (RESONANCIA EN PARALELO)

EJEMPLO 20.6 Dada la red en paralelo de la figura 20.32 compuesta por elementos "ideales":

a. Determine la frecuencia de resonancia f_p.
b. Encuentre la impedancia total en resonancia.
c. Calcule el factor de calidad, el ancho de banda, y las frecuencias de corte f_1 y f_2 del sistema.

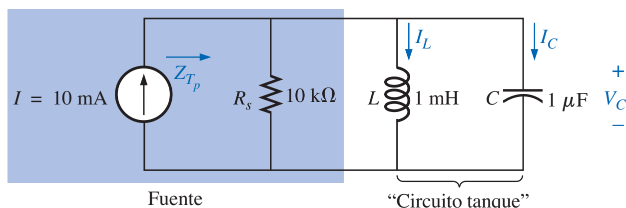


FIGURA 20.32
Ejemplo 20.6.

d. Encuentre el voltaje V_C en resonancia.
e. Determine las corrientes I_L e I_C en resonancia.

Soluciones:

a. El hecho de que R_l es de cero ohms resulta en una Q_l (= X_L/R_l) muy alta, permitiendo el uso de la siguiente ecuación para f_p:

$$f_p = f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1\text{ mH})(1\ \mu\text{F})}}$$
$$= \mathbf{5.03\ kHz}$$

b. Para los elementos reactivos en paralelo:

$$\mathbf{Z}_L \parallel \mathbf{Z}_C = \frac{(X_L \angle 90°)(X_C \angle -90°)}{+j(X_L - X_C)}$$

pero $X_L = X_C$ en resonancia, resultando en un cero en el denominador de la ecuación y una impedancia muy alta que puede ser aproximada por un circuito abierto. Por tanto,

$$Z_{T_p} = R_s \parallel \mathbf{Z}_L \parallel \mathbf{Z}_C = R_s = \mathbf{10\ k\Omega}$$

c. $Q_p = \dfrac{R_s}{X_{L_p}} = \dfrac{R_s}{2\pi f_p L} = \dfrac{10\text{ k}\Omega}{2\pi(5.03\text{ kHz})(1\text{ mH})} = \mathbf{316.41}$

$$BW = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{5.03\text{ kHz}}{316.41} = \mathbf{15.90\ Hz}$$

Ecuación (20.39a):

$$f_1 = \frac{1}{4\pi C}\left[\frac{1}{R} - \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}}\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi(1\ \mu\text{F})}\left[\frac{1}{10\text{ k}\Omega} - \sqrt{\frac{1}{(10\text{ k}\Omega)^2} + \frac{4(1\ \mu\text{F})}{1\text{ mH}}}\right]$$
$$= \mathbf{5.025\ kHz}$$

Ecuación (20.39b):

$$f_2 = \frac{1}{4\pi C}\left[\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}}\right]$$
$$= \mathbf{5.041\ kHz}$$

d. $V_C = IZ_{T_p} = (10\text{ mA})(10\text{ k}\Omega) = \mathbf{100\ V}$

e. $I_L = \dfrac{V_L}{X_L} = \dfrac{V_C}{2\pi f_p L} = \dfrac{100\text{ V}}{2\pi(5.03\text{ kHz})(1\text{ mH})} = \dfrac{100\text{ V}}{31.6\ \Omega} = \mathbf{3.16\ A}$

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{100\text{ V}}{31.6\ \Omega} = \mathbf{3.16\ A}\ (= Q_p I)$$

El ejemplo 20.6 muestra el efecto de R_s en los cálculos asociados con la resonancia en paralelo. La impedancia de la fuente es el único factor que limita la impedancia de entrada y el nivel de V_C.

EJEMPLO 20.7 Para el circuito resonante en paralelo de la figura 20.33 con $R_s = \infty\ \Omega$:

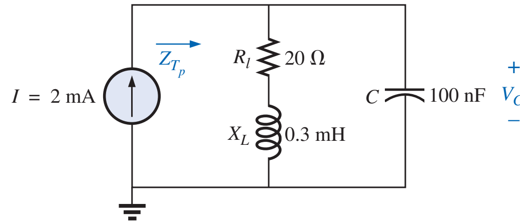


FIGURA 20.33
Ejemplo 20.7.

a. Determine f_s, f_m y f_p y compare sus niveles.
b. Calcule la impedancia máxima y la magnitud del voltaje V_C en f_m.
c. Determine el factor de calidad Q_p.
d. Calcule el ancho de banda.
e. Compare los resultados anteriores con los obtenidos usando las ecuaciones asociadas con $Q_l \geq 10$.

Soluciones:

a. $$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(0.3\text{ mH})(100\text{ nF})}} = \mathbf{29.06\ kHz}$$

$$f_m = f_s\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left[\frac{R_l^2C}{L}\right]}$$

$$= (29.06\text{ kHz})\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left[\frac{(20\ \Omega)^2(100\text{ nF})}{0.3\text{ mH}}\right]}$$

$$= \mathbf{28.58\ kHz}$$

$$f_p = f_s\sqrt{1 - \frac{R_l^2C}{L}} = (29.06\text{ kHz})\sqrt{1 - \left[\frac{(20\ \Omega)^2(100\text{ nF})}{0.3\text{ mH}}\right]}$$

$$= \mathbf{27.06\ kHz}$$

Ambos f_m y f_p son menores que f_s, como se predijo. Además, f_m está más cercana a f_s que f_p, como se esperaba. f_m es aproximadamente 0.5 kHz menor que f_s, mientras que f_p es menor en alrededor de unos 2 kHz. Las diferencias entre f_s, f_m y f_p sugieren una red con factor de calidad Q bajo.

b. $\mathbf{Z}_{T_m} = (R_l + j\,X_L) \parallel -j\,X_C$ en $f = f_m$

$$X_L = 2\pi f_m L = 2\pi(28.58\text{ kHz})(0.3\text{ mH}) = 53.87\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_m C} = \frac{1}{2\pi(28.58\text{ kHz})(100\text{ nF})} = 55.69\ \Omega$$

$$R_l + j\,X_L = 20\ \Omega + j\,53.87\ \Omega = 57.46\ \Omega\ \angle 69.63^\circ$$

$$\mathbf{Z}_{T_m} = \frac{(57.46\ \Omega\ \angle 69.63^\circ)(55.69\ \Omega\ \angle -90^\circ)}{20\ \Omega + j\,53.87\ \Omega - j\,55.69\ \Omega}$$

$$= \mathbf{159.34\ \Omega\ \angle -15.17^\circ}$$

$$V_{C_{\text{máx}}} = IZ_{T_m} = (2\text{ mA})(159.34\ \Omega) = \mathbf{318.68\ mV}$$

c. $R_s = \infty\ \Omega$; por tanto,

$$Q_p = \frac{R_s \| R_p}{X_{L_p}} = \frac{R_p}{X_{L_p}} = Q_l = \frac{X_L}{R_l}$$

$$= \frac{2\pi(27.06\text{ kHz})(0.3\text{ mH})}{20\ \Omega} = \frac{51\ \Omega}{20\ \Omega} = \mathbf{2.55}$$

El bajo factor Q confirma la conclusión del inciso (a). Las diferencias entre f_s, f_m y f_p serán considerablemente menores en redes con Q alto.

d. $BW = \dfrac{f_p}{Q_p} = \dfrac{27.06\text{ kHz}}{2.55} = \mathbf{10.61\ kHz}$

e. Para $Q_l \geq 10$, $f_m = f_p = f_s = \mathbf{29.06\ kHz}$

$$Q_p = Q_l = \frac{2\pi f_s L}{R_l} = \frac{2\pi(29.06\text{ kHz})(0.3\text{ mH})}{20\ \Omega} = \mathbf{2.74}$$

(contra los 2.55 anteriores)

$$Z_{T_p} = Q_l^2 R_l = (2.74)^2 \cdot 20\ \Omega = \mathbf{150.15\ \Omega \angle 0°}$$

(contra los 159.34 Ω ∠−15.17° anteriores)

$$V_{C_{\text{máx}}} = IZ_{T_p} = (2\text{ mA})(150.15\ \Omega) = \mathbf{300.3\ mV}$$

(contra los 318.68 mV anteriores)

$$BW = \frac{f_p}{Q_p} = \frac{29.06\text{ kHz}}{2.74} = \mathbf{10.61\ kHz}$$

(contra los 10.61 kHz anteriores)

Los resultados revelan que, incluso para un sistema de relativamente bajo factor Q, las soluciones siguen siendo aproximadas en comparación con las obtenidas usando las ecuaciones completas. La diferencia principal está entre f_s y f_p (aproximadamente 7%), con una diferencia entre f_s y f_m de menos de 2%. En el futuro, el uso de f_s para determinar Q_l proporcionará una medida de Q_l que podrá emplearse para determinar si el enfoque aproximado es apropiado.

EJEMPLO 20.8 Para la red de la figura 20.34 dada f_p:

a. Determine Q_l.
b. Determine R_p.
c. Calcule Z_{T_p}.
d. Encuentre C en resonancia.
e. Encuentre Q_p.
f. Calcule el BW y las frecuencias de corte.

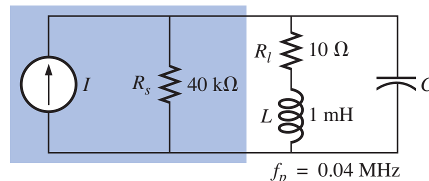


FIGURA 20.34
Ejemplo 20.8.

Soluciones:

a. $Q_l = \dfrac{X_L}{R_l} = \dfrac{2\pi f_p L}{R_l} = \dfrac{2\pi(0.04\text{ MHz})(1\text{ mH})}{10\ \Omega} = \mathbf{25.12}$

b. $Q_l \geq 10$. Por tanto,

$$R_p \cong Q_l^2 R_l = (25.12)^2(10\ \Omega) = \mathbf{6.31\ k\Omega}$$

c. $Z_{T_p} = R_s \| R_p = 40\text{ k}\Omega \| 6.31\text{ k}\Omega = \mathbf{5.45\ k\Omega}$

d. $Q_l \geq 10$. Por tanto,

$$f_p \cong \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

y $C = \dfrac{1}{4\pi^2 f^2 L} = \dfrac{1}{4\pi^2(0.04\text{ MHz})^2(1\text{ mH})} = \mathbf{15.83\ nF}$

e. $Q_l \geq 10$. Por tanto,

$$Q_p = \frac{Z_{T_p}}{X_L} = \frac{R_s \parallel Q_l^2 R_l}{2\pi f_p L} = \frac{5.45\text{ k}\Omega}{2\pi(0.04\text{ MHz})(1\text{ mH})} = \mathbf{21.68}$$

f. $BW = \dfrac{f_p}{Q_p} = \dfrac{0.04\text{ MHz}}{21.68} = \mathbf{1.85\ kHz}$

$$f_1 = \frac{1}{4\pi C}\left[\frac{1}{R} - \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi(15.9\text{ mF})}\left[\frac{1}{5.45\text{ k}\Omega} - \sqrt{\frac{1}{(5.45\text{ k}\Omega)^2} + \frac{4(15.9\text{ mF})}{1\text{ mH}}}\right]$$

$$= 5.005 \times 10^6[183.486 \times 10^{-6} - 7.977 \times 10^{-3}]$$

$$= 5.005 \times 10^6[-7.794 \times 10^{-3}]$$

$$= \mathbf{39.009\ kHz} \qquad \text{(ignorando el signo negativo)}$$

$$f_2 = \frac{1}{4\pi C}\left[\frac{1}{R} + \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L}}\right]$$

$$= 5.005 \times 10^6[183.486 \times 10^{-6} + 7.977 \times 10^{-3}]$$

$$= 5.005 \times 10^6[8.160 \times 10^{-3}]$$

$$= \mathbf{40.843\ kHz}$$

Observe que $f_2 - f_1 = 40.843\text{ kHz} - 39.009\text{ kHz} = 1.834\text{ kHz}$, confirma nuestra solución para el ancho de banda anterior. También advierta que el ancho de banda no es simétrico con respecto a la frecuencia de resonancia, con 991 Hz debajo y 843 Hz arriba.

EJEMPLO 20.9 La red equivalente para la configuración de transistores de la figura 20.35 está dada en la figura 20.36.

a. Encuentre f_p.
b. Determine Q_p.
c. Calcule el BW.
d. Determine V_p en resonancia.
e. Trace la curva de V_C en función de la frecuencia.

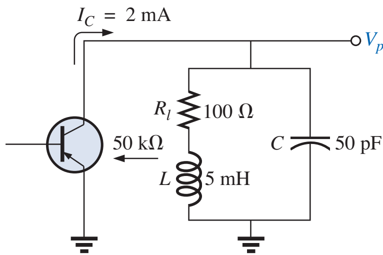


FIGURA 20.35
Ejemplo 20.9.

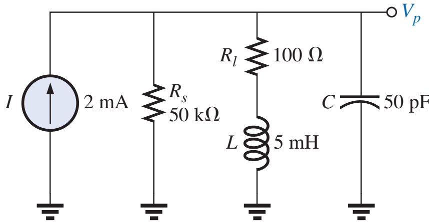


FIGURA 20.36
Red equivalente para la configuración de transistor de la figura 20.35.

Soluciones:

a. $f_s = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(5\text{ mH})(50\text{ pF})}} = 318.31\text{ kHz}$

$X_L = 2\pi f_s L = 2\pi(318.31\text{ kHz})(5\text{ mH}) = 10\text{ k}\Omega$

$Q_l = \dfrac{X_L}{R_l} = \dfrac{10\text{ k}\Omega}{100\ \Omega} = 100 > 10$

Por tanto, $f_p = f_s =$ **318.31 kHz**. Utilizando la ecuación (20.31) resultaría en $\cong$ 318.5 kHz.

b. $Q_p = \dfrac{R_s \parallel R_p}{X_L}$

$R_p = Q_l^2 R_l = (100)^2 100\ \Omega = 1\text{ M}\Omega$

$Q_p = \dfrac{50\text{ k}\Omega \parallel 1\text{ M}\Omega}{10\text{ k}\Omega} = \dfrac{47.62\text{ k}\Omega}{10\text{ k}\Omega} = \mathbf{4.76}$

Observe la caída en Q desde $Q_l = 100$ hasta $Q_p = 4.76$ debido a R_s.

c. $BW = \dfrac{f_p}{Q_p} = \dfrac{318.31\text{ kHz}}{4.76} = \mathbf{66.87\ kHz}$

Por otra parte,

$$BW = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{R_l}{L} + \frac{1}{R_s C}\right) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{100\ \Omega}{5\ \text{mH}} + \frac{1}{(50\ \text{k}\Omega)(50\ \text{pF})}\right]$$
$$= \mathbf{66.85\ kHz}$$

lo que se compara muy favorablemente con la solución anterior.

d. $V_p = IZ_{T_p} = (2\ \text{mA})(R_s \parallel R_p) = (2\ \text{mA})(47.62\ \text{k}\Omega) = \mathbf{95.24\ V}$
e. Vea la figura 20.37.

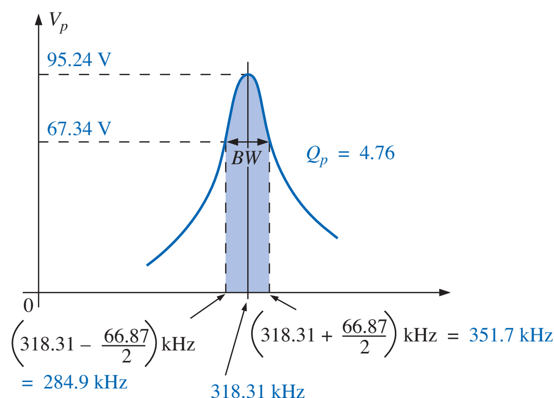


FIGURA 20.37
Curva de resonancia para la red de la figura 20.36.

EJEMPLO 20.10 Resuelva el ejemplo 20.9, pero ignore los efectos de R_s, y compare los resultados.

Soluciones:

a. f_p es la misma, **318.31 kHz**.
b. Para $R_s = \infty\ \Omega$,

$$Q_p = Q_l = \mathbf{100} \qquad \text{(contra los 4.76)}$$

c. $BW = \dfrac{f_p}{Q_p} = \dfrac{318.31\ \text{kHz}}{100} = \mathbf{3.183\ kHz}$ (contra los 66.87 kHz)

d. $Z_{T_p} = R_p = 1\ \text{M}\Omega$ (contra 47.62 kΩ)
$V_p = IZ_{T_p} = (2\ \text{mA})(1\ \text{M}\Omega) = \mathbf{2000\ V}$ (contra los 95.24 V)

Los resultados obtenidos revelan claramente que la resistencia de la fuente puede tener un impacto significativo sobre las características de respuesta de un circuito resonante en paralelo.

EJEMPLO 20.11 Diseñe un circuito resonante en paralelo que tenga la curva de respuesta de la figura 20.38 empleando un inductor de 1 mH, 10 Ω y una fuente de corriente con resistencia interna de 40 kΩ.

Solución:

$$BW = \frac{f_p}{Q_p}$$

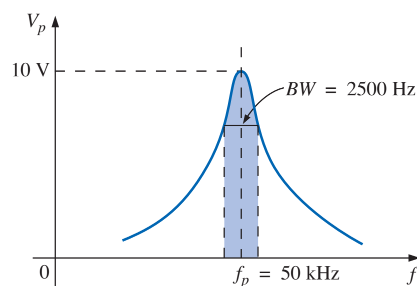


FIGURA 20.38
Ejemplo 20.11.

Por tanto,

$$Q_p = \frac{f_p}{BW} = \frac{50{,}000\text{ Hz}}{2500\text{ Hz}} = \mathbf{20}$$

$$X_L = 2\pi f_p L = 2\pi(50\text{ kHz})(1\text{ mH}) = 314\ \Omega$$

y $$Q_l = \frac{X_L}{R_l} = \frac{314\ \Omega}{10\ \Omega} = \mathbf{31.4}$$

$$R_p = Q_l^2 R = (31.4)^2(10\ \Omega) = \mathbf{9859.6\ \Omega}$$

$$Q_p = \frac{R}{X_L} = \frac{R_s \parallel 9859.6\ \Omega}{314\ \Omega} = 20 \qquad \text{(de lo anterior)}$$

de modo que: $$\frac{(R_s)(9859.6)}{R_s + 9859.6} = 6280$$

resultando en: $$R_s = 17.298\text{ k}\Omega$$

Sin embargo, la resistencia de la fuente fue dada igual a 40 kΩ. Por tanto, debemos agregar un resistor en paralelo (R') que reduzca los 40 kΩ a aproximadamente 17.298 kΩ; es decir,

$$\frac{(40\text{ k}\Omega)(R')}{40\text{ k}\Omega + R'} = 17.298\text{ k}\Omega$$

Resolviendo para R':

$$R' = \mathbf{30.481\text{ k}\Omega}$$

El valor comercial más cercano es de **30 kΩ.** En resonancia, $X_L = X_C$, y:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_p C}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f_p X_C} = \frac{1}{2\pi(50\text{ kHz})(314\ \Omega)}$$

y $$C \cong \mathbf{0.01\ \mu F} \qquad \text{(comercialmente disponible)}$$

$$Z_{T_p} = R_s \parallel Q_l^2 R_l$$
$$= 17.298\text{ k}\Omega \parallel 9859.6\ \Omega$$
$$= 6.28\text{ k}\Omega$$

con: $$V_p = IZ_{T_p}$$

e $$I = \frac{V_p}{Z_{T_p}} = \frac{10\text{ V}}{6.28\text{ k}\Omega} \cong \mathbf{1.6\text{ mA}}$$

La red aparece en la figura 20.39.

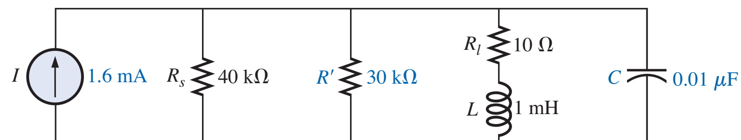


FIGURA 20.39
Red diseñada para satisfacer los criterios de la figura 20.38.

20.13 APLICACIONES

Resonancia parásita

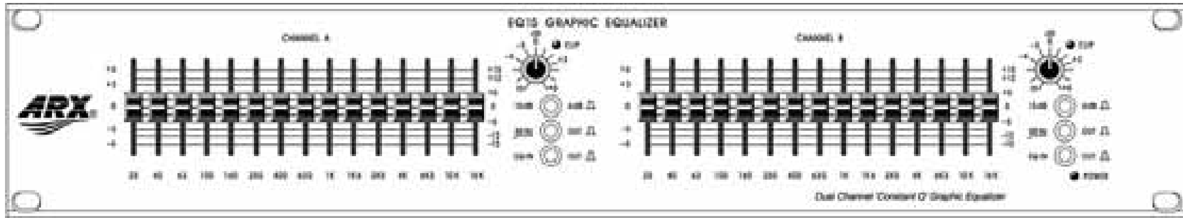
La resonancia parásita, igual que la capacitancia e inductancia parásitas, así como los niveles inesperados de resistencia, pueden ocurrir en situaciones inesperadas y afectar severamente la operación de un sistema. Todo lo que se requiere para producir resonancia parásita es, por ejemplo, un nivel de capacitancia introducida por alambres paralelos o conductores de cobre sobre un tablero de circuito impreso, o simplemente dos superficies conductivas paralelas con carga residual y niveles de inductancia asociada con cualquier conductor o componentes como cabezas de grabadoras de cinta, transformadores, etc., que proporcionan los elementos necesarios para producir un efecto de resonancia. De hecho, este efecto de resonancia es muy común en las grabadoras de cinta. La cabeza de una grabadora-reproductora de audio es una bobina que puede actuar como un inductor y una antena. Combine este factor con la capacitancia parásita y la capacitancia real en la red para formar la red sintonizante, y la grabadora de cinta con la adición de un diodo semiconductor puede responder como un radio de AM. Al graficar la respuesta en frecuencia de cualquier transformador, el lector encontrará normalmente una región donde la respuesta tiene un efecto pico (vea más adelante la Figura 25.23). Este efecto pico se debe solamente a la inductancia de las bobinas del transformador y a la capacitancia parásita entre los alambres.

En general, cuando se presenta un pico inesperado en la respuesta en frecuencia de un elemento o sistema, es normalmente a causa de una condición de resonancia. Si la respuesta tiene un efecto nocivo en la operación integral del sistema, puede ser necesario un rediseño o adicionar un filtro que bloquee las frecuencias que conducen a la condición de resonancia. Por supuesto, cuando se agregue un filtro compuesto de inductores y/o capacitores, deberá tenerse cuidado de no agregar otra condición inesperada de resonancia. Se trata de un problema que puede considerarse apropiadamente sólo al construir el sistema y exponerlo a la gama entera de pruebas.

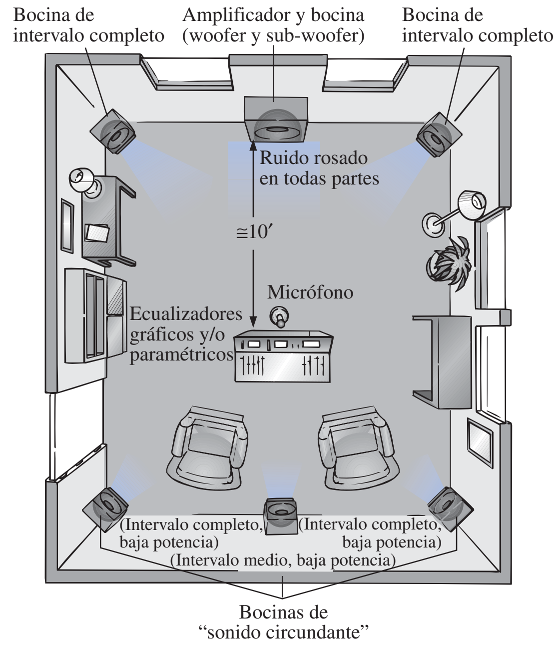
Ecualizadores gráficos y paramétricos

Todos hemos notado ocasionalmente que la música que oímos en una sala de conciertos no suena igual cuando la reproducimos en casa usando equipo electrónico. Incluso después de revisar las especificaciones de las bocinas y los amplificadores y encontrar que ambos están en estado casi perfecto (y son los más caros que pudimos obtener), aún así el sonido no es el que debería ser. En general, estamos experimentando los efectos de las características locales ambientales sobre las ondas sonoras. Algunos problemas típicos son las paredes y los pisos duros (piedra, cemento) que harán sonar las frecuencias altas más intensamente. Por otra parte, las cortinas y alfombras absorben las frecuencias altas. La forma de la habitación y la colocación de las bocinas y muebles también afectan el sonido que llega a nuestros oídos. Otro aspecto es el eco o reflexión del sonido que ocurre en la habitación. Las salas de conciertos se diseñan con mucho cuidado con techos abovedados y paredes curvas para permitir cierto nivel de eco. Incluso las características de temperatura y humedad en el aire circundante afectan la calidad del sonido. En la mayor parte de los casos es imposible rediseñar un área auditiva como para equiparar la de una sala de conciertos, pero con el uso apropiado de sistemas electrónicos el lector puede desarrollar una respuesta con todas las propiedades que es posible esperar de un espacio auditivo casero.

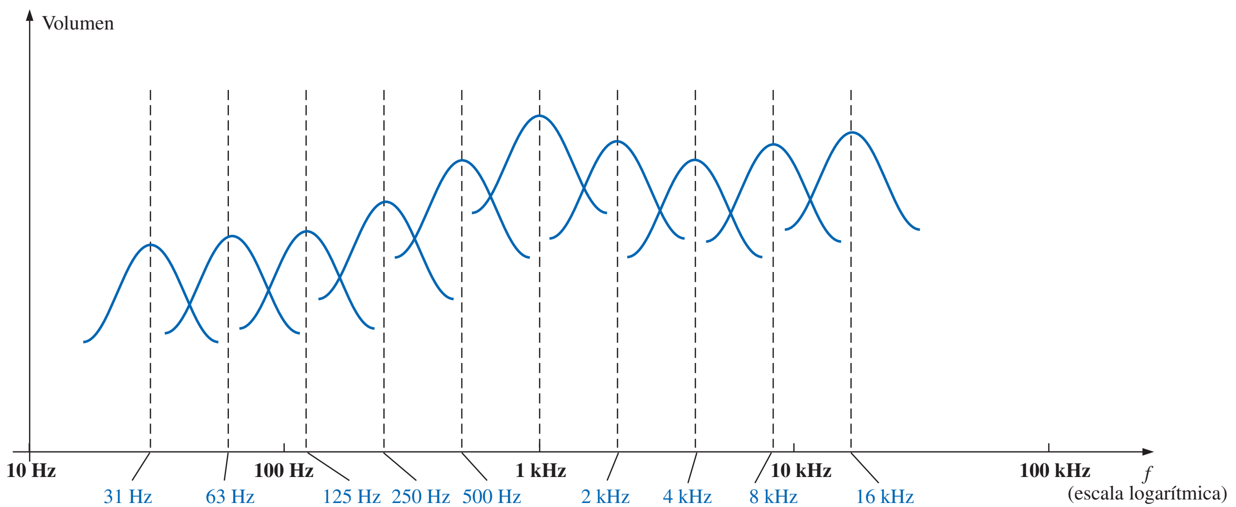
Para obtener un sistema de calidad pueden seguirse dos pasos: *caracterización y demora digital (sonido circundante)* y *selección y colocación de bocinas*



(a)



(b)



(c)

FIGURA 20.40

(a) Ecualizador gráfico de "Q constante" de 15 bandas y canal dual (Cortesía de ARX Systems.); (b) arreglo; (c) respuesta de frecuencia.

y amplificadores apropiados. La caracterización es un proceso por medio del cual se lleva a cabo una revisión completa de la absorción de sonido en una habitación y se determina la respuesta en frecuencia. Entonces se utiliza un *ecualizador gráfico* como el mostrado en la figura 20.40(a) para volver "plana" la respuesta para todo el intervalo de frecuencias. En otras palabras, la habitación se hace aparecer como si todas las frecuencias recibiesen igual amplificación en el área de audición. Por ejemplo, si la habitación está totalmente alfombrada y encortinada, habrá mucha absorción de frecuencias altas, requiriéndose que éstas tengan amplificación adicional para equiparar los niveles de sonido de las frecuencias bajas e intermedias. Para *caracterizar* la habitación típica de forma rectangular, puede usarse el arreglo mostrado en la figura 20.40(b). El amplificador y las bocinas se colocan al centro de una pared, con bocinas adicionales en las esquinas de la habitación de frente al área de recepción. Entonces se instala un micrófono en el área de recepción aproximadamente a 10 pies del amplificador y centrado entre las otras dos bocinas. Desde un analizador de espectro (a menudo es parte integral del ecualizador gráfico) se envía un *ruido rosado* al amplificador y las bocinas. El ruido rosado es en realidad una señal de onda cuadrada cuya amplitud y frecuencia se pueden controlar. Se prefiere una señal de onda cuadrada porque una descomposición de Fourier de una señal cuadrada dará un intervalo de frecuencias amplio para que el sistema las revise. En el capítulo 24 se verá que una onda cuadrada puede construirse a partir de una serie infinita de ondas seno de diferentes frecuencias. Una vez establecido el volumen apropiado de ruido rosado, puede usarse el analizador de espectro para fijar la respuesta de cada banda deslizable y establecer la respuesta plana deseada. Las frecuencias centrales para las bandas del ecualizador gráfico de la figura 20.40(a) están dadas en la figura 20.40 (c), junto con la respuesta en frecuencia para varias frecuencias adyacentes espaciadas uniformemente sobre una escala logarítmica. Observe que cada frecuencia central es la frecuencia de resonancia para esa banda. El diseño es tal que cada banda puede controlar el volumen asociado con esa frecuencia, pero el ancho de banda y la respuesta en frecuencia permanecen casi constantes. Un buen analizador de espectro establecerá cada banda contra una escala de decibeles (dB) (los decibeles se estudiarán con todo detalle en el capítulo 23). La escala de decibeles sólo establece una gama para comparar los niveles auditivos. A un nivel de audición normal, por lo general es necesario un cambio de más o menos 3 dB para que el cambio de sonido sea detectable por el oído humano. A niveles de sonido bajos, se puede detectar un cambio de 2 dB, pero a niveles altos es probable que sea necesario un cambio de 4 dB para que éste se perciba. Éstas no son leyes estrictas sino simplemente reglas empíricas empleadas con frecuencia por técnicos de la ciencia acústica. Para la habitación considerada, la mezcla de valores fijos puede ser como se muestra en la figura 20.40(c). Una vez establecidas, los controles ya no se tocan. Se estableció una respuesta plana para la habitación para el intervalo auditivo completo de manera que todo sonido o tipo de música quedan cubiertos.

Un *ecualizador paramétrico* como el mostrado en la figura 20.41 es similar a un *ecualizador gráfico*, pero en vez de controles separados para los intervalos individuales de frecuencia usa tres controles básicos sobre tres o cuatro intervalos más amplios de frecuencia. Los controles típicos —de *ganancia*, *frecuen-*

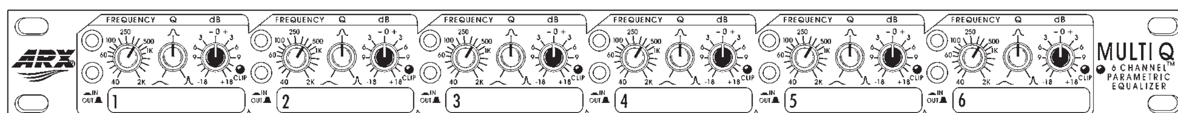
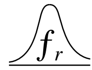


FIGURA 20.41
Ecualizador paramétrico de seis canales. (Cortesía de ARX Systems.)



cia central y *ancho de banda*—, están disponibles para los intervalos de *frecuencia baja, media* y *alta*. Cada control es fundamentalmente independiente; es decir, puede efectuarse un cambio en uno sin afectar los otros dos. En el ecualizador paramétrico de la figura 20.41, cada uno de los seis canales tiene un interruptor de control de frecuencia que, junto con el interruptor $f \times 10$, dará un intervalo de frecuencias centrales desde 40 Hz hasta 16 kHz. Tiene también controles para *BW* ("*Q*") desde 3 octavas hasta $\frac{1}{20}$ de octava, y ± 18 dB de corte y refuerzo. Hay quienes llaman al ecualizador paramétrico *control sofisticado de tono*, y lo usan para enriquecer el sonido después que la respuesta plana ha sido establecida por el ecualizador gráfico. El efecto logrado con una perilla estándar de control de tono es ocasionalmente llamado "boring" al compararlo con el efecto establecido por un buen ecualizador paramétrico, principalmente porque el primero puede controlar sólo el volumen y no el ancho de banda o la frecuencia central. En general, los ecualizadores gráficos establecen la importante *respuesta plana* mientras que los paramétricos se ajustan para proporcionar el *tipo* y la *calidad* del sonido que le gusta escuchar a las personas. El usuario puede "cortar" las frecuencias que le molestan y eliminar el "hiss" de la cinta y la "agudeza" asociada a menudo con los discos compactos.

Una característica de las salas de conciertos muy difícil de imitar es la plenitud del sonido que proporcionan. En la sala de conciertos se tiene el sonido directo de los instrumentos y la reflexión gracias a las paredes y los techos abovedados que han sido cuidadosa y expresamente diseñados para este fin. Cualquier reflexión implica una demora de las ondas sonoras en alcanzar el oído, creando el efecto de plenitud. Por medio de demoras digitales, las bocinas se colocan atrás y al lado de un oyente para establecer el efecto sonoro circundante. En general, las bocinas de demora son muy inferiores en potencia, con bocinas de 20 W usadas típicamente en un sistema de 100 W. La respuesta de eco es una razón por la que algunas personas tocan a menudo sus equipos estereofónicos más alto de lo necesario para una audición normal. Con volúmenes de sonido elevados se crea más eco y reflexión de las paredes, logrando así algo de la plenitud disfrutada en las salas de conciertos.

Probablemente sea acertado afirmar que cualquier sistema constituido por componentes de calidad, un ecualizador gráfico y uno paramétrico, y sonido circundante, tendrá todo lo necesario para generar una reproducción de calidad del efecto de una sala de conciertos.

20.14 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Resonancia en serie Este capítulo proporciona una excelente oportunidad para demostrar lo que los programas de software para computadora pueden hacer por sus usuarios. Supongamos que tenemos que graficar una detallada curva de resonancia con todos los cálculos requeridos para cada frecuencia. En cada frecuencia, la reactancia de los elementos inductivos y capacitivos cambia, y las operaciones con fasores tendrían que repetirse —lo cual constituye una tarea larga y ardua—. Sin embargo, con PSpice toma sólo unos momentos introducir el circuito y establecer la simulación deseada para obtener en segundos una gráfica detallada donde pueden establecerse puntos cada microsegundo.

Por primera vez, el eje horizontal estará en el dominio de la frecuencia en lugar de en el dominio del tiempo, como en todas las gráficas previas. Para el circuito resonante en serie de la figura 20.42, se escogió la magnitud de la fuente para producir una corriente máxima de $I = 400\text{ mV}/40\ \Omega = 10\text{ mA}$ en resonancia, y los elementos reactivos establecerán una frecuencia de resonancia de:

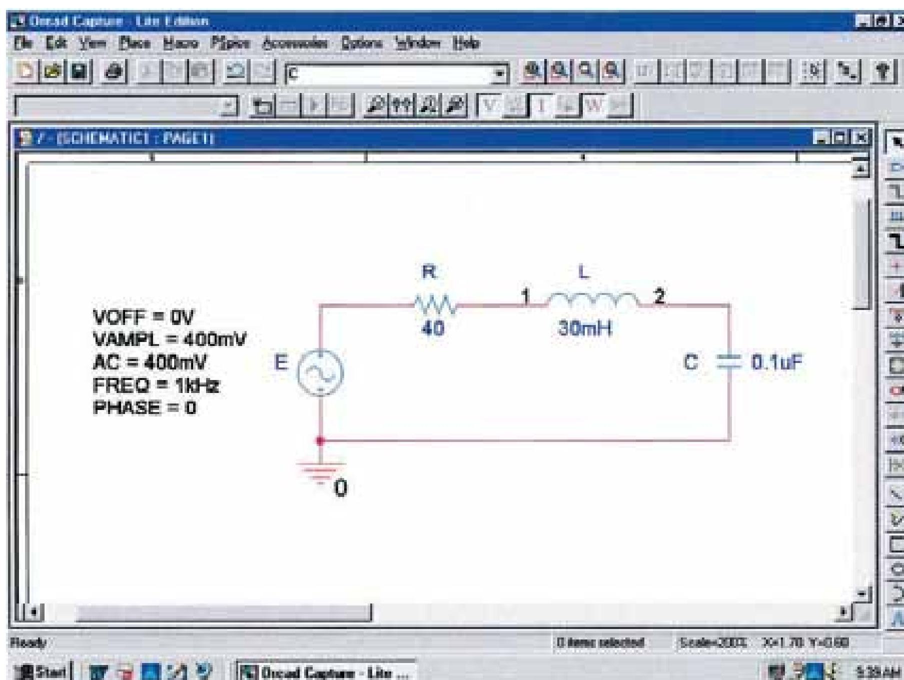


FIGURA 20.42
Circuito resonante en serie para ser analizado usando PSpice.

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(30\text{ mH})(0.1\mu\text{F})}} \cong \mathbf{2.91\ kHz}$$

El factor de calidad es:

$$Q_l = \frac{X_L}{R_l} = \frac{546.64\ \Omega}{40\ \Omega} \cong \mathbf{13.7}$$

que es relativamente alto y debe darnos una buena respuesta aguda.

El ancho de banda es:

$$BW = \frac{f_s}{Q_l} = \frac{2.91\text{ kHz}}{13.7} \cong \mathbf{212\ Hz}$$

el cual será verificado usando nuestras opciones con cursores.

Para la fuente de ca, de nuevo fue elegido **VSIN**. Todos los parámetros fueron establecidos mediante un doble clic sobre el símbolo de fuente e introduciendo los valores en el cuadro de diálogo **Property Editor**. Para cada uno, **Name y Value** fueron seleccionados bajo **Display** seguido por **Apply** antes de salir del cuadro de diálogo.

En el cuadro de diálogo **Simulation Settings**, se seleccionó **AC Sweep/Noise** y **Start Frequency** quedó establecida en 1 kHz, **End Frequency** en 10 kHz y **Points/Decade** en 10,000. Los valores de **Logarithmic scale** y **Decade** permanecieron en sus valores por omisión. El 10,000 para **Points/Decade** fue elegido para asegurar un número de puntos cerca del valor pico. Cuando aparezca la pantalla **SCHEMATIC1** de la figura 20.43, **Trace-Add Trace-I(R)-OK** resultará en una gráfica logarítmica con su pico justo a la izquierda de 3 kHz. El espaciamiento entre líneas reticulares sobre **X-axis** deberá incrementarse para que se implemente **Plot-Axis Settings-X Grid-unable Automatic-Spacing-Log-0.1-OK**. A continuación, seleccione el icono **Toggle cursor**, y con un clic derecho del ratón mueva el cursor derecho tan cerca como sea posible a 7.07 mA

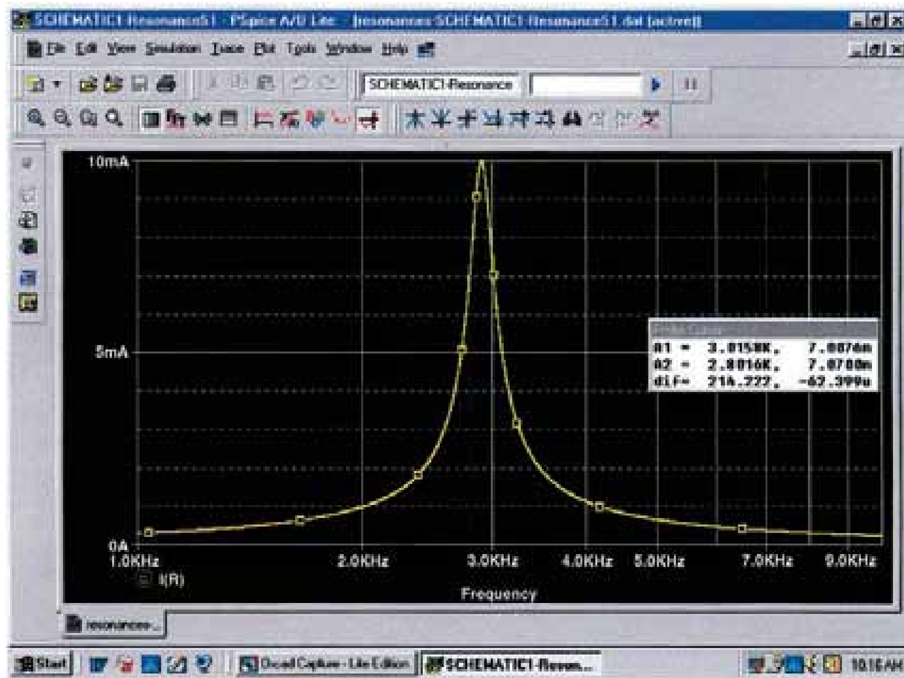


FIGURA 20.43
Curva de resonancia para la corriente del circuito de la figura 20.42.

(0.707 del valor pico para definir el ancho de banda) para obtener **A1** con una frecuencia de 3.02 kHz a un nivel de 7.01 mA, que es lo mejor que podemos hacer con los 10,000 datos por década. Ahora dé un clic izquierdo y coloque el cursor izquierdo tan cerca como sea posible al mismo nivel. El resultado es 2.8 kHz a un nivel de 7.07 mA para **A2**. Los cursores fueron establecidos en el orden anterior con el propósito de obtener una respuesta positiva para la diferencia de los dos como aparecen en la tercera línea de **Probe Cursor**. La resultante de 214.22 Hz coincide de manera excelente con el valor calculado de 212 Hz.

Resonancia en paralelo Investiguemos ahora el circuito resonante en paralelo de la figura 20.33 para comparar los resultados con la solución obtenida a mano. La red aparece en la figura 20.44 usando **ISRC** como la fuente de ca. Bajo el encabezado **Property Editor**, se establecieron los siguientes valores: **DC** = 0 A, **AC** = 2 mA, y **TRAN** = 0. Bajo **Display**, se seleccionó **Do Not Display** para **DC** y **TRAN** ya que no juegan ningún papel en el presente análisis. En el cuadro de diálogo **Simulation Settings** se seleccionó **AC Sweep/Noise**, y **Start Frequency** fue estipulada igual a 10 kHz ya que sabemos que resonará cerca de los 30 kHz. **End Frequency** fue elegida igual a 100 kHz en una primera ejecución para ver los resultados. **Points/Decade** se estableció en 10,000 para garantizar un buen número de puntos para la región pico. Después de la simulación, **Trace-Add Trace-V(C:1)-OK** resultó en la gráfica de la figura 20.45 con una frecuencia de resonancia cercana a los 30 kHz. El intervalo seleccionado parece ser bueno, pero la gráfica inicial necesitó más líneas de retícula sobre el eje *x*, por lo que se usó **Plot-Axis Settings-X-Grid-unenable Automatic-Spacing-Log-0.1-OK** para obtener una línea de retícula a intervalos de 10 kHz. A continuación se eligió **Toggle cursor** y un cursor de clic izquierdo apareció en la pantalla. Entonces fue seleccionado **Cursor Peak** para encontrar el valor pico de la curva. El resultado de **A1** = 319.45 mV en 28.94 kHz coincide muy cercanamente con el valor calculado de 318.68 mV en 28.57 kHz

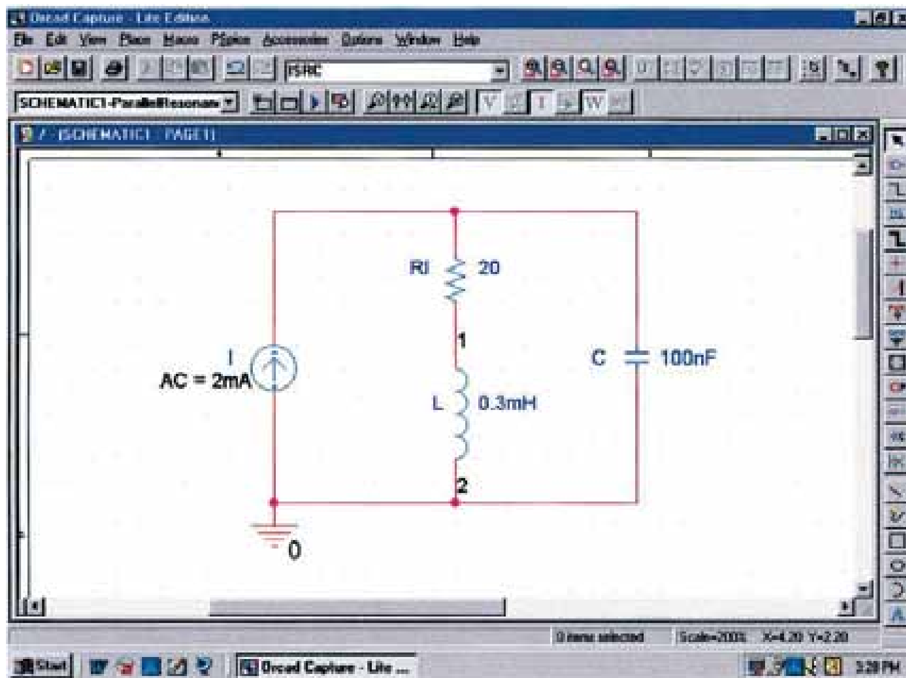


FIGURA 20.44

Red resonante en paralelo para ser analizada usando PSpice.

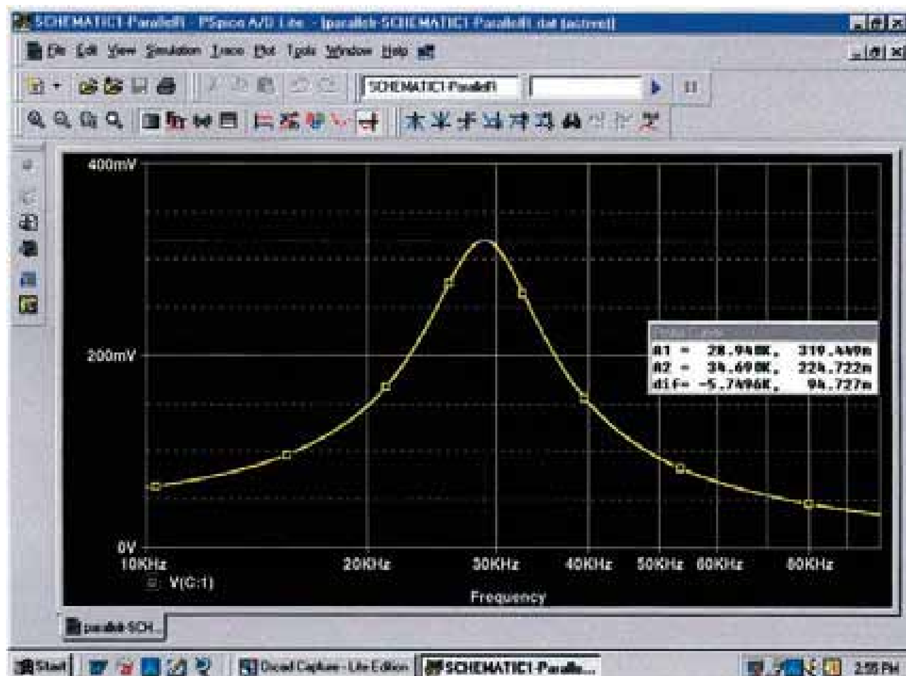


FIGURA 20.45

Curva de resonancia para el voltaje en el capacitor de la figura 20.44.

para el valor máximo de V_C. El ancho de banda está definido a un nivel de 0.707(319.45 mV) = 225.85 mV. Usando el cursor de clic derecho encontramos que lo más cercano que se puede llegar es a 224.72 mV para los 10,000 puntos por década. La frecuencia resultante es de 34.69 kHz como se muestra en **Probe Cursor** en la figura 20.45.

Ahora podemos usar el cursor de clic izquierdo para encontrar el mismo nivel a la izquierda del valor pico y determinar el ancho de banda. Lo más cercano que puede llegar el cursor de clic izquierdo a 225.85 mV es 224.96 mV a una frecuencia de 23.97 kHz. El ancho de banda aparecerá entonces como 10.72 kHz en **Probe Cursor**, lo cual se compara muy bien con la solución obtenida a mano de 10.68 kHz en el ejemplo 20.7.

En este punto será interesante concentrarnos en el ángulo de fase del voltaje en la red en paralelo para encontrar la frecuencia cuando la red aparece como resistiva y el ángulo de fase es de 0°. Primero use **Trace-Delete All Traces**, y llame a **P(V(C:1))** seguido por **OK**. El resultado es la gráfica de la figura 20.46, revelando que el ángulo de fase es cercano a −90° a frecuencias muy altas conforme el elemento capacitivo con su reactancia decreciente adquiere las características de la red en paralelo. A 10 kHz el elemento inductivo tiene una reactancia inferior a la del elemento capacitivo, y la red tiene un ángulo de fase positivo. Mediante la opción de cursor podemos desplazar el clic izquierdo a lo largo del eje horizontal hasta que el ángulo de fase esté en su valor mínimo. Como se muestra en la figura 20.46, el ángulo más pequeño disponible con los puntos determinados es de 49.86 grados = 0.05°, lo cual es muy cercano a 0°. La frecuencia correspondiente es de 27.046 kHz, esencialmente una coin-

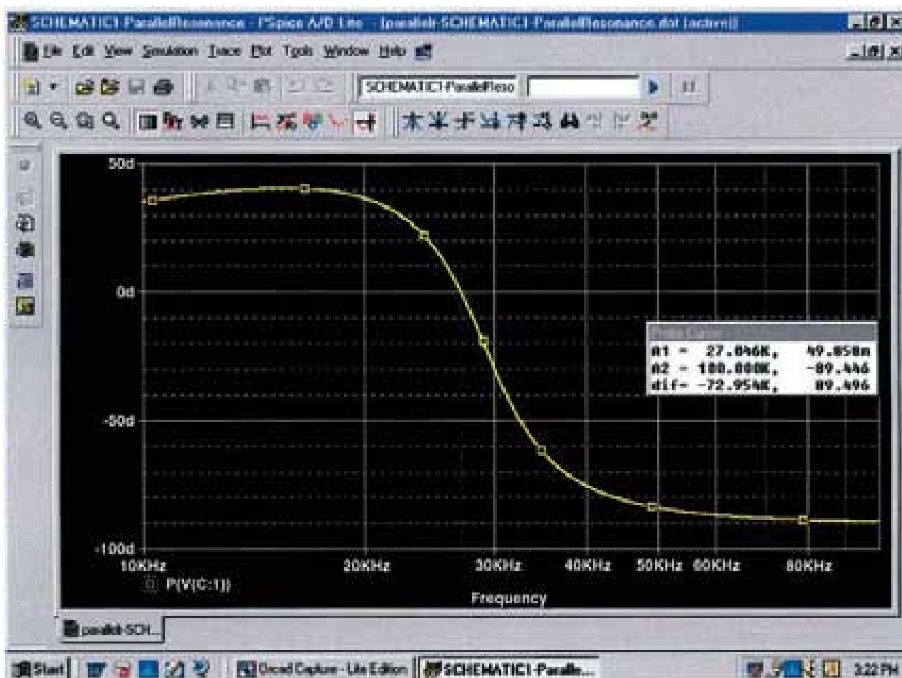


FIGURA 20.46
Gráfica de fase para el voltaje v_C para la red resonante en paralelo de la figura 20.44.

cidencia exacta con la solución manual de 27.051 kHz. Claramente, por tanto, la frecuencia a la que el ángulo de fase es cero y la impedancia total aparece resistiva es menor que la frecuencia a la que el voltaje de salida es un máximo.

Electronics Workbench

Los resultados del ejemplo 20.9 serán confirmados ahora usando Electronics Workbench. La red de la figura 20.36 aparecerá como se muestra en la figura 20.47 después de que todos los elementos hayan sido colocados como se describió en capítulos previos. En particular, observe que la frecuencia asignada a la fuente de corriente de 2 mA de ca es de 100 kHz. Como tenemos alguna idea de que la frecuencia de resonancia es de pocos cientos de kilohertz, parece apropiado que la frecuencia de inicio para la gráfica comience en 100 kHz y se extienda hasta 1 MHz. También, asegúrese de que **AC Magnitude** se establezca en 2 mA en **Analysis Setup** dentro del cuadro de diálogo **AC Current**.

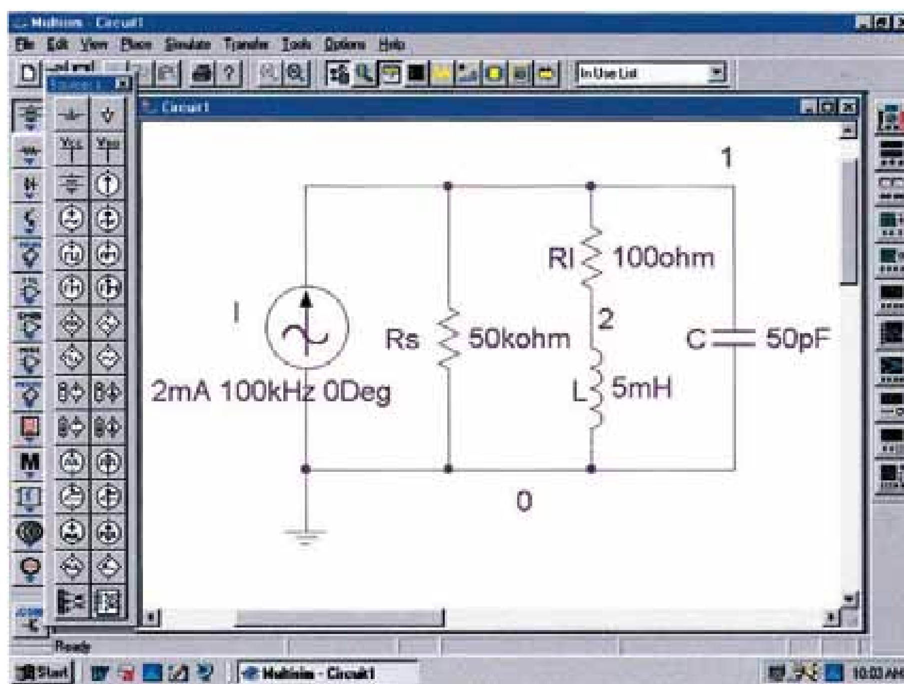


FIGURA 20.47
Uso de Electronics Workbench para confirmar los resultados del ejemplo 20.9.

Para la simulación, primero se selecciona la secuencia **Simulate-Analyses-AC** para obtener el cuadro de diálogo **AC Analysis**. **Start frequency** se establece en 100 kHz, y **Stop frequency** en 1 MHz; **Sweep type** es **Decade**; **Number of points per decade** es 1000; y **Vertical scale** es **Linear**. Bajo **Output variables**, se selecciona el nodo número 1 como una **Variable for analysis** seguida por **Simulate** para ejecutar el programa. Los resultados son las gráficas de magnitud y fase de la figura 20.48. Comenzando con la gráfica **Voltage**, se seleccionan las teclas **Show/Hide Grid**, **Show/Hide Legend** y **Show/Hide Cursors**. Bajo el cuadro de cursor **AC Analysis**, el lector notará inmediatamente que el valor máximo es de 95.24 V y el valor mínimo de 6.94 V. La frecuencia de resonancia puede encontrarse moviendo el cursor hasta alcanzar 95.24 V

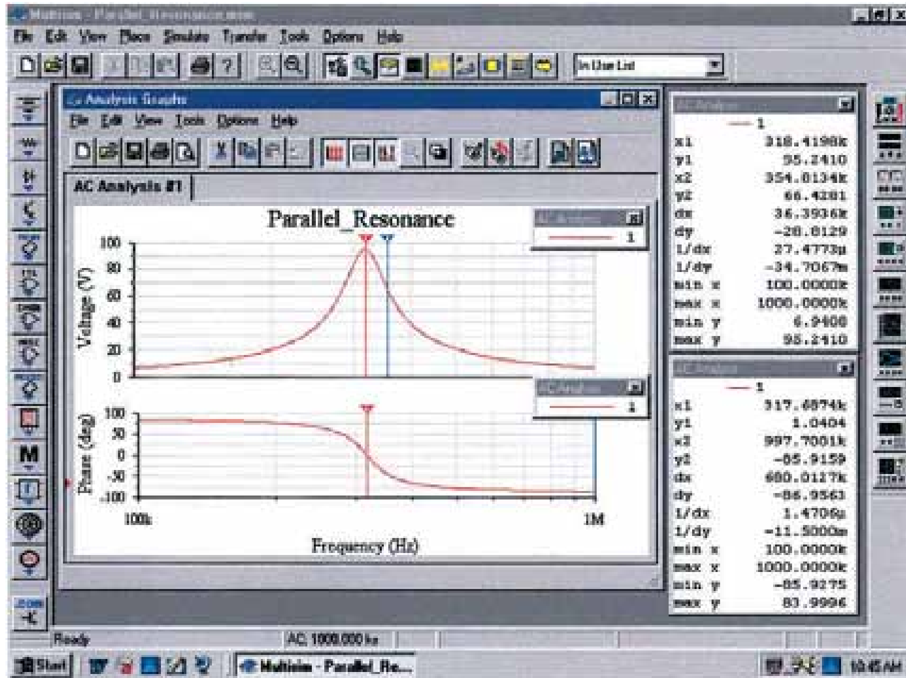


FIGURA 20.48
Gráficas de magnitud y fase para el voltaje v_C de la red de la figura 20.47.

(**y1**). Como se muestra en el cursor del cuadro de diálogo superior en la figura 20.48, esto se logra en 318.42 kHz (**x1**). El otro cursor (azul) puede usarse para definir la frecuencia de corte superior para el ancho de banda calculando primero el nivel 0.707 del voltaje de salida. El resultado es 0.707(95.24V) = 67.33 V. Lo más cercano que podemos llegar a este nivel con el cursor es a 66.43 V **(y2)**, lo cual define una frecuencia de 354.81 kHz **(x2)**. Si usamos ahora el cursor rojo para encontrar el nivel correspondiente debajo de la frecuencia de resonancia, encontraremos un nivel de 67.49 V **(y1)** en 287.08 kHz **(x1)**. El ancho de banda resultante es, por tanto, de 354.81 kHz − 287.08 kHz = 67.73 kHz.

Será interesante determinar en seguida la frecuencia de resonancia si definimos resonancia como la frecuencia que resulta en un ángulo de fase de 0° para el voltaje de salida. Repitiendo el proceso descrito líneas arriba para la gráfica de fase, podemos establecer el cursor rojo tan cerca a 0° como sea posible. El resultado es de 1.04° **(y1)** en 317.69 kHz **(x1)**, mostrando claramente que la frecuencia de resonancia definida por el ángulo de fase es menor que la definida por el voltaje pico. Sin embargo, con un factor Q_l de aproximadamente 100, la diferencia de 0.73 kHz (menos de 1 kHz) no es significativa. También observe que cuando el segundo cursor se fija en aproximadamente 1 MHz (997.7 kHz), el ángulo de fase de −85.91° es muy cercano al de un capacitor puro. El efecto de corto circuito de un capacitor en frecuencias altas adquiere las características del circuito resonante en paralelo.

De nuevo, la solución por computadora resultó en una coincidencia muy cercana a la solución obtenida a mano en el ejemplo 20.9, con una concordancia perfecta de 95.24 V para el valor pico y sólo una pequeña diferencia en el ancho de banda con 66.87 kHz en el ejemplo 20.9 y 67.73 kHz aquí. Para la frecuencia de corte alta, la computadora generó un resultado de 354.8 kHz, mientras que la solución teórica fue de 351.7 kHz. Para la frecuencia de corte baja, la computadora dio 287.08 kHz y la solución teórica fue de 284 kHz.

PROBLEMAS

SECCIONES DE LA 20.2 A LA 20.7 Resonancia en serie

1. Encuentre las resonancias ω_s y f_s para un circuito en serie con los siguientes parámetros:
   a. $R = 10\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 16\ \mu$F
   b. $R = 300\ \Omega$, $L = 0.5$ H, $C = 0.16\ \mu$F
   c. $R = 20\ \Omega$, $L = 0.28$ mH, $C = 7.46\ \mu$F

2. Para el circuito en serie de la figura 20.49:
   a. Encuentre el valor de X_C para la resonancia.
   b. Determine la impedancia total del circuito en resonancia.
   c. Encuentre la magnitud de la corriente I.
   d. Calcule los voltajes V_R, V_L y V_C en resonancia. ¿Cómo están relacionados V_L y V_C? ¿Cómo se compara V_R con el voltaje aplicado E?
   e. ¿Cuál es el factor de calidad del circuito? ¿Es un circuito de factor Q alto o bajo?
   f. ¿Cuál es la potencia disipada por el circuito en resonancia?

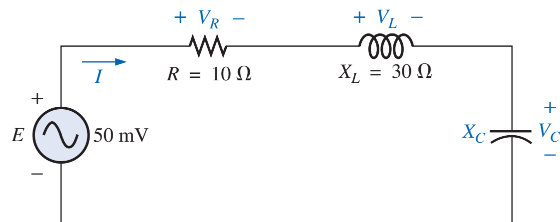


FIGURA 20.49
Problema 2.

3. Para el circuito en serie de la figura 20.50:
   a. Encuentre el valor de X_L para la resonancia.
   b. Determine la magnitud de la corriente I en resonancia.
   c. Encuentre los voltajes V_R, V_L y V_C en resonancia, y compare sus magnitudes.
   d. Determine el factor de calidad del circuito. ¿Es un circuito de factor Q alto o bajo?
   e. Si la frecuencia de resonancia es de 5 kHz, determine el valor de L y C.
   f. Encuentre el ancho de banda de la respuesta si la frecuencia de resonancia es de 5 kHz.
   g. ¿Cuáles son las frecuencias de corte baja y alta?

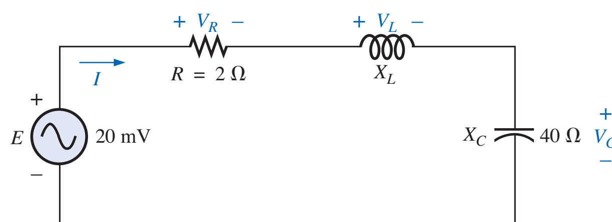


FIGURA 20.50
Problema 3.

4. Para el circuito de la figura 20.51:
   a. Encuentre el valor de L en milihenrys si la frecuencia de resonancia es de 1800 Hz.
   b. Calcule X_L y X_C. ¿Cómo se comparan entre sí?
   c. Encuentre la magnitud de la corriente I_{rms} en resonancia.
   d. Encuentre la potencia disipada por el circuito en resonancia.
   e. ¿Cuál es la potencia aparente entregada al sistema en resonancia?
   f. ¿Cuál es el factor de potencia del circuito en resonancia?
   g. Calcule el factor Q del circuito y el ancho de banda resultante.
   h. Encuentre las frecuencias de corte, y calcule la potencia disipada por el circuito en esas frecuencias.

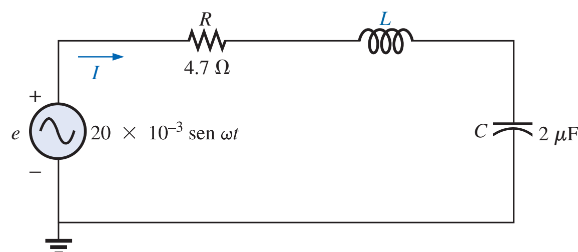
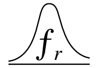


FIGURA 20.51
Problema 4.

5. **a.** Encuentre el ancho de banda de un circuito resonante en serie que tiene frecuencia de resonancia de 6000 Hz y Q_s de 15.
   b. Encuentre las frecuencias de corte.
   c. Si la resistencia del circuito en resonancia es de 3 Ω, ¿cuáles son los valores de X_L y X_C en ohms?
   d. ¿Cuál es la potencia disipada a las frecuencias de media potencia si la corriente máxima que fluye por el circuito es de 0.5 A?

6. Un circuito en serie tiene frecuencia de resonancia de 10 kHz. La resistencia del circuito es de 5 Ω, y en resonancia X_C es de 200 Ω.
   a. Encuentre el ancho de banda.



b. Encuentre las frecuencias de corte.
c. Encuentre Q_s.
d. Si el voltaje de entrada es de 30 V $\angle 0°$, encuentre el voltaje en la bobina y el capacitor en forma fasorial.
e. Encuentre la potencia disipada en resonancia.

7. a. El ancho de banda de un circuito resonante en serie es de 200 Hz. Si la frecuencia de resonancia es de 2000 Hz, ¿cuál es el valor de Q_s para el circuito?
b. Si $R = 2\ \Omega$, ¿cuál es el valor de X_L en resonancia?
c. Encuentre el valor de L y C en resonancia.
d. Encuentre las frecuencias de corte.

8. Las frecuencias de corte de un circuito resonante en serie son de 5400 Hz y 6000 Hz.
a. Encuentre el ancho de banda del circuito.
b. Si Q_s es de 9.5, encuentre la frecuencia de resonancia del circuito.
c. Si la resistencia del circuito es de 2 Ω, encuentre el valor de X_L y X_C en resonancia.
d. Encuentre el valor de L y C en resonancia.

***9.** Diseñe un circuito resonante en serie con un voltaje de entrada de 5 V $\angle 0°$ que tenga las siguientes especificaciones:
a. Una corriente pico de 500 mA en resonancia.
b. Un ancho de banda de 120 Hz.
c. Una frecuencia de resonancia de 8400 Hz.
Encuentre el valor de L y C y las frecuencias de corte.

***10.** Diseñe un circuito resonante en serie que tenga un ancho de banda de 400 Hz usando una bobina con factor Q_l de 20 y resistencia de 2 Ω. Encuentre los valores de L y C y las frecuencias de corte.

***11.** Un circuito resonante en serie debe resonar en $\omega_s = 2\pi \times 10^6$ rad/s y extraer 20W de una fuente de 120 V en resonancia. Si el ancho de banda fraccional es de 0.16:
a. Determine la frecuencia de resonancia en hertz.
b. Calcule el ancho de banda en hertz.
c. Determine los valores de R, L y C.
d. Encuentre la resistencia de la bobina si $Q_l = 80$.

***12.** Un circuito resonante en serie resonará a una frecuencia de 1 MHz con un ancho de banda fraccional de 0.2. Si en resonancia el factor de calidad de la bobina es de 12.5 y su inductancia de 100 μH, determine lo siguiente:
a. La resistencia de la bobina.
b. La resistencia adicional requerida para establecer el ancho de banda fraccional indicado.
c. El valor de capacitancia requerido.

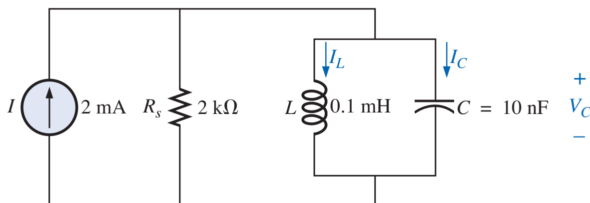


FIGURA 20.52
Problema 13.

SECCIONES DE LA 20.8 A LA 20.12
Resonancia en paralelo

13. Para el circuito resonante "ideal" en paralelo de la figura 20.52:
a. Determine la frecuencia de resonancia (f_p).
b. Encuentre el voltaje V_C en resonancia.
c. Determine las corrientes I_L e I_C en resonancia.
d. Encuentre Q_p.

14. Para la red resonante en paralelo de la figura 20.53:

a. Calcule f_s.

b. Determine Q_l usando $f = f_s$. ¿Se puede aplicar el enfoque aproximado?

c. Determine f_p y f_m.

d. Calcule X_L y X_C usando f_p. ¿Cómo se comparan entre sí?

e. Encuentre la impedancia total en resonancia (f_p).

f. Calcule V_C en la resonancia (f_p).

g. Determine Q_p y el BW usando f_p.

h. Calcule I_L e I_C en f_p.

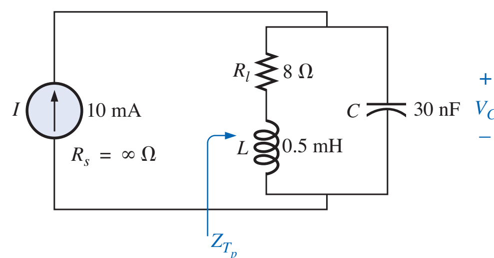


FIGURA 20.53
Problema 14.

15. Resuelva el problema 14 para la red de la figura 20.54.

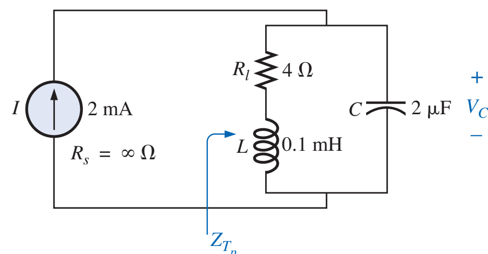


FIGURA 20.54
Problema 15.

16. Para la red de la figura 20.55:

a. Encuentre el valor de X_C en resonancia (f_p).

b. Encuentre la impedancia total Z_{Tp} en resonancia (f_p).

c. Encuentre las corrientes I_L e I_C en resonancia (f_p).

d. Si la frecuencia de resonancia es de 20,000 Hz, encuentre el valor de L y C en resonancia.

e. Encuentre Q_p y el BW.

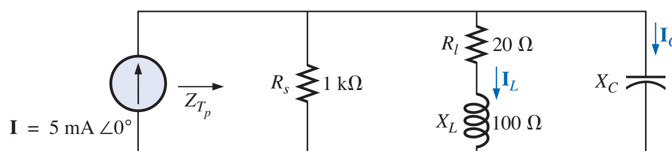


FIGURA 20.55
Problema 16.

17. Resuelva el problema 16 para la red de la figura 20.56.

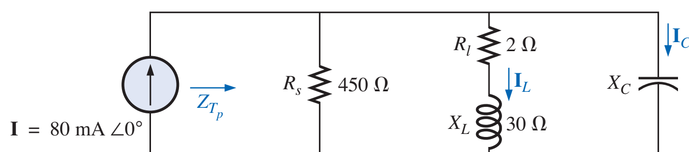


FIGURA 20.56
Problema 17.

18. Para la red de la figura 20.57:

a. Encuentre las frecuencias de resonancia f_s, f_p y f_m. ¿Qué sugieren los resultados con respecto al factor Q_p de la red?

b. Encuentre los valores de X_L y X_C en resonancia (f_p). ¿Cómo se comparan entre sí?

c. Encuentre la impedancia Z_{T_p} en resonancia (f_p).

d. Calcule Q_p y el *BW*.

e. Encuentre la magnitud de las corrientes I_L e I_C en resonancia (f_p).

f. Calcule el voltaje V_C en resonancia (f_p).

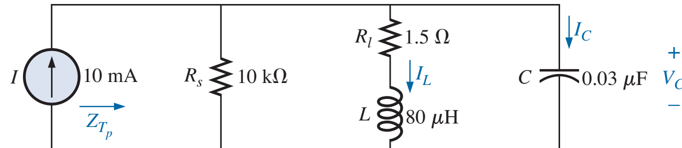


FIGURA 20.57
Problema 18.

***19.** Resuelva el problema 18 para la red de la figura 20.58.

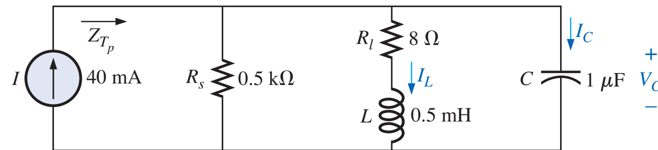


FIGURA 20.58
Problemas 19 y 29.

20. Se desea que la impedancia $\mathbf{Z}_T$ del circuito de factor Q alto que aparece en la figura 20.59 sea de 50 kΩ ∠0° en resonancia (f_p).

a. Encuentre el valor de X_L.

b. Calcule X_C.

c. Encuentre la frecuencia de resonancia (f_p) si L = 16 mH.

d. Encuentre el valor de C.

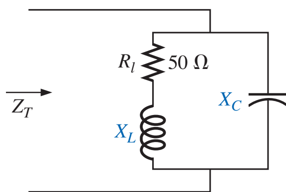


FIGURA 20.59
Problema 20.

21. Para la red de la figura 20.60:

a. Encuentre f_p.

b. Calcule la magnitud de V_C en resonancia (f_p).

c. Determine la potencia absorbida en resonancia.

d. Encuentre el *BW*.

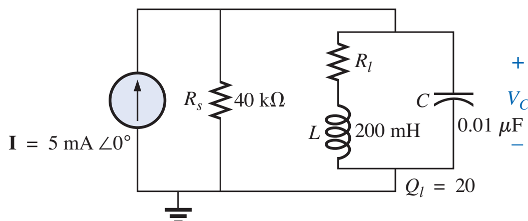


FIGURA 20.60
Problema 21.

***22.** Para la red de la figura 20.61:

a. Encuentre el valor de X_L para la resonancia.

b. Encuentre Q_l.

c. Encuentre la frecuencia de resonancia (f_p) si el ancho de banda es de 1 kHz.

d. Encuentre el valor máximo del voltaje V_C.

e. Trace la curva de V_C en función de la frecuencia. Indique su valor pico, su frecuencia de resonancia y sus frecuencias de banda.

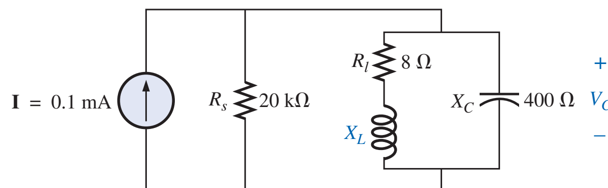


FIGURA 20.61
Problema 22.

***23.** Resuelva el problema 22 para la red de la figura 20.62.

***24.** Para la red de la figura 20.63:

a. Encuentre f_s, f_p y f_m.

b. Determine Q_l y Q_p en f_p después de efectuar una conversión de fuente.

c. Encuentre la impedancia de entrada Z_{T_p}.

d. Encuentre la magnitud del voltaje V_C.

e. Calcule el ancho de banda usando f_p.

f. Determine la magnitud de las corrientes I_C e I_L.

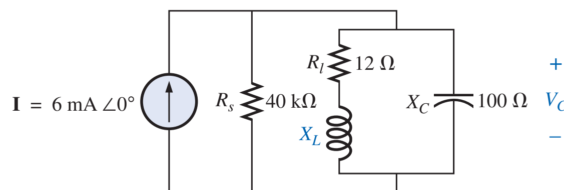


FIGURA 20.62
Problema 23.

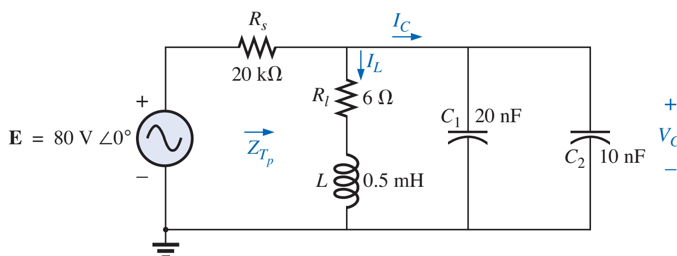


FIGURA 20.63
Problema 24.

***25.** Para la red de la figura 20.64 se especifica lo siguiente:

$$f_p = 20 \text{ kHz}$$
$$BW = 1.8 \text{ kHz}$$
$$L = 2 \text{ mH}$$
$$Q_l = 80$$

Encuentre R_s y C.

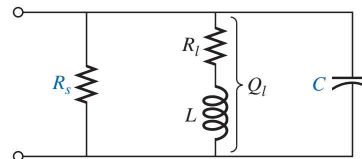


FIGURA 20.64
Problema 25.

***26.** Diseñe la red de la figura 20.65 para que tenga las siguientes características:

a. $BW = 500$ Hz

b. $Q_p = 30$

c. $V_{C_{máx}} = 1.8$ V

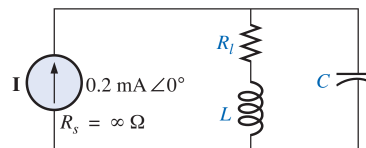


FIGURA 20.65
Problema 26.

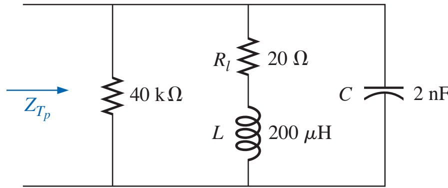


FIGURA 20.66
Problema 27.

***27.** Para el circuito resonante en paralelo de la figura 20.66:
- **a.** Determine la frecuencia de resonancia.
- **b.** Encuentre la impedancia total en resonancia.
- **c.** Encuentre Q_p.
- **d.** Calcule el *BW*.
- **e.** Resuelva los incisos del (a) al (d) para $L = 20\ \mu H$ y $C = 20\ nF$.
- **f.** Resuelva los incisos del (a) al (d) para $L = 0.4\ mH$ y $C = 1\ nF$.
- **g.** Para la red de la figura 20.66 y los parámetros de los incisos (e) y (f), determine la razón L/C.
- **h.** ¿Sus resultados confirman las conclusiones de la figura 20.28 para cambios en la razón L/C?

SECCIÓN 20.14 **Análisis por computadora**

PSpice o Electronics Workbench

28. Verifique los resultados del ejemplo 20.8. Es decir, muestre que la frecuencia de resonancia es de 40 kHz, las frecuencias de corte son las calculadas, y el ancho de banda es de 1.85 kHz.

29. Encuentre f_p y f_m para la red resonante en paralelo de la figura 20.58, y comente sobre el ancho de banda resultante en lo que se refiere al factor de calidad de la red.

Lenguaje de programación **(C++, QBASIC, Pascal, etc.)**

30. Escriba un programa para tabular la impedancia y la corriente de la red de la figura 20.2 en función de la frecuencia para un intervalo de frecuencias que se extienda desde $0.1f_s$ hasta $2f_s$ en incrementos de $0.1f_s$. Para la primera ejecución, use los parámetros definidos en el ejemplo 20.1.

31. Escriba un programa para proporcionar una solución general para la red de la figura 20.36; es decir, determine los parámetros requeridos en los incisos del (a) al (e) del ejemplo 20.9.

GLOSARIO

Ancho de banda (*BW*) Intervalo entre las frecuencias de banda, corte, o de media potencia.

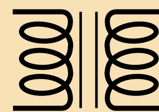
Factor de calidad (*Q*) Razón que proporciona una indicación inmediata de la agudeza del pico de una curva resonante. A mayor *Q*, más agudo el pico y más rápidamente cae éste hacia la derecha o la izquierda de la frecuencia de resonancia.

Frecuencias de banda (de corte, de media potencia) Frecuencias que definen los puntos sobre la curva de resonancia que son 0.707 de la corriente pico o del valor del voltaje. Además, definen las frecuencias en que la transferencia de potencia al circuito resonante será la mitad del nivel máximo de potencia.

Resonancia Condición establecida por la aplicación de una frecuencia en particular (la frecuencia de resonancia) a una red *R-L-C* en serie o en paralelo. La transferencia de potencia al sistema es un máximo, y, para frecuencias por arriba y abajo, la transferencia de potencia cae a niveles considerablemente menores.

Selectividad Una característica de las redes resonantes relacionada directamente con el ancho de banda del sistema resonante. Una selectividad alta está asociada con un ancho de banda pequeño (factor *Q* alto), y una selectividad baja se asocia con anchos de banda grandes (*Q* bajo).

21



Transformadores

21.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 12 fue analizada la *autoinductancia* de una bobina. En este capítulo examinaremos la **inductancia mutua** que existe entre bobinas de una misma o de diferentes dimensiones. La inductancia mutua es un fenómeno básico para la operación de un *transformador*, el cual es un dispositivo eléctrico usado actualmente en casi todos los campos de la ingeniería eléctrica. Este dispositivo juega un papel fundamental en los sistemas de distribución de potencia y puede encontrarse en muchos circuitos electrónicos e instrumentos de medición. Estudiaremos tres de las aplicaciones básicas de un transformador: elevar o reducir el voltaje o la corriente, actuar como dispositivo acoplador de la impedancia, y aislar (ninguna conexión física) una parte de un circuito de otra. Además, será presentada la **convención del punto** y consideraremos el circuito equivalente de transformador. El capítulo concluirá con unas palabras acerca de cómo escribir ecuaciones de malla para una red con inductancia mutua.

21.2 INDUCTANCIA MUTUA

Un transformador se construye con dos bobinas colocadas de manera que el flujo variable desarrollado por una bobina enlazará a la otra, como se muestra en la figura 21.1. Esto resultará en un voltaje inducido en cada bobina. Para

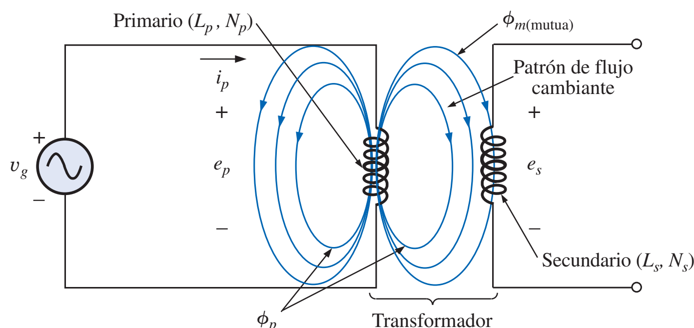
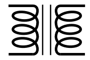


FIGURA 21.1
Definición de los componentes de un transformador.



distinguir entre las bobinas, aplicaremos la convención de transformadores acerca de que

***se le llama* primario *a la bobina donde se aplica la fuente, y la bobina donde es aplicada la carga se denomina* secundario.**

Para el primario del transformador de la figura 21.1, una aplicación de la ley de Faraday [Ecuación (12.1)] resultará en:

$$e_p = N_p \frac{d\phi_p}{dt} \qquad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(21.1)}$$

revelando que el voltaje inducido en el primario está directamente relacionado con el número de vueltas en éste y con la razón de cambio del flujo magnético que lo enlaza. O, de la ecuación (12.5),

$$e_p = L_p \frac{di_p}{dt} \qquad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(21.2)}$$

revelando que el voltaje inducido en el primario también está directamente relacionado con la autoinductancia de éste y con la razón de cambio de la corriente a través del devanado primario.

La magnitud de e_s, el voltaje inducido en el secundario, se determina mediante:

$$e_s = N_s \frac{d\phi_m}{dt} \qquad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(21.3)}$$

donde N_s es el número de vueltas en el devanado secundario y ϕ_m es la parte del flujo primario ϕ_p que enlaza al devanado secundario.

Si todo el flujo que enlaza al primario enlaza al secundario, entonces:

$$\phi_m = \phi_p$$

y

$$e_s = N_s \frac{d\phi_p}{dt} \qquad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(21.4)}$$

El **coeficiente de acoplamiento** (k) entre dos bobinas está determinado por:

$$k \text{ (coeficiente de acoplamiento)} = \frac{\phi_m}{\phi_p} \qquad \textbf{(21.5)}$$

Como el nivel máximo de ϕ_m es ϕ_p, el coeficiente de acoplamiento entre dos bobinas nunca puede ser mayor que 1.

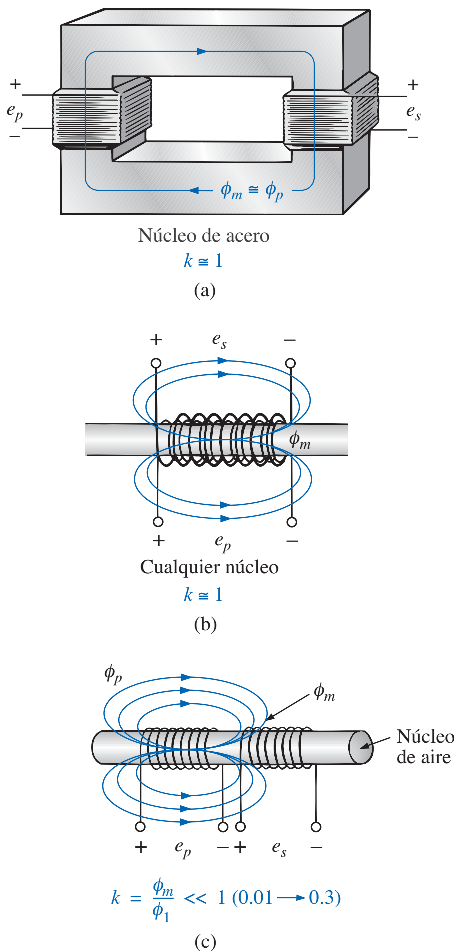
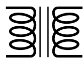


FIGURA 21.2
Devanados con diferentes coeficientes de acoplamiento.

El coeficiente de acoplamiento entre varias bobinas está indicado en la figura 21.2. En la figura 21.2(a), el núcleo ferromagnético de acero garantiza que la mayor parte del flujo que enlaza al primario también enlazará al secundario, estableciendo un coeficiente de acoplamiento muy cercano a 1. En la figura 21.2(b), el hecho de que ambas bobinas estén traslapándose resulta en el flujo de una bobina enlazando a la otra, y el coeficiente de acoplamiento es de nuevo muy cercano a 1. En la figura 21.2(c), la ausencia de un núcleo ferromagnético tendrá como resultado bajos niveles de flujo de enlace entre las bobinas. Entre más cerca están las dos bobinas, mayor es el flujo de enlace, y mayor el valor de k, aunque nunca alcanzará un valor de 1. Se dice que las bobinas con bajos coeficientes de acoplamiento tienen un **acoplamiento débil**.



Para el secundario tenemos:

$$e_s = N_s \frac{d\phi_m}{dt} = N_s \frac{dk\phi_p}{dt}$$

y $$e_s = kN_s \frac{d\phi_p}{dt} \qquad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(21.6)}$$

La inductancia mutua entre las dos bobinas de la figura 21.1 es determinada por:

$$M = N_s \frac{d\phi_m}{di_p} \qquad \text{(henrys, H)} \qquad \textbf{(21.7)}$$

o bien: $$M = N_p \frac{d\phi_p}{di_s} \qquad \text{(henrys, H)} \qquad \textbf{(21.8)}$$

En las ecuaciones anteriores observe que el símbolo para la inductancia mutua es la letra *M* mayúscula y que su unidad de medición, igual que la de la autoinductancia, es el *henry*. Las ecuaciones (21.7) y (21.8) establecen que:

la* inductancia mutua *entre dos bobinas es proporcional al cambio instantáneo en el flujo que enlaza una bobina debido a un cambio instantáneo en la corriente a través de la otra bobina.

En términos de la inductancia de cada bobina y del coeficiente de acoplamiento, la inductancia mutua es determinada por:

$$M = k\sqrt{L_p L_s} \qquad \text{(henrys, H)} \qquad \textbf{(21.9)}$$

Entre mayor es el coeficiente de acoplamiento (mayores flujos de enlace), o mayor es la inductancia de cualquier bobina, mayor será la inductancia mutua entre las bobinas. Relacione este hecho con las configuraciones de la figura 21.2.

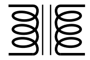
El voltaje secundario e_s también puede encontrarse en términos de la inductancia mutua si reescribimos la ecuación (21.3) como:

$$e_s = N_s\left(\frac{d\phi_m}{di_p}\right)\left(\frac{di_p}{dt}\right)$$

y, dado que $M = N_s(d\phi_m/di_p)$, puede escribirse también como:

$$e_s = M \frac{di_p}{dt} \qquad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(21.10)}$$

Similarmente, $$e_p = M \frac{di_s}{dt} \qquad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(21.11)}$$



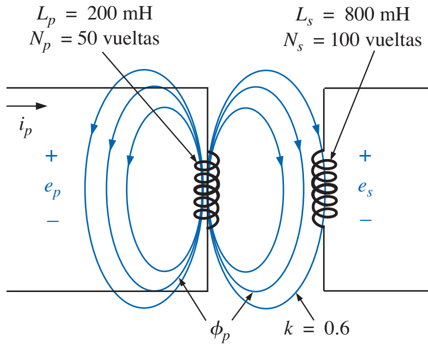


FIGURA 21.3
Ejemplo 21.1.

EJEMPLO 21.1 Para el transformador mostrado en la figura 21.3:

a. Encuentre la inductancia mutua M.
b. Encuentre el voltaje inducido e_p si el flujo ϕ_p cambia a razón de 450 mWb/s.
c. Encuentre el voltaje inducido e_s para la misma razón de cambio indicada en el inciso (b).
d. Encuentre los voltajes inducidos e_p y e_s si la corriente i_p cambia a razón de 0.2 A/ms.

Soluciones:

a. $M = k\sqrt{L_p L_s} = 0.6\sqrt{(200 \text{ mH})(800 \text{ mH})}$
$= 0.6\sqrt{16 \times 10^{-2}} = (0.6)(400 \times 10^{-3}) = \mathbf{240\ mH}$

b. $e_p = N_p \dfrac{d\phi_p}{dt} = (50)(450 \text{ mWb/s}) = \mathbf{22.5\ V}$

c. $e_s = kN_s \dfrac{d\phi_p}{dt} = (0.6)(100)(450 \text{ mWb/s}) = \mathbf{27\ V}$

d. $e_p = L_p \dfrac{di_p}{dt} = (200 \text{ mH})(0.2 \text{ A/ms}) = (200 \text{ mH})(200 \text{ A/s}) = \mathbf{40\ V}$

$e_s = M \dfrac{di_p}{dt} = (240 \text{ mH})(200 \text{ A/s}) = \mathbf{48\ V}$

21.3 EL TRANSFORMADOR CON NÚCLEO DE HIERRO

En la figura 21.4 se muestra un transformador con núcleo de hierro bajo condiciones de carga. El núcleo de hierro sirve para incrementar el coeficiente de acoplamiento entre las bobinas aumentando el flujo mutuo ϕ_m. Recuérdese del capítulo 11 que las líneas de flujo magnético siempre toman la trayectoria de menor reluctancia, la cual en este caso es el núcleo de hierro.

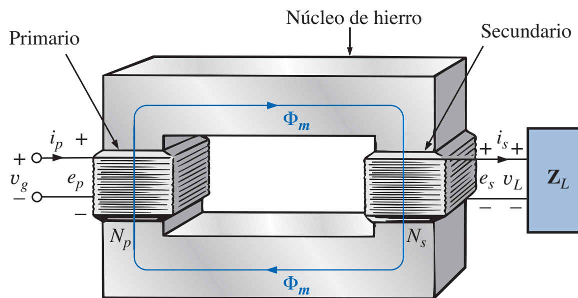
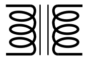


FIGURA 21.4
Transformador con núcleo de hierro.

En los análisis que efectuaremos en este capítulo supondremos que todo el flujo que enlaza a la bobina 1 enlaza también a la bobina 2. En otras palabras, el coeficiente de acoplamiento es su valor máximo, 1, y $\phi_m = \phi_p = \phi_s$. Además, el transformador se analizará primero desde un punto de vista ideal; esto es, se ignorarán pérdidas como las geométricas o de resistencia de cd de las bobinas, la reactancia de fuga debida al flujo que enlaza cualquier bobina que no forma parte de ϕ_m, y las pérdidas por histéresis y corrientes parásitas. Sin embargo, ello no debe causar la impresión de que estaremos lejos de la



operación real de un transformador. La mayoría de los transformadores fabricados actualmente casi pueden considerarse como ideales. Las ecuaciones que desarrollaremos bajo condiciones ideales serán, en general, una primera aproximación a la respuesta real, y nunca estarán más allá de ésta sino en un pequeño porcentaje. Las pérdidas se considerarán con mayor detalle en la sección 21.6.

Cuando la corriente i_p a través del circuito primario del transformador con núcleo de hierro es un máximo, el flujo ϕ_m que enlaza ambas bobinas es también un máximo. De hecho, la magnitud del flujo es directamente proporcional a la corriente a través de los devanados del primario. Por tanto, los dos están en fase, y para entradas senoidales, la magnitud del flujo variará también como una senoide. Es decir, si:

$$i_p = \sqrt{2}I_p \text{ sen } \omega t$$

entonces:

$$\phi_m = \Phi_m \text{ sen } \omega t$$

El voltaje inducido en el primario debido a una entrada senoidal puede ser determinado por la ley de Faraday:

$$e_p = N_p \frac{d\phi_p}{dt} = N_p \frac{d\phi_m}{dt}$$

Sustituyendo para ϕ_m obtenemos:

$$e_p = N_p \frac{d}{dt}(\Phi_m \text{ sen } \omega t)$$

y al diferenciar resulta en:

$$e_p = \omega N_p \Phi_m \cos \omega t$$

o bien:

$$e_p = \omega N_p \Phi_m \text{ sen}(\omega t + 90°)$$

indicando que el voltaje inducido e_p adelanta a la corriente en la bobina del primario por 90°.

El valor efectivo de e_p es:

$$E_p = \frac{\omega N_p \Phi_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f N_p \Phi_m}{\sqrt{2}}$$

y

$$\boxed{E_p = 4.44 f N_p \Phi_m} \qquad \textbf{(21.12)}$$

la cual es una ecuación para el valor rms del voltaje en la bobina del primario en términos de la frecuencia de la corriente o el voltaje de entrada, del número de vueltas del primario, y del valor máximo del flujo magnético que enlaza a éste.

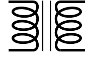
Para el caso que estamos analizando, donde el flujo que enlaza al secundario es igual al del primario, si repetimos el procedimiento recién descrito para el voltaje inducido en el secundario obtenemos:

$$\boxed{E_s = 4.44 f N_s \Phi_m} \qquad \textbf{(21.13)}$$

Dividiendo la ecuación (21.12) entre la ecuación (21.13), como sigue:

$$\frac{E_p}{E_s} = \frac{4.44 f N_p \Phi_m}{4.44 f N_s \Phi_m}$$

obtenemos:



$$\frac{E_p}{E_s} = \frac{N_p}{N_s} \tag{21.14}$$

mostrando una importante relación para los transformadores:

La razón de las magnitudes de los voltajes inducidos es igual a la razón del número de vueltas correspondientes.

Si considerar que:

$$e_p = N_p \frac{d\phi_m}{dt} \quad \text{y} \quad e_s = N_s \frac{d\phi_m}{dt}$$

y dividir una entre la otra, es decir,

$$\frac{e_p}{e_s} = \frac{N_p(d\phi_m/dt)}{N_s(d\phi_m/dt)}$$

entonces:

$$\frac{e_p}{e_s} = \frac{N_p}{N_s}$$

Los valores *instantáneos* de e_1 y e_2 están, por tanto, relacionados mediante una constante determinada por la razón de vueltas. Como sus magnitudes instantáneas están relacionadas por una constante, los voltajes inducidos están en fase, y la ecuación (21.14) puede ser cambiada para incluir notación fasorial; esto es,

$$\frac{\mathbf{E}_p}{\mathbf{E}_s} = \frac{N_p}{N_s} \tag{21.15}$$

o, como $\mathbf{V}_g = \mathbf{E}_1$ y $\mathbf{V}_L = \mathbf{E}_2$ para la situación ideal,

$$\frac{\mathbf{V}_g}{\mathbf{V}_L} = \frac{N_p}{N_s} \tag{21.16}$$

La razón N_p/N_s, representada usualmente por la letra a minúscula, se denomina **razón de transformación**:

$$a = \frac{N_p}{N_s} \tag{21.17}$$

Si $a < 1$, el transformador se llama **transformador de elevación** ya que el voltaje $E_s > E_p$; es decir,

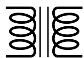
$$\frac{E_p}{E_s} = \frac{N_p}{N_s} = a \quad \text{o} \quad E_s = \frac{E_p}{a}$$

y, si $a < 1$, $\qquad E_s > E_p$

Si $a > 1$, el transformador se llama **transformador de disminución** ya que $E_s < E_p$; es decir,

$$E_p = aE_s$$

y, si $a > 1$, entonces: $\qquad E_p > E_s$



EJEMPLO 21.2 Para el transformador con núcleo de hierro de la figura 21.5:

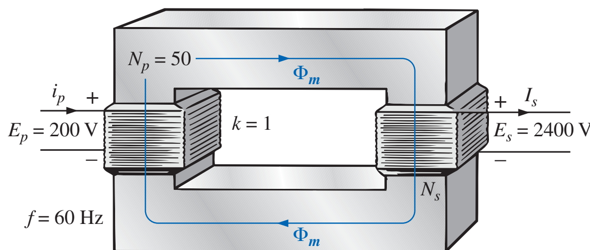


FIGURA 21.5
Ejemplo 21.2.

a. Encuentre el flujo máximo Φ_m.
b. Encuentre las vueltas del secundario N_s.

Soluciones:

a. $E_p = 4.44N_p f\Phi_m$

Por tanto, $$\Phi_m = \frac{E_p}{4.44N_p f} = \frac{200 \text{ V}}{(4.44)(50 \text{ t})(60 \text{ Hz})}$$

y $$\Phi_m = \mathbf{15.02 \text{ mWb}}$$

b. $$\frac{E_p}{E_s} = \frac{N_p}{N_s}$$

Por tanto, $$N_s = \frac{N_p E_s}{E_p} = \frac{(50 \text{ t})(2400 \text{ V})}{200 \text{ V}}$$
$$= \mathbf{600 \text{ vueltas}}$$

El voltaje inducido en el secundario del transformador de la figura 21.4 establecerá una corriente i_s a través de la carga Z_L y los devanados del secundario. Esta corriente y las vueltas N_s desarrollarán una fmm $N_s i_s$ que no estaría presente bajo condiciones de no carga ya que $i_s = 0$ y $N_s i_s = 0$. Sin embargo, bajo condiciones de carga o no carga, los ampere-vueltas netos sobre el núcleo producidas por el primario y el secundario deben permanecer sin cambio para el mismo flujo ϕ_m por ser establecido en el núcleo. El flujo ϕ_m debe permanecer igual para tener el mismo voltaje inducido en el primario y equilibrar el voltaje aplicado en éste. Para contrarrestar la fmm del secundario, que tiende a cambiar a ϕ_m, debe fluir una corriente adicional en el primario. Esta corriente se llama *componente de carga de la corriente del primario* y se representa con la notación i'_p.

Para la condición de equilibrio,

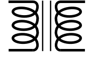
$$N_p i'_p = N_s i_s$$

La corriente total en el primario bajo condiciones de carga es:

$$i_p = i'_p + i_{\phi_m}$$

donde i_{ϕ_m} es la corriente necesaria en el primario para establecer el flujo ϕ_m. En la mayor parte de las aplicaciones prácticas, $i'_p > i_{\phi_m}$. Para nuestro análisis, supondremos $i_p \cong i'_p$, por lo que:

$$N_p i_p = N_s i_s$$



Como los valores instantáneos de i_p e i_s están relacionados por la razón de vueltas, las cantidades fasoriales $\mathbf{I}_p$ e $\mathbf{I}_s$ también están relacionadas por la misma razón:

$$N_p\mathbf{I}_p = N_s\mathbf{I}_s$$

o

$$\frac{\mathbf{I}_p}{\mathbf{I}_s} = \frac{N_s}{N_p} \tag{21.18}$$

Las corrientes en el primario y el secundario de un transformador están, por tanto, relacionadas mediante las razones inversas del número de vueltas.

El lector debe tener presente que la ecuación (21.18) sólo es cierta cuando ignoramos los efectos de i_{ϕ_m}. De otra manera, las magnitudes de $\mathbf{I}_p$ e $\mathbf{I}_s$ no están relacionadas por la razón de vueltas, e $\mathbf{I}_p$ e $\mathbf{I}_s$ no están en fase.

Para el transformador de elevación, $a < 1$, y la corriente en el secundario, $I_s = aI_p$, es menor en magnitud que la del primario. Para un transformador de disminución, lo inverso es cierto.

21.4 IMPEDANCIA REFLEJADA Y POTENCIA

En la sección previa encontramos que:

$$\frac{\mathbf{V}_g}{\mathbf{V}_L} = \frac{N_p}{N_s} = a \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{I}_p}{\mathbf{I}_s} = \frac{N_s}{N_p} = \frac{1}{a}$$

Al dividir la primera expresión entre la segunda tenemos:

$$\frac{\mathbf{V}_g/\mathbf{V}_L}{\mathbf{I}_p/\mathbf{I}_s} = \frac{a}{1/a}$$

o bien:

$$\frac{\mathbf{V}_g/\mathbf{I}_p}{\mathbf{V}_L/\mathbf{I}_s} = a^2 \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{V}_g}{\mathbf{I}_p} = a^2\frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{I}_s}$$

Sin embargo, como:

$$\mathbf{Z}_p = \frac{\mathbf{V}_g}{\mathbf{I}_p} \quad \text{y} \quad \mathbf{Z}_L = \frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{I}_s}$$

entonces:

$$\mathbf{Z}_p = a^2\mathbf{Z}_L \tag{21.19}$$

la cual establece que la impedancia del circuito primario de un transformador ideal es la razón de transformación al cuadrado multiplicada por la impedancia de la carga. Por tanto, si se usa un transformador, una impedancia puede hacerse aparecer más grande o más pequeña en el primario colocándola en el secundario de un transformador de disminución ($a > 1$) o en el de un transformador de elevación ($a < 1$), respectivamente. Observe que si la carga es capacitiva o inductiva, la **impedancia reflejada** será también capacitiva o inductiva.

Para el transformador ideal con núcleo de hierro,

$$\frac{E_p}{E_s} = a = \frac{I_s}{I_p}$$

o bien:

$$E_pI_p = E_sI_s \tag{21.20}$$

y

$$P_{\text{entrada}} = P_{\text{salida}} \quad \text{(condiciones ideales)} \tag{21.21}$$

EJEMPLO 21.3 Para el transformador con núcleo de hierro de la figura 21.6:

a. Encuentre la magnitud de la corriente en el primario y el voltaje aplicado en éste.
b. Encuentre la resistencia de entrada del transformador.

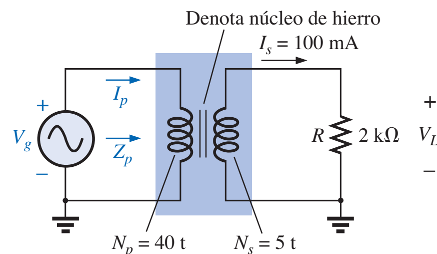


FIGURA 21.6
Ejemplo 21.3.

Soluciones:

a. $\dfrac{I_p}{I_s} = \dfrac{N_s}{N_p}$

$$I_p = \frac{N_s}{N_p}I_s = \left(\frac{5\text{ t}}{40\text{ t}}\right)(0.1\text{ A}) = \mathbf{12.5\text{ mA}}$$

$$V_L = I_s Z_L = (0.1\text{ A})(2\text{ k}\Omega) = 200\text{ V}$$

También, $\dfrac{V_g}{V_L} = \dfrac{N_p}{N_s}$

$$V_g = \frac{N_p}{N_s}V_L = \left(\frac{40\text{ t}}{5\text{ t}}\right)(200\text{ V}) = \mathbf{1600\text{ V}}$$

b. $Z_p = a^2 Z_L$

$$a = \frac{N_p}{N_s} = 8$$

$$Z_p = (8)^2(2\text{ k}\Omega) = R_p = \mathbf{128\text{ k}\Omega}$$

EJEMPLO 21.4 Para el suministro residencial que aparece en la figura 21.7, determine (suponiendo una carga totalmente resistiva) lo siguiente:

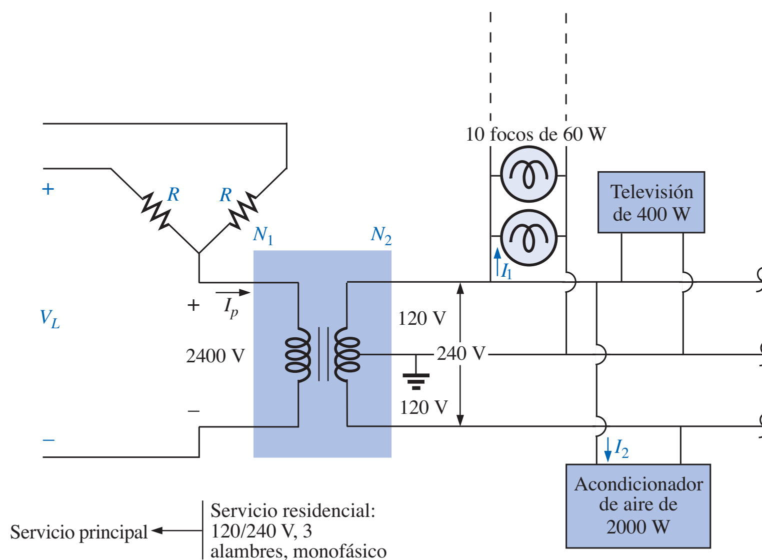
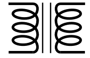


FIGURA 21.7
Suministro residencial monofásico.

a. El valor de R para asegurar una carga balanceada.
b. La magnitud de I_1 e I_2.
c. El voltaje de línea V_L.
d. La potencia total entregada.
e. La razón de vueltas $a = N_p/N_s$.



Soluciones:

a. $P_T = (10)(60\text{ W}) + 400\text{ W} + 2000\text{ W}$
$= 600\text{ W} + 400\text{ W} + 2000\text{ W} = 3000\text{ W}$

$P_{\text{entrada}} = P_{\text{salida}}$

$V_pI_p = V_sI_s = 3000\text{ W}$ (carga puramente resistiva)

$(2400\text{ V})I_p = 3000\text{ W}$ e $I_p = 1.25\text{ A}$

$$R = \frac{V_\phi}{I_p} = \frac{2400\text{ V}}{1.25\text{ A}} = \mathbf{1920\ \Omega}$$

b. $P_1 = 600\text{ W} = VI_1 = (120\text{ V})I_1$

e $I_1 = \mathbf{5\ A}$

$P_2 = 2000\text{ W} = VI_2 = (240\text{ V})I_2$

e $I_2 = \mathbf{8.33\ A}$

c. $V_L = \sqrt{3}V_\phi = 1.73(2400\text{ V}) = \mathbf{4152\ V}$

d. $P_T = 3P_\phi = 3(3000\text{ W}) = \mathbf{9\ kW}$

e. $a = \dfrac{N_p}{N_s} = \dfrac{V_p}{V_s} = \dfrac{2400\text{ V}}{240\text{ V}} = \mathbf{10}$

21.5 ACOPLAMIENTO DE IMPEDANCIA, AISLAMIENTO Y DESPLAZAMIENTO

Los transformadores pueden ser particularmente útiles cuando se trata de garantizar que una carga reciba máxima potencia desde una fuente. Recuérdese que la máxima potencia es transferida a una carga cuando su impedancia está acoplada con la resistencia interna de la fuente. Aun cuando un acoplamiento perfecto es inalcanzable, entre más se acople una carga a la resistencia interna, mayor será la potencia hacia la carga y más eficiente será el sistema. Desafortunadamente, a menos que esté planeado como parte del diseño, la mayoría de las cargas no se acoplan con la impedancia interna de la fuente. Sin embargo, los transformadores tienen una relación única entre sus impedancias del primario y secundario que puede usarse en el proceso de acoplamiento de la impedancia. El ejemplo 21.5 demostrará la importante diferencia en la potencia entregada a la carga con y sin un transformador para acoplamiento de la impedancia.

EJEMPLO 21.5

a. La impedancia de fuente para la fuente de la figura 21.8(a) es de 512 Ω, la cual es un acoplamiento pobre con la impedancia de entrada de 8 Ω de la bocina. Sólo puede esperarse que la potencia entregada a la bocina sea considerablemente menor que el máximo nivel posible. Determine la potencia a la bocina bajo las condiciones de la figura 21.8(a).
b. En la figura 21.8(b) fue introducido un transformador de acoplamiento de impedancia de audio entre la bocina y la fuente, y fue diseñado para asegurar una potencia máxima a la bocina de 8 Ω. Determine la impedancia de entrada del transformador y la potencia entregada a la bocina.
c. Compare la potencia entregada a la bocina bajo las condiciones de los incisos (a) y (b).

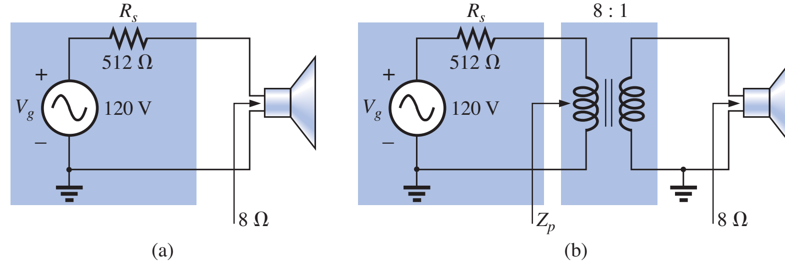


FIGURA 21.8
Ejemplo 21.5.

Soluciones:

a. La corriente de la fuente:

$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{120 \text{ V}}{512\ \Omega + 8\ \Omega} = \frac{120 \text{ V}}{520\ \Omega} = 230.8 \text{ mA}$$

La potencia hacia la bocina:

$$P = I^2R = (230.8 \text{ mA})^2 \cdot 8\ \Omega = \mathbf{426.15\ mW} \cong \mathbf{0.43\ W}$$

o menos de medio watt.

b. $Z_p = a^2 Z_L$

$$a = \frac{N_p}{N_s} = \frac{8}{1} = 8$$

y $$Z_p = (8)^2 8\ \Omega = \mathbf{512\ \Omega}$$

la cual acopla la de la fuente. Las condiciones de máxima transferencia de potencia han sido establecidas, y ahora la corriente de la fuente está determinada por:

$$I_s = \frac{E}{R_T} = \frac{120 \text{ V}}{512\ \Omega + 512\ \Omega} = \frac{120 \text{ V}}{1024\ \Omega} = 117.19 \text{ mA}$$

La potencia en el primario (que es igual a la del secundario para el transformador ideal) es:

$$P = I^2R = (117.19 \text{ mA})^2\ 512\ \Omega = \mathbf{7.032\ W}$$

El resultado no está en miliwatts, como antes, y excede en 7 W, lo que es una mejora considerable.

c. La comparación de niveles resulta en 7.032 W/426.15 mW = 16.5, o más de 16 veces la potencia entregada a la bocina usando el transformador de acoplamiento de impedancia.

Otra importante aplicación de las capacidades de un transformador de acoplamiento de impedancia es el acoplamiento de la línea de transmisión de línea dual de 300 Ω desde una antena de televisión hasta la impedancia de entrada de 75 Ω de las televisiones actuales (fabricadas para el cable coaxial de 75 Ω), como se muestra en la figura 21.9. Debe efectuarse un acoplamiento para asegurar la señal más intensa hacia el receptor de televisión.

Al emplear la ecuación $Z_p = a^2 Z_L$ encontramos:

$$300\ \Omega = a^2 75\ \Omega$$

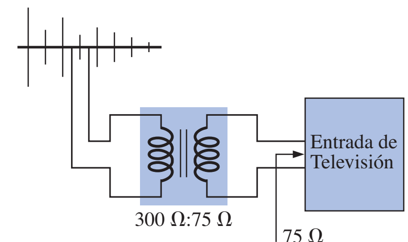
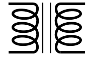


FIGURA 21.9
Transformador de acoplamiento de impedancia para televisión.



y $$a = \sqrt{\frac{300\ \Omega}{75\ \Omega}} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$$

con: $N_p : N_s = 2 : 1$ (transformador de disminución)

EJEMPLO 21.6 Los transformadores de acoplamiento de impedancia también son muy utilizados en los sistemas audiodifusores, tales como el que aparece en el sistema de 70.7 V de la figura 21.10. Aunque el sistema tiene un solo conjunto de terminales de salida, se le pueden conectar hasta cuatro bocinas (el número es una función del sistema elegido). Cada bocina de 8 Ω está conectada a la línea de 70.7 V por medio de un transformador de audio de acoplamiento de 10 W (definiendo el intervalo de frecuencia de operación lineal).

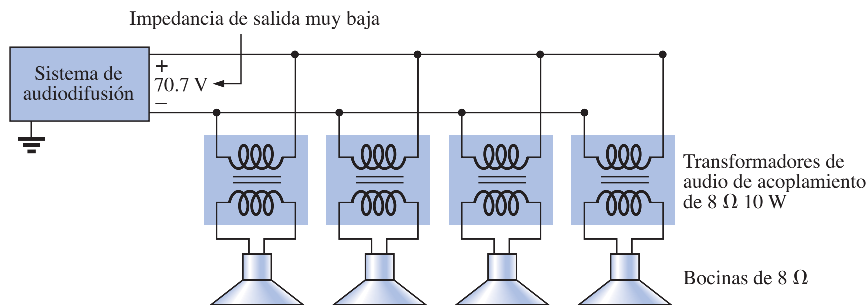


FIGURA 21.10
Sistema de audiodifusión.

a. Si cada bocina de la figura 21.10 puede recibir 10 W de potencia, ¿cuál es la potencia máxima extraída de la fuente?
b. Para cada bocina, determine la impedancia vista en el lado de entrada del transformador si cada una está operando a su potencia total de 10 W.
c. Determine la razón de vueltas de los transformadores.
d. A 10 W, ¿cuáles son el voltaje y la corriente de la bocina?
e. ¿Cuál es la carga vista por la fuente con una, dos, tres o cuatro bocinas conectadas?

Soluciones:

a. Idealmente, la potencia en el primario es igual a la potencia entregada a la carga, resultando un máximo de **40 W** desde la fuente.
b. La potencia en el primario:

$$P_p = V_p I_p = (70.7\ \text{V})\ I_p = 10\ \text{W}$$

e $$I_p = \frac{10\ \text{W}}{70.7\ \text{V}} = 141.4\ \text{mA}$$

de manera que: $$Z_p = \frac{V_p}{I_p} = \frac{70.7\ \text{V}}{141.4\ \text{mA}} = \mathbf{500\ \Omega}$$

c. $$Z_p = a^2 Z_L \Rightarrow a = \sqrt{\frac{Z_p}{Z_L}} = \sqrt{\frac{500\ \Omega}{8\ \Omega}} = \sqrt{62.5} = \mathbf{7.91} \cong \mathbf{8:1}$$

d. $$V_s = V_L = \frac{V_p}{a} = \frac{70.7\ \text{V}}{7.91} = \mathbf{8.94\ V} \cong \mathbf{9\ V}$$

e. Todas las bocinas están en paralelo. Por tanto,

Una bocina: $R_T = \mathbf{500\ \Omega}$

Dos bocinas: $R_T = \dfrac{500\ \Omega}{2} = \mathbf{250\ \Omega}$

Tres bocinas: $R_T = \dfrac{500\ \Omega}{3} = \mathbf{167\ \Omega}$

Cuatro bocinas: $R_T = \dfrac{500\ \Omega}{4} = \mathbf{125\ \Omega}$

Aunque la carga vista por la fuente variará con el número de bocinas conectadas, la impedancia de la fuente es tan baja (comparada con la carga más baja de 125 Ω) que el voltaje en las terminales de 70.7 V es esencialmente constante. Éste no es el caso donde el resultado deseado debe acoplar la carga a la impedancia de entrada; más bien se trata de asegurar 70.7 V en cada primario, sin importar cuántas bocinas estén conectadas, y limitar la corriente extraída de la fuente.

El transformador se usa a menudo para aislar una parte de un sistema eléctrico de otra. El *aislamiento* implica la ausencia de toda conexión física directa. Como primer ejemplo de su uso como dispositivo aislante, considere la medición de voltajes de línea del orden de 40,000 V (Figura 21.11).

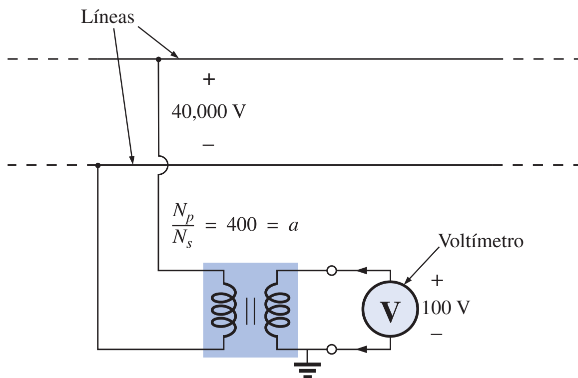


FIGURA 21.11
Aislamiento de una línea de alto voltaje del punto de medición.

Aplicar un voltímetro a través de 40,000 V por supuesto que sería una tarea peligrosa debido a la posibilidad de tener un contacto físico con las líneas al hacer las conexiones necesarias. Incluyendo un transformador en el sistema de transmisión como equipo original, se puede bajar el potencial a un nivel seguro para fines de medición y se puede determinar el voltaje de la línea usando la razón de vueltas. Por tanto, el transformador servirá para aislar y disminuir el voltaje.

Como segundo ejemplo, considere la aplicación del voltaje v_x a la entrada vertical del osciloscopio (un instrumento de medición) en la figura 21.12. Si las conexiones se hacen como se muestra, y si generador y osciloscopio tienen una tierra común, la impedancia $\mathbf{Z}_2$ ha sido efectivamente puesta en corto fuera del circuito por la conexión a tierra del osciloscopio. El voltaje de entrada al

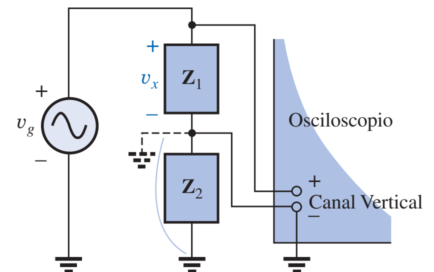
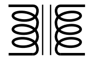


FIGURA 21.12
Demostración del efecto de corto introducido al aterrizar el lado del canal vertical de un osciloscopio.



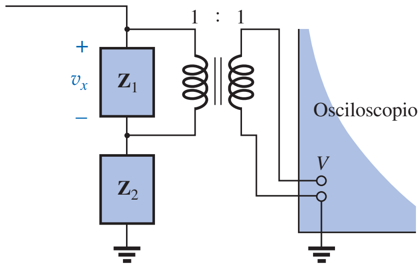


FIGURA 21.13
Corrección de la situación de la figura 21.12 usando un transformador de aislamiento.

osciloscopio no tendrá importancia en lo que se refiere al voltaje v_x. Además, si $\mathbf{Z}_2$ es la impedancia limitante de corriente en el circuito, la corriente en éste puede elevarse a un nivel que causará daño severo al circuito. Si un transformador se usa como se muestra en la figura 21.13, este problema será eliminado, y el voltaje de entrada al osciloscopio será v_x.

El transformador diferencial lineal variable (LVDT) es un sensor que puede mostrar desplazamientos usando efectos de transformador. En su forma más simple, el LVDT tiene un devanado central y dos devanados secundarios, como se muestra en la figura 21.14(a). Un núcleo ferromagnético dentro de los devanados tiene libertad de movimiento según lo dicte una fuerza externa. Un voltaje de ca constante de bajo nivel es aplicado al devanado primario, y el voltaje de salida es la diferencia entre los voltajes inducidos en los devanados secundarios. Si el núcleo está en la posición mostrada en la figura 21.14(b), un voltaje relativamente grande será inducido en el devanado secundario llamado bobina 1, y un voltaje relativamente pequeño será inducido en el devanado secundario llamado bobina 2 (esencialmente un transformador de núcleo de aire para esta posición). El resultado es un voltaje de salida en el secundario relativamente grande. Si el núcleo está en la posición mostrada en la figura 21.14(c), el flujo que enlaza cada bobina es el mismo, y el voltaje de salida (igual a la diferencia) será bastante pequeño. Por tanto, en total, la posición del núcleo puede relacionarse con el voltaje en el secundario, y una gráfica de voltaje en función de la posición puede desarrollarse como se muestra en la figura 21.14(d). Debido a la no linealidad de la curva *B-H*, la curva resulta algo no lineal si el núcleo se mueve demasiado lejos de la unidad.

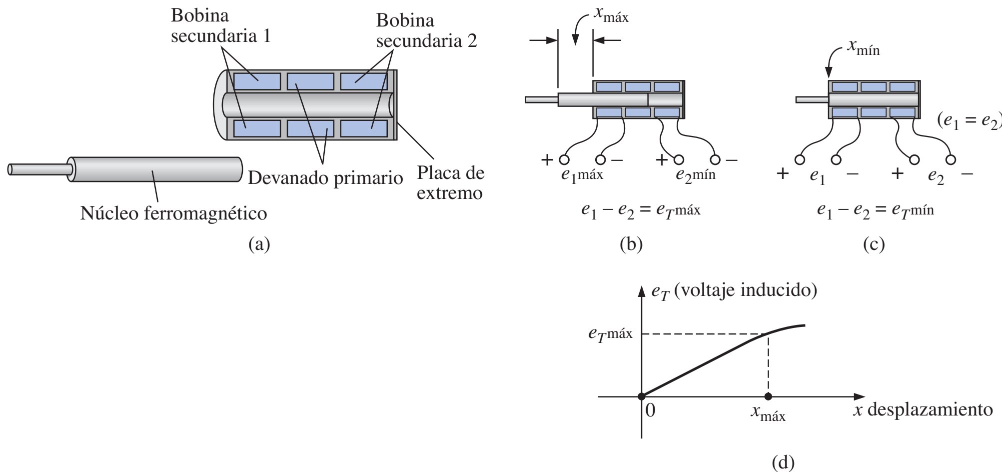


FIGURA 21.14
Transformador LVDT: (a) construcción; (b) desplazamiento máximo; (c) desplazamiento mínimo; (d) gráfica del voltaje inducido en función del desplazamiento.

21.6 CIRCUITO EQUIVALENTE (TRANSFORMADOR CON NÚCLEO DE HIERRO)

Para el transformador de núcleo de hierro no ideal o práctico, el circuito equivalente se muestra en la figura 21.15. Como se indicó, parte de este circuito equivalente incluye un transformador ideal. Los elementos restantes de la figura 21.15 son los que aportan las características no ideales del dispositivo. Las resistencias R_p y R_s son solo la resistencia de cd o geométrica de los devanados primario y secundario, respectivamente. Para las bobinas del primario y

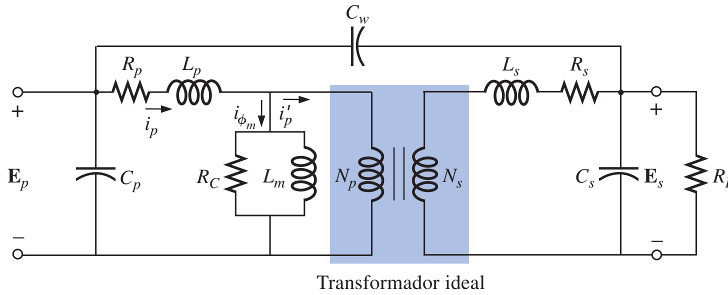


FIGURA 21.15
Circuito equivalente para el transformador práctico con núcleo de hierro.

secundario de un transformador, hay una pequeña cantidad de flujo que enlaza cada bobina pero no pasa por el núcleo, como se muestra en la figura 21.16 para el devanado primario. Este **flujo de fuga**, que representa una pérdida definida en el sistema, está representado por una inductancia L_p en el circuito primario y una inductancia L_s en el secundario.

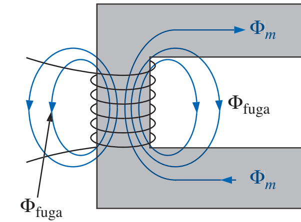


FIGURA 21.16
Identificación del flujo de fuga del primario.

La resistencia R_c representa las pérdidas por histéresis y corrientes parásitas (pérdidas en el núcleo) dentro del núcleo debido a un flujo de ca a través del núcleo. La inductancia L_m (inductancia magnetizante) es la inductancia asociada con la magnetización del núcleo, es decir, el establecimiento del flujo Φ_m en el núcleo. Las capacitancias C_p y C_s son las capacitancias concentradas de los circuitos primario y secundario, respectivamente, y C_w representa las capacitancias concentradas equivalentes entre los devanados del transformador.

Como i'_p es, por lo general, considerablemente mayor que i_{ϕ_m} (la corriente magnetizante), por el momento ignoraremos i_{ϕ_m} (estableciéndola igual a cero), lo que resulta en la ausencia de R_c y L_m en el circuito equivalente reducido de la figura 21.17. Las capacitancias C_p, C_w y C_s no aparecen en el circuito equivalente de la figura 21.17 ya que sus reactancias a frecuencias típicas de operación no afectarán apreciablemente las características de transferencia del transformador.

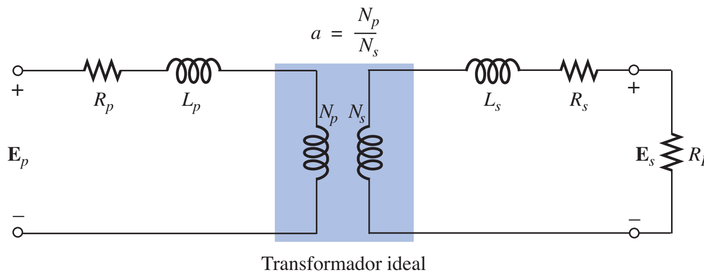
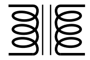


FIGURA 21.17
Circuito equivalente reducido para el transformador no ideal con núcleo de hierro.

Si ahora reflejamos el circuito secundario a través del transformador ideal usando la ecuación (21.19), como se muestra en la figura 21.18(a), tendremos la carga y el voltaje generador en el mismo circuito continuo. La resistencia total y la reactancia inductiva del circuito primario son determinadas por:

$$R_{\text{equivalente}} = R_e = R_p + a^2 R_s \qquad \textbf{(21.22)}$$



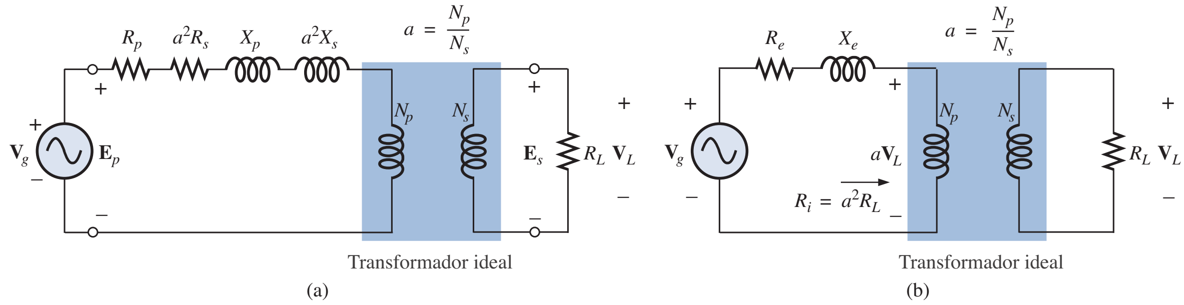


FIGURA 21.18
Reflexión del circuito secundario en el lado primario del transformador con núcleo de hierro.

y

$$X_{\text{equivalente}} = X_e = X_p + a^2X_s \tag{21.23}$$

que resulta en el útil circuito equivalente de la figura 21.18(b). El voltaje de la carga puede obtenerse directamente del circuito de la figura 21.18(b) por medio de la regla del divisor de voltaje:

$$a\mathbf{V}_L = \frac{(R_i)\mathbf{V}_g}{(R_e + R_i) + j\,X_e}$$

y

$$a\mathbf{V}_L = \frac{a^2R_L\mathbf{V}_g}{(R_e + a^2R_L) + j\,X_e} \tag{21.24}$$

La red de la figura 21.18(b) también nos permitirá calcular el voltaje generador necesario para establecer un voltaje particular de carga. Los voltajes en los elementos de la figura 21.18(b) tienen la relación fasorial indicada en la figura 21.19(a). Observe que la corriente es el fasor de referencia para trazar el diagrama fasorial. Es decir, los voltajes en los elementos resistivos están *en fase* con el fasor corriente, mientras que el voltaje en la inductancia equivalente adelanta a la corriente por 90°. El voltaje en el primario, por la ley de Kirchhoff, es entonces la suma fasorial de esos voltajes, como se indica en la figura 21.19(a). El diagrama fasorial para una carga inductiva aparece en la figura 21.19(b). Observe que $a\mathbf{V}_L$ adelanta a $\mathbf{I}$ por el ángulo factor de potencia de la carga. El resto del diagrama es entonces similar al de una carga resistiva. (El diagrama fasorial para una carga capacitiva se dejará al lector como ejercicio.)

El efecto de R_e y X_e sobre la magnitud de $\mathbf{V}_g$ para un $\mathbf{V}_L$ en particular resulta obvio a partir de la ecuación (21.24) o de la figura 21.19. Para valores crecientes de R_e o X_e, se requiere un incremento en $\mathbf{V}_g$ para el mismo voltaje de carga. Para R_e y $X_e = 0$, $\mathbf{V}_L$ y $\mathbf{V}_g$ están simplemente relacionados por la razón de vueltas.

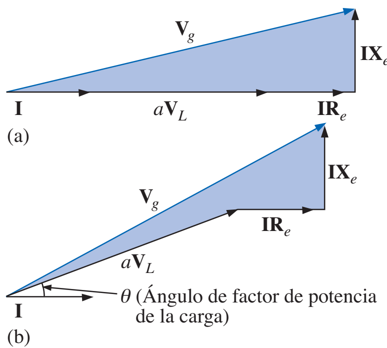


FIGURA 21.19
Diagrama fasorial para el transformador con núcleo de hierro con (a) carga de factor de potencia unitario (resistiva), y (b) carga de factor de potencia en atraso (inductiva).

EJEMPLO 21.7 Para un transformador con el circuito equivalente de la figura 21.20:

a. Determine R_e y X_e.
b. Determine la magnitud de los voltajes V_L y V_g.
c. Determine la magnitud del voltaje V_g para establecer el mismo voltaje de carga en la parte (b) si R_e y $X_e = 0\ \Omega$. Compárelo con el resultado del inciso (b).

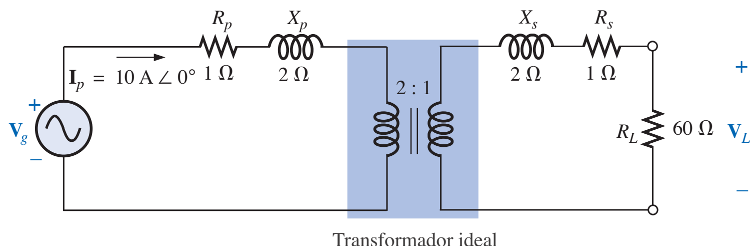


FIGURA 21.20
Ejemplo 21.7.

Soluciones:

a. $R_e = R_p + a^2R_s = 1\ \Omega + (2)^2(1\ \Omega) = \mathbf{5\ \Omega}$

$X_e = X_p + a^2X_s = 2\ \Omega + (2)^2(2\ \Omega) = \mathbf{10\ \Omega}$

b. El circuito equivalente transformado aparece en la figura 21.21.

$$aV_L = (I_p)(a^2R_L) = 2400\ \text{V}$$

Entonces,

$$V_L = \frac{2400\ \text{V}}{a} = \frac{2400\ \text{V}}{2} = \mathbf{1200\ V}$$

y

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{I}_p(R_e + a^2R_L + j\,X_e)$$
$$= 10\ \text{A}(5\ \Omega + 240\ \Omega + j\,10\ \Omega) = 10\ \text{A}(245\ \Omega + j\,10\ \Omega)$$
$$\mathbf{V}_g = 2450\ \text{V} + j\,100\ \text{V} = 2452.04\ \text{V}\ \angle 2.34^\circ = \mathbf{2452.04\ V\ \angle 2.34^\circ}$$

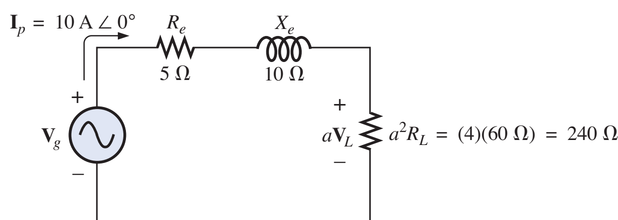


FIGURA 21.21
Circuito equivalente transformado de la figura 21.20.

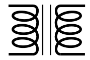
c. Para R_e y $X_e = 0$, $V_g = aV_L = (2)(1200\ \text{V}) = 2400\ \text{V}$.

Por tanto, es necesario incrementar el voltaje generador en 52.04 V (debido a R_e y X_e) para obtener el mismo voltaje de carga.

21.7 CONSIDERACIONES DE FRECUENCIA

Para ciertos intervalos de frecuencia, el efecto de algunos parámetros en el circuito equivalente del transformador con núcleo de hierro de la figura 21.15 no debe ignorarse. Como es conveniente considerar regiones de frecuencia baja, media y alta, los circuitos equivalentes para cada una serán presentados a continuación y examinados brevemente.

Para la región de frecuencia baja, la reactancia en serie ($2\pi fL$) de las reactancias de fuga del primario y secundario puede ser ignorada ya que éstas son pequeñas en magnitud. Sin embargo, la inductancia magnetizante debe ser



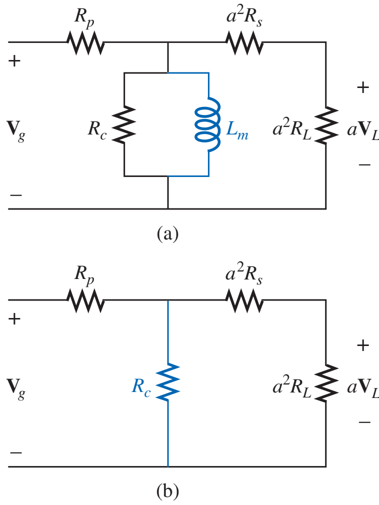


FIGURA 21.22
(a) Circuito equivalente reflejado de frecuencia baja; (b) circuito reflejado de frecuencia media.

incluida ya que aparece en paralelo con el circuito reflejado del secundario, e impedancias pequeñas en una red en paralelo pueden tener un impacto considerable sobre las características en las terminales. La red equivalente resultante para la región de frecuencia baja está dada en la figura 21.22(a). Al disminuir la frecuencia, la reactancia de la inductancia magnetizante se reduce en magnitud, ocasionando una reducción en el voltaje en el circuito del secundario. Para $f = 0$ Hz, L_m es idealmente un corto circuito, y $V_L = 0$. Al incrementarse la frecuencia, la reactancia de L_m será, en definitiva, lo suficientemente grande, comparada con la impedancia reflejada del secundario, como para ser ignorada. El circuito reflejado equivalente de media frecuencia se verá entonces como se muestra en la figura 21.22(b). Observe la ausencia de elementos reactivos, resultando en una relación *en fase* entre el voltaje de carga y de generador.

Para frecuencias más altas, los elementos capacitivos y las reactancias de fuga del primario y del secundario deben ser considerados como se muestra en la figura 21.23. Con fines de análisis, los efectos de C_w y C_s aparecen como un capacitor concentrado C en la red reflejada de la Figura 21.23; C_p no aparece ya que predominará el efecto de C. Conforme la frecuencia de interés aumenta, la reactancia capacitiva ($X_C = 1/2\pi fC$) disminuirá hasta el punto en que tendrá un efecto de corto en el circuito del secundario del transformador, ocasionando que V_L disminuya en magnitud.

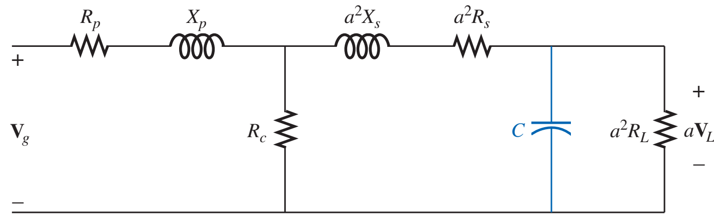


FIGURA 21.23
Circuito equivalente reflejado de frecuencia alta.

En la figura 21.24 se muestra una curva típica de respuesta en frecuencia de un transformador de núcleo de hierro. Para las regiones de frecuencia baja y alta, el elemento primario responsable del decaimiento está indicado. El efecto pico que ocurre en la región de frecuencia alta se debe al circuito resonante en serie establecido por los elementos inductivos y capacitivos del circuito equivalente. En la región del pico, el circuito resonante en serie está en, o cerca de, su estado resonante o sintonizado.

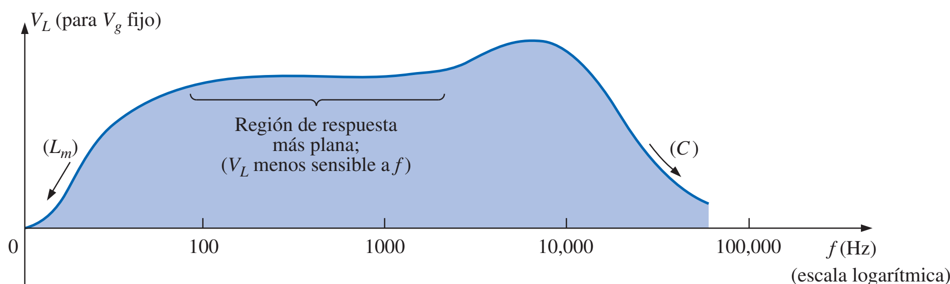


FIGURA 21.24
Curva de la respuesta en frecuencia de un transformador.

21.8 CONEXIÓN EN SERIE DE BOBINAS MUTUAMENTE ACOPLADAS

En el capítulo 12 encontramos que la inductancia total de bobinas en serie aisladas se determina mediante la suma de las inductancias. Para dos bobinas conectadas en serie, pero que también comparten los mismos flujos de enlace, tales como las de la figura 21.25(a), se introduce un término mutuo que alterará la inductancia total de la combinación en serie. La figura 21.25(b) muestra cómo se conectan físicamente las bobinas. Se incluye un núcleo de hierro, aunque las ecuaciones por desarrollar son para dos bobinas cualesquiera mutuamente acopladas y con cualquier valor del coeficiente k de acoplamiento. Al referirnos al voltaje inducido en la inductancia L_1 (o L_2) debido al cambio en los flujos de enlace de la inductancia L_2 (o L_1, respectivamente), la inductancia mutua se representa mediante M_{12}. Este tipo de notación a base de subíndices es en especial importante cuando hay dos o más términos mutuos.

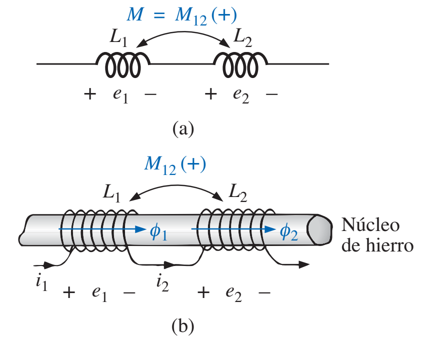


FIGURA 21.25
Bobinas mutuamente acopladas conectadas en serie.

A causa de la presencia del término mutuo, el voltaje inducido e_1 está compuesto de lo debido a la autoinductancia L_1 y lo debido a la inductancia mutua M_{12}. Es decir,

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

Sin embargo, como $i_1 = i_2 = i$,

$$e_1 = L_1 \frac{di}{dt} + M_{12} \frac{di}{dt}$$

o bien:
$$e_1 = (L_1 + M_{12}) \frac{di}{dt} \qquad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(21.25)}$$

y, similarmente,

$$e_2 = (L_2 + M_{12}) \frac{di}{dt} \qquad \text{(volts, V)} \qquad \textbf{(21.26)}$$

Para la conexión en serie, el voltaje total inducido en las bobinas en serie, representado por e_T, es:

$$e_T = e_1 + e_2 = (L_1 + M_{12}) \frac{di}{dt} + (L_2 + M_{12}) \frac{di}{dt}$$

o bien:
$$e_T = (L_1 + L_2 + M_{12} + M_{12}) \frac{di}{dt}$$

y la inductancia efectiva total es:

$$L_{T(+)} = L_1 + L_2 + 2M_{12} \qquad \text{(henrys, H)} \qquad \textbf{(21.27)}$$

El subíndice (+) fue incluido para indicar que los términos mutuos tienen un signo positivo y son sumados a los valores de la autoinductancia para determinar la inductancia total. Si las bobinas fueran enrolladas como se muestra en la figura 21.26, donde ϕ_1 y ϕ_2 están en oposición, los voltajes inducidos debidos a los términos mutuos se opondrían a los debidos a la autoinductancia, y la inductancia total se determinaría con:

$$L_{T(-)} = L_1 + L_2 - 2M_{12} \qquad \text{(henrys, H)} \qquad \textbf{(21.28)}$$

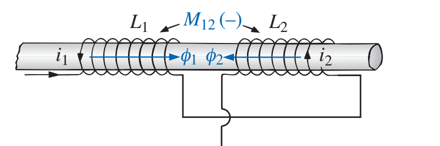
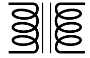


FIGURA 21.26
Bobinas mutuamente acopladas conectadas en serie con inductancia mutua negativa.



Directamente de las ecuaciones (21.27) y (21.28), la inductancia mutua puede determinarse mediante

$$M_{12} = \frac{1}{4}(L_{T(+)} - L_{T(-)}) \tag{21.29}$$

La ecuación (21.29) es muy efectiva en la determinación de la inductancia mutua entre dos bobinas. Establece que la inductancia mutua es igual a un cuarto de la diferencia entre la inductancia total con un efecto mutuo positivo y negativo.

De lo anterior, debe quedar claro que la inductancia mutua afectará directamente la magnitud del voltaje inducido en una bobina ya que esto determinará la inductancia neta de la bobina. Un examen adicional revela que el signo del término mutuo para cada bobina de un par acoplado es el mismo. Para $L_{T(+)}$ ambos términos fueron positivos, y para $L_{T(-)}$ ambos fueron negativos. Sobre un esquema de red, donde es inconveniente indicar los devanados y la trayectoria del flujo, se emplea un sistema de puntos que determinará si los términos mutuos son positivos o negativos. La convención del punto se muestra en la figura 21.27 para las bobinas en serie de las figuras 21.25 y 21.26.

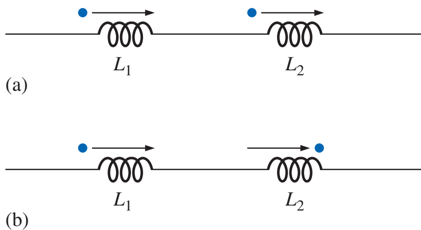


FIGURA 21.27
Convención del punto para las bobinas en serie de (a) la figura 21.25, y (b) la figura 21.26.

Si la corriente a través de *cada una* de las bobinas mutuamente acopladas se aleja del punto (o se dirige) *al pasar por la bobina*, el término mutuo será positivo, como se muestra para el caso en la figura 21.27(a). Si la flecha que indica la dirección de la corriente a través de la bobina sale del punto para una bobina y entra al punto para la otra, el término mutuo es negativo.

Algunas posibilidades para bobinas de transformadores mutuamente acopladas se ilustran en la figura 21.28(a). El signo de M se indica para cada una. Al determinar el signo, asegúrese de examinar la dirección de la corriente dentro de la propia bobina. En la figura 21.28(b), una dirección está indicada hacia afuera para una bobina y hacia adentro para la otra. Al principio podría parecer que el signo debe ser positivo ya que ambas corrientes entran al punto, pero la corriente *a través* de la bobina 1 está saliendo del punto; por consiguiente, es correcto un signo negativo.

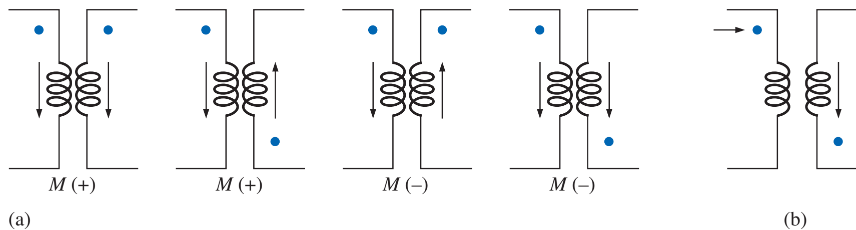
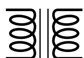


FIGURA 21.28
Definición del signo de M para bobinas de transformador mutuamente acopladas.

La convención del punto muestra también la polaridad del voltaje *inducido* en las bobinas mutuamente acopladas. Si la dirección de referencia para la corriente *en* una bobina sale del punto, la polaridad en el punto para el voltaje inducido de la bobina mutuamente acoplada es positiva. En las primeras dos figuras de la figura 21.28(a), la polaridad en los puntos de los voltajes inducidos es positiva. En la tercera figura de la figura 21.28(a), la polaridad en el punto de la bobina derecha es negativa, mientras que en el punto de la bobina izquierda es positiva, ya que la corriente entra al punto (dentro de la bobina) de la bobina derecha. Los comentarios para la tercera de la figura 21.28(a) aplican también para la última de la misma serie (b).



EJEMPLO 21.8 Encuentre la inductancia total de las bobinas en serie de la figura 21.29.

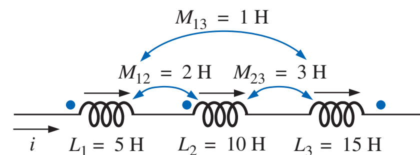


FIGURA 21.29
Ejemplo 21.8.

Solución:

Vectores de corriente salen del punto

Bobina 1: $L_1 + M_{12} - M_{13}$

Un vector de corriente entra al punto, mientras otro sale

Bobina 2: $L_2 + M_{12} - M_{23}$

Bobina 3: $L_3 - M_{23} - M_{13}$

y

$$L_T = (L_1 + M_{12} - M_{13}) + (L_2 + M_{12} - M_{23}) + (L_3 - M_{23} - M_{13})$$
$$= L_1 + L_2 + L_3 + 2M_{12} - 2M_{23} - 2M_{13}$$

Sustituyendo valores encontramos:

$$L_T = 5\text{ H} + 10\text{ H} + 15\text{ H} + 2(2\text{ H}) - 2(3\text{ H}) - 2(1\text{ H})$$
$$= 34\text{ H} - 8\text{ H} = \mathbf{26\text{ H}}$$

EJEMPLO 21.9 Escriba las ecuaciones de malla para la red de transformadores de la figura 21.30.

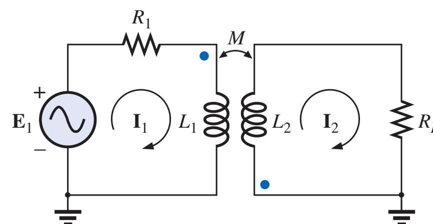


FIGURA 21.30
Ejemplo 21.9.

Solución: El término mutuo es positivo para cada bobina, y el signo de M en $\mathbf{X}_m = \omega M \angle 90°$ es positivo, tal como se determina por la dirección de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. Así,

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1 R_1 - \mathbf{I}_1 X_{L_1} \angle 90° - \mathbf{I}_2 X_m \angle 90° = 0$$

o bien:
$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1(R_1 + j\,X_{L_1}) - \mathbf{I}_2 X_m \angle 90° = 0$$

Para el otro lazo,

$$-\mathbf{I}_2 X_{L_2} \angle 90° - \mathbf{I}_1 X_m \angle 90° - \mathbf{I}_2 R_L = 0$$

o bien:
$$\mathbf{I}_2(R_L + j\,X_{L_2}) + \mathbf{I}_1 X_m \angle 90° = 0$$

21.9 TRANSFORMADOR DE NÚCLEO DE AIRE

Tal como implica su nombre, el transformador de núcleo de aire no tiene un núcleo ferromagnético para enlazar las bobinas del primario y del secundario. Más bien, las bobinas están colocadas lo suficientemente cerca como para tener una inductancia mutua que establece la deseada acción de transformador. En la figura 21.31, la dirección y la polaridad de la corriente han sido definidas para

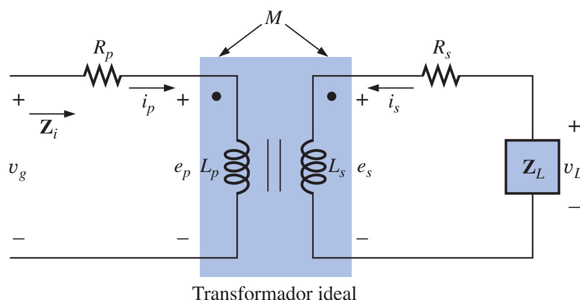
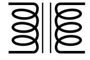


FIGURA 21.31
Circuito equivalente de un transformador con núcleo de aire.



el transformador de núcleo de aire. Observe la presencia de un término de inductancia mutua M, el cual será positivo en este caso de acuerdo con la convención del punto.

A partir de un análisis previo en este capítulo, sabemos que:

$$e_p = L_p \frac{di_p}{dt} + M \frac{di_s}{dt} \tag{21.30}$$

para el circuito primario.

En el capítulo 12 encontramos que para el inductor puro, sin inductancia mutua presente, la relación matemática:

$$v_1 = L \frac{di_1}{dt}$$

resultó en la siguiente útil forma para el voltaje en un inductor:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 X_L \angle 90^\circ \qquad \text{donde } X_L = \omega L$$

Similarmente se puede mostrar, para una inductancia mutua, que:

$$v_1 = M \frac{di_2}{dt}$$

resultará en

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_2 X_m \angle 90^\circ \qquad \text{donde } X_m = \omega M \tag{21.31}$$

Luego, la ecuación (21.30) puede escribirse (usando notación fasorial) como:

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{I}_p X_{L_p} \angle 90^\circ + \mathbf{I}_s X_m \angle 90^\circ \tag{21.32}$$

y $$\mathbf{V}_g = \mathbf{I}_p R_p \angle 0^\circ + \mathbf{I}_p X_{L_p} \angle 90^\circ + \mathbf{I}_s X_m \angle 90^\circ$$

o bien: $$\mathbf{V}_g = \mathbf{I}_p(R_p + j\,X_{L_p}) + \mathbf{I}_s X_m \angle 90^\circ \tag{21.33}$$

Para el circuito secundario,

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{I}_s X_{L_s} \angle 90^\circ + \mathbf{I}_p X_m \angle 90^\circ \tag{21.34}$$

y $$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_s R_s \angle 0^\circ + \mathbf{I}_s X_{L_s} \angle 90^\circ + \mathbf{I}_p X_m \angle 90^\circ$$

o bien: $$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}(R_s + j\,X_{L_s}) + \mathbf{I}_p X_m \angle 90^\circ \tag{21.35}$$

Sustituir: $$\mathbf{V}_L = -\mathbf{I}_s \mathbf{Z}_L$$

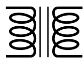
en la ecuación (21.35) resulta en:

$$0 = \mathbf{I}_s(R_s + j\,X_{L_s} + \mathbf{Z}_L) + \mathbf{I}_p X_m \angle 90^\circ$$

Despejando para $\mathbf{I}_s$ tenemos:

$$\mathbf{I}_s = \frac{-\mathbf{I}_p X_m \angle 90^\circ}{R_s + j\,X_{L_s} + \mathbf{Z}_L}$$

y, sustituyendo en la ecuación (21.33), obtenemos:



$$\mathbf{V}_g = \mathbf{I}_p(R_p + j\,X_{L_p}) + \left(\frac{-\mathbf{I}_p X_m \angle 90°}{R_s + j\,X_{L_s} + \mathbf{Z}_L}\right) X_m \angle 90°$$

La impedancia de entrada es entonces:

$$\mathbf{Z}_i = \frac{\mathbf{V}_g}{\mathbf{I}_p} = R_p + j\,X_{L_p} - \frac{(X_m \angle 90°)^2}{R_s + j\,X_{L_s} + \mathbf{Z}_L}$$

o, definiendo:

$$\mathbf{Z}_p = R_p + j\,X_{L_p} \qquad \mathbf{Z}_s = R_s + j\,X_{L_s} \quad \text{y} \quad X_m \angle 90° = +j\,\omega M$$

tenemos:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_p - \frac{(+j\,\omega M)^2}{\mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_L}$$

y

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_p - \frac{(\omega M)^2}{\mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_L} \qquad \textbf{(21.36)}$$

El término $(\omega M)^2/(\mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_L)$ se llama *impedancia acoplada*, y es independiente del signo de M ya que está elevado al cuadrado en la ecuación. Considere también que siendo $(\omega M)^2$ una constante con ángulo de fase de 0°, si la carga $\mathbf{Z}_L$ es resistiva, el término resultante de impedancia acoplada aparecerá como capacitivo debido a la división de $(\omega M)^2$ entre $(\mathbf{Z}_s + R_L)$. Esta reactancia capacitiva resultante se opondrá a la inductancia L_p del primario en serie causando una reducción en $\mathbf{Z}_i$. Incluyendo el efecto del término mutuo, la impedancia de entrada a la red aparecerá como se muestra en la figura 21.32.

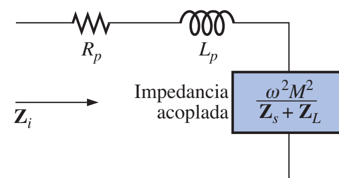


FIGURA 21.32
Características de entrada para el transformador con núcleo de aire.

EJEMPLO 21.10 Determine la impedancia de entrada al transformador de núcleo de aire mostrado en la figura 21.33.

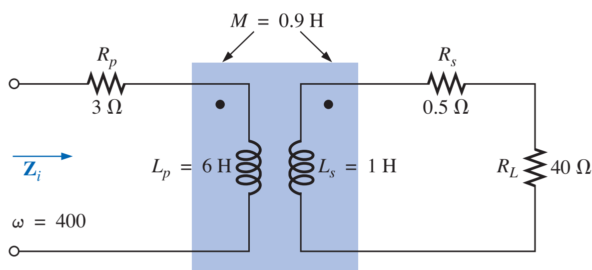
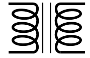


FIGURA 21.33
Ejemplo 21.10.

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_i &= \mathbf{Z}_p + \frac{(\omega M)^2}{\mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_L} \\
&= R_p + j\,X_{L_p} + \frac{(\omega M)^2}{R_s + j\,X_{L_s} + R_L} \\
&= 3\;\Omega + j\,2.4\;\text{k}\Omega + \frac{((400\;\text{rad/s})(0.9\;\text{H}))^2}{0.5\;\Omega + j\,400\;\Omega + 40\;\Omega} \\
&\cong j\,2.4\;\text{k}\Omega + \frac{129.6 \times 10^3\;\Omega}{40.5 + j\,400}
\end{aligned}$$



$$= j\,2.4\text{ k}\Omega + \underbrace{322.4\ \Omega\ \angle -84.22°}_{\text{capacitiva}}$$

$$= j\,2.4\text{ k}\Omega + (0.0325\text{ k}\Omega - j\,0.3208\text{ k}\Omega)$$
$$= 0.0325\text{ k}\Omega + j\,(2.40 - 0.3208)\text{ k}\Omega$$

y $\quad \mathbf{Z}_i = R_i + j\,X_{L_i} = \mathbf{32.5\ \Omega + \mathit{j}\ 2079\ \Omega = 2079.25\ \Omega\ \angle 89.10°}$

21.10 DATOS NOMINALES

Una clasificación típica de un transformador de potencia con núcleo de hierro, incluida en los **datos nominales** para el transformador, podría ser la siguiente:

5 kVA 2000/100 V 60 Hz

Los 2000 o 100 V pueden ser el voltaje primario o el secundario; es decir, si 2000 V constituyen el voltaje primario, entonces 100 V conforman el voltaje secundario, y viceversa. Los 5 kVA constituyen la clasificación de potencia aparente ($S = VI$) del transformador. Si el voltaje secundario es de 100 V, entonces la máxima corriente de carga será:

$$I_L = \frac{S}{V_L} = \frac{5000\text{ VA}}{100\text{ V}} = 50\text{ A}$$

y si el voltaje secundario es de 2000 V, entonces la máxima corriente de carga será:

$$I_L = \frac{S}{V_L} = \frac{5000\text{ VA}}{2000\text{ V}} = 2.5\text{ A}$$

El transformador está clasificado en términos de la potencia aparente en vez de la potencia promedio, o real, por la razón demostrada mediante el circuito de la figura 21.34. Como la corriente a través de la carga es mayor que la determinada por la clasificacion de potencia aparente, el transformador puede resultar permanentemente dañado. Sin embargo, observe que siendo la carga sólo capacitiva, la potencia promedio a la carga es cero. La clasificación por potencia será, por tanto, sin sentido con respecto a la capacidad de esta carga de dañar el transformador.

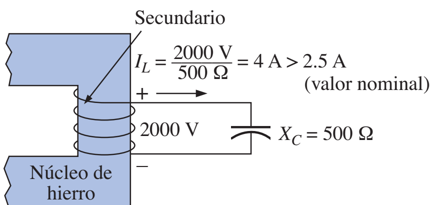


FIGURA 21.34
Demostración del por qué los transformadores son clasificados en kVA en vez de en kW.

La razón de transformación del transformador bajo análisis puede ser cualquiera de dos valores. Si el voltaje secundario es de 2000 V, la razón de transformación es $a = N_p/N_s = V_g/V_L = 100\text{ V}/2000\text{ V} = 1/20$, y el transformador es un transformador de elevación. Si el voltaje secundario es de 100 V, la razón de transformación es $a = N_p/N_s = V_g/V_L = 2000\text{ V}/100\text{ V} = 20$, y el transformador es un transformador de disminución.

La corriente nominal en el primario puede ser determinada aplicando simplemente la ecuación (21.18):

$$I_p = \frac{I_s}{a}$$

que es igual a $[2.5\text{ A}/(1/20)] = 50\text{ A}$ si el voltaje en el secundario es de 2000 V, y $(50\text{ A}/20) = 2.5\text{ A}$ si el voltaje en el secundario es de 100 V.

Para explicar la necesidad de incluir la frecuencia en los datos nominales, considere la ecuación (21.12):

$$E_p = 4.44 f_p N_p \Phi_m$$

y la curva *B-H* para el núcleo de hierro del transformador (Figura 21.35).

En la mayoría de los transformadores, el punto de operación sobre la curva *B-H* se sitúa en la rodilla de la curva. Si la frecuencia de la señal aplicada cae,

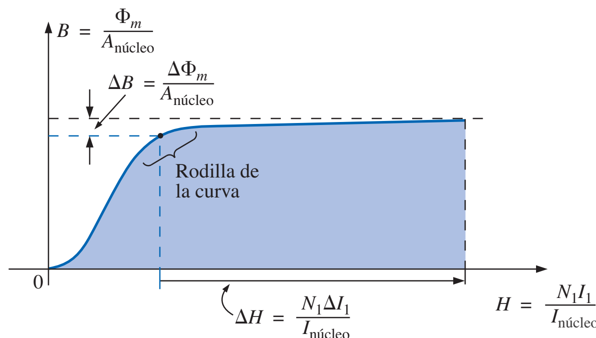


FIGURA 21.35
Demostración del porqué la frecuencia de aplicación es importante para los transformadores.

y N_p y E_p permanecen iguales, entonces Φ_m debe crecer en magnitud, de acuerdo con lo determinado por la ecuación (21.12):

$$\Phi_m\uparrow = \frac{E_p}{4.44 f_p\downarrow N_p}$$

El resultado es que B aumentará, como se muestra en la figura 21.35, ocasionando que H también aumente. La ΔI resultante podría causar una corriente muy alta en el primario, y posibles daños al transformador.

21.11 TIPOS DE TRANSFORMADORES

Se dispone de muchas formas y tamaños diferentes de transformadores. Algunos de los tipos más comunes incluyen el transformador de potencia, el audio transformador, el transformador de IF (frecuencia intermedia), y el transformador de RF (frecuencia de radio). Cada uno está diseñado para satisfacer un requisito particular en un área específica de aplicación. Los símbolos para algunos de los tipos básicos de transformadores se muestran en la figura 21.36.

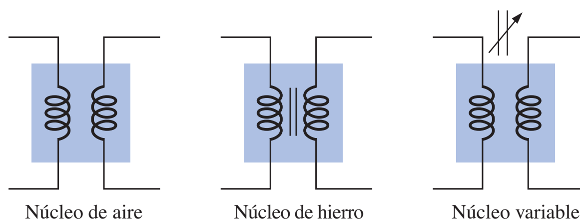
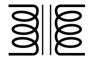


FIGURA 21.36
Símbolos de transformadores.

El método de construcción varía de un transformador a otro. Dos de las muchas maneras en que las bobinas del primario y del secundario pueden ser enrolladas alrededor de un núcleo de hierro se muestran en la figura 21.37. En cualquier caso, el núcleo se construye de hojas laminadas de material ferromagnético separadas por un aislante para reducir las pérdidas por corrientes parásitas. Las propias hojas contienen también un pequeño porcentaje de silicio para incrementar la resistividad eléctrica del material y reducir aún más las pérdidas por corrientes parásitas.

Una variante del transformador tipo núcleo se muestra en la figura 21.38. Este transformador está diseñado para aplicaciones de nivel bajo en potencia, control



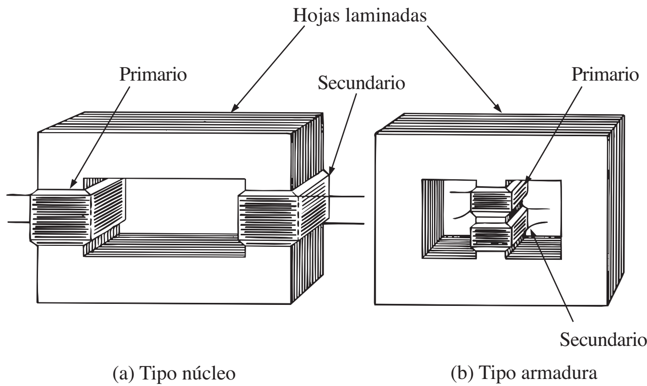


FIGURA 21.37
Tipos de construcción de núcleos ferromagnéticos.

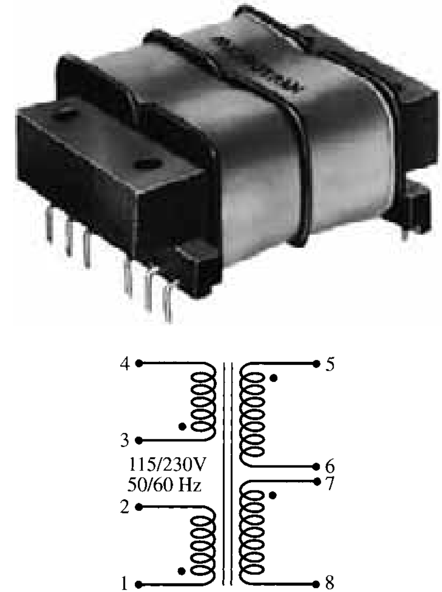


FIGURA 21.38
Transformador de potencia de nivel bajo de bobina dividida. (Cortesía de Microtran Company, Inc.)

e instrumentación (el tamaño 2.5 VA tiene una altura máxima de sólo 0.65 pulgadas). Hay realmente dos transformadores sobre el mismo núcleo, con los primarios y secundarios de cada devanado lado a lado. La representación esquemática aparece en la misma figura. Cada conjunto de terminales a la izquierda puede aceptar 115 V a 50 o 60 Hz, mientras que cada lado de la salida proporcionará 230 V a la misma frecuencia. Observe la convención del punto, ya descrita en este capítulo.

El **autotransformador** [Figura 21.39(b)] es un tipo de transformador de potencia que, en vez de emplear el principio de dos circuitos (aislamiento completo entre bobinas), tiene un devanado común a los circuitos de entrada y salida. Los voltajes inducidos están relacionados a la razón de vueltas de la misma manera a la descrita para el transformador de dos circuitos. Si se usa la conexión apropiada, un transformador de potencia de dos circuitos puede emplearse

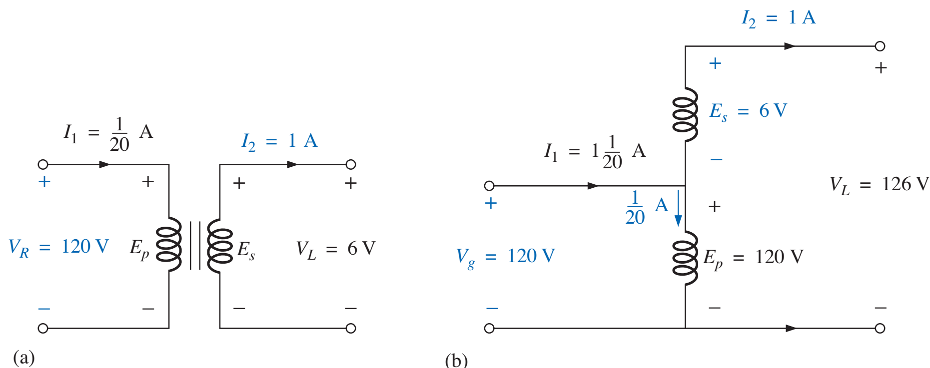


FIGURA 21.39
(a) Transformador de dos circuitos; (b) autotransformador.

como autotransformador. La ventaja de usarlo de esa manera es que una potencia aparente más grande puede ser transformada. Esto puede ser demostrado mediante el transformador de dos circuitos de la figura 21.39(a), mostrado en la figura 21.39(b) como un autotransformador.

En el transformador de dos circuitos, observe que $S = (\frac{1}{20}\text{ A})(120\text{ V}) = 6\text{ VA}$, mientras que para el autotransformador, $S = (1\frac{1}{20}\text{ A})(120\text{ V}) = 126\text{ VA}$, lo cual es muchas veces la potencia del transformador de dos circuitos. Observe también que la corriente y el voltaje de cada bobina son los mismos que aquellos para la configuración de dos circuitos. La desventaja del autotransformador es obvia: pérdida del aislamiento entre los circuitos primario y secundario.

Un transformador de pulsos diseñado para aplicaciones de circuito impreso, donde pulsos de larga duración y gran amplitud deben ser transferidos sin saturación, aparece en la figura 21.40. Se dispone de razones de vueltas desde 1:1 hasta 5:1 en cuanto a voltajes de línea máximos de 240 V rms a 60 Hz. La unidad superior es para aplicaciones de circuitos impresos con primarios duales aislados, mientras que la unidad inferior es la variedad de carrete con un solo devanado primario.

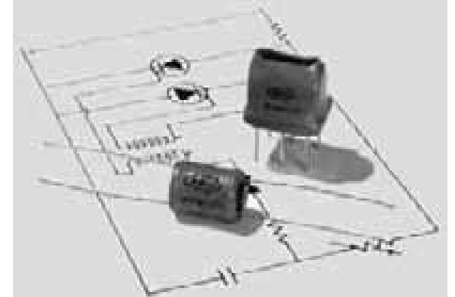
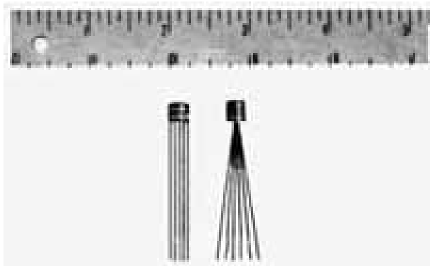


FIGURA 21.40
Transformadores de pulsos. (Cortesía de DALE Electronics, Inc.)

Dos transformadores miniatura ($\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ de pulgada) con conductores aislados se muestran en la figura 21.41, junto con sus representaciones esquemáticas. Las clasificaciones por potencia están disponibles desde 100 o 125 mW con diversas razones de vueltas como 1:1, 5:1, 9.68:1 y 25:1.



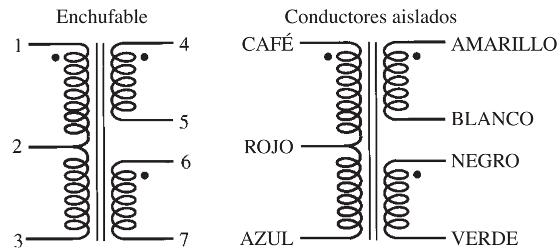


FIGURA 21.41
Transformadores miniatura. (Cortesía de PICO Electronics, Inc.)

21.12 TRANSFORMADORES CON DERIVACIONES Y CARGA MÚLTIPLE

Para el **transformador con derivación central** (primario) de la figura 21.42, donde el voltaje desde la derivación central hasta cualquier terminal externa está definido como $E_p/2$, la relación entre E_p y E_s es:

$$\frac{\mathbf{E}_p}{\mathbf{E}_s} = \frac{N_p}{N_s} \qquad \textbf{(21.37)}$$

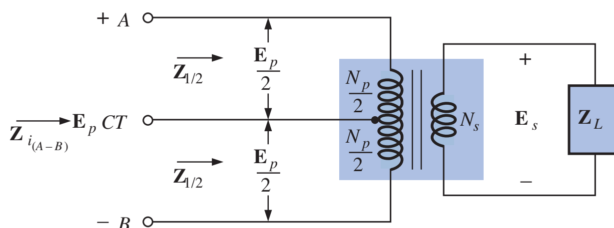
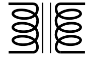


FIGURA 21.42
Transformador ideal con primario con derivación central.



Para cada media sección del primario,

$$\mathbf{Z}_{1/2} = \left(\frac{N_p/2}{N_s}\right)^2 \mathbf{Z}_L = \frac{1}{4}\left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 \mathbf{Z}_L$$

con: $$\mathbf{Z}_{i_{(A-B)}} = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 \mathbf{Z}_L$$

Por tanto, $$\mathbf{Z}_{1/2} = \frac{1}{4}\mathbf{Z}_i \tag{21.38}$$

Para el **transformador de carga múltiple** de la figura 21.43, se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{E}_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{E}_3} = \frac{N_1}{N_3} \qquad \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_3} = \frac{N_2}{N_3} \tag{21.39}$$

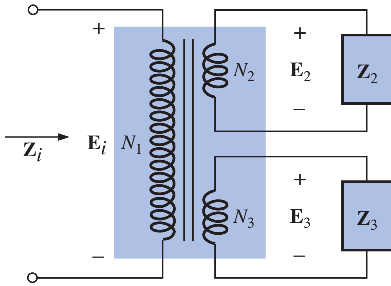


FIGURA 21.43
Transformador ideal con cargas múltiples.

La impedancia total de entrada puede determinarse al observar primero que, para el transformador ideal, la potencia entregada al primario es igual a la potencia disipada por la carga; es decir,

$$P_1 = P_{L_2} + P_{L_3}$$

y, para cargas resistivas ($\mathbf{Z}_i = R_i$, $\mathbf{Z}_2 = R_2$, y $\mathbf{Z}_3 = R_3$),

$$\frac{E_i^2}{R_i} = \frac{E_2^2}{R_2} + \frac{E_3^2}{R_3}$$

o, dado que: $$E_2 = \frac{N_2}{N_1}E_i \quad \text{y} \quad E_3 = \frac{N_3}{N_1}E_i$$

entonces: $$\frac{E_i^2}{R_i} = \frac{[(N_2/N_1)E_i]^2}{R_2} + \frac{[(N_3/N_1)E_i]^2}{R_3}$$

y $$\frac{E_i^2}{R_i} = \frac{E_i^2}{(N_1/N_2)^2R_2} + \frac{E_i^2}{(N_1/N_3)^2R_3}$$

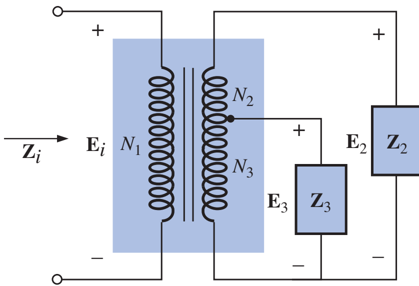


FIGURA 21.44
Transformador ideal con una derivación en el secundario y cargas múltiples.

Así, $$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{(N_1/N_2)^2R_2} + \frac{1}{(N_1/N_3)^2R_3} \tag{21.40}$$

indicando que las resistencias de carga son reflejadas en paralelo.

Para la configuración de la figura 21.44, con E_2 y E_3 definidas como se muestra, son aplicables las ecuaciones (21.39) y (21.40).

21.13 REDES CON BOBINAS MAGNÉTICAMENTE ACOPLADAS

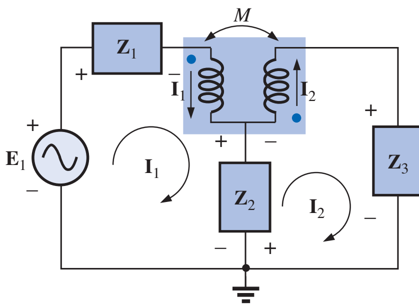
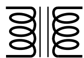


FIGURA 21.45
Aplicación del análisis de mallas a bobinas magnéticamente acopladas.

Para redes multilazo con bobinas magnéticamente acopladas, muy a menudo se aplica el enfoque de análisis de mallas. Un entendimiento claro de la convención del punto vista antes permite escribir las ecuaciones directamente y sin errores. Antes de escribir las ecuaciones para cualquier lazo en particular, primero debe determinarse si el término mutuo es positivo o negativo, recordando que tendrá el mismo signo para la otra bobina magnéticamente acoplada. Por ejemplo, para la red de dos lazos de la figura 21.45, el término mutuo tiene signo positivo ya que la corriente a través de cada bobina sale del punto. Para el lazo primario,

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{L_1} - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_m - \mathbf{Z}_2(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 0$$



donde M de $\mathbf{Z}_m = \omega M \angle 90°$ es positivo, e

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_{L_1} + \mathbf{Z}_2) - \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_m) = \mathbf{E}_1$$

Observe en lo anterior que la impedancia mutua fue tratada como si fuera una inductancia adicional en serie con la inductancia L_1 teniendo un signo determinado por la convención del punto y el voltaje determinado por la corriente en el lazo magnéticamente acoplado.

Para el lazo secundario,

$$-\mathbf{Z}_2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_{L_2} - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_m - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_3 = 0$$

o bien:
$$\mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_{L_2} + \mathbf{Z}_3) - \mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_m) = 0$$

Para la red de la figura 21.46 encontramos un término mutuo entre L_1 y L_2 y L_1 y L_3, llamados M_{12} y M_{13}, respectivamente.

Para las bobinas con los puntos (L_1 y L_3), como cada corriente por las bobinas sale del punto, M_{13} es positivo en la dirección elegida de I_1 e I_3. Sin embargo, dado que la corriente I_1 sale del punto a través de L_1, e I_2 entra al punto a través de la bobina L_2, M_{12} es negativo. En consecuencia, para el circuito de entrada,

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_1 - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{L_1} - \mathbf{I}_2(-\mathbf{Z}_{m_{12}}) - \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_{m_{13}} = 0$$

o bien:
$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_{L_1}) + \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_{m_{12}} - \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_{m_{13}} = 0$$

Para el lazo 2,

$$-\mathbf{I}_2\mathbf{Z}_2 - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_{L_2} - \mathbf{I}_1(-\mathbf{Z}_{m_{12}}) = 0$$
$$-\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{m_{12}} + \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_{L_2}) = 0$$

y para el lazo 3,

$$-\mathbf{I}_3\mathbf{Z}_3 - \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_{L_3} - \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{m_{13}} = 0$$

o bien:
$$\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{m_{13}} + \mathbf{I}_3(\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_{L_3}) = 0$$

En forma de determinante,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_{L_1}) &- \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_{m_{12}} &&+ \mathbf{I}_3\mathbf{Z}_{m_{13}} &&= \mathbf{E}_1\\
-\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{m_{12}} &+ \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_{L_{12}}) &&+ 0 &&= 0\\
\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{m_{13}} &+ 0 &&+ \mathbf{I}_3(\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_{13}) &&= 0
\end{aligned}$$

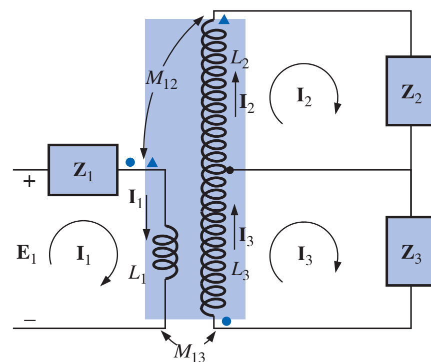
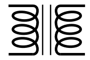


FIGURA 21.46
Aplicación del análisis de mallas a una red con dos bobinas magnéticamente acopladas.

21.14 APLICACIONES

A lo largo de este texto hemos visto al transformador en varias aplicaciones, desde la fuente básica de cd hasta la pistola de soldar y el transformador *flyback* de una sencilla cámara de flash. Los transformadores se usaron para aumentar o disminuir el nivel de voltaje o corriente, para actuar como dispositivo acoplador de impedancia o, en algunos casos, para desempeñar un papel dual de acción transformadora y elemento reactivo. Son tan comunes en gran variedad de sistemas que se recomienda al lector hacer un esfuerzo por familiarizarse con sus características generales. En la actualidad, para la mayor parte de las aplicaciones, su diseño es tal que pueden considerarse 100% eficientes; es decir, la potencia aplicada es la potencia entregada a la carga. Sin embargo, en general, a menudo son los elementos más grandes de un diseño y debido a la no linealidad de la curva *B-H* pueden causar cierta distorsión de la forma de onda transformada. Por ahora debe quedar claro que los transformadores son útiles sólo en situaciones donde el voltaje aplicado cambia con el tiempo. La aplicación de un voltaje de cd al devanado primario resultará en 0 V en el secundario, pero la aplicación de un voltaje que cambia con el tiempo, sin importar cuál sea su apariencia general, resultará en un voltaje en el secundario. Recuérdese siempre



que aun cuando un transformador puede proporcionar aislamiento entre los circuitos primario y secundario, también tiene capacidad de transformar la impedancia de carga al circuito primario a un nivel que puede impactar significativamente el comportamiento de la red. Incluso la más pequeña impedancia en el devanado secundario puede aparecer muy grande en el primario cuando se usa un transformador de disminución.

Los transformadores, al igual que toda otra componente que pueda usarse, tienen clasificación por potencia. Entre mayor es la clasificación por potencia, mayor es el transformador resultante debido, principalmente, a los grandes conductores entre los devanados para manejar la corriente. El tamaño de un transformador es también función de la frecuencia implicada. Entre menor es la frecuencia, mayor es el transformador requerido, como puede reconocerse fácilmente por el tamaño de los grandes transformadores de potencia (también afectados por los niveles de corriente según se mencionó). Para el mismo nivel de potencia, mayor puede ser la frecuencia de transformación y menor el transformador. Debido a las pérdidas por corrientes parásitas e histéresis en un transformador, el diseño del núcleo es muy importante. Un núcleo sólido introduce altos niveles de tales pérdidas, mientras que un núcleo construido de hojas de acero de alta permeabilidad con el aislamiento apropiado entre las hojas reduce las pérdidas considerablemente.

Aunque muy fundamentales en su estructura básica, los transformadores son reconocidos como uno de los mayores bloques constructivos de los sistemas eléctricos y electrónicos. No hay publicación sobre nuevas componentes que no incluya un diseño actualizado para la gran variedad de aplicaciones que se desarrollan diariamente.

Compensación de bajo voltaje

A veces, durante el año, las demandas pico de una empresa eléctrica pueden resultar en un voltaje reducido a lo largo de la línea. Por ejemplo, a medio verano, el voltaje de línea puede caer de 120 V a 100 V debido a la fuerte carga ocasionada principalmente por los acondicionadores de aire. Sin embargo, éstos no funcionan bien en condiciones de bajo voltaje, por lo que usar un autotransformador puede ser la solución.

En la figura 21.47(a), un acondicionador de aire que extrae 10 A a 120 V está conectado a través de un autotransformador al suministro disponible que ha caído a 100 V. Suponiendo 100% de eficiencia, la corriente extraída de la línea tendría que ser de 12 A para asegurar que $P_i = P_o = 1200$ W. Usando el análisis presentado en la sección 21.11, encontraremos que la corriente en el devanado primario es de 2 A con 10 A en el secundario. Los 12 A existirán sólo

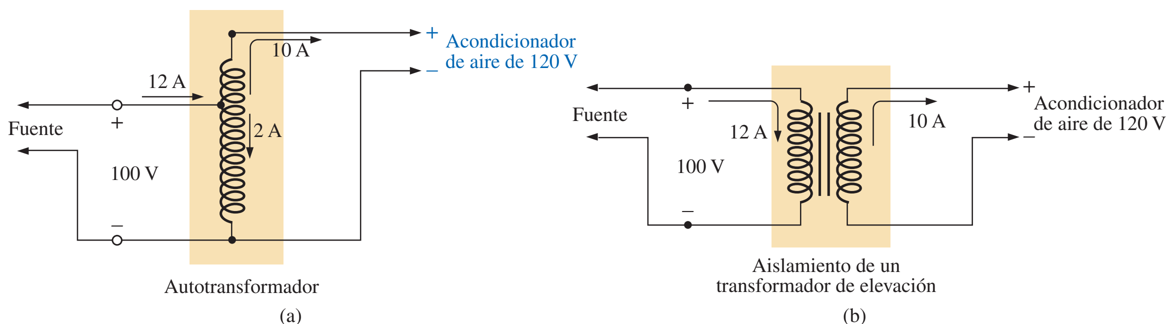


FIGURA 21.47
Formas de mantener una alimentación de 120 V para un acondicionador de aire: (a) usando un autotransformador; (b) usando un transformador tradicional de elevación.

en la línea que conecta la fuente al primario. Si el nivel de voltaje fuese incrementado usando el tradicional transformador de elevación mostrado en la figura 21.47(b), las mismas corrientes resultarían en la fuente y en la carga. Sin embargo, observe que la corriente a través del primario es ahora de 12 A, lo cual es seis veces la que está presente en el autotransformador. El resultado es que el devanado en el autotransformador puede ser mucho más delgado debido al nivel considerablemente menor de corriente.

Examinemos ahora la razón de vueltas requeridas y el número de vueltas implicadas en cada arreglo (asociando una vuelta con cada volt del primario y el secundario).

Para el autotransformador:

$$\frac{N_s}{N_p} = \frac{V_s}{V_p} = \frac{10\text{ V}}{100\text{ V}} \Rightarrow \frac{10\text{ vueltas}}{100\text{ vueltas}}$$

Para el autotransformador adicional:

$$\frac{N_s}{N_p} = \frac{V_s}{V_p} = \frac{120\text{ V}}{100\text{ V}} \Rightarrow \frac{120\text{ vueltas}}{100\text{ vueltas}}$$

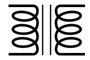
Por tanto, en total, el autotransformador tiene sólo 10 vueltas en el secundario, mientras que el tradicional tiene 120. En el autotransformador necesitamos sólo 10 vueltas de alambre pesado para manejar la corriente de 10 A, no las 120 requeridas por el transformador tradicional. Además, el número total de vueltas para el autotransformador es 110 comparado con 220 para el transformador tradicional.

El resultado neto de todo lo anterior es que aun cuando la protección ofrecida por el aislamiento no está presente, el autotransformador puede ser mucho más pequeño en tamaño y peso y, por tanto, menos costoso.

Transformador reactor

Todavía hasta hace poco, todas las luces fluorescentes como las que se muestran en la figura 21.48(a) tenían un transformador reactor igual al de la figura 21.48(b). En muchos casos su peso es casi igual al del dispositivo mismo. En años recientes ha sido desarrollado un transformador equivalente de estado sólido que en un futuro próximo puede llegar a reemplazar a la mayoría de los transformadores reactores. Sin embargo, por ahora, debido a los costos adicionales asociados con la variedad de estado sólido, el transformador reactor seguirá usándose en la mayoría de los tubos fluorescentes.

Las conexiones básicas para instalar un solo tubo de luz fluorescente se muestran en la figura 21.49(a). Observe que el transformador está conectado como un autotransformador con el total de 120 V aplicados en el primario. Cuando el interruptor se cierre, el voltaje aplicado y el voltaje en el devanado secundario se sumarán y establecerán una corriente a través de los filamentos del tubo fluorescente. Al principio, el arrancador es un corto circuito que sirve para establecer la trayectoria continua a través de los dos filamentos. En tubos fluorescentes antiguos, el arrancador era un cilindro con dos contactos, como se muestra en la figura 21.49(b), que en ocasiones tenía que ser reemplazado. Se colocaba bajo el tubo fluorescente cerca de una de las conexiones de éste. En la actualidad, como se muestra en el croquis del interior de un transformador reactor en la figura 21.49(c), el arrancador está comúnmente integrado al reactor y no puede ser reemplazado. El voltaje establecido por la acción del autotransformador es suficiente para calentar los filamentos, pero no para iluminar el tubo fluorescente. La lámpara fluorescente es un tubo largo con un recubrimiento de pintura fluorescente en el interior. El tubo se llena con un gas inerte y una pequeña cantidad de mercurio líquido. La distancia entre los electrodos en los extremos de la lámpara es muy grande como para que el voltaje aplicado



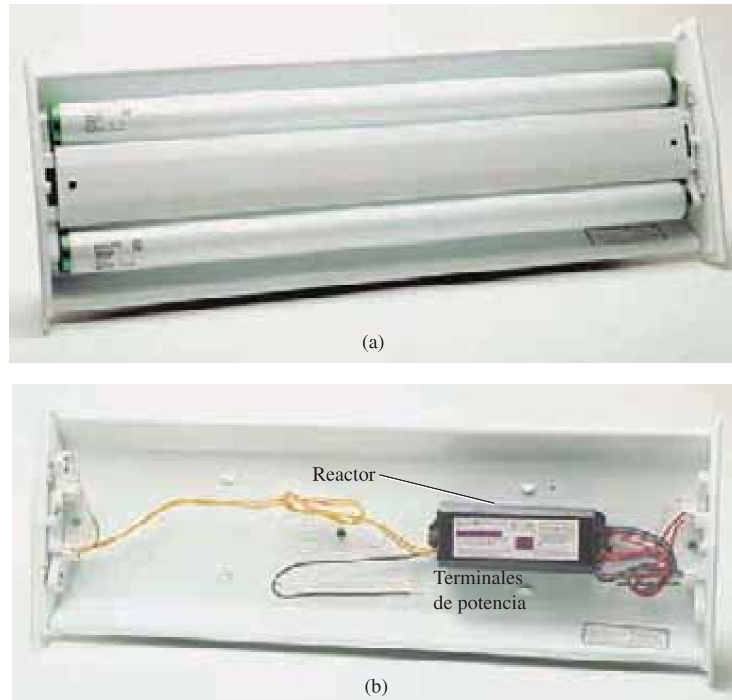


FIGURA 21.48
Lámpara fluorescente: (a) apariencia general; (b) vista interna con reactor.

por el autotransformador establezca la conducción. Para superar este problema, los filamentos son calentados primero, como se describió líneas arriba, para convertir el mercurio (un buen conductor) de líquido a gas. La conducción puede ser establecida entonces mediante la aplicación de un gran potencial en los electrodos. Este potencial se alcanza cuando el arrancador (un interruptor térmico que se abre cuando alcanza una temperatura particular) se abre y ocasiona que la corriente del inductor caiga desde su nivel establecido hasta cero ampere. La rápida caída en corriente establecerá un pico muy alto en el voltaje en las bobinas del autotransformador, según lo determina $v_L = L(di_L/dt)$. Este importante pico en el voltaje también aparecerá en el tubo y establecerá una corriente entre los electrodos; entonces se emitirá luz cuando los electrones toquen la superficie fluorescente en el interior del tubo. Es la persistencia del recubrimiento interno lo que ayuda a ocultar la oscilación que se presenta en el nivel de conducción debido a la potencia de frecuencia baja (60 Hz), lo que podría resultar en una luz intermitente. El arrancador permanecerá abierto hasta la siguiente vez que el tubo sea encendido. El flujo de carga entre los electrodos se mantendrá sólo por el voltaje en el autotransformador. Esta corriente es relativamente baja en magnitud debido a la reactancia del devanado secundario en el circuito en serie resultante. En otras palabras, el autotransformador se ha cambiado a uno que proporciona ahora reactancia al circuito secundario para limitar la corriente a través del tubo. Sin este factor limitante la corriente por el tubo sería muy alta, y éste se quemaría rápidamente. Esta acción de las bobinas del transformador generando el voltaje requerido y actuando luego como una bobina para limitar la corriente ha resultado en la terminología general de *choke oscilante* (*swinging choke*).

El hecho de que la luz no es generada por una caída *IR* en el filamento de un foco es la razón por la que las luces fluorescentes son tan eficientes desde el punto de vista de la energía. De hecho, en un foco incandescente, alrededor de

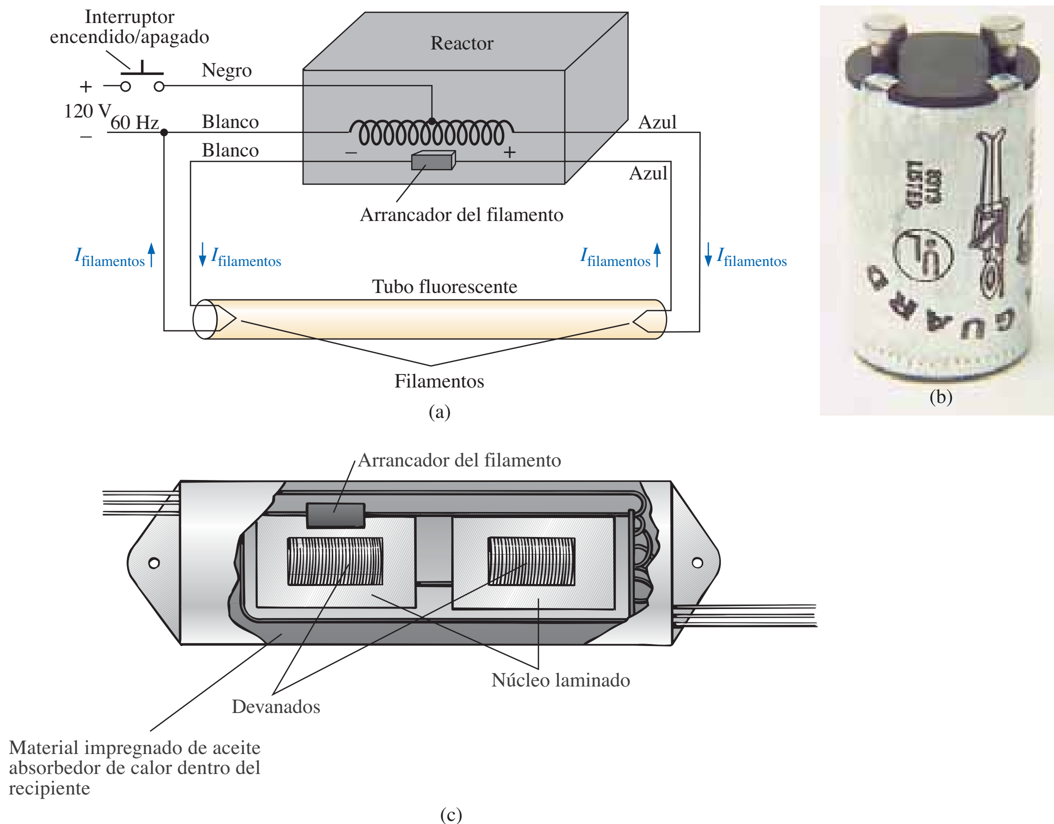


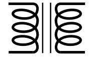
FIGURA 21.49
(a) Diagrama esquemático de lámpara fluorescente de un solo tubo; (b) arrancador; (c) vista interna del transformador reactor.

75% de la energía aplicada se pierde en forma de calor, sólo un 25% se aprovecha efectivamente en la emisión de luz. En un tubo fluorescente, más de 70% se consume en la emisión de luz y 30% son pérdidas por calor. Como regla empírica, se puede suponer que la iluminación de una lámpara de 40 W [como la unidad de la figura 21.48(a) con sus dos tubos de 20 W] es equivalente a la de un foco incandescente de 100 W.

Otra diferencia interesante entre focos incandescentes y tubos fluorescentes es el método empleado para determinar si están en buen estado o no. Para la luz incandescente, inmediatamente es obvio cuando el foco falla en emitir luz. Sin embargo, en el tubo fluorescente, suponiendo que el reactor está en buenas condiciones de trabajo, la luz comenzará a atenuarse a lo largo de su vida útil. Los electrodos se recubrirán y se volverán menos eficientes, y el recubrimiento interno comenzará a deteriorarse.

Las lámparas fluorescentes de *encendido rapido* son distintas en su modo de operar sólo en que el voltaje generado por el transformador es lo suficientemente grande como para atomizar el gas durante la aplicación y el inicio de la conducción, cancelando así la necesidad de un arrancador y eliminando la etapa de calentamiento de los filamentos. En el futuro, probablemente el reactor de estado sólido será la unidad que se use debido a su rápida respuesta, superior eficiencia y menor peso, pero la transición tomará algo de tiempo. Sin embargo, la operación básica será la misma.

Debido al gas flúor (de ahí el nombre de tubo *fluorescente*) y al mercurio que contienen las lámparas fluorescentes, debe tenerse cuidado especial al tirarlas a



la basura. Pregunte en la oficina de limpia de su localidad dónde tirar los tubos; ya que romperlos y meterlos en una bolsa de plástico puede ser peligroso. Si al romper un tubo alguien se corta la piel, debe acudir a un consultorio médico ya que podría sufrir de envenenamiento por flúor o mercurio.

21.15 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Transformador (Fuentes controladas) La configuración del sencillo transformador que aparece en la figura 21.50 será analizada enseguida mediante fuentes controladas para imitar el comportamiento del transformador de acuerdo a como está definido por sus relaciones básicas de voltaje y corriente.

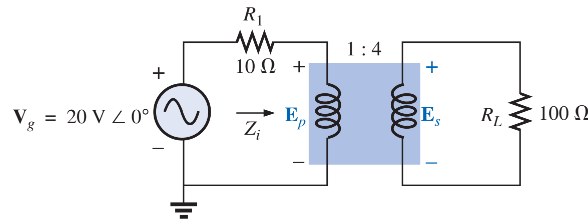


FIGURA 21.50
Aplicación de PSpice a un transformador de elevación.

Para fines de comparación, una solución teórica de la red daría lo siguiente:

$$Z_i = a^2 Z_L$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 100\ \Omega$$
$$= 6.25\ \Omega$$

y
$$E_p = \frac{(6.25\ \Omega)(20\ \text{V})}{6.25\ \Omega + 10\ \Omega} = 7.692\ \text{V}$$

con:
$$E_s = \frac{1}{a}E_p = \frac{1}{(1/4)}(7.692\ \text{V}) = 4(7.692\ \text{V}) = 30.77\ \text{V}$$

y
$$V_L = E_s = \mathbf{30.77\ V}$$

Para el transformador ideal, el voltaje secundario está definido por $E_s = N_s/N_p(E_p)$, lo que es $E_s = 4E_p$ para la red de la figura 21.50. El hecho de que la magnitud de un voltaje sea controlada por otra magnitud requiere que usemos la fuente **Voltage-Controlled Voltage Source(VCVS)** en la biblioteca **ANALOG**. Aparece como **E** en **Parts List** y tiene el formato que se ve en la figura 21.51. El voltaje sensor es **E1**, y el voltaje controlado aparece en las dos terminales del símbolo circular para fuente de voltaje. Un doble clic sobre el símbolo de fuente permitirá establecer **GAIN** en 4 para este ejemplo. En la figura 21.51 observe que el voltaje sensor es el voltaje primario del circuito de la figura 21.50, y el voltaje de salida está conectado directamente al resistor de carga **RL**. Realmente no hay problema en hacer las conexiones necesarias debido al formato de la fuente **E**.

El siguiente paso consiste en establecer la relación de corriente para el transformador. Como la magnitud de una corriente será controlada por la magnitud de otra corriente en la misma configuración, debe emplearse **Current-Controlled Current Source (CCCS)**. También aparece en la biblioteca **ANALOG**

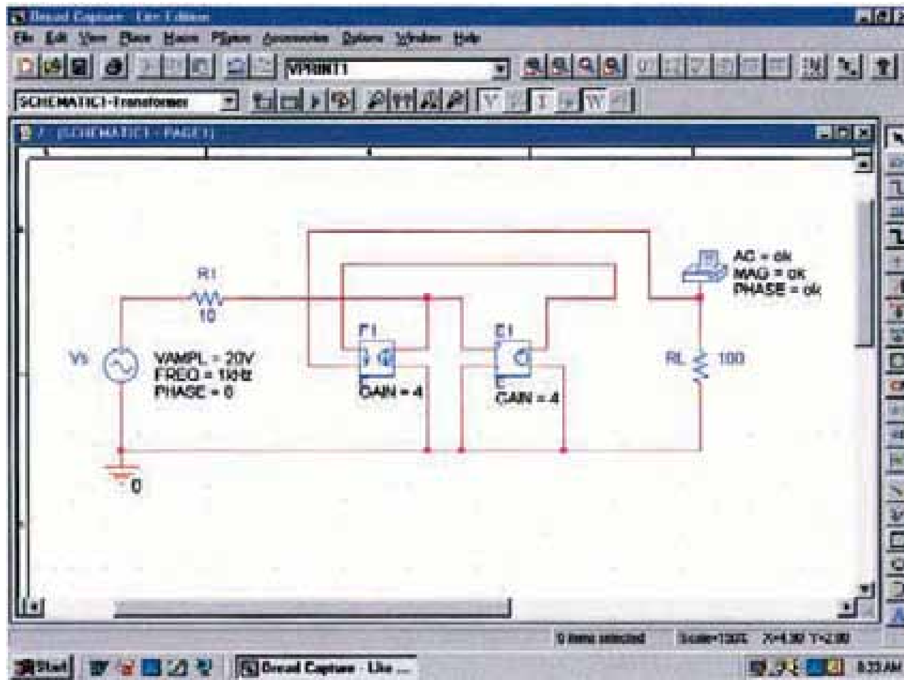
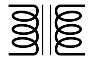


FIGURA 21.51
Uso de PSpice para determinar la magnitud y el ángulo de fase para el voltaje de carga de la red que aparece en la figura 21.50.

bajo **Part List** como **F** y tiene el formato que muestra la figura 21.51. Observe que ambas corrientes tienen una dirección asociada. En el transformador ideal, $I_p = N_s/N_p(I_s)$, lo que es $I_p = 4I_s$ para la red de la figura 21.50. La ganancia para ésta parte puede establecerse usando el mismo procedimiento definido para la fuente **E**. Como la corriente secundaria será la corriente de control, su nivel debe ser alimentado en la fuente **F** en la misma dirección que la indicada en la fuente controlada. Al efectuar esta conexión, asegúrese de dar un clic sobre el alambre en posición antes de cruzar el alambre del circuito primario y luego hacer clic de nuevo después de cruzar el alambre. Si esto se realiza apropiadamente, no aparecerá un punto de conexión indicado por un pequeño punto rojo. La corriente controlada I_{R_1} puede ser conectada como se muestra porque la conexión **E1** sólo está percibiendo un nivel de voltaje, tiene esencialmente una impedancia infinita, y puede considerarse como un circuito abierto. En otras palabras, la corriente a través de **R1** será la misma que la corriente a través de la fuente controlada de **F**.

Se estableció una simulación con **AC Sweep** y 1 kHz para **Start** y **End Frequencies**. Fue seleccionado un punto por década, y se inició la simulación. Después que apareció **SCHEMATIC1** en la pantalla, se salió de la ventana, y **PSpice-View Output File** fue elegido para resultar en la solución **AC ANALYSIS** de la figura 21.52. Observe que el voltaje es de 30.77 V, lo cual concuerda muy bien con la solución teórica.

Transformador (Biblioteca) La misma red puede ser analizada eligiendo uno de los transformadores de la biblioteca **EVAL** como se muestra en la figura 21.53. Se escogió el transformador rotulado con **K3019PL_3C8**, y los atributos apropiados fueron colocados en el cuadro de diálogo **Property Editor**. Los



```
 ** Profile: "SCHEMATIC1-Transformer"  [ C:\PSpice\transformer-SCHEMATIC1-Trans
former.sim ]
 ****     AC ANALYSIS                      TEMPERATURE =   27.000 DEG C
******************************************************************************
  FREQ        VM(N00908)  VP(N00908)
   1.000E+03   3.077E+01   0.000E+00
```

FIGURA 21.52
Archivo de salida para el análisis indicado en la figura 21.51.

únicos tres atributos requeridos fueron **COUPLING** en 1, **L1_TURNS** en 1, y **L2_TURNS** en 4. En **Simulation Settings**, fue elegido **AC Sweep** y se utilizó **1MEGHz** para **Start and End Frequency** porque se encontró que actuaba casi como un transformador ideal a esta frecuencia. Cuando la simulación fue ejecutada, el resultado bajo **PSpice-View Output File** apareció como se muestra en la figura 21.54 —una concordancia más o menos exacta con la solución teórica de 30.77 V.

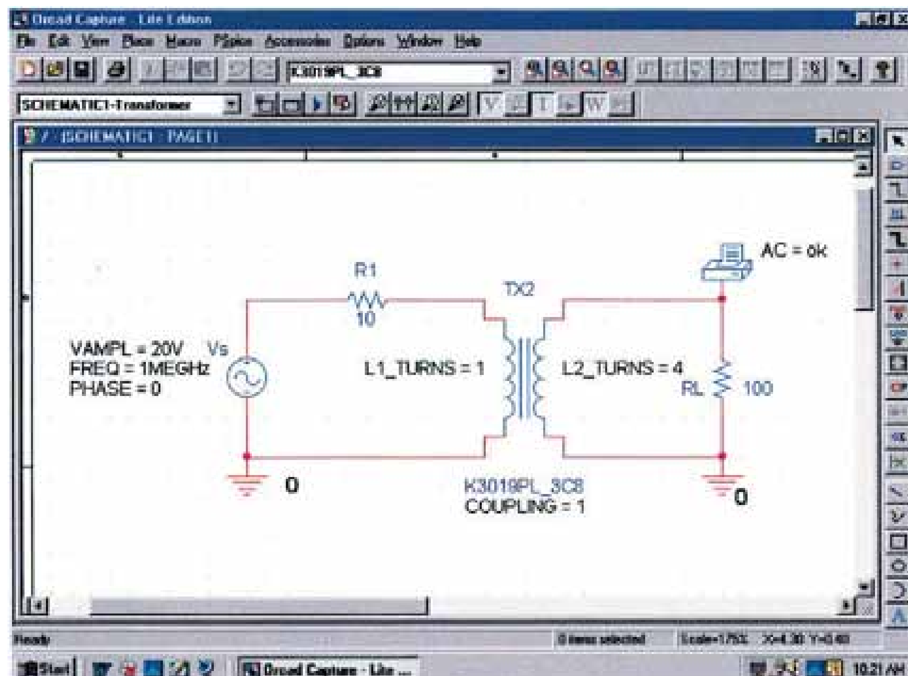


FIGURA 21.53
Uso de un transformador proporcionado en la biblioteca ***EVAL*** *para analizar la red de la figura 21.50.*

```
102:
103:  ** Profile: "SCHEMATIC1-Transformer"  [ C:\PSpice\transformer-SCHEMATIC1-Trans
    former.sim ]
104:
105:
106:  ****     AC ANALYSIS                      TEMPERATURE =   27.000 DEG C
107:
108:
109: ****************************************************************************
110:
111:
112:
113:   FREQ        VM(N00730)
114:
115:
116:    1.000E+06   3.072E+01
117:
```

FIGURA 21.54
Archivo de salida para el análisis indicado en la figura 21.53.

PROBLEMAS

SECCIÓN 21.2 Inductancia mutua

1. Para el transformador con núcleo de aire de la figura 21.55:
   a. Encuentre el valor de L_s si la inductancia mutua M es igual a 80 mH.
   b. Encuentre los voltajes inducidos e_p y e_s si el flujo que enlaza la bobina primaria cambia a razón de 0.08 Wb/s.
   c. Encuentre los voltajes inducidos e_p y e_s si la corriente i_p cambia a razón de 0.3 A/ms.
2. a. Resuelva el problema 1 con $k = 1$.
   b. Resuelva el problema 1 con $k = 0.2$.
   c. Compare los resultados de los incisos (a) y (b).
3. Resuelva el problema con $k = 0.9$, $N_p = 300$ vueltas, y $N_s = 25$ vueltas.

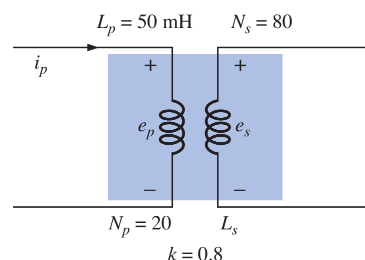


FIGURA 21.55
Problemas 1, 2 y 3.

SECCIÓN 21.3 El transformador con núcleo de hierro

4. Para el transformador de núcleo de hierro ($k = 1$) de la figura 21.56:
   a. Encuentre la magnitud del voltaje inducido E_s.
   b. Encuentre el flujo máximo Φ_m.
5. Resuelva el problema 4 para $N_p = 240$ y $N_s = 30$.
6. Encuentre el voltaje aplicado de un transformador con núcleo de hierro si el voltaje en el secundario es de 240 V, y $N_p = 60$ con $N_s = 720$.
7. Si el flujo máximo que pasa por el núcleo del problema 4 es de 12.5 mWb, encuentre la frecuencia del voltaje de entrada.

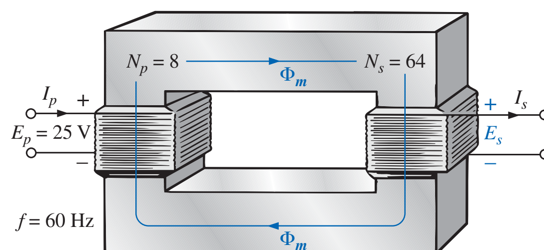
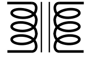


FIGURA 21.56
Problemas 4, 5 y 7.



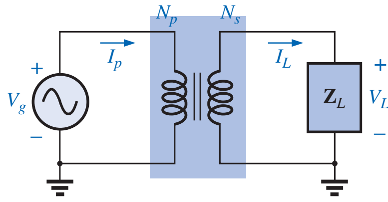


FIGURA 21.57
Problemas del 8 al 12.

SECCIÓN 21.4 Impedancia reflejada y potencia

8. Para el transformador con núcleo de hierro de la figura 21.57:
a. Encuentre la magnitud de la corriente I_L y el voltaje V_L si $a = 1/5$, $I_p = 2$ A, y Z_L = resistor de 2 Ω.
b. Encuentre la resistencia de entrada para los datos especificados en el inciso (a).

9. Encuentre la impedancia de entrada para el transformador con núcleo de hierro de la figura 21.57 si $a = 2$, $I_p = 4$ A, y $V_g = 1600$ V.

10. Encuentre el voltaje V_g y la corriente I_p si la impedancia de entrada del transformador con núcleo de hierro de la figura 21.57 es de 4 Ω y $V_L = 1200$ V y $a = 1/4$.

11. Si $V_L = 240$ V, Z_L = resistor de 20 Ω, $I_p = 0.05$ A, y N_s = 50, encuentre el número de vueltas en el circuito primario del transformador con núcleo de hierro de la figura 21.57.

12. **a.** Si $N_p = 400$, $N_s = 1200$, y $V_g = 100$ V, encuentre la magnitud de I_p para el transformador con núcleo de hierro de la figura 21.57 si $Z_L = 9\ \Omega + j\ 12\ \Omega$.
b. Encuentre la magnitud del voltaje V_L y la corriente I_L para las condiciones del inciso (a).

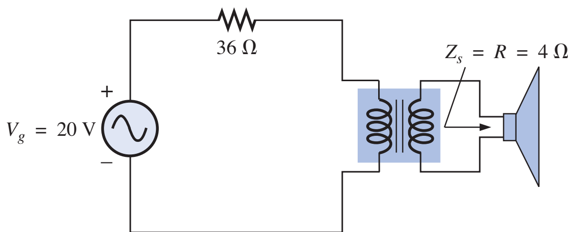


FIGURA 21.58
Problema 13.

SECCIÓN 21.5 Acoplamiento de impedancia, aislamiento y desplazamiento

13. **a.** Para el circuito de la figura 21.58, encuentre la razón de transformación requerida para entregar la máxima potencia a la bocina.
b. Encuentre la máxima potencia entregada a la bocina.

SECCIÓN 21.6 Circuito equivalente (Transformador con núcleo de hierro)

14. Para el transformador de la figura 21.59 determine:
a. La resistencia equivalente R_e.
b. La reactancia equivalente X_e.
c. El circuito equivalente reflejado al primario.
d. La corriente en el primario para $\mathbf{V}_g = 50\ \text{V} \angle 0°$.
e. El voltaje de carga V_L.
f. El diagrama fasorial del circuito primario reflejado.
g. El nuevo voltaje de carga si suponemos que el transformador es ideal con una razón de vueltas de 4 : 1. Compare el resultado con el del inciso (e).

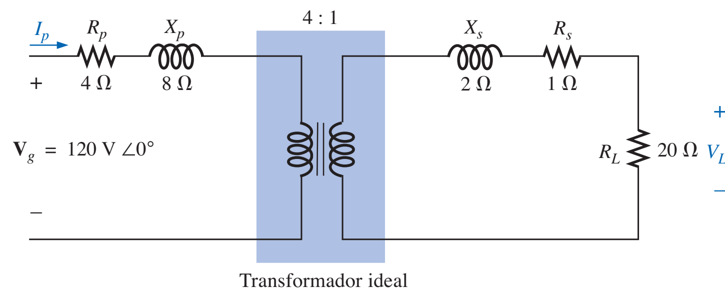
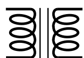


FIGURA 21.59
Problemas 14, 15, 16, 30 y 31.



15. Para el transformador de la figura 21.59, si la carga resistiva es reemplazada por una reactancia inductiva de 20 Ω:
   a. Determine la impedancia primaria total reflejada.
   b. Calcule la corriente primaria.
   c. Determine el voltaje en R_e y X_e, y encuentre la carga reflejada.
   d. Trace el diagrama fasorial.

16. Resuelva el problema 15 para una carga capacitiva que tiene reactancia de 20 Ω.

SECCIÓN 21.7 Consideraciones de frecuencia

17. Con sus propias palabras, dé una argumentación acerca de las características de frecuencia del transformador. Emplee el circuito equivalente aplicable y las características de frecuencia que aparecen en este capítulo.

SECCIÓN 21.8 Conexión en serie de bobinas mutuamente acopladas

18. Determine la inductancia total de las bobinas en serie de la figura 21.60.

19. Determine la inductancia total de las bobinas en serie de la figura 21.61.

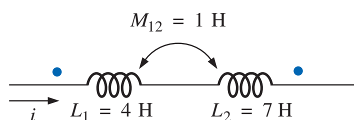


FIGURA 21.60
Problema 18.

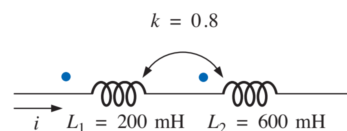


FIGURA 21.61
Problema 19.

20. Determine la inductancia total de las bobinas en serie de la figura 21.62.

21. Escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 21.63.

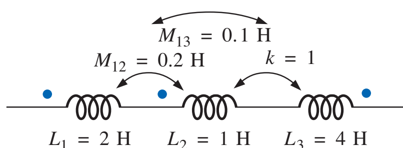


FIGURA 21.62
Problema 20.

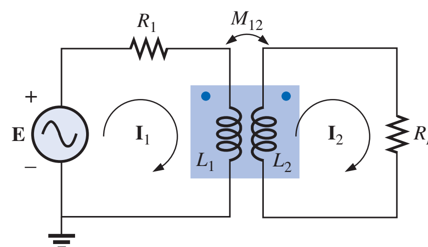
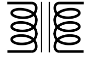


FIGURA 21.63
Problema 21.



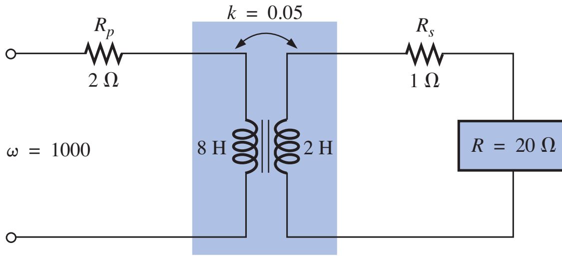


FIGURA 21.64
Problemas 22 y 32.

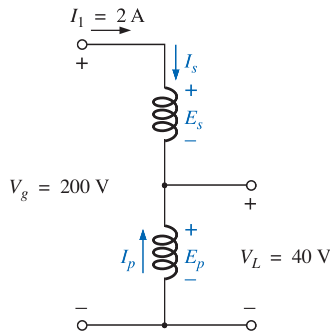


FIGURA 21.65
Problema 24.

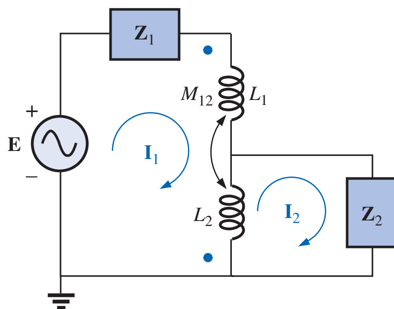


FIGURA 21.66
Problema 28.

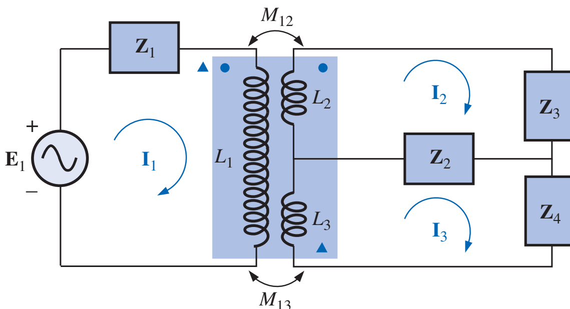


FIGURA 21.67
Problema 29.

SECCIÓN 21.9 Transformador de núcleo de aire

22. Determine la impedancia de entrada al transformador con núcleo de aire de la figura 21.64. Trace la red primaria reflejada.

SECCIÓN 21.10 Datos nominales

23. Un transformador ideal tiene la clasificación 10 kVA, 2400/120 V, 60 Hz.
- **a.** Encuentre la razón de transformación si los 120 V representan el voltaje secundario.
- **b.** Encuentre la clasificación por corriente del secundario si los 120 V representan el voltaje secundario.
- **c.** Encuentre la clasificación por corriente del primario si los 120 V representan el voltaje secundario.
- **d.** Resuelva los incisos (a), (b) y (c) si los 2400 V representan el voltaje secundario.

SECCIÓN 21.11 Tipos de transformadores

24. Determine las corrientes y los voltajes en el primario y secundario para el autotransformador de la figura 21.65.

SECCIÓN 21.12 Transformadores con derivaciones y carga múltiple

25. Para el transformador con derivación central de la figura 21.42, donde $N_p = 100$, $N_s = 25$, $Z_L = R \angle 0° = 5\ \Omega \angle 0°$, y $\mathbf{E}_p = 100\ \text{V} \angle 0°$:
- **a.** Determine el voltaje y la corriente de carga.
- **b.** Encuentre la impedancia $\mathbf{Z}_i$.
- **c.** Calcule la impedancia $\mathbf{Z}_{1/2}$.

26. Para el transformador de carga múltiple de la figura 21.43, donde $N_1 = 90$, $N_2 = 15$, $N_3 = 45$, $\mathbf{Z}_2 = R_2 \angle 0° = 8\ \Omega \angle 0°$, $\mathbf{Z}_3 = R_L \angle 0° = 5\ \Omega \angle 0°$, y $\mathbf{E}_i = 60\ \text{V} \angle 0°$:
- **a.** Determine los voltajes y las corrientes de carga.
- **b.** Calcule $\mathbf{Z}_i$.

27. Para el transformador de carga múltiple de la figura 21.44, donde $N_1 = 120$, $N_2 = 40$, $N_3 = 30$, $\mathbf{Z}_2 = R_2 \angle 0° = 12\ \Omega \angle 0°$, $\mathbf{Z}_3 = R_3 \angle 0° = 10\ \Omega \angle 0°$, y $\mathbf{E}_i = 120\ \text{V} \angle 60°$:
- **a.** Determine los voltajes y las corrientes de carga.
- **b.** Calcule $\mathbf{Z}_i$.

SECCIÓN 21.13 Redes con bobinas magnéticamente acopladas

28. Escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 21.66.

29. Escriba las ecuaciones de malla para la red de la figura 21.67.

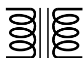
SECCIÓN 21.15 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

***30.** Genere el diagrama esquemático para la red de la figura 21.59, y encuentre el voltaje V_L.

***31.** Desarrolle una técnica usando PSpice o EWB para encontrar la impedancia de entrada en la fuente para la red de la figura 21.59.

***32.** Usando un transformador de la biblioteca, encuentre el voltaje de carga para la red de la figura 21.64 para un voltaje aplicado de 40 V ∠0°.



Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

33. Escriba un programa para proporcionar una solución general al problema de acoplamiento de la impedancia como se definió en el ejemplo 21.5. Es decir, dadas la impedancia de la bocina y la resistencia interna de la fuente, determine la razón requerida de vueltas y la potencia entregada a la bocina. Además, calcule, la corriente de fuente y de carga, y los voltajes en el primario y secundario. El voltaje de fuente tendrá que ser proporcionado con los otros parámetros de la red.

34. Dado el modelo equivalente del transformador con núcleo de hierro que aparece en la figura 21.20, escriba un programa para calcular la magnitud del voltaje $\mathbf{V}_g$.

35. Dados los parámetros del ejemplo 21.7, escriba un programa para calcular la impedancia de entrada en forma polar.

GLOSARIO

Acoplamiento débil Término aplicado a dos bobinas que tienen coeficiente de acoplamiento bajo.

Autotransformador Transformador con un devanado común a los circuitos primario y secundario. Una pérdida en aislamiento es equilibrada mediante el aumento en su valor nominal de kilovolt-ampere.

Coeficiente de acoplamiento (k) Medida del acoplamiento magnético de dos bobinas que va desde un mínimo de 0 hasta un máximo de 1.

Convención del punto Técnica para rotular el efecto de la inductancia mutua sobre una inductancia neta de una red o sistema.

Datos nominales Información de la clasificación por kilovolt-ampere, la razón de transformación de voltaje, y la frecuencia de aplicación que es de primordial importancia al elegir el transformador apropiado para una aplicación en particular.

Flujo de fuga Flujo que enlaza la bobina pero no pasa a través de la trayectoria ferromagnética del circuito magnético.

Impedancia reflejada Impedancia que aparece en el primario de un transformador debido a una carga conectada al secundario. Su magnitud está controlada directamente por la razón de transformación.

Inductancia mutua Inductancia que existe entre bobinas magnéticamente acopladas de la misma o de diferentes dimensiones.

Primario Bobina o devanado donde normalmente se aplica la fuente de energía eléctrica.

Razón de transformación (a) La razón de vueltas del primario al secundario de un transformador.

Secundario Bobina o devanado donde normalmente se aplica la carga.

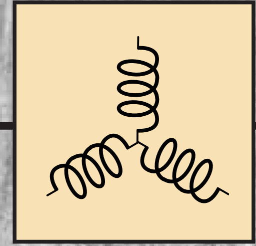
Transformador con derivación central Transformador que tiene una conexión adicional entre las terminales de los devanados primario o secundario.

Transformadores de carga múltiple Transformadores que tienen más de una carga conectada al devanado o devanados secundarios.

Transformador de elevación Transformador cuyo voltaje en el secundario es mayor que su voltaje en el primario. La magnitud de la razón de transformación a es menor que 1.

Transformador de disminución Transformador cuyo voltaje en el secundario es menor que su voltaje en el primario. La razón de transformación a es mayor que 1.

22



Sistemas polifásicos

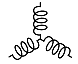
22.1 INTRODUCCIÓN

Un generador de ca diseñado para desarrollar un solo voltaje senoidal por cada rotación del rotor se denomina **generador de ca monofásico**. Si el número de bobinas sobre el rotor se incrementa de manera específica, el resultado es un **generador polifásico de ca**, el cual desarrolla más de un voltaje de fase de ca por rotación del rotor. En este capítulo será discutido con todo detalle el sistema de tres fases, comúnmente llamado trifásico, ya que es el más frecuentemente usado para transmisión de potencia.

En general, para la transmisión de potencia, los sistemas trifásicos son los preferidos sobre los sistemas de una fase, o monofásicos, por muchas razones, incluidas las siguientes:

1. Pueden usarse conductores más delgados para transmitir los mismos kVA al mismo voltaje, lo que reduce la cantidad de cobre requerido (típicamente cerca de 25% menos) y a su vez baja los costos de construcción y mantenimiento.
2. Las líneas más ligeras son más fáciles de instalar, y las estructuras de soporte pueden ser menos masivas y situarse a mayor distancia una de otra.
3. Los equipos y motores trifásicos tienen características preferidas de operación y arranque comparadas con los sistemas monofásicos debido a un flujo más uniforme de potencia al transductor del que puede lograrse con un suministro monofásico.
4. En general, la mayoría de los grandes motores son trifásicos porque son esencialmente de autoarranque y no requieren un diseño especial o circuitería adicional de arranque.

La frecuencia generada se determina por el número de polos en el *rotor* (la parte rotatoria del generador) y la velocidad con que gira la flecha. En todo Estados Unidos la frecuencia de línea es de 60 Hz, mientras que en Europa el estándar es de 50 Hz. Ambas frecuencias fueron elegidas principalmente porque pueden ser generadas mediante un diseño mecánico estable y relativamente eficiente que es sensible al tamaño de los sistemas generadores y a la demanda que



debe satisfacerse durante los periodos pico. En aeronaves y buques los niveles de demanda permiten el uso de una frecuencia de línea de 400 Hz.

El sistema trifásico es usado por casi todos los generadores eléctricos comerciales. Esto no significa que los sistemas generadores de una y dos fases sean obsoletos. La mayoría de los generadores pequeños de emergencia, tales como los tipos de gasolina, son sistemas generadores de una fase. El sistema de dos fases se usa comúnmente en servomecanismos, que son sistemas de control autocorrectivos capaces de detectar y ajustar su propia operación. Los servomecanismos se emplean en buques y aeronaves para mantener automáticamente el curso, o en dispositivos más simples, como un circuito con termostato, para regular la salida de calor. Sin embargo, en muchos casos donde se requieren entradas monofásicas y bifásicas, éstas se suministran mediante una y dos fases de un sistema generador trifásico en vez de ser generadas independientemente.

La cantidad de **voltajes de fase** que pueden ser producidos por un generador polifásico no está limitada a tres. Puede obtenerse cualquier número de fases espaciando los devanados para cada fase en la posición angular apropiada alrededor del estator. Algunos sistemas eléctricos operan con mayor eficiencia cuando se usan más de tres fases. Un sistema de tal tipo implica el proceso de rectificación, el cual se usa para convertir una salida alternante en otra que tenga un valor promedio o valor de cd. A mayor número de fases, más uniforme será la salida de cd del sistema.

22.2 EL GENERADOR TRIFÁSICO

El generador trifásico de la figura 22.1(a) tiene tres bobinas de inducción situadas a 120° entre sí sobre el estator, como se muestra simbólicamente en la figura 22.1(b). Dado que las tres bobinas tienen un número igual de vueltas, y cada bobina gira con la misma velocidad angular, el voltaje inducido en cada una tendrá los mismos valores pico e iguales forma y frecuencia. Conforme el rotor del generador gira por la acción de algún medio externo, los voltajes inducidos e_{AN}, e_{BN} y e_{CN} serán generados simultáneamente, como se muestra en la figura 22.2. Observe el desplazamiento de fase de 120° entre las formas de onda y las similitudes en la apariencia de las tres funciones senoidales.

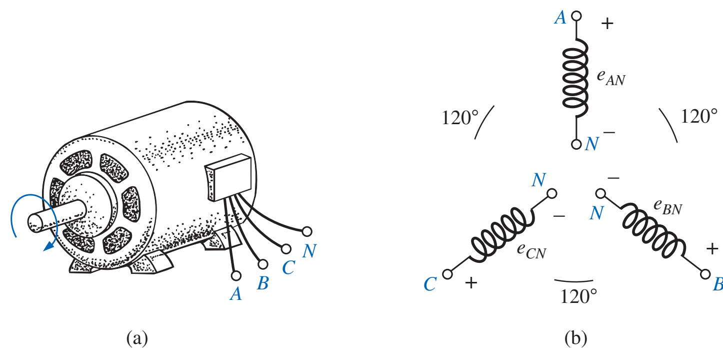
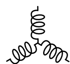


FIGURA 22.1
(a) Generador trifásico; (b) voltajes inducidos de un generador trifásico.

En particular, observe que:

en cualquier instante, la suma algebraica de los tres voltajes de fase de un generador trifásico es cero.



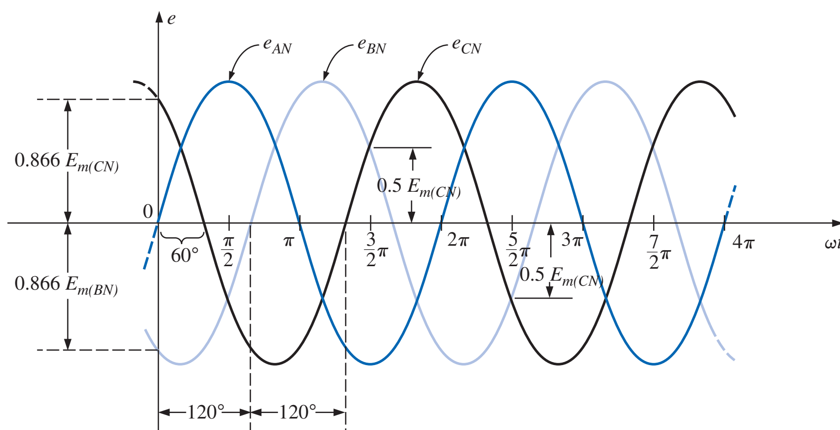


FIGURA 22.2
Voltajes de fase de un generador trifásico.

Esto se muestra en $\omega t = 0$ en la figura 22.2, donde también resulta evidente que *cuando un voltaje inducido es cero, los otros dos voltajes son 86.6% de sus máximos positivos o negativos. Además, cuando dos voltajes cualesquiera son iguales en magnitud y signo (en $0.5E_m$), el restante voltaje inducido tiene la polaridad opuesta y su valor pico.*

La expresión senoidal para cada uno de los voltajes inducidos de la figura 22.2 es:

$$e_{AN} = E_{m(AN)} \text{ sen } \omega t$$
$$e_{BN} = E_{m(BN)} \text{ sen}(\omega t - 120°) \quad \textbf{(22.1)}$$
$$e_{CN} = E_{m(CN)} \text{ sen}(\omega t - 240°) = E_{m(CN)} \text{ sen}(\omega t + 120°)$$

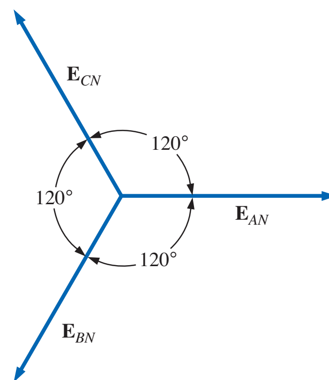


FIGURA 22.3
Diagrama fasorial para los voltajes de fase de un generador trifásico.

El diagrama fasorial de los voltajes inducidos se muestra en la figura 22.3, donde el valor efectivo de cada voltaje se determina mediante:

$$E_{AN} = 0.707E_{m(AN)}$$
$$E_{BN} = 0.707E_{m(BN)}$$
$$E_{CN} = 0.707E_{m(CN)}$$

y

$$\mathbf{E}_{AN} = E_{AN} \angle 0°$$
$$\mathbf{E}_{BN} = E_{BN} \angle -120°$$
$$\mathbf{E}_{CN} = E_{CN} \angle +120°$$

Reordenando los fasores como se muestra en la figura 22.4, y aplicando una ley de vectores que establece que *la suma vectorial de cualquier cantidad de vectores trazados de manera que la "cabeza" de uno esté conectada a la "cola" del siguiente y que la cabeza del último vector esté conectada a la cola del primero es cero*, podemos concluir que la suma fasorial de los voltajes de fase en un sistema trifásico es cero. Es decir,

$$\mathbf{E}_{AN} + \mathbf{E}_{BN} + \mathbf{E}_{CN} = 0 \quad \textbf{(22.2)}$$

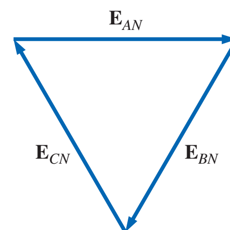
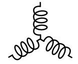


FIGURA 22.4
Demostración de que la suma vectorial de los voltajes de fase de un generador trifásico es cero.



22.3 EL GENERADOR CONECTADO EN Y

Si las tres terminales de la figura 22.1(b) denotadas con N son conectadas entre sí, al generador se le denomina **generador trifásico conectado en Y** (Figura 22.5). Como se indica en la figura 22.5, la Y está invertida por facilidad de notación y claridad. El punto en que todas las terminales están conectadas se denomina *punto neutro*. Si un conductor no está unido desde este punto hasta la carga, el sistema se denomina *generador trifásico de tres alambres conectado en Y*. Si el neutro está conectado, el sistema es un *generador trifásico de cuatro alambres conectado en Y*. La función del neutro será discutida con todo detalle cuando consideremos el circuito de carga.

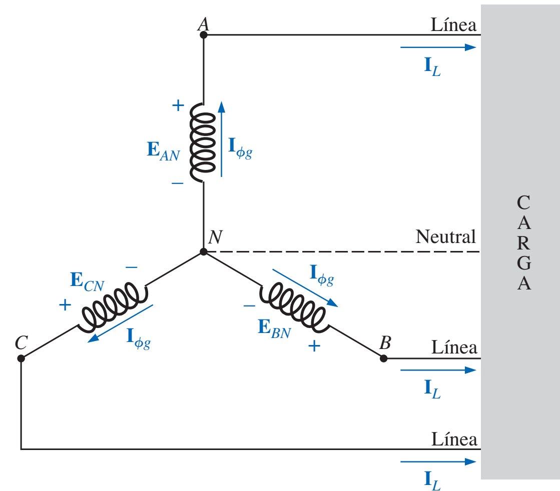


FIGURA 22.5
Generador conectado en Y.

Los tres conductores conectados desde A, B y C hasta la carga son llamados *líneas*. Para el sistema conectado en Y, a partir de la figura 22.5 debe resultar obvio que la **corriente de línea** es igual a la **corriente de fase** para cada fase; es decir,

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_{\phi g} \qquad \textbf{(22.3)}$$

donde ϕ se usa para denotar una cantidad de fase y g es un parámetro del generador.

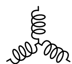
El voltaje de una línea a otra se denomina **voltaje de línea**. Sobre el diagrama fasorial (Figura 22.6), es el fasor trazado desde el extremo de una fase a otra en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del lazo indicado en la figura 22.6 obtenemos:

$$\mathbf{E}_{AB} - \mathbf{E}_{AN} + \mathbf{E}_{BN} = 0$$

o bien:
$$\mathbf{E}_{AB} = \mathbf{E}_{AN} - \mathbf{E}_{BN} = \mathbf{E}_{AN} + \mathbf{E}_{NB}$$

El diagrama fasorial se traza de nuevo para encontrar $\mathbf{E}_{AB}$ como se muestra en la figura 22.7. En vista de que cada voltaje de fase, cuando se invierte ($\mathbf{E}_{NB}$), bisectará los otros dos voltajes, $\alpha = 60°$. El ángulo β es de 30° ya que una línea trazada desde extremos opuestos de un rombo divide a la mitad tanto el ángulo de origen como el ángulo opuesto. Las líneas trazadas entre esquinas opuestas de un rombo también se bisectarán entre sí en ángulos rectos.



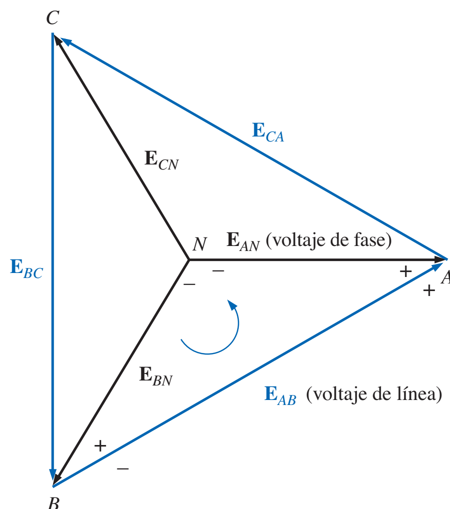


FIGURA 22.6
Voltajes de línea y de fase del generador trifásico conectado en Y.

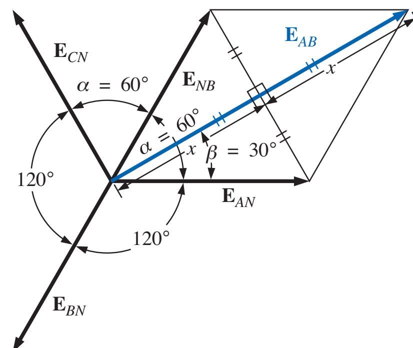


FIGURA 22.7
Determinación de un voltaje de línea para un generador trifásico.

La longitud x es:

$$x = E_{AN} \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} E_{AN}$$

y
$$E_{AB} = 2x = (2)\frac{\sqrt{3}}{2} E_{AN} = \sqrt{3} E_{AN}$$

Tomando en cuenta, a partir del diagrama fasorial, que θ de $\mathbf{E}_{AB} = \beta = 30°$, el resultado es:

$$\mathbf{E}_{AB} = E_{AB} \angle 30° = \sqrt{3} E_{AN} \angle 30°$$

y
$$\mathbf{E}_{CA} = \sqrt{3} E_{CN} \angle 150°$$

$$\mathbf{E}_{BC} = \sqrt{3} E_{BN} \angle 270°$$

En otras palabras, la magnitud del voltaje de línea de un generador conectado en Y es la $\sqrt{3}$ multiplicada por el voltaje de fase:

$$E_L = \sqrt{3} E_\phi \tag{22.4}$$

con el ángulo de fase entre cualquier voltaje de línea y el voltaje de fase más cercano a 30°.

En notación senoidal,

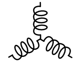
$$e_{AB} = \sqrt{2} E_{AB} \operatorname{sen}(\omega t + 30°)$$

$$e_{CA} = \sqrt{2} E_{CA} \operatorname{sen}(\omega t + 150°)$$

y
$$e_{BC} = \sqrt{2} E_{BC} \operatorname{sen}(\omega t + 270°)$$

El diagrama fasorial de los voltajes de línea y fase se muestra en la figura 22.8. Si los fasores que representan los voltajes de línea en la figura 22.8(a) se reordenan ligeramente, formarán un lazo cerrado [Figura 22.8(b)]. Por tanto, podemos concluir que la suma de los voltajes de línea es también cero; es decir,

$$\mathbf{E}_{AB} + \mathbf{E}_{CA} + \mathbf{E}_{BC} = 0 \tag{22.5}$$



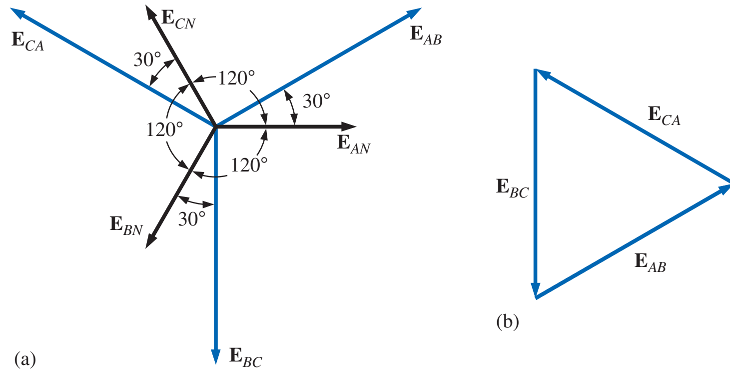


FIGURA 22.8
(a) Diagrama fasorial de los voltajes de línea y de fase de un generador trifásico; (b) demostración de que la suma vectorial de los voltajes de línea de un sistema trifásico es cero.

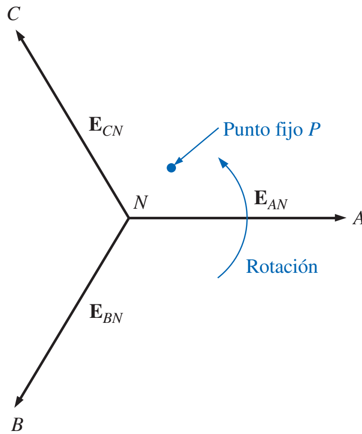


FIGURA 22.9
Determinación de la secuencia de fase a partir de los voltajes de fase de un generador trifásico.

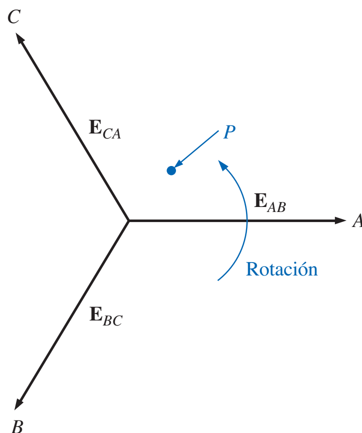


FIGURA 22.10
Determinación de la secuencia de fase a partir de los voltajes de línea de un generador trifásico.

22.4 SECUENCIA DE FASE (GENERADOR CONECTADO EN Y)

La **secuencia de fase** puede ser determinada por el orden en que los fasores que representan los voltajes de fase pasan por un punto fijo en el diagrama fasorial si los fasores giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por ejemplo, en la figura 22.9 la secuencia de fase es *ABC*. Sin embargo, como el punto fijo puede ser seleccionado en cualquier parte sobre el diagrama fasorial, la secuencia también puede escribirse como *BCA* o *CAB*. La secuencia de fase es muy importante en la distribución trifásica de potencia. Por ejemplo, en un motor trifásico, si dos voltajes de fase son intercambiados, la secuencia cambiará y la dirección de rotación del motor se invertirá. Otros efectos serán descritos cuando consideremos el sistema trifásico cargado.

La secuencia de fase también puede ser descrita en términos de los voltajes de línea. Trazando los voltajes de línea sobre un diagrama fasorial en la figura 22.10, podemos determinar la secuencia de fase girando de nuevo los fasores en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Sin embargo, en este caso la secuencia puede ser determinada al advertir el orden de los primeros o segundos subíndices. Por ejemplo, en el sistema de la figura 22.10, la secuencia de fase de los primeros subíndices que pasan el punto *P* es *ABC*, y la secuencia de fase de los segundos subíndices es *BCA*. Pero sabemos que *BCA* es equivalente a *ABC*, por lo que la secuencia es la misma para cada uno. Observe que la secuencia de fase es la misma que para los voltajes de fase descritos en la figura 22.9.

Si la secuencia está dada, el diagrama fasorial puede trazarse eligiendo un voltaje de referencia, colocándolo sobre el eje de referencia, y trazando luego los otros voltajes en su posición angular correcta. Por ejemplo, para una secuencia de *ACB*, podríamos elegir E_{AB} como la referencia [Figura 22.11(a)] si queremos el diagrama fasorial de los voltajes de línea, o E_{NA} para los voltajes de fase [Figura 22.11(b)]. Para la secuencia indicada, los diagramas fasoriales serían como los mostrados en la figura 22.11. En notación fasorial,

$$\text{Voltajes de línea} \begin{cases} \mathbf{E}_{AB} = E_{AB}\,\angle 0^\circ & \text{(referencia)} \\ \mathbf{E}_{CA} = E_{CA}\,\angle -120^\circ \\ \mathbf{E}_{BC} = E_{BC}\,\angle +120^\circ \end{cases}$$

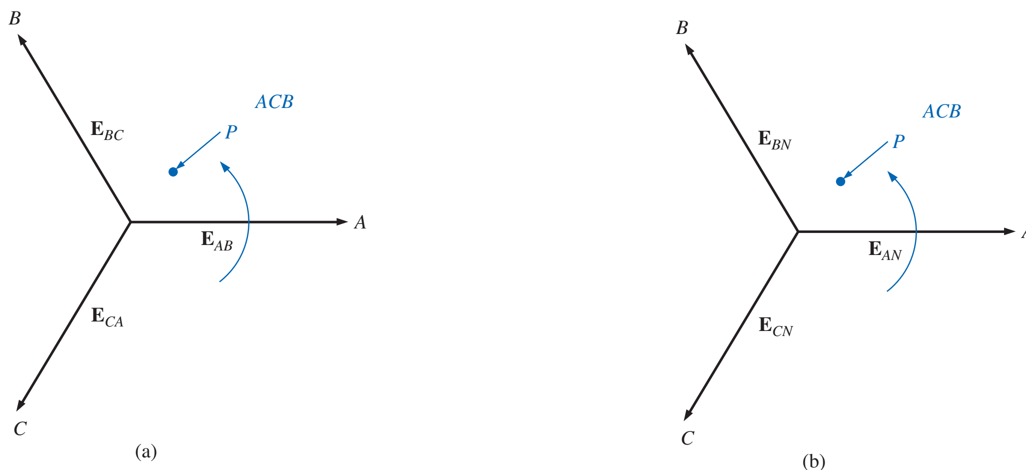


FIGURA 22.11
Trazado del diagrama fasorial a partir de la secuencia de fase.

$$\text{Voltajes de fase}\begin{cases}\mathbf{E}_{AN} = E_{AN}\angle 0^\circ & \text{(referencia)}\\ \mathbf{E}_{CN} = E_{CN}\angle -120^\circ \\ \mathbf{E}_{BN} = E_{BN}\angle +120^\circ\end{cases}$$

22.5 EL GENERADOR CONECTADO EN Y CON CARGA CONECTADA EN Y

Las cargas conectadas a suministros trifásicos son de dos tipos: Y y Δ. Si una carga conectada en Y está conectada a un generador conectado en Y, el sistema se representa simbólicamente por Y-Y. El arreglo físico de un sistema de tal índole se muestra en la figura 22.12.

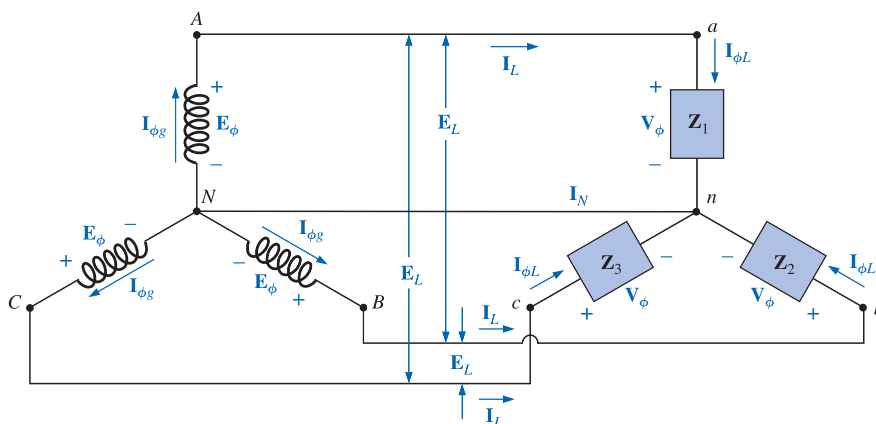
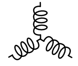


FIGURA 22.12
Generador conectado en Y con una carga conectada en Y.

Si la carga está balanceada, la **conexión neutra** puede eliminarse sin que el circuito se vea afectado de ninguna manera; esto es, si:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3$$



entonces I_N será cero. (Esto se demostrará en el ejemplo 22.1.) Observe que para tener una carga balanceada, el ángulo de fase también debe ser el mismo para cada impedancia, una condición que no fue necesaria en circuitos de cd cuando consideramos sistemas balanceados.

En la práctica, por ejemplo, si una fábrica tiene sólo cargas trifásicas balanceadas, la ausencia del neutro no tendría efecto ya que, idealmente, el sistema siempre estaría balanceado. El costo, por tanto, sería menor ya que el número de conductores requeridos se reduciría. Sin embargo, la iluminación y la mayor parte de otros equipos eléctricos usarán sólo uno de los voltajes de fase, y aun si la carga está diseñada para ser balanceada (como debe ser), nunca se tendrá un balanceo continuo perfecto ya que las luces y otro equipo eléctrico se encenderán y apagarán, perturbando la condición balanceada. El neutro es, por tanto, necesario para llevar la corriente resultante lejos de la carga y de regreso al generador conectado en Y. Esto será demostrado cuando consideremos sistemas no balanceados conectados en Y.

A continuación examinaremos el *sistema de cuatro alambres conectado en Y-Y*. La corriente que pasa por cada fase del generador es la misma que su correspondiente corriente de línea, la cual a su vez, para una carga conectada en Y, es igual a la corriente en la fase de la carga a la que está conectada:

$$\mathbf{I}_{\phi g} = \mathbf{I}_L = \mathbf{I}_{\phi L} \tag{22.6}$$

Tanto para una carga balanceada como para una no balanceada, dado que el generador y la carga tienen un punto neutro común, entonces:

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_\phi \tag{22.7}$$

Además, como $\mathbf{I}_{\phi L} = \mathbf{V}_\phi/\mathbf{Z}_\phi$, la magnitud de la corriente en cada fase será igual para una carga balanceada y desigual para una carga no balanceada. Se recordará que para el generador conectado en Y, la magnitud del voltaje de línea es igual a la $\sqrt{3}$ multiplicada por el voltaje de fase. La misma relación puede aplicarse a una carga de cuatro alambres conectada en Y balanceada o no balanceada:

$$E_L = \sqrt{3}V_\phi \tag{22.8}$$

Para una caída de voltaje en un elemento de carga, el primer subíndice se refiere a la terminal a través de la cual la corriente entra al elemento de carga, y el segundo subíndice se refiere a la terminal por la cual la corriente sale. En otras palabras, el primer subíndice es, por definición, positivo con respecto al segundo para una caída de voltaje. Observe la figura 22.13, en la cual los subíndices estándares dobles están indicados para una fuente de voltaje y una caída de voltaje.

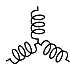
EJEMPLO 22.1 La secuencia de fase del generador conectado en Y en la figura 22.13 es *ABC*.

a. Encuentre los ángulos de fase θ_2 y θ_3.
b. Encuentre la magnitud de los voltajes de línea.
c. Encuentre las corrientes de línea.
d. Verifique si, dado que la carga está balanceada, $\mathbf{I}_N = 0$.

Soluciones:

a. Para una secuencia de fase *ABC*,

$$\theta_2 = \mathbf{-120°} \quad \text{y} \quad \theta_3 = \mathbf{+120°}$$



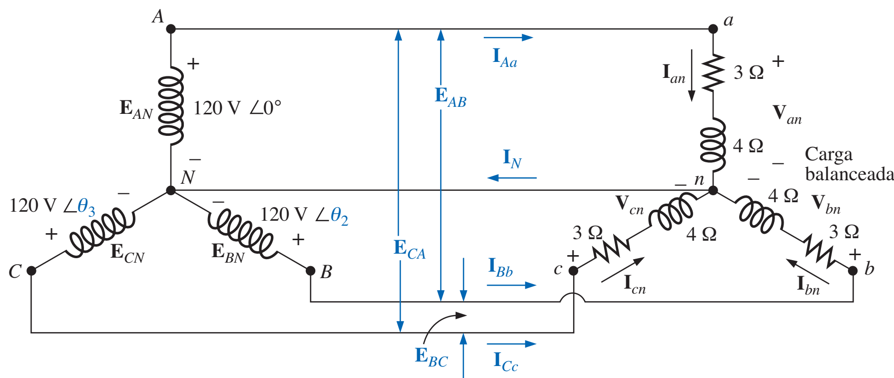


FIGURA 22.13
Ejemplo 22.1.

b. $E_L = \sqrt{3}E_\phi = (1.73)(120 \text{ V}) = 208 \text{ V}$. Por tanto,

$$E_{AB} = E_{BC} = E_{CA} = \mathbf{208\ V}$$

c. $\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_\phi$. Por tanto,

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{E}_{AN} \qquad \mathbf{V}_{bn} = \mathbf{E}_{BN} \qquad \mathbf{V}_{cn} = \mathbf{E}_{CN}$$

$$\mathbf{I}_{\phi L} = \mathbf{I}_{an} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_{an}} = \frac{120 \text{ V} \angle 0^\circ}{3\ \Omega + j\,4\ \Omega} = \frac{120 \text{ V} \angle 0^\circ}{5\ \Omega \angle 53.13^\circ}$$
$$= 24 \text{ A} \angle -53.13^\circ$$

$$\mathbf{I}_{bn} = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_{bn}} = \frac{120 \text{ V} \angle -120^\circ}{5\ \Omega \angle 53.13^\circ} = 24 \text{ A} \angle -173.13^\circ$$

$$\mathbf{I}_{cn} = \frac{\mathbf{V}_{cn}}{\mathbf{Z}_{cn}} = \frac{120 \text{ V} \angle +120^\circ}{5\ \Omega \angle 53.13^\circ} = 24 \text{ A} \angle 66.87^\circ$$

y, como $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_{\phi L}$,

$$\mathbf{I}_{Aa} = \mathbf{I}_{an} = \mathbf{24\ A} \angle \mathbf{-53.13^\circ}$$
$$\mathbf{I}_{Bb} = \mathbf{I}_{bn} = \mathbf{24\ A} \angle \mathbf{-173.13^\circ}$$
$$\mathbf{I}_{Cc} = \mathbf{I}_{cn} = \mathbf{24\ A} \angle \mathbf{66.87^\circ}$$

d. Aplicando la ley de corriente de Kirchhoff tenemos:

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_{Aa} + \mathbf{I}_{Bb} + \mathbf{I}_{Cc}$$

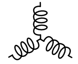
En forma rectangular,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{Aa} &= 24 \text{ A} \angle -53.13^\circ &&= 14.40 \text{ A} - j\,19.20 \text{ A}\\
\mathbf{I}_{Bb} &= 24 \text{ A} \angle -173.13^\circ &&= -23.83 \text{ A} - j\,2.87 \text{ A}\\
\mathbf{I}_{Cc} &= 24 \text{ A} \angle 66.87^\circ &&= 9.43 \text{ A} + j\,22.07 \text{ A}\\
\Sigma(\mathbf{I}_{Aa} + \mathbf{I}_{Bb} + \mathbf{I}_{Cc}) &&&= 0 + j\,0
\end{aligned}$$

e $\mathbf{I}_N$ es en realidad igual a **cero**, como se requiere para una carga balanceada.

22.6 EL SISTEMA Y-Δ

No hay conexión neutra para el sistema Y-Δ de la figura 22.14. Cualquier variación en la impedancia de una fase que produce un sistema no balanceado simplemente variará las corrientes de línea y de fase del sistema.



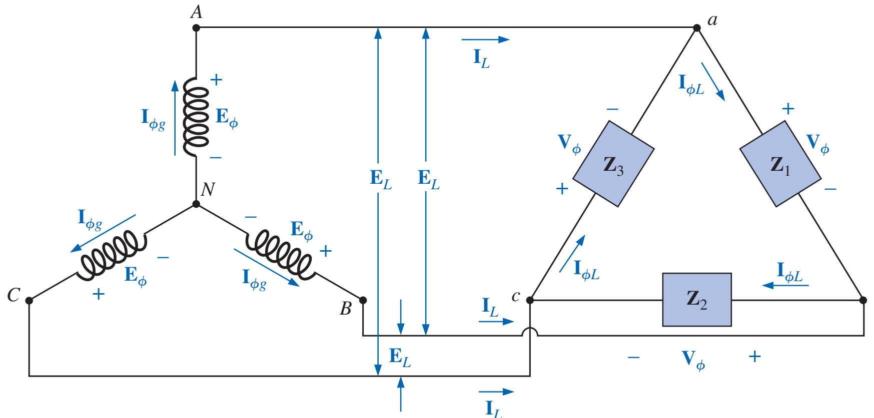


FIGURA 22.14
Generador conectado en Y con una carga conectada en Δ.

Para una carga balanceada,

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 \tag{22.9}$$

El voltaje en cada fase de la carga es igual al voltaje de línea del generador para una carga balanceada o no balanceada:

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_L \tag{22.10}$$

La relación entre las corrientes de línea y las corrientes de fase de una carga balanceada en Δ puede encontrarse empleando un enfoque muy similar al aplicado en la sección 22.3 para encontrar la relación entre los voltajes de línea y los voltajes de fase de un generador conectado en Y. Sin embargo, para este caso, se emplea la ley de corriente de Kirchhoff en vez de la ley de voltaje de Kirchhoff.

Los resultados obtenidos son:

$$I_L = \sqrt{3} I_\phi \tag{22.11}$$

y el ángulo de fase entre una corriente de línea y la corriente de fase más cercana es de 30°. Una argumentación más detallada de esta relación entre las corrientes de línea y de fase de un sistema conectado en Δ puede encontrarse en la sección 22.7.

Para una carga balanceada, las corrientes de línea serán iguales en magnitud, tal como lo serán las corrientes de fase.

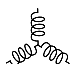
EJEMPLO 22.2 Para el sistema trifásico de la figura 22.15:

a. Encuentre los ángulos de fase θ_2 y θ_3.
b. Encuentre la corriente en cada fase de la carga.
c. Encuentre la magnitud de las corrientes de línea.

Soluciones:

a. Para una secuencia *ABC*,

$$\theta_2 = \mathbf{-120°} \quad \text{y} \quad \theta_3 = \mathbf{+120°}$$



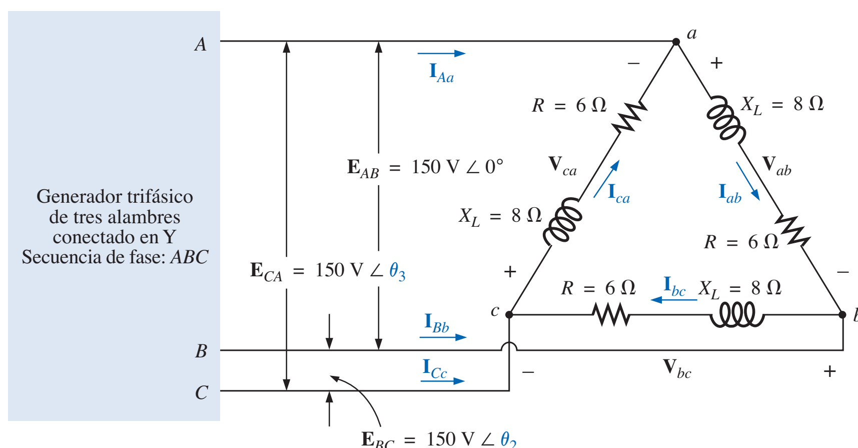


FIGURA 22.15
Ejemplo 22.2.

b. $\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_L$. Por tanto,

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{E}_{AB} \qquad \mathbf{V}_{ca} = \mathbf{E}_{CA} \qquad \mathbf{V}_{bc} = \mathbf{E}_{BC}$$

Las corrientes de fase son:

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_{ab}} = \frac{150 \text{ V } \angle 0^\circ}{6\ \Omega + j\,8\ \Omega} = \frac{150 \text{ V } \angle 0^\circ}{10\ \Omega \angle 53.13^\circ} = \mathbf{15\ A \angle -53.13^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{bc} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_{bc}} = \frac{150 \text{ V } \angle -120^\circ}{10\ \Omega \angle 53.13^\circ} = \mathbf{15\ A \angle -173.13^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{ca} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_{ca}} = \frac{150 \text{ V } \angle +120^\circ}{10\ \Omega \angle 53.13^\circ} = \mathbf{15\ A \angle 66.87^\circ}$$

c. $I_L = \sqrt{3} I_\phi = (1.73)(15 \text{ A}) = 25.95$ A. Por tanto,

$$I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = \mathbf{25.95\ A}$$

22.7 EL GENERADOR CONECTADO EN Δ

Si las bobinas del generador que aparece en la figura 22.16(a) se rearreglan como se muestra en la figura 22.16(b), al sistema se le denomina **generador de**

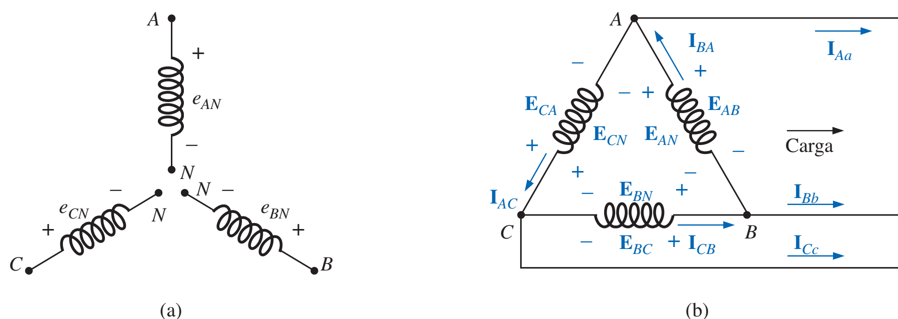
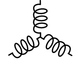


FIGURA 22.16
Generador conectado en Δ.



ca conectado en Δ, *trifásico de tres alambres*. En este sistema, los voltajes de fase y de línea son equivalentes e iguales al voltaje inducido en cada bobina del generador; esto es,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_{AB} &= \mathbf{E}_{AN} \quad \text{y} \quad e_{AN} = \sqrt{2}E_{AN}\,\text{sen}\,\omega t \\ \mathbf{E}_{BC} &= \mathbf{E}_{BN} \quad \text{y} \quad e_{BN} = \sqrt{2}E_{BN}\,\text{sen}(\omega t - 120°) \\ \mathbf{E}_{CA} &= \mathbf{E}_{CN} \quad \text{y} \quad e_{CN} = \sqrt{2}E_{CN}\,\text{sen}(\omega t + 120°) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Secuencia}\\ \text{de fase}\\ ABC\end{array}$$

o bien:

$$\mathbf{E}_L = \mathbf{E}_{\phi g} \tag{22.12}$$

Observe que sólo un voltaje (magnitud) está disponible en vez de los dos voltajes asequibles en el sistema conectado en Y.

A diferencia de la corriente de línea para el generador conectado en Y, la corriente de línea para el sistema conectado en Δ no es igual a la corriente de fase. La relación entre las dos corrientes puede encontrarse aplicando la ley de corriente de Kirchhoff en uno de los nodos y despejando la corriente de línea en términos de las corrientes de fase; es decir, en el nodo *A,*

$$\mathbf{I}_{BA} = \mathbf{I}_{Aa} + \mathbf{I}_{AC}$$

o bien:

$$\mathbf{I}_{Aa} = \mathbf{I}_{BA} - \mathbf{I}_{AC} = \mathbf{I}_{BA} + \mathbf{I}_{CA}$$

El diagrama fasorial se muestra en la figura 22.17 para una carga balanceada.

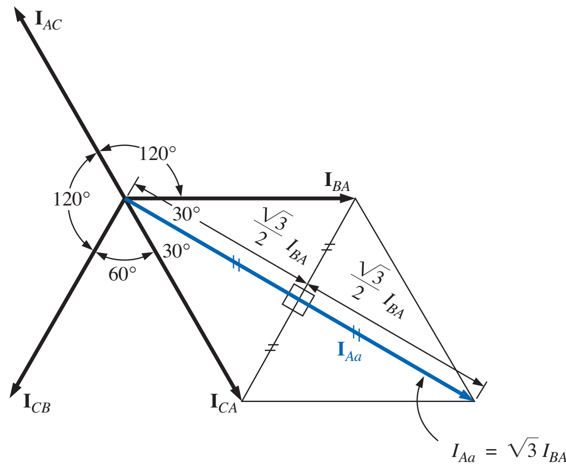


FIGURA 22.17

Determinación de una corriente de línea a partir de las corrientes de fase de un generador trifásico conectado en Δ.

Para encontrar la corriente de línea se emplea el mismo procedimiento utilizado para encontrar el voltaje de línea de un generador conectado en Y, como sigue:

$$I_{Aa} = \sqrt{3}I_{BA}\angle -30°$$
$$I_{Bb} = \sqrt{3}I_{CB}\angle -150°$$
$$I_{Cc} = \sqrt{3}I_{AC}\angle 90°$$

En general:

$$I_L = \sqrt{3}I_{\phi g} \tag{22.13}$$

con el ángulo de fase entre una corriente de línea y la corriente de fase más cercana a 30°. El diagrama fasorial de las corrientes se muestra en la figura 22.18.

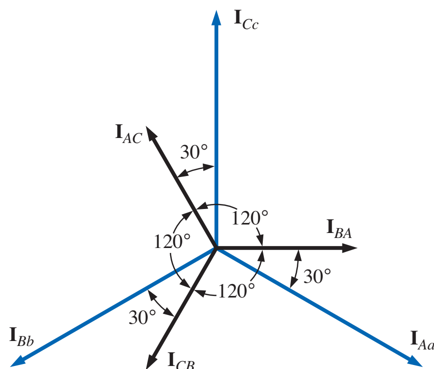


FIGURA 22.18
Diagrama fasorial de las corrientes de un generador trifásico conectado en Δ.

Igual que para los voltajes de un generador conectado en Y, es posible mostrar que la suma fasorial de las corrientes de línea o corrientes de fase para sistemas conectados en Δ con cargas balanceadas es cero.

22.8 SECUENCIA DE FASE (GENERADOR CONECTADO EN Δ)

Aunque los voltajes de línea y de fase de un sistema conectado en Δ son los mismos, es práctica común describir la secuencia de fase en términos de los voltajes de línea. El método empleado es el mismo que el descrito para los voltajes de línea del generador conectado en Y. Por ejemplo, el diagrama fasorial de los voltajes de línea para una secuencia de fase *ABC* se muestra en la figura 22.19. Al trazar un diagrama de tal índole, se debe tener cuidado para encontrar la secuencia de los primeros y segundos subíndices iguales. En notación fasorial,

$$\mathbf{E}_{AB} = E_{AB}\angle 0°$$
$$\mathbf{E}_{BC} = E_{BC}\angle -120°$$
$$\mathbf{E}_{CA} = E_{CA}\angle 120°$$

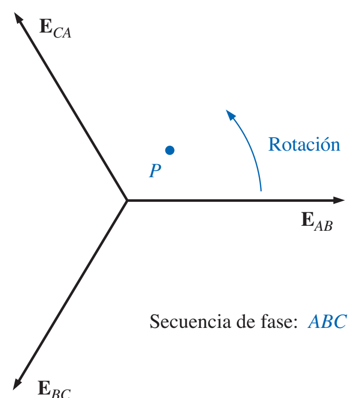


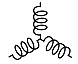
FIGURA 22.19
Determinación de la secuencia de fase para un generador trifásico conectado en Δ.

22.9 LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS Δ-Δ, Δ-Y

Las ecuaciones básicas necesarias para analizar cualquiera de los dos sistemas (Δ-Δ, Δ-Y) han sido presentadas por lo menos una vez en este capítulo. Por tanto, procederemos directamente a desarrollar dos ejemplos descriptivos, uno con una carga conectada en Δ y otro con una carga conectada en Y.

EJEMPLO 22.3 Para el sistema Δ-Δ mostrado en la figura 22.20:

a. Encuentre los ángulos de fase θ_2 y θ_3 para la secuencia de fase especificada.
b. Encuentre la corriente en cada fase de la carga.
c. Encuentre la magnitud de las corrientes de línea.



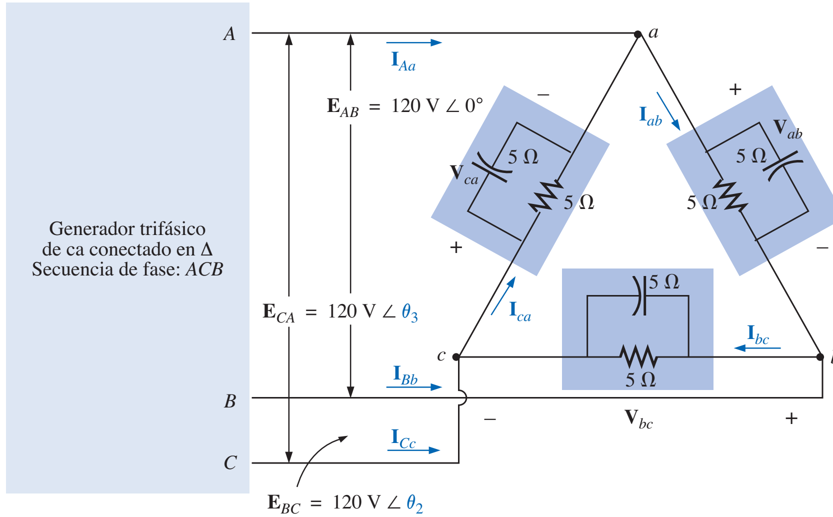


FIGURA 22.20
Ejemplo 22.3: sistema Δ-Δ.

Soluciones:

a. Para una secuencia de fase *ACB*,

$$\theta_2 = \mathbf{120°} \quad \text{y} \quad \theta_3 = \mathbf{-120°}$$

b. $\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_L$. Por tanto,

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{E}_{AB} \qquad \mathbf{V}_{ca} = \mathbf{E}_{CA} \qquad \mathbf{V}_{bc} = \mathbf{E}_{BC}$$

Las corrientes de fase son:

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_{ab}} = \frac{120 \text{ V} \angle 0°}{\dfrac{(5\ \Omega \angle 0°)(5\ \Omega \angle -90°)}{5\ \Omega - j\,5\ \Omega}} = \frac{120 \text{ V} \angle 0°}{\dfrac{25\ \Omega \angle -90°}{7.071 \angle -45°}}$$

$$= \frac{120 \text{ V} \angle 0°}{3.54\ \Omega \angle -45°} = \mathbf{33.9\ A \angle 45°}$$

$$\mathbf{I}_{bc} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_{bc}} = \frac{120 \text{ V} \angle 120°}{3.54\ \Omega \angle -45°} = \mathbf{33.9\ A \angle 165°}$$

$$\mathbf{I}_{ca} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_{ca}} = \frac{120 \text{ V} \angle -120°}{3.54\ \Omega \angle -45°} = \mathbf{33.9\ A \angle -75°}$$

c. $I_L = \sqrt{3} I_\phi = (1.73)(34 \text{ A}) = 58.82 \text{ A}$. Por tanto,

$$I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = \mathbf{58.82\ A}$$

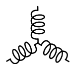
EJEMPLO 22.4 Para el sistema Δ-Y mostrado en la figura 22.21:

a. Encuentre el voltaje en cada fase de la carga.
b. Encuentre la magnitud de los voltajes de línea.

Soluciones:

a. $\mathbf{I}_{\phi L} = \mathbf{I}_L$. Por tanto,

$$\mathbf{I}_{an} = \mathbf{I}_{Aa} = 2 \text{ A} \angle 0°$$
$$\mathbf{I}_{bn} = \mathbf{I}_{Bb} = 2 \text{ A} \angle -120°$$
$$\mathbf{I}_{cn} = \mathbf{I}_{Cc} = 2 \text{ A} \angle 120°$$



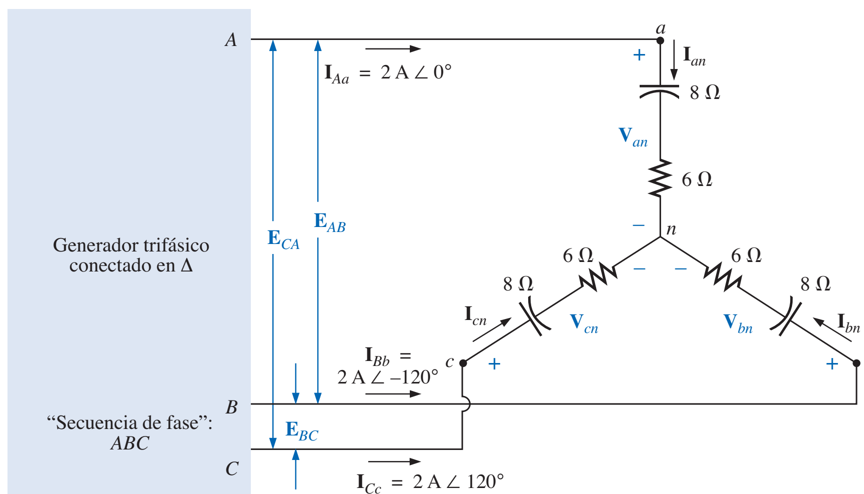


FIGURA 22.21
Ejemplo 22.4: sistema Δ-Y.

Los voltajes de fase son:

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{I}_{an}\mathbf{Z}_{an} = (2\text{ A}\angle 0°)(10\ \Omega\angle -53.13°) = \mathbf{20\ V\angle -53.13°}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = \mathbf{I}_{bn}\mathbf{Z}_{bn} = (2\text{ A}\angle -120°)(10\ \Omega\angle -53.13°) = \mathbf{20\ V\angle -173.13°}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_{cn} = (2\text{ A}\angle 120°)(10\ \Omega\angle -53.13°) = \mathbf{20\ V\angle 66.87°}$$

b. $E_L = \sqrt{3}V_\phi = (1.73)(20\text{ V}) = 34.6\text{ V}$. Por tanto,

$$E_{BA} = E_{CB} = E_{AC} = \mathbf{34.6\ V}$$

22.10 POTENCIA

Carga balanceada conectada en Y

La figura 22.22 es la referencia para efectuar el siguiente análisis.

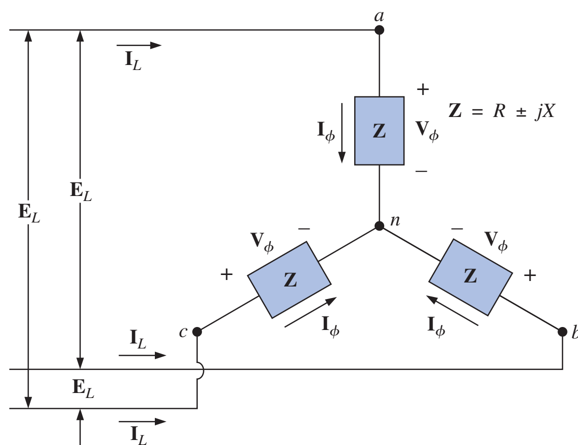
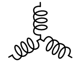


FIGURA 22.22
Carga balanceada conectada en Y.



Potencia promedio La potencia promedio entregada a cada fase puede ser determinada mediante cualesquiera de las ecuaciones (22.14), (22.15) y (22.16).

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = I_\phi^2 R_\phi = \frac{V_R^2}{R_\phi} \qquad \text{(watts, W)} \qquad \textbf{(22.14)}$$

donde $\theta_{I_\phi}^{V_\phi}$ indica que θ es el ángulo de fase entre V_ϕ e I_ϕ. La potencia total a la carga balanceada es:

$$P_T = 3P_\phi \qquad \text{(W)} \qquad \textbf{(22.15)}$$

o, como: $$V_\phi = \frac{E_L}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad I_\phi = I_L$$

entonces: $$P_T = 3\frac{E_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi}$$

Pero: $$\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)(1) = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Por tanto,

$$P_T = \sqrt{3} E_L I_L \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = 3 I_L^2 R_\phi \qquad \text{(W)} \qquad \textbf{(22.16)}$$

Potencia reactiva La potencia reactiva de cada fase (en volt-ampere reactivos) es:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \,\text{sen}\, \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = I_\phi^2 X_\phi = \frac{V_X^2}{X_\phi} \qquad \text{(VAR)} \qquad \textbf{(22.17)}$$

La potencia reactiva total de la carga es:

$$Q_T = 3Q_\phi \qquad \text{(VAR)} \qquad \textbf{(22.18)}$$

o, procediendo como antes, tenemos:

$$Q_T = \sqrt{3} E_L I_L \,\text{sen}\, \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = 3 I_L^2 X_\phi \qquad \text{(VAR)} \qquad \textbf{(22.19)}$$

Potencia aparente La potencia aparente de cada fase es:

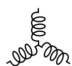
$$S_\phi = V_\phi I_\phi \qquad \text{(VA)} \qquad \textbf{(22.20)}$$

La potencia aparente total de la carga es:

$$S_T = 3S_\phi \qquad \text{(VA)} \qquad \textbf{(22.21)}$$

o, como antes,

$$S_T = \sqrt{3} E_L I_L \qquad \text{(VA)} \qquad \textbf{(22.22)}$$



Factor de potencia El factor de potencia del sistema está dado por:

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi} \qquad \text{(adelantado o atrasado)} \tag{22.23}$$

EJEMPLO 22.5 Para la carga conectada en Y de la figura 22.23:

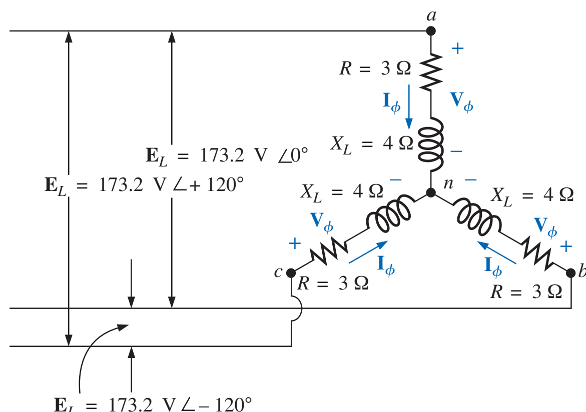


FIGURA 22.23
Ejemplo 22.5.

a. Encuentre la potencia promedio para cada fase y la carga total.
b. Determine la potencia reactiva para cada fase y la potencia reactiva total.
c. Encuentre la potencia aparente para cada fase y la potencia aparente total.
d. Encuentre el factor de potencia de la carga.

Soluciones:

a. La *potencia promedio* es:

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = (100\text{ V})(20\text{ A})\cos 53.13° = (2000)(0.6)$$
$$= \mathbf{1200\ W}$$

$$P_\phi = I_\phi^2 R_\phi = (20\text{ A})^2(3\ \Omega) = (400)(3) = \mathbf{1200\ W}$$

$$P_\phi = \frac{V_R^2}{R_\phi} = \frac{(60\text{ V})^2}{3\ \Omega} = \frac{3600}{3} = \mathbf{1200\ W}$$

$$P_T = 3P_\phi = (3)(1200\text{ W}) = \mathbf{3600\ W}$$

o bien:

$$P_T = \sqrt{3}E_L I_L \cos \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = (1.732)(173.2\text{ V})(20\text{ A})(0.6) = \mathbf{3600\ W}$$

b. La *potencia reactiva* es:

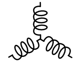
$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \operatorname{sen} \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = (100\text{ V})(20\text{ A})\operatorname{sen} 53.13° = (2000)(0.8)$$
$$= \mathbf{1600\ VAR}$$

o bien: $Q_\phi = I_\phi^2 X_\phi = (20\text{ A})^2(4\ \Omega) = (400)(4) = \mathbf{1600\ VAR}$

$$Q_T = 3Q_\phi = (3)(1600\text{ VAR}) = \mathbf{4800\ VAR}$$

o bien:

$$Q_T = \sqrt{3}E_L I_L \operatorname{sen} \theta_{I_\phi}^{V_\phi} = (1.732)(173.2\text{ V})(20\text{ A})(0.8) = \mathbf{4800\ VAR}$$



c. La *potencia aparente* es:

$$S_\phi = V_\phi I_\phi = (100\text{ V})(20\text{ A}) = \mathbf{2000\text{ VA}}$$
$$S_T = 3S_\phi = (3)(2000\text{ VA}) = \mathbf{6000\text{ VA}}$$

o bien: $S_T = \sqrt{3}E_L I_L = (1.732)(173.2\text{ V})(20\text{ A}) = \mathbf{6000\text{ VA}}$

d. El *factor de potencia* es:

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{3600\text{ W}}{6000\text{ VA}} = \mathbf{0.6\text{ atrasado}}$$

Carga balanceada conectada en Δ

La figura 22.24 es la referencia para el siguiente análisis.

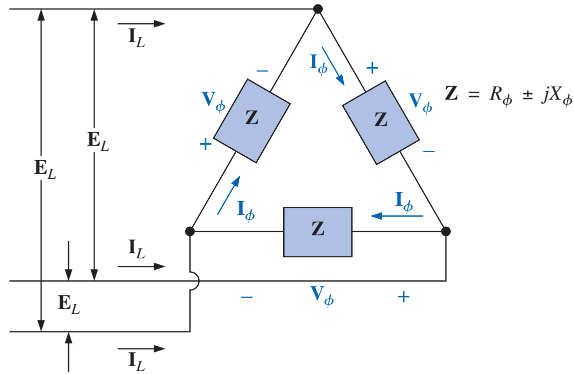


FIGURA 22.24
Carga balanceada conectada en Δ.

Potencia promedio

$$P_\phi = V_\phi I_\phi \cos\theta_{I_\phi}^{V_\phi} = I_\phi^2 R_\phi = \frac{V_R^2}{R_\phi} \quad \text{(W)} \qquad \textbf{(22.24)}$$

$$P_T = 3P_\phi \quad \text{(W)} \qquad \textbf{(22.25)}$$

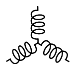
Potencia reactiva

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \operatorname{sen}\theta_{I_\phi}^{V_\phi} = I_\phi^2 X_\phi = \frac{V_X^2}{X_\phi} \quad \text{(VAR)} \qquad \textbf{(22.26)}$$

$$Q_T = 3Q_\phi \quad \text{(VAR)} \qquad \textbf{(22.27)}$$

Potencia aparente

$$S_\phi = V_\phi I_\phi \quad \text{(VA)} \qquad \textbf{(22.28)}$$



$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3}E_L I_L \quad \text{(VA)} \tag{22.29}$$

Factor de potencia

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} \tag{22.30}$$

EJEMPLO 22.6 Para la carga conectada en Δ-Y de la figura 22.25, encuentre las potencias totales promedio, reactiva y aparente; además del factor de potencia de la carga.

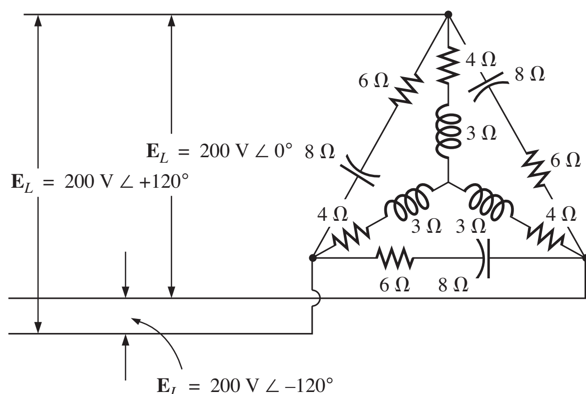


FIGURA 22.25
Ejemplo 22.6.

Solución: Considere la Δ y la Y por separado.

Para la Δ:

$$\mathbf{Z}_\Delta = 6\ \Omega - j\,8\ \Omega = 10\ \Omega\ \angle -53.13^\circ$$

$$I_\phi = \frac{E_L}{Z_\Delta} = \frac{200\ \text{V}}{10\ \Omega} = 20\ \text{A}$$

$$P_{T_\Delta} = 3I_\phi^2 R_\phi = (3)(20\ \text{A})^2(6\ \Omega) = \mathbf{7200\ W}$$

$$Q_{T_\Delta} = 3I_\phi^2 X_\phi = (3)(20\ \text{A})^2(8\ \Omega) = \mathbf{9600\ VAR}\ (\boldsymbol{C})$$

$$S_{T_\Delta} = 3V_\phi I_\phi = (3)(200\ \text{V})(20\ \text{A}) = \mathbf{12{,}000\ VA}$$

Para la Y:

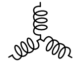
$$\mathbf{Z}_\text{Y} = 4\ \Omega + j\,3\ \Omega = 5\ \Omega\ \angle 36.87^\circ$$

$$I_\phi = \frac{E_L/\sqrt{3}}{Z_\text{Y}} = \frac{200\ \text{V}/\sqrt{3}}{5\ \Omega} = \frac{116\ \text{V}}{5\ \Omega} = 23.12\ \text{A}$$

$$P_{T_\text{Y}} = 3I_\phi^2 R_\phi = (3)(23.12\ \text{A})^2(4\ \Omega) = \mathbf{6414.41\ W}$$

$$Q_{T_\text{Y}} = 3I_\phi^2 X_\phi = (3)(23.12\ \text{A})^2(3\ \Omega) = \mathbf{4810.81\ VAR}\ (\boldsymbol{L})$$

$$S_{T_\text{Y}} = 3V_\phi I_\phi = (3)(116\ \text{V})(23.12\ \text{A}) = \mathbf{8045.76\ VA}$$



Para la carga total:

$$P_T = P_{T_\Delta} + P_{T_Y} = 7200\text{ W} + 6414.41\text{ W} = \mathbf{13{,}614.41\text{ W}}$$

$$Q_T = Q_{T_\Delta} - Q_{T_Y} = 9600\text{ VAR }(C) - 4810.81\text{ VAR }(I)$$
$$= \mathbf{4789.19\text{ VAR }(C)}$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{(13{,}614.41\text{ W})^2 + (4789.19\text{ VAR})^2}$$
$$= \mathbf{14{,}432.2\text{ VA}}$$

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \frac{13{,}614.41\text{ W}}{14{,}432.20\text{ VA}} = \mathbf{0.943\text{ adelantado}}$$

EJEMPLO 22.7 Cada línea de transmisión del sistema trifásico de tres alambres de la figura 22.26 tiene impedancia de 15 Ω + *j* 20 Ω. El sistema entrega una potencia total de 160 kW a 12,000 V a una carga balanceada trifásica con factor de potencia atrasado de 0.86.

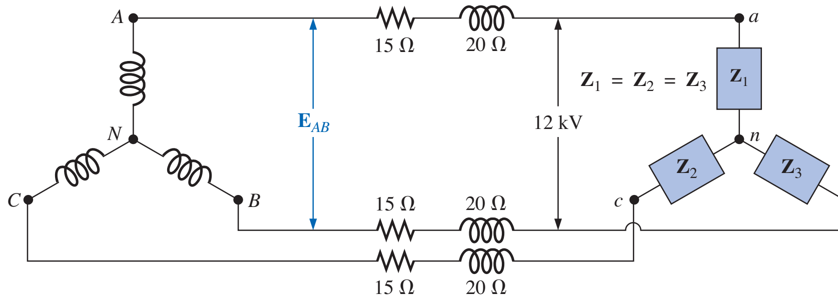


FIGURA 22.26
Ejemplo 22.7.

a. Determine la magnitud del voltaje de línea E_{AB} del generador.
b. Encuentre el factor de potencia de la carga total aplicada al generador.
c. ¿Cuál es la eficiencia del sistema?

Soluciones:

a. $V_\phi\text{ (carga)} = \dfrac{V_L}{\sqrt{3}} = \dfrac{12{,}000\text{ V}}{1.73} = 6936.42\text{ V}$

$$P_T\text{ (carga)} = 3V_\phi I_\phi \cos\theta$$

e

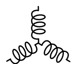
$$I_\phi = \frac{P_T}{3V_\phi \cos\theta} = \frac{160{,}000\text{ W}}{3(6936.42\text{ V})(0.86)}$$
$$= \mathbf{8.94\text{ A}}$$

Como $\theta = \cos^{-1} 0.86 = 30.68°$, asignando a $\mathbf{V}_\phi$ un ángulo de 0° o $\mathbf{V}_\phi = V_\phi \angle 0°$, un factor de potencia atrasado resulta en:

$$\mathbf{I}_\phi = 8.94\text{ A} \angle -30.68°$$

Para cada fase, el sistema aparecerá como se muestra en la figura 22.27, donde:

$$\mathbf{E}_{AN} - \mathbf{I}_\phi \mathbf{Z}_{\text{línea}} - \mathbf{V}_\phi = 0$$



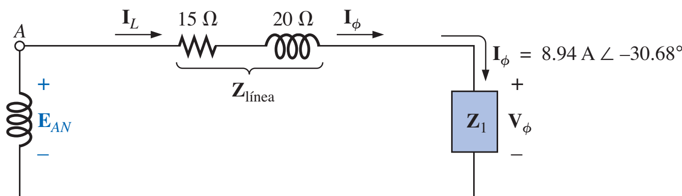


FIGURA 22.27
La carga en cada fase del sistema de la figura 22.26.

o bien:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{AN} &= \mathbf{I}_\phi \mathbf{Z}_{\text{línea}} + \mathbf{V}_\phi \\ &= (8.94 \text{ A} \angle -30.68°)(25\ \Omega \angle 53.13°) + 6936.42 \text{ V} \angle 0° \\ &= 223.5 \text{ V} \angle 22.45° + 6936.42 \text{ V} \angle 0° \\ &= 206.56 \text{ V} + j\,85.35 \text{ V} + 6936.42 \text{ V} \\ &= 7142.98 \text{ V} + j\,85.35 \text{ V} \\ &= 7143.5 \text{ V} \angle 0.68°\end{aligned}$$

Entonces: $$\begin{aligned}E_{AB} &= \sqrt{3}E_{\phi g} = (1.73)(7143.5 \text{ V}) \\ &= \mathbf{12{,}358.26\ V}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}P_T &= P_{\text{carga}} + P_{\text{línea}} \\ &= 160 \text{ kW} + 3(I_L)^2 R_{\text{línea}} \\ &= 160 \text{ kW} + 3(8.94 \text{ A})^2 15\ \Omega \\ &= 160{,}000 \text{ W} + 3596.55 \text{ W} \\ &= 163{,}596.55 \text{ W}\end{aligned}$$

y

$$P_T = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta_T$$

o bien: $$\cos\theta_T = \frac{P_T}{\sqrt{3}V_L I_L} = \frac{163{,}596.55 \text{ W}}{(1.73)(12{,}358.26 \text{ V})(8.94 \text{ A})}$$

y

$$F_p = \mathbf{0.856} < 0.86 \text{ de carga}$$

c. $$\begin{aligned}\eta &= \frac{P_o}{P_i} = \frac{P_o}{P_o + P_{\text{pérdidas}}} = \frac{160 \text{ kW}}{160 \text{ kW} + 3596.55 \text{ W}} = 0.978 \\ &= \mathbf{97.8\%}\end{aligned}$$

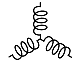
22.11 EL MÉTODO DE LOS TRES WATÍMETROS

La potencia entregada a una carga balanceada o no balanceada de cuatro alambres, conectada en Y, puede encontrarse con el **método de los tres watímetros**, es decir, usando tres watímetros como se muestra en la figura 22.28. Cada watímetro mide la potencia entregada a cada fase. La bobina de voltaje de cada watímetro se conecta en paralelo con la carga, mientras que la bobina de corriente está en serie con la carga. La potencia promedio total del sistema se puede encontrar sumando las lecturas de los tres watímetros; esto es,

$$P_{T_Y} = P_1 + P_2 + P_3 \tag{22.31}$$

Para la carga (balanceada o no balanceada), los watímetros se conectan como se muestra en la figura 22.29. La potencia total es de nuevo la suma de las tres lecturas en los watímetros:

$$P_{T_\Delta} = P_1 + P_2 + P_3 \tag{22.32}$$



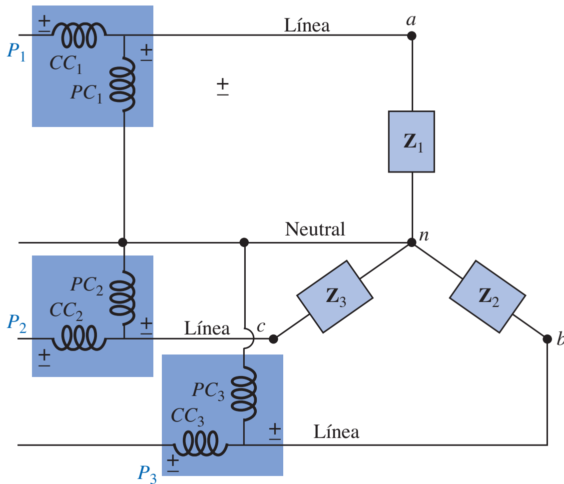


FIGURA 22.28
Método de los tres watímetros para una carga conectada en Y.

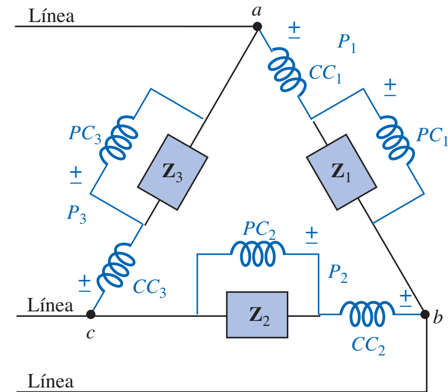


FIGURA 22.29
Método de los tres watímetros para una carga conectada en Δ.

Si en cualquiera de los casos antes descritos la carga está balanceada, la potencia entregada a cada fase será la misma. Entonces, la potencia total es precisamente tres veces la lectura de cualquier watímetro.

22.12 EL MÉTODO DE LOS DOS WATÍMETROS

La potencia entregada a una carga balanceada o no balanceada trifásica, de tres alambres, conectada en Δ o en Y, puede encontrarse usando sólo dos watímetros si se emplea la conexión apropiada y las lecturas de los watímetros se interpretan adecuadamente. Las conexiones básicas de este **método de los dos watímetros** se muestran en la figura 22.30. Un extremo de cada bobina de voltaje se conecta a la misma línea, y las bobinas de corriente se colocan entonces en las líneas restantes.

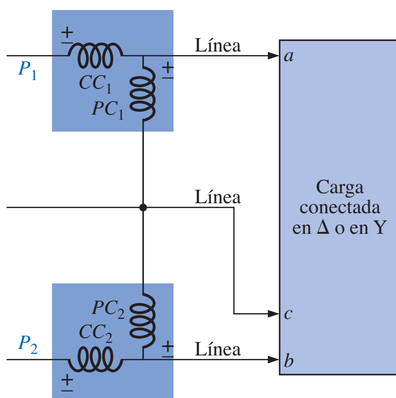


FIGURA 22.30
Método de los dos watímetros para una carga conectada en Δ o en Y.

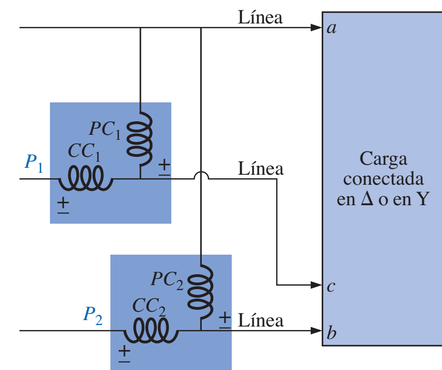
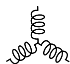


FIGURA 22.31
Conexión alternativa para el método de los dos watímetros.

La conexión mostrada en la figura 22.31 también cumplirá los requisitos. Una tercera conexión también es posible, pero se deja al lector como ejercicio.

La potencia total entregada a la carga es la suma algebraica de las dos lecturas en los watímetros. Para una carga *balanceada*, consideraremos ahora dos métodos para determinar si la potencia total es la suma o la diferencia de



las dos lecturas en los watímetros. El primer método requiere que sepamos o podamos encontrar el factor de potencia (adelantado o atrasado) de una fase cualquiera de la carga. Cuando esta información sea obtenida, podrá aplicarse directamente a la curva de la figura 22.32.

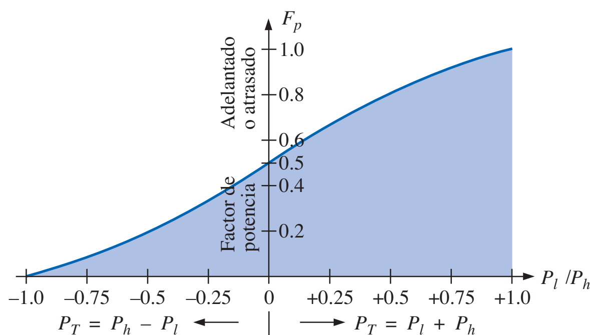


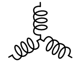
FIGURA 22.32
Determinación de si las lecturas obtenidas usando el método de los dos watímetros deben sumarse o restarse.

La curva en la figura 22.32 es una gráfica del factor de potencia de la carga (fase) en función de la razón P_l/P_h, donde P_l y P_h son las magnitudes de las lecturas menor y mayor en los watímetros, respectivamente. Observe que para un factor de potencia (adelantado o atrasado) mayor que 0.5, la razón tiene un valor positivo. Esto indica que ambos watímetros tienen lecturas positivas, y la potencia total es la suma de las dos lecturas en los watímetros; es decir, $P_T = P_l + P_h$. Para un factor de potencia menor que 0.5 (adelantado o atrasado), la razón tiene un valor negativo. Esto indica que el watímetro con la menor lectura está leyendo un valor negativo, y que la potencia total es la diferencia de las dos lecturas en los watímetros; es decir, $P_T = P_h - P_l$.

Un examen más preciso revelará que cuando el factor de potencia es 1 (cos 0° = 1), correspondiente a una carga puramente resistiva, $P_l/P_h = 1$ o $P_l = P_h$, y ambos watímetros tendrán la misma indicación de potencia. Para un factor de potencia igual a 0 (cos 90° = 0), correspondiente a una carga puramente reactiva, $P_l/P_h = -1$ o $P_l = -P_h$, ambos watímetros tendrán de nuevo la misma indicación de potencia pero con signos opuestos. La transición desde una razón negativa hasta una positiva ocurre cuando el factor de potencia de la carga es 0.5 o $\theta = \cos^{-1} 0.5 = 60°$. En este factor de potencia, $P_l/P_h = 0$, por lo que $P_l = 0$, mientras que P_h leerá la potencia total entregada a la carga.

El segundo método para determinar si la potencia total es la suma o la diferencia de las dos lecturas de los watímetros implica una prueba de laboratorio sencilla. Para aplicar la prueba, ambos watímetros deben tener primero una deflexión hacia arriba en la escala. Si uno de los watímetros tiene una indicación inferior a cero, puede obtenerse una deflexión hacia arriba invirtiendo simplemente los conductores de la bobina de corriente del watímetro. Para llevar a cabo la prueba:

1. Determine qué línea no tiene una bobina de corriente detectando a la corriente de línea.
2. Para el watímetro de lectura menor, desconecte la punta de prueba de la bobina de voltaje conectada a la línea sin la bobina de corriente.
3. Tome la punta de prueba desconectada de la bobina de potencial del watímetro de lectura menor, y toque un punto de conexión sobre la línea que tiene la bobina de corriente del watímetro de lectura mayor.



4. Si el apuntador se deflexiona hacia abajo (por debajo de cero watts), la lectura de la potencia del watímetro de lectura menor debe restarse de la del watímetro de lectura mayor. De otra manera, las lecturas deben sumarse.

Para un *sistema balanceado*, ya que:

$$P_T = P_h \pm P_l = \sqrt{3}E_L I_L \cos\theta_{I_\phi}^{V_\phi}$$

el factor de potencia de la carga (fase) puede encontrarse con las lecturas de los watímetros y la magnitud del voltaje y la corriente de línea:

$$F_p = \cos\theta_{I_\phi}^{V_\phi} = \frac{P_h \pm P_l}{\sqrt{3}E_L I_L} \qquad \textbf{(22.33)}$$

EJEMPLO 22.8 Para la carga no balanceada conectada en Δ de la figura 22.33 con dos watímetros apropiadamente conectados:

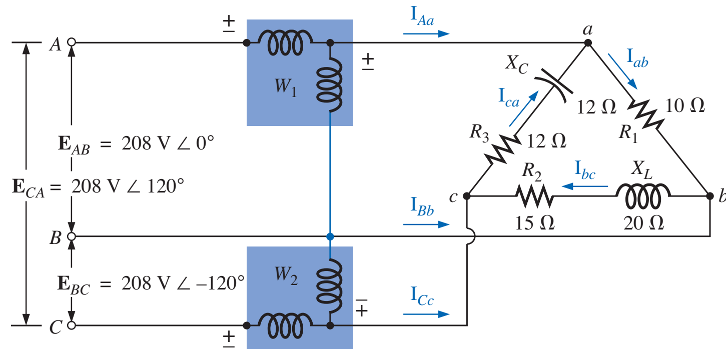


FIGURA 22.33
Ejemplo 22.8.

a. Determine la magnitud y el ángulo de las corrientes de fase.
b. Calcule la magnitud y el ángulo de las corrientes de línea.
c. Determine la lectura de potencia de cada watímetro.
d. Calcule la potencia total absorbida por la carga.
e. Compare el resultado del inciso (d) con la potencia total calculada usando las corrientes de fase y los elementos resistivos.

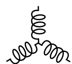
Soluciones:

a. $$\mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_{ab}} = \frac{\mathbf{E}_{AB}}{\mathbf{Z}_{ab}} = \frac{208\text{ V}\angle 0^\circ}{10\ \Omega\angle 0^\circ} = \mathbf{20.8\ A\ \angle 0^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{bc} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_{bc}} = \frac{\mathbf{E}_{BC}}{\mathbf{Z}_{bc}} = \frac{208\text{ V}\angle -120^\circ}{15\ \Omega + j\,20\ \Omega} = \frac{208\text{ V}\angle -120^\circ}{25\ \Omega\angle 53.13^\circ}$$
$$= \mathbf{8.32\ A\ \angle -173.13^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{ca} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_{ca}} = \frac{\mathbf{E}_{CA}}{\mathbf{Z}_{ca}} = \frac{208\text{ V}\angle +120^\circ}{12\ \Omega + j\,12\ \Omega} = \frac{208\text{ V}\angle +120^\circ}{16.97\ \Omega\angle -45^\circ}$$
$$= \mathbf{12.26\ A\ \angle 165^\circ}$$

b. $$\begin{aligned}\mathbf{I}_{Aa} &= \mathbf{I}_{ab} - \mathbf{I}_{ca}\\ &= 20.8\text{ A}\angle 0^\circ - 12.26\text{ A}\angle 165^\circ\\ &= 20.8\text{ A} - (-11.84\text{ A} + j\,3.17\text{ A})\\ &= 20.8\text{ A} + 11.84\text{ A} - j\,3.17\text{ A} = 32.64\text{ A} - j\,3.17\text{ A}\\ &= \mathbf{32.79\ A\ \angle -5.55^\circ}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{Bb} &= \mathbf{I}_{bc} - \mathbf{I}_{ab}\\ &= 8.32\text{ A }\angle -173.13^\circ - 20.8\text{ A }\angle 0^\circ\\ &= (-8.26\text{ A} - j\,1\text{ A}) - 20.8\text{ A}\\ &= -8.26\text{ A} - 20.8\text{ A} - j\,1\text{ A} = -29.06\text{ A} - j\,1\text{ A}\\ &= \mathbf{29.08\ A\ \angle -178.03^\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{Cc} &= \mathbf{I}_{ca} - \mathbf{I}_{bc}\\ &= 12.26\text{ A }\angle 165^\circ - 8.32\text{ A }\angle -173.13^\circ\\ &= (-11.84\text{ A} + j\,3.17\text{ A}) - (-8.26\text{ A} - j\,1\text{ A})\\ &= -11.84\text{ A} + 8.26\text{ A} + j(3.17\text{ A} + 1\text{ A}) = -3.58\text{ A} + j\,4.17\text{ A}\\ &= \mathbf{5.5\ A\ \angle 130.65^\circ}\end{aligned}$$

c. $P_1 = V_{ab}I_{Aa}\cos\theta_{\mathbf{I}_{Aa}}^{\mathbf{V}_{ab}} \qquad \mathbf{V}_{ab} = 208\text{ V }\angle 0^\circ$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{Aa} &= 32.79\text{ A }\angle -5.55^\circ\\ &= (208\text{ V})(32.79\text{ A})\cos 5.55^\circ\\ &= \mathbf{6788.35\ W}\end{aligned}$$

$\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{E}_{BC} = 208\text{ V }\angle -120^\circ$

pero: $\mathbf{V}_{cb} = \mathbf{E}_{CB} = 208\text{ V }\angle -120^\circ + 180^\circ = 208\text{ V }\angle 60^\circ$

con: $\mathbf{I}_{Cc} = 5.5\text{ A }\angle 130.65^\circ$

$$\begin{aligned}P_2 &= V_{cb}I_{Cc}\cos\theta_{\mathbf{I}_{Cc}}^{\mathbf{V}_{cb}}\\ &= (208\text{ V})(5.5\text{ A})\cos 70.65^\circ\\ &= \mathbf{379.1\ W}\end{aligned}$$

d. $P_T = P_1 + P_2 = 6788.35\text{ W} + 379.1\text{ W} = \mathbf{7167.45\ W}$

e.
$$\begin{aligned}P_T &= (I_{ab})^2R_1 + (I_{bc})^2R_2 + (I_{ca})^2R_3\\ &= (20.8\text{ A})^2 10\ \Omega + (8.32\text{ A})^2 15\ \Omega + (12.26\text{ A})^2 12\ \Omega\\ &= 4326.4\text{ W} + 1038.34\text{ W} + 1803.69\text{ W}\\ &= \mathbf{7168.43\ W}\end{aligned}$$

(La ligera diferencia se debe al nivel de precisión considerado en los cálculos.)

22.13 CARGA TRIFÁSICA NO BALANCEADA, DE CUATRO ALAMBRES, CONECTADA EN Y

Las condiciones para la carga trifásica conectada en Y, de cuatro alambres, que aparece en la figura 22.34, son de tal naturaleza que *ninguna* de las impedancias de carga son iguales, por lo que tenemos una **carga polifásica no balanceada**. Como el neutro es un punto común entre la carga y la fuente, sin importar cuál sea la impedancia de cada fase de la carga y la fuente, el voltaje en cada fase es el voltaje fase del generador

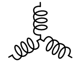
$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{E}_\phi \tag{22.34}$$

Las corrientes de fase pueden, por tanto, determinarse mediante la ley de Ohm:

$$\mathbf{I}_{\phi_1} = \frac{\mathbf{V}_{\phi_1}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{\mathbf{E}_{\phi_1}}{\mathbf{Z}_1} \quad \text{y así sucesivamente} \tag{22.35}$$

Para cualquier sistema no balanceado, la corriente en el neutro puede encontrarse entonces aplicando la ley de corriente de Kirchhoff en el punto común n:

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_{\phi_1} + \mathbf{I}_{\phi_2} + \mathbf{I}_{\phi_3} = \mathbf{I}_{L_1} + \mathbf{I}_{L_2} + \mathbf{I}_{L_3} \tag{22.36}$$



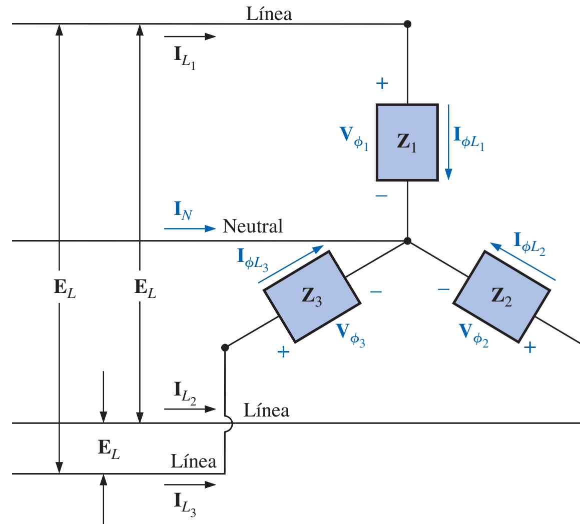


FIGURA 22.34
Carga no balanceada conectada en Y.

Debido a la diversidad de equipo que se encuentra en el ambiente industrial, la potencia trifásica y la monofásica se proporcionan, por lo general, con la monofásica obtenida del sistema trifásico. Además, como la carga de cada fase cambia en forma continua, normalmente se emplea un sistema de cuatro alambres (con un neutro) para asegurar niveles de voltaje uniformes, y con el fin de proporcionar una trayectoria para la corriente resultante de una carga no balanceada. El sistema de la figura 22.35 tiene un transformador trifásico disminuyendo el voltaje de línea desde 13,800 hasta 208 V. Todas las cargas que demandan las potencias más bajas, como la iluminación, los contactos para corriente de pared, los sistemas de seguridad, etc., usan la línea monofásica de 120 V para el voltaje neutro. Las cargas de potencia más altas, como el aire acondicionado, las secadoras o los hornos eléctricos, etc., usan una fase, 208 V disponibles de línea a línea. Para motores más grandes y equipo con demandas altas especiales, el sistema puede tomar directamente la potencia trifásica, como se aprecia en la figura 22.35. En el diseño y la construcción de un establecimiento comercial, el National Electrical Code estadounidense exige realizar todo esfuerzo necesario para asegurar que las cargas esperadas —sean de una

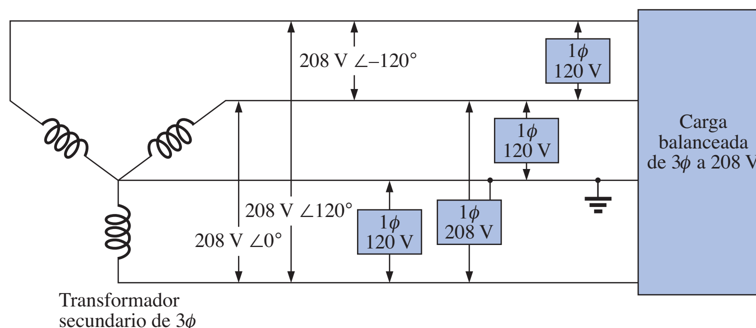
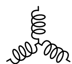


FIGURA 22.35
Suministro industrial, 3φ/1φ, 208 V/120 V.



fase o de fase múltiple— produzcan una carga total lo más balanceada posible entre fases, con el fin de garantizar el nivel más alto de eficiencia de transmisión.

22.14 CARGA TRIFÁSICA NO BALANCEADA, DE TRES ALAMBRES, CONECTADA EN Y

Las ecuaciones requeridas para el sistema de la figura 22.36 pueden obtenerse aplicando primero la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor de cada lazo cerrado para producir:

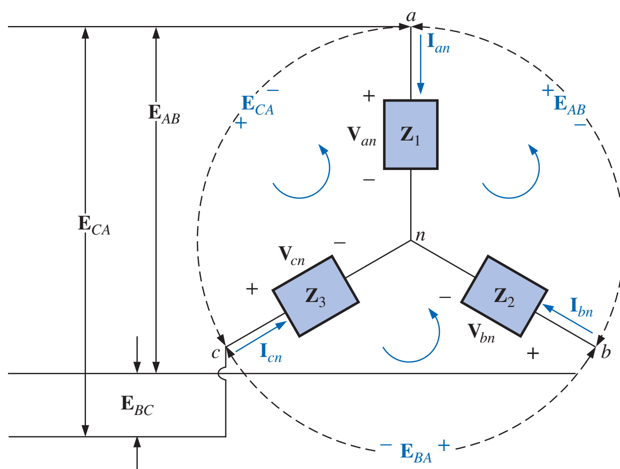


FIGURA 22.36
Carga trifásica no balanceada conectada en Y, de tres alambres.

$$\mathbf{E}_{AB} - \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} = 0$$
$$\mathbf{E}_{BC} - \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0$$
$$\mathbf{E}_{CA} - \mathbf{V}_{cn} + \mathbf{V}_{an} = 0$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{I}_{an}\mathbf{Z}_1 \qquad \mathbf{V}_{bn} = \mathbf{I}_{bn}\mathbf{Z}_2 \qquad \mathbf{V}_{cn} = \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_3$$

$$\mathbf{E}_{AB} = \mathbf{I}_{an}\mathbf{Z}_1 - \mathbf{I}_{bn}\mathbf{Z}_2 \quad \textbf{(22.37a)}$$
$$\mathbf{E}_{BC} = \mathbf{I}_{bn}\mathbf{Z}_2 - \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_3 \quad \textbf{(22.37b)}$$
$$\mathbf{E}_{CA} = \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_3 - \mathbf{I}_{an}\mathbf{Z}_1 \quad \textbf{(22.37c)}$$

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff en el nodo *n* resulta:

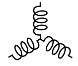
$$\mathbf{I}_{an} + \mathbf{I}_{bn} + \mathbf{I}_{cn} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{bn} = -\mathbf{I}_{an} - \mathbf{I}_{cn}$$

La sustitución de $\mathbf{I}_{bn}$ en las ecuaciones (22.37a) y (22.37b) produce:

$$\mathbf{E}_{AB} = \mathbf{I}_{an}\mathbf{Z}_1 - [-(\mathbf{I}_{an} + \mathbf{I}_{cn})]\mathbf{Z}_2$$
$$\mathbf{E}_{BC} = -(\mathbf{I}_{an} + \mathbf{I}_{cn})\mathbf{Z}_2 - \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_3$$

las cuales vuelven a escribirse como:

$$\mathbf{E}_{AB} = \mathbf{I}_{an}(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) + \mathbf{I}_{cn}\mathbf{Z}_2$$
$$\mathbf{E}_{BC} = \mathbf{I}_{an}(-\mathbf{Z}_2) + \mathbf{I}_{cn}[-(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)]$$



Usando determinantes, tenemos:

$$\mathbf{I}_{an} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{E}_{AB} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{E}_{BC} & -(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 & \mathbf{Z}_2 \\ -\mathbf{Z}_2 & -(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{E}_{AB} - \mathbf{E}_{BC}\mathbf{Z}_2}{-\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_2^2 + \mathbf{Z}_2^2}$$

$$\mathbf{I}_{an} = \frac{-\mathbf{Z}_2(\mathbf{E}_{AB} + \mathbf{E}_{BC}) - \mathbf{Z}_3\mathbf{E}_{AB}}{-\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}$$

Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff a los voltajes de línea:

$$\mathbf{E}_{AB} + \mathbf{E}_{CA} + \mathbf{E}_{BC} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{E}_{AB} + \mathbf{E}_{BC} = -\mathbf{E}_{CA}$$

Sustituyendo ($\mathbf{E}_{AB} + \mathbf{E}_{CB}$) en la ecuación anterior para $\mathbf{I}_{an}$:

$$\mathbf{I}_{an} = \frac{-\mathbf{Z}_2(-\mathbf{E}_{CA}) - \mathbf{Z}_3\mathbf{E}_{AB}}{-\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}$$

e

$$\boxed{\mathbf{I}_{an} = \frac{\mathbf{E}_{AB}\mathbf{Z}_3 - \mathbf{E}_{CA}\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}} \qquad \textbf{(22.38)}$$

De igual manera, se puede mostrar que:

$$\boxed{\mathbf{I}_{cn} = \frac{\mathbf{E}_{CA}\mathbf{Z}_2 - \mathbf{E}_{BC}\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}} \qquad \textbf{(22.39)}$$

Sustituyendo $\mathbf{I}_{cn}$ de la ecuación (22.39) en el lado derecho de la ecuación (22.37b), obtenemos:

$$\boxed{\mathbf{I}_{bn} = \frac{\mathbf{E}_{BC}\mathbf{Z}_1 - \mathbf{E}_{AB}\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}} \qquad \textbf{(22.40)}$$

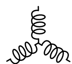
EJEMPLO 22.9 Un *indicador de secuencia de fase* es un instrumento que puede exhibir la secuencia de fase de un circuito polifásico. En la figura 22.37 aparece una red que efectuará esta función. La secuencia de fase aplicada es *ABC*. El foco correspondiente a esta secuencia de fase se encenderá más brillantemente que el foco que indica la secuencia *ACB* porque una corriente más alta pasa a través del foco *ABC*. Calculando las corrientes de fase se demostrará que esta situación, de hecho, existe:

$$Z_1 = X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(377 \text{ rad/s})(16 \times 10^{-6} \text{ F})} = 166 \ \Omega$$

Mediante la ecuación (22.39),

$$\mathbf{I}_{cn} = \frac{\mathbf{E}_{CA}\mathbf{Z}_2 - \mathbf{E}_{BC}\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}$$

$$= \frac{(200 \text{ V} \angle 120°)(200 \ \Omega \angle 0°) - (200 \text{ V} \angle -120°)(166 \ \Omega \angle -90°)}{(166 \ \Omega \angle -90°)(200 \ \Omega \angle 0°) + (166 \ \Omega \angle -90°)(200 \ \Omega \angle 0°) + (200 \ \Omega \angle 0°)(200 \ \Omega \angle 0°)}$$



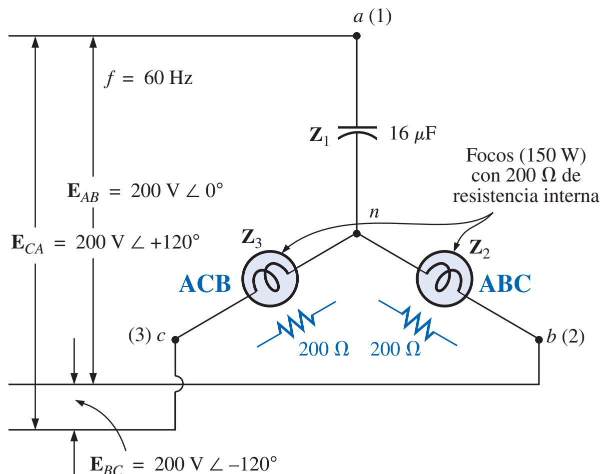


FIGURA 22.37
Ejemplo 22.9.

$$\mathbf{I}_{cn} = \frac{40{,}000 \text{ V} \angle 120° + 33{,}200 \text{ V} \angle -30°}{33{,}200 \ \Omega \angle -90° + 33{,}200 \ \Omega \angle -90° + 40{,}000 \ \Omega \angle 0°}$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre 1000 y convirtiendo ambos al dominio rectangular resulta:

$$\mathbf{I}_{cn} = \frac{(-20 + j\,34.64) + (28.75 - j\,16.60)}{40 - j\,66.4}$$

$$= \frac{8.75 + j\,18.04}{77.52 \angle -58.93°} = \frac{20.05 \angle 64.13°}{77.52 \angle -58.93°}$$

$$\mathbf{I}_{cn} = \mathbf{0.259 \text{ A} \angle 123.06°}$$

Mediante la ecuación (22.40),

$$\mathbf{I}_{bn} = \frac{\mathbf{E}_{BC}\mathbf{Z}_1 - \mathbf{E}_{AB}\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}$$

$$= \frac{(200 \text{ V} \angle -120°)(166 \angle -90°) - (200 \text{ V} \angle 0°)(200 \angle 0°)}{77.52 \times 10^3 \ \Omega \angle -58.93°}$$

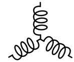
$$\mathbf{I}_{bn} = \frac{33{,}200 \text{ V} \angle -210° - 40{,}000 \text{ V} \angle 0°}{77.52 \times 10^3 \ \Omega \angle -58.93°}$$

Dividiendo entre 1000 y convirtiendo al dominio rectangular resulta:

$$\mathbf{I}_{bn} = \frac{-28.75 + j\,16.60 - 40.0}{77.52 \angle -58.93°} = \frac{-68.75 + j\,16.60}{77.52 \angle -58.93°}$$

$$= \frac{70.73 \angle 166.43°}{77.52 \angle -58.93°} = \mathbf{0.91 \text{ A} \angle 225.36°}$$

e $I_{bn} > I_{cn}$ por un factor de más de 3 : 1. Por tanto, el foco que indica una secuencia *ABC* se encenderá más brillantemente debido a la corriente más alta. Si la secuencia fuese *ACB*, lo inverso sería verdadero.



PROBLEMAS

SECCIÓN 22.5 El generador conectado en Y con carga conectada en Y

1. Una carga en Y balanceada, con resistencia de 10 Ω en cada lado está conectada a un generador trifásico, de cuatro alambres, conectado en Y, con voltaje de línea de 208 V. Calcule la magnitud de:
   a. El voltaje de fase del generador.
   b. El voltaje de fase de la carga.
   c. La corriente de fase de la carga.
   d. La corriente de línea.

2. Resuelva el problema 1 si cada impedancia de fase se cambia por un resistor de 12 Ω en serie con una reactancia capacitiva de 16 Ω.

3. Resuelva el problema 1 si cada impedancia de fase se cambia por un resistor de 10 Ω en paralelo con una reactancia capacitiva de 10 Ω.

4. La secuencia de fase para el sistema Y-Y de la figura 22.38 es *ABC*.
   a. Encuentre los ángulos θ_2 y θ_3 para la secuencia de fase especificada.
   b. Encuentre el voltaje en cada impedancia de fase en forma fasorial.
   c. Encuentre la corriente a través de cada impedancia de fase en forma fasorial.
   d. Trace el diagrama fasorial de las corrientes encontradas en el inciso (c), y muestre que su suma fasorial es cero.
   e. Encuentre la magnitud de las corrientes de línea.
   f. Encuentre la magnitud de los voltajes de línea.

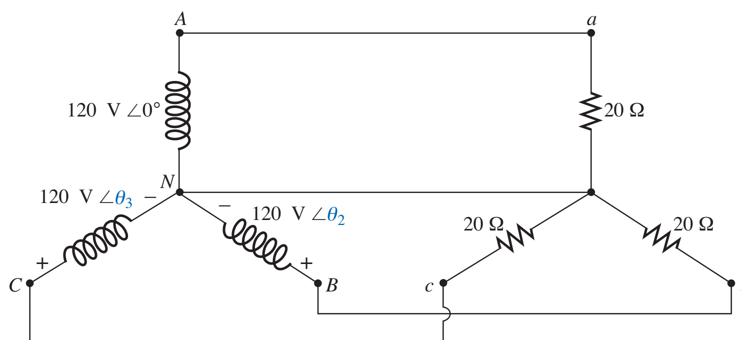
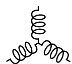


FIGURA 22.38
Problemas 4, 5, 6 y 31.

5. Resuelva el problema 4 si las impedancias de fase se cambian a un resistor de 9 Ω en serie con una reactancia inductiva de 12 Ω.

6. Resuelva el problema 4 si las impedancias de fase se cambian por una resistencia de 6 Ω en paralelo con una reactancia capacitiva de 8 Ω.



7. Para el sistema de la figura 22.39, encuentre la magnitud de corrientes y voltajes desconocidos.

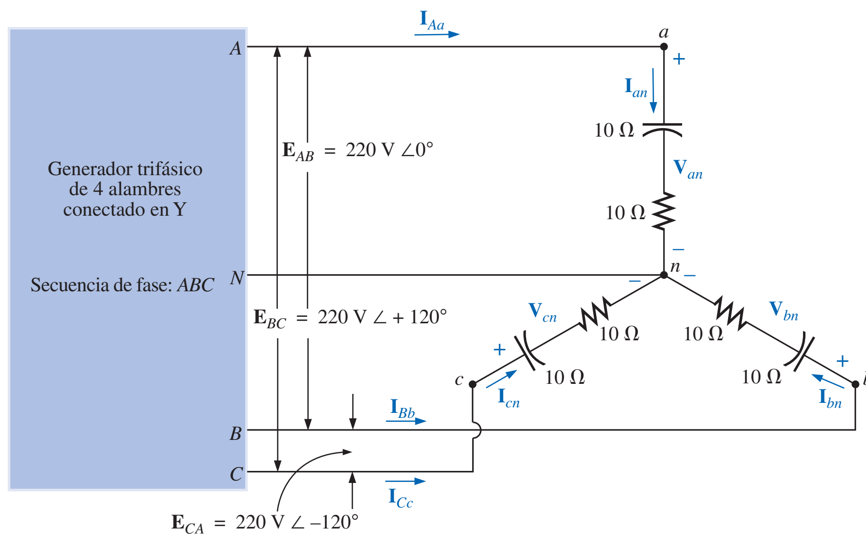


FIGURA 22.39
Problemas 7, 32 y 44.

***8.** Calcule la magnitud del voltaje E_{AB} para el sistema balanceado trifásico de la figura 22.40.

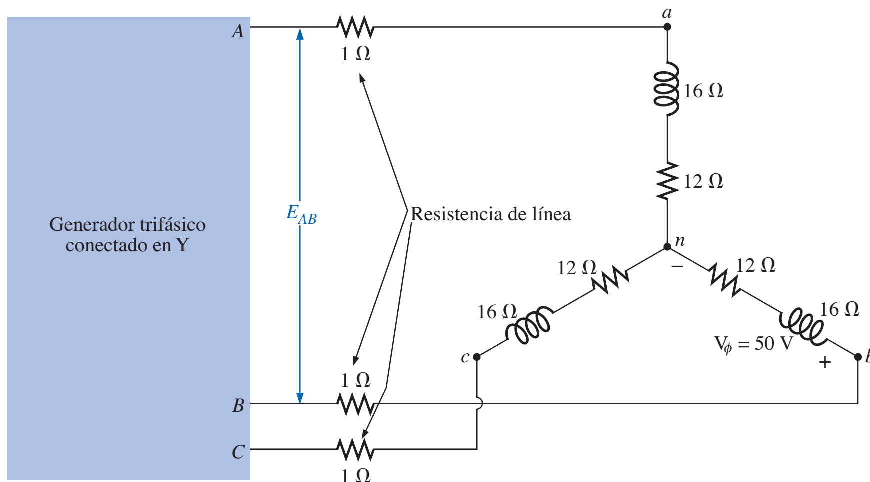
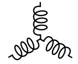


FIGURA 22.40
Problema 8.



***9.** Para el sistema Y-Y de la figura 22.41:

a. Encuentre la magnitud y el ángulo asociado con los voltajes $\mathbf{E}_{AN}$, $\mathbf{E}_{BN}$ y $\mathbf{E}_{CN}$.

b. Determine la magnitud y el ángulo asociado con cada corriente de fase de la carga: $\mathbf{I}_{an}$, $\mathbf{I}_{bn}$ e $\mathbf{I}_{cn}$.

c. Determine la magnitud y el ángulo de fase del voltaje en cada fase de la carga: $\mathbf{I}_{Aa}$, $\mathbf{I}_{Bb}$ e $\mathbf{I}_{Cc}$.

d. Encuentre la magnitud y el ángulo de fase de cada corriente de línea: $\mathbf{V}_{an}$, $\mathbf{V}_{bn}$ y $\mathbf{V}_{cn}$.

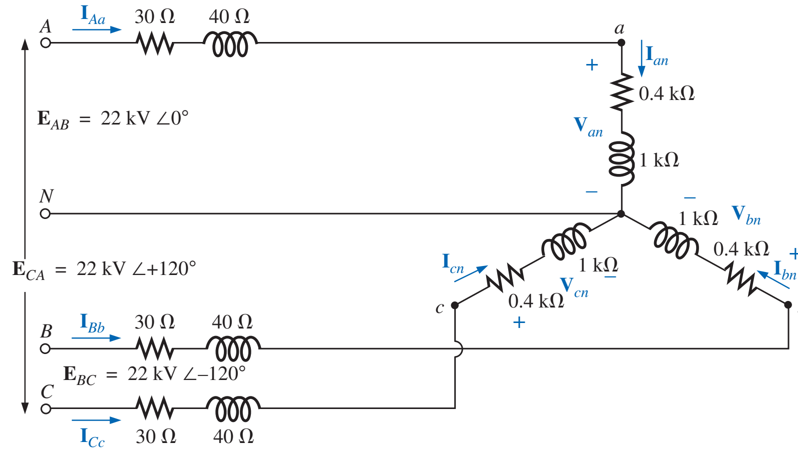


FIGURA 22.41
Problema 9.

SECCIÓN 22.6 El sistema Y-Δ

10. Una carga balanceada conectada en Δ con resistencia de 20 Ω en cada lado está conectada a un generador trifásico, de tres alambres, conectado en Y, con voltaje de línea de 208 V. Calcule la magnitud de:

a. El voltaje de fase del generador.

b. El voltaje de fase de la carga.

c. La corriente de fase de la carga.

d. La corriente de línea.

11. Resuelva el problema 10 si cada impedancia de fase se cambia a un resistor de 6.8 Ω en serie con una reactancia inductiva de 14 Ω.

12. Resuelva el problema 10 si cada impedancia de fase se cambia a una resistencia de 18 Ω en paralelo con una reactancia capacitiva de 18 Ω.

13. La secuencia de fase para el sistema Y-Δ de la figura 22.42 es *ABC*.

a. Encuentre los ángulos θ_2 y θ_3 para la secuencia de fase especificada.

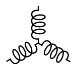
b. Encuentre el voltaje en cada impedancia de fase en forma fasorial.

c. Trace el diagrama fasorial de los voltajes encontrados en el inciso (b), y muestre que su suma es cero alrededor del lazo cerrado de la carga conectada en Δ.

d. Encuentre la corriente a través de cada impedancia de fase en forma fasorial.

e. Encuentre la magnitud de las corrientes de línea.

f. Encuentre la magnitud de los voltajes de fase del generador.



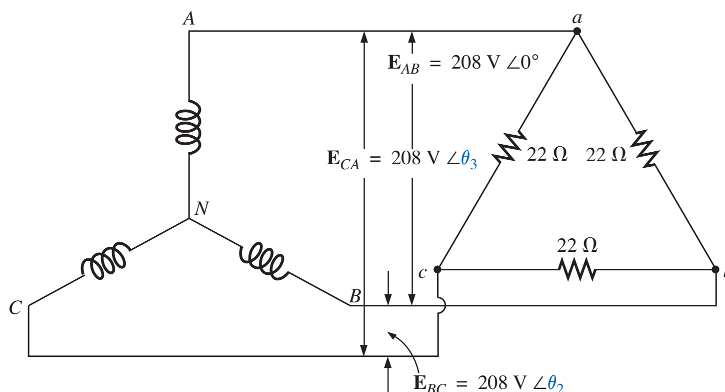


FIGURA 22.42
Problemas 13, 14, 15, 34 y 45.

14. Resuelva el problema 13 si las impedancias de fase se cambian a un resistor de 100 Ω en serie con una reactancia capacitiva de 100 Ω.

15. Resuelva el problema 13 si las impedancias de fase se cambian a un resistor de 3 Ω en paralelo con una reactancia inductiva de 4 Ω.

16. Para el sistema de la figura 22.43, encuentre la magnitud de corrientes y voltajes desconocidos.

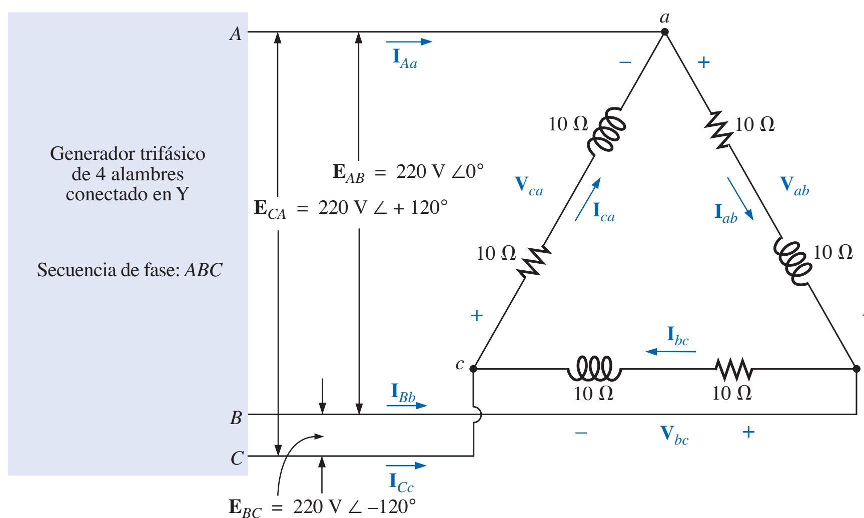
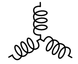


FIGURA 22.43
Problemas 16, 35 y 47.



***17.** Para la carga conectada en Δ de la figura 22.44:
a. Encuentre la magnitud y el ángulo de cada corriente de fase $\mathbf{I}_{ab}$, $\mathbf{I}_{bc}$ e $\mathbf{I}_{ca}$.
b. Calcule la magnitud y el ángulo de cada corriente de línea $\mathbf{I}_{Aa}$, $\mathbf{I}_{Bb}$ e $\mathbf{I}_{Cc}$.
c. Determine la magnitud y el ángulo de los voltajes $\mathbf{E}_{AB}$, $\mathbf{E}_{BC}$ y $\mathbf{E}_{CA}$.

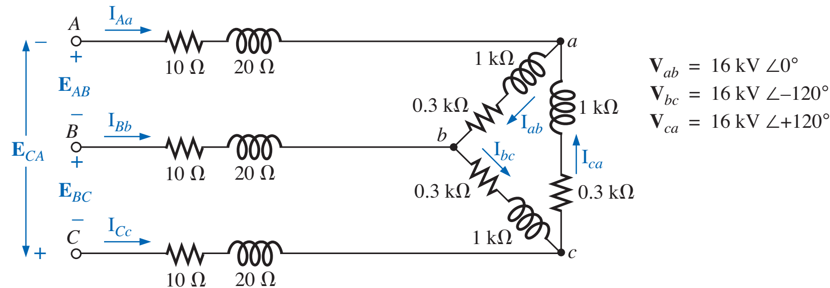


FIGURA 22.44
Problema 17.

SECCIÓN 22.9 Los sistemas trifásicos Δ-Δ, Δ-Y

18. Una carga balanceada conectada en Y tiene resistencia de 30 Ω en cada lado y está conectada a un generador trifásico, conectado en Δ, con voltaje de línea de 208 V. Calcule la magnitud de:
a. El voltaje de fase del generador.
b. El voltaje de fase de la carga.
c. La corriente de fase de la carga.
d. La corriente de línea.

19. Resuelva el problema 18 si cada impedancia de fase se cambia por un resistor de 12 Ω en serie con una reactancia inductiva de 12 Ω.

20. Resuelva el problema 18 si cada impedancia de fase se cambia por un resistor de 15 Ω en paralelo con una reactancia capacitiva de 20 Ω.

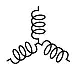
***21.** Para el sistema de la figura 22.45, encuentre la magnitud de corrientes y voltajes desconocidos.

22. Resuelva el problema 21 si cada impedancia de fase se cambia por un resistor de 10 Ω en serie con una reactancia inductiva de 20 Ω.

23. Resuelva el problema 21 si cada impedancia de fase se cambia por un resistor de 20 Ω en paralelo con una reactancia capacitiva de 15 Ω.

24. Una carga balanceada conectada en Δ con resistencia de 220 Ω en cada lado está conectada a un generador trifásico, conectado en Δ, que tiene voltaje de línea de 440 V. Calcule la magnitud de:
a. El voltaje de fase del generador.
b. El voltaje de fase de la carga.
c. La corriente de fase de la carga.
d. La corriente de línea.

25. Resuelva el problema 24 si cada impedancia de fase se cambia por un resistor de 12 Ω en serie con una reactancia capacitiva de 9 Ω.



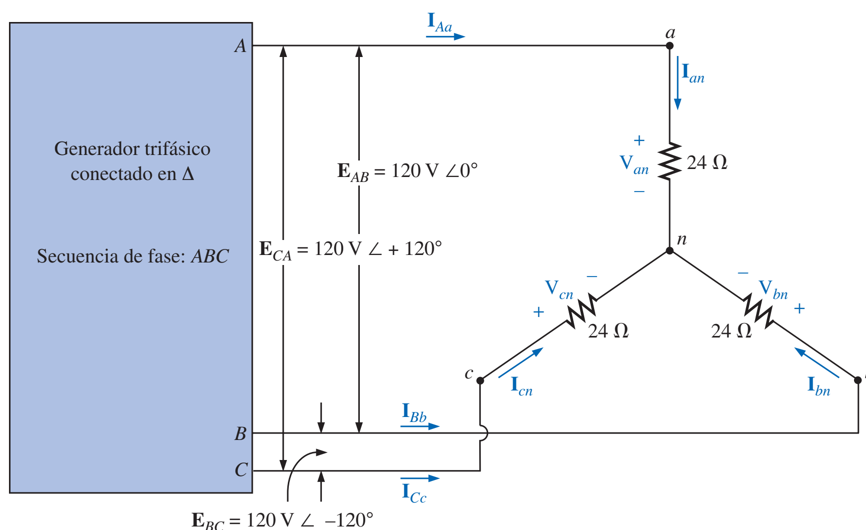


FIGURA 22.45
Problemas 21, 22, 23 y 37.

26. Resuelva el problema 24 si cada impedancia de fase se cambia por un resistor de 22 Ω en paralelo con una reactancia inductiva de 22 Ω.

27. La secuencia de fase para el sistema Δ-Δ de la figura 22.46 es *ABC*.

a. Encuentre los ángulos θ_2 y θ_3 para la secuencia de fase especificada.

b. Encuentre el voltaje en cada impedancia de fase en forma fasorial.

c. Trace el diagrama fasorial de los voltajes encontrados en el inciso (b), y muestre que su suma fasorial es cero alrededor del lazo cerrado de la carga conectada en Δ.

d. Encuentre la corriente a través de cada impedancia de fase en forma fasorial.

e. Encuentre la magnitud de las corrientes de línea.

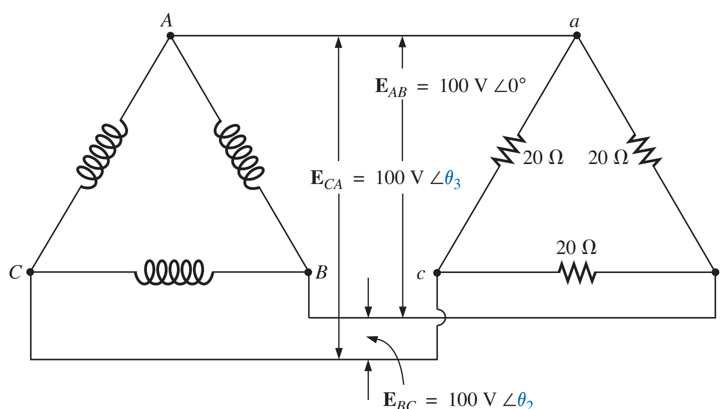
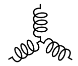


FIGURA 22.46
Problema 27.



28. Resuelva el problema 25 si cada impedancia de fase se cambia a un resistor de 12 Ω en serie con una reactancia inductiva de 16 Ω.

29. Resuelva el problema 25 si cada impedancia de fase se cambia a un resistor de 20 Ω en paralelo con una reactancia capacitiva de 20 Ω.

SECCIÓN 22.10 Potencia

30. Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema trifásico del problema 2.

31. Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema trifásico del problema 4.

32. Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema trifásico del problema 7.

33. Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema trifásico del problema 12.

34. Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema trifásico del problema 14.

35. Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema trifásico del problema 16.

36. Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema trifásico del problema 20.

37. Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema trifásico del problema 22.

38. Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema trifásico del problema 26.

39. Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema trifásico del problema 28.

40. Una carga trifásica balanceada, conectada en Δ, tiene voltaje de línea de 200 y consumo total de potencia de 4800 W con un factor de potencia atrasado de 0.8. Encuentre la impedancia de cada fase en coordenadas rectangulares.

41. Una carga trifásica balanceada, conectada en Y, tiene voltaje de línea de 208 y consumo total de potencia de 1200 W con un factor de potencia adelantado de 0.6. Encuentre la impedancia de cada fase en coordenadas rectangulares.

***42.** Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema de la figura 22.47.

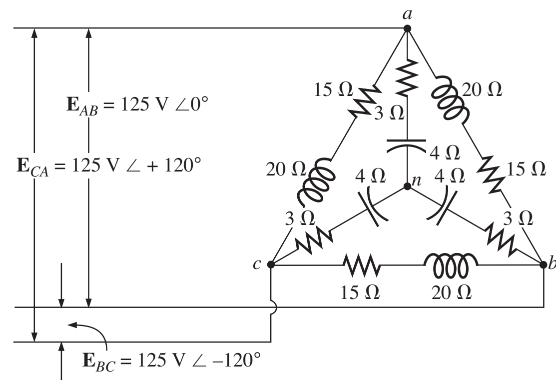
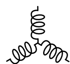


FIGURA 22.47
Problema 42.



***43.** El sistema Y-Y de la figura 22.48 tiene una carga balanceada e impedancia de línea $\mathbf{Z}_{\text{línea}} = 4\ \Omega + j\,20\ \Omega$. Si en el generador el voltaje de línea es de 16,000 V y la potencia total entregada a la carga es de 1200 kW a 80 A, determine lo siguiente:

a. La magnitud de cada voltaje de fase del generador.
b. La magnitud de las corrientes de línea.
c. La potencia total entregada por la fuente.
d. El ángulo de factor de potencia de toda la carga “vista” por la fuente.
e. La magnitud y el ángulo de la corriente $\mathbf{I}_{Aa}$ si $\mathbf{E}_{AN} = E_{AN}\ \angle 0°$.
f. La magnitud y el ángulo del voltaje de fase $\mathbf{V}_{an}$.
g. La impedancia de la carga de cada fase en coordenadas rectangulares.
h. La diferencia entre el factor de potencia de la carga y el factor de potencia de todo el sistema (incluyendo $\mathbf{Z}_{\text{línea}}$).
i. La eficiencia del sistema.

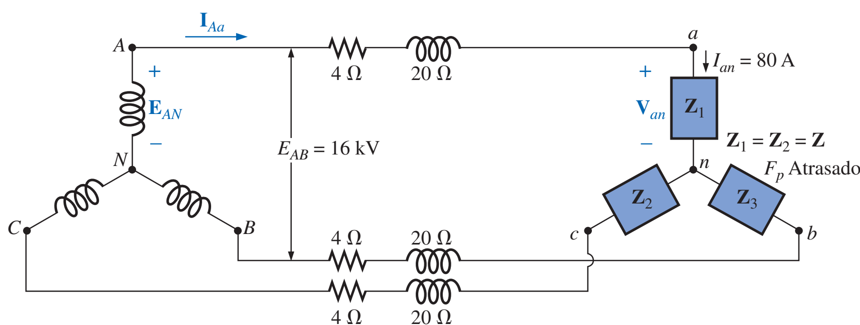


FIGURA 22.48
Problema 43.

SECCIÓN 22.11 El método de los tres watímetros

44. a. Trace las conexiones requeridas para medir el total de watts entregados a la carga de la figura 22.39 usando tres watímetros.
b. Determine la disipación total de potencia en watts y la lectura de cada watímetro.

45. Resuelva el problema 44 para la red de la figura 22.42.

SECCIÓN 22.12 El método de los dos watímetros

46. a. Para el sistema de tres alambres de la figura 22.49, conecte adecuadamente un segundo watímetro de manera que los dos midan la potencia total entregada a la carga.
b. Si un watímetro tiene una lectura de 200 W y el otro una lectura de 85 W, ¿cuál es la disipación total en watts si el factor de potencia total es 0.8 adelantado?
c. Resuelva el inciso (b) si el factor de potencia total es 0.2 atrasado y $P_l = 100$ W.

47. Trace tres maneras diferentes en que dos watímetros pueden ser conectados para medir la potencia total entregada a la carga del problema 16.

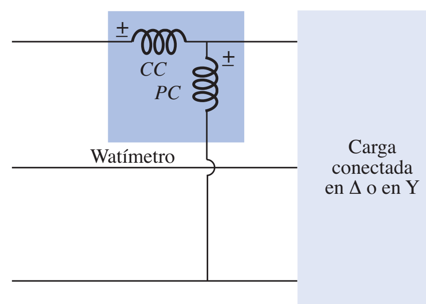
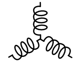


FIGURA 22.49
Problema 46.



***48.** Para el sistema Y-Δ de la figura 22.50:
- **a.** Determine la magnitud y el ángulo de las corrientes de fase.
- **b.** Encuentre la magnitud y el ángulo de las corrientes de línea.
- **c.** Determine la lectura de cada watímetro.
- **d.** Encuentre la potencia total entregada a la carga.

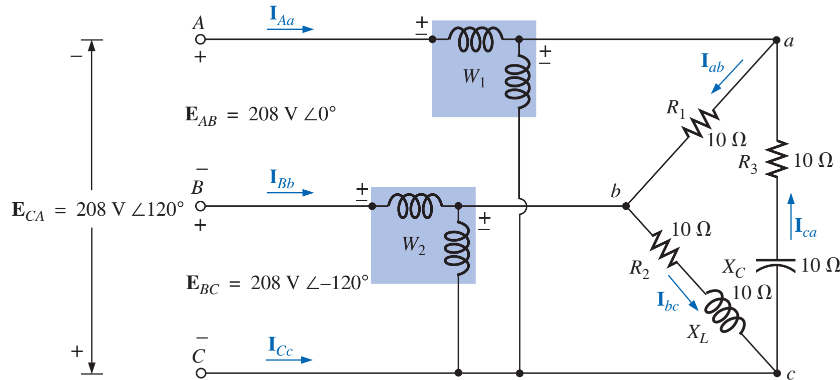


FIGURA 22.50
Problema 48.

SECCIÓN 22.13 Carga trifásica no balanceada, de cuatro alambres, conectada en Y

***49.** Para el sistema de la figura 22.51:
- **a.** Calcule la magnitud del voltaje en cada fase de la carga.
- **b.** Encuentre la magnitud de la corriente a través de cada fase de la carga.
- **c.** Encuentre el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p del sistema.
- **d.** Encuentre las corrientes de fase en forma fasorial.
- **e.** Usando los resultados del inciso (c), determine la corriente $\mathbf{I}_N$.

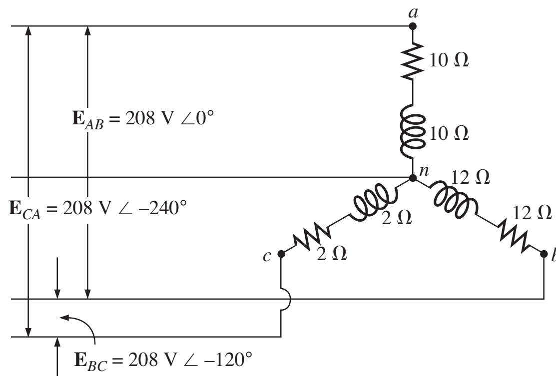


FIGURA 22.51
Problema 49.

SECCIÓN 22.14 Carga trifásica no balanceada, de tres alambres, conectada en Y

***50.** Para el sistema trifásico de tres alambres que aparece en la figura 22.52, encuentre la magnitud de la corriente a través de cada fase de la carga, y determine el total de watts, los volt-ampere reactivos, los volt-ampere, y el F_p de la carga.

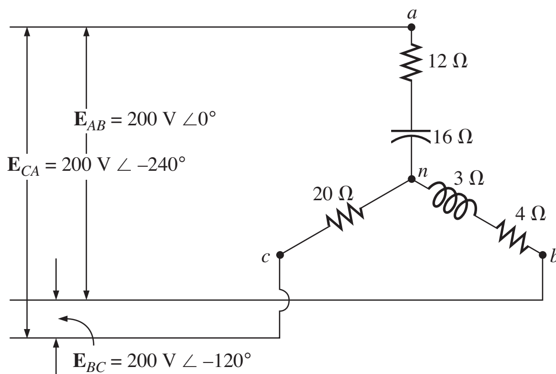
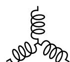


FIGURA 22.52
Problema 50.



GLOSARIO

Carga polifásica no balanceada Carga que no tiene la misma impedancia en cada fase.

Conexión neutra Conexión entre el generador y la carga que, bajo condiciones balanceadas, tendrá cero corriente asociada.

Corriente de fase Corriente que fluye a través de cada fase de una carga de cualquier generador monofásico o polifásico.

Corriente de línea Corriente que fluye del generador a la carga de un sistema polifásico o monofásico.

Generador de ca conectado en Δ Generador trifásico que tiene las tres fases conectadas en forma de la letra griega delta (Δ) mayúscula.

Generador de ca monofásico Fuente electromecánica de potencia de ca que genera un solo voltaje senoidal que tiene una frecuencia determinada por la velocidad de rotación y el número de polos del rotor.

Generador polifásico de ca Fuente electromecánica de potencia de ca que genera más de un voltaje senoidal por rotación del rotor. La frecuencia generada se determina por la velocidad de rotación y el número de polos del rotor.

Generador trifásico conectado en Y Fuente trifásica de potencia de ca donde las tres fases están conectadas en forma de letra Y.

Método de los dos watímetros Método para determinar la potencia total entregada a una carga trifásica conectada en Δ o en Y usando sólo dos watímetros y considerando el factor de potencia de la carga.

Método de los tres watímetros Método para determinar la potencia total entregada a una carga trifásica usando tres watímetros.

Secuencia de fase El orden en que los voltajes senoidales generados de un generador polifásico afectarán la carga a la que estén aplicados.

Voltaje de fase Voltaje que aparece entre la línea y el punto neutro de un generador conectado en Y y de línea a línea en un generador conectado en Δ.

Voltaje de línea Diferencia de potencial que existe entre las líneas de cualquier sistema monofásico o polifásico.

23

dB

Decibeles, filtros y diagramas de Bode

23.1 LOGARITMOS

El uso de logaritmos en la industria es tan amplio que el entendimiento claro de su propósito y utilización es una necesidad absoluta. A primera vista, los logaritmos aparecen con frecuencia como imprecisos y misteriosos debido a las operaciones matemáticas requeridas para obtener el logaritmo y el antilogaritmo utilizando el método manual de tablas que, por lo general, se enseña en los cursos de matemáticas. Sin embargo, prácticamente todas las calculadoras científicas actuales cuentan con las funciones de logaritmo común y natural, eliminando la complejidad de la aplicación y propiciando la concentración en las características positivas de la función.

Relaciones básicas

Analicemos primero la relación entre las variables de la función logarítmica. La expresión matemática:

$$N = (b)^x$$

establece que el número N es igual a la base b elevada a la potencia x. Algunos ejemplos son:

$$100 = (10)^2$$
$$27 = (3)^3$$
$$54.6 = (e)^4 \qquad \text{donde } e = 2.7183$$

Si la cuestión fuera obtener la potencia x para satisfacer la ecuación:

$$1200 = (10)^x$$

el valor de x podría determinarse utilizando logaritmos de la siguiente forma:

$$x = \log_{10} 1200 = \mathbf{3.079}$$

mostrando que:

$$10^{3.079} = 1200$$

Observe que el logaritmo se tomó en base 10 —el número al que se elevará la potencia de x—. No existe un límite en cuanto al valor numérico de la base excepto que las tablas y las calculadoras están diseñadas para manejar ya sea la base 10 (logaritmo común, LOG) o la base $e = 2.7183$ (logaritmo natural, IN). Por tanto, en resumen,

$$\text{Si } N = (b)^x, \text{ entonces } x = \log_b N. \tag{23.1}$$

La base a ser empleada estará en función del área de aplicación. Si fuese necesario convertir de una base a otra, se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\log_e x = 2.3 \log_{10} x \tag{23.2}$$

El contenido de este capítulo es tal que nos concentraremos únicamente en el logaritmo común. Sin embargo, varias de las conclusiones son aplicables también a los logaritmos naturales.

Algunas áreas de aplicación

A continuación se presenta una breve lista de las aplicaciones más comunes de la función logarítmica:

1. Este capítulo demostrará que el uso de logaritmos permite graficar la respuesta de un sistema para un intervalo de valores que de otra forma sería imposible o difícil de manejar con una escala lineal.
2. Pueden compararse los niveles de potencia, voltaje y otros similares sin tratar con números muy grandes o muy pequeños que con frecuencia podrían empañar el verdadero impacto de la diferencia en magnitudes.
3. Varios sistemas responden a estímulos externos de una forma logarítmica no lineal. El resultado es un modelo matemático que permite un cálculo directo de la respuesta del sistema a una señal de entrada en particular.
4. La respuesta de un sistema en cascada o compuesto puede determinarse rápidamente utilizando logaritmos si la ganancia de cada etapa se conoce sobre una base logarítmica. Esta característica se demostrará en un ejemplo posterior.

Gráficas

El papel milimétrico se encuentra disponible en las variedades **semilogarítmico** y **log-log (doble logarítmico)**. El papel semilogarítmico tiene sólo una escala logarítmica, siendo la otra una escala lineal. Ambas escalas de un papel log log son logarítmicas. En la figura 23.1 aparece una sección de un papel semilogarítmico. Observe la escala vertical lineal (con intervalos de igual espaciamiento) y los intervalos periódicos de la escala logarítmica en múltiplos de 10.

El espaciamiento de la escala logarítmica se determina al tomar el logaritmo común (base 10) del número. La escala comienza con 1, ya que $\log_{10} 1 = 0$. La distancia entre 1 y 2 está determinada por $\log_{10} 2 = 0.3010$, o aproximadamente el 30% de la distancia total de un intervalo logarítmico, como se muestra en la gráfica. La distancia entre 1 y 3 está determinada por $\log_{10} 3 = 0.4771$, o aproximadamente el 48% de la amplitud total. Para referencia futura, tenga presente que casi el 50% de la amplitud de un intervalo logarítmico está representado por 3 en lugar de por el 5 de la escala lineal. Además, observe que el número 5 se encuentra cerca de 70% de la amplitud total y 8 en 90%. Recordar

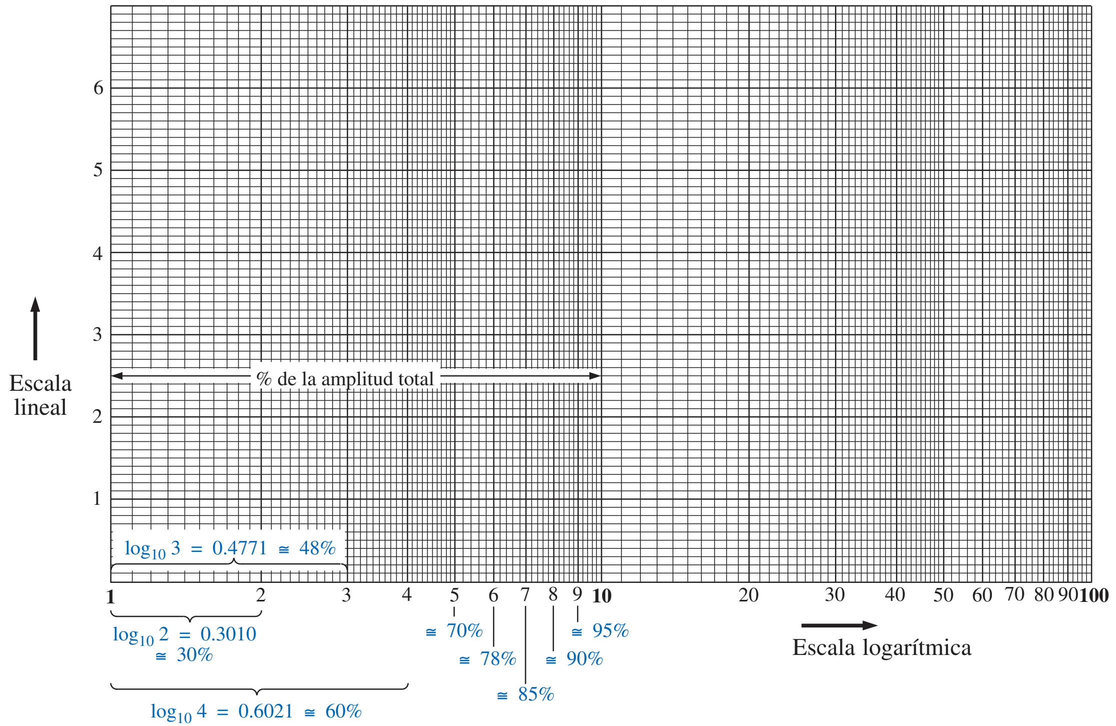


FIGURA 23.1
Papel milimétrico semilogarítmico.

el porcentaje de la amplitud total de las líneas 2, 3, 5 y 8 será particularmente útil cuando se dejen sin numerar las diversas líneas de una gráfica logarítmica.

Dado que:

$$\log_{10} 1 = 0$$
$$\log_{10} 10 = 1$$
$$\log_{10} 100 = 2$$
$$\log_{10} 1000 = 3$$
$$\vdots$$

el espaciamiento entre 1 y 10, 10 y 100, 100 y 1000, etc., será el mismo como se muestra en las figuras 23.1 y 23.2.

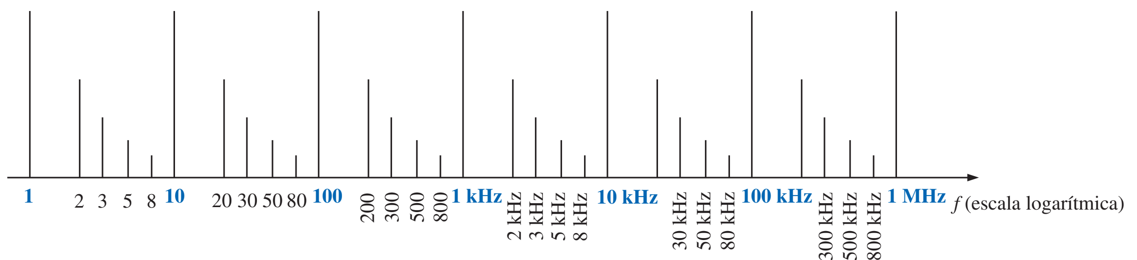


FIGURA 23.2
Escala logarítmica de frecuencia.

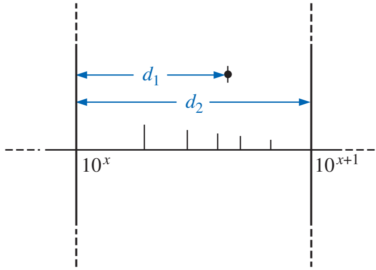


FIGURA 23.3
Localización de un valor en una gráfica logarítmica.

Observe en las figuras 23.1 y 23.2 que la escala logarítmica se comprime en el extremo superior de cada intervalo. Con mayores niveles de frecuencia asignados a cada intervalo, una sola hoja milimétrica puede proporcionar una gráfica de frecuencia que abarque desde 1 Hz hasta 1 MHz, como se muestra en la figura 23.2, con referencia particular a los niveles de 30%, 50%, 70% y 90% de cada intervalo.

En muchas gráficas logarítmicas, las marcas de los niveles intermedios no se indican debido a restricciones de espacio. La siguiente ecuación puede utilizarse para determinar el nivel logarítmico de un punto particular entre niveles conocidos utilizando una regla o simplemente estimando las distancias. Los parámetros se definen mediante la figura 23.3.

$$\text{Valor} = 10^x \times 10^{d_1/d_2} \quad \textbf{(23.3)}$$

La derivación de la ecuación (23.3) es una simple ampliación de los detalles con respecto a la distancia que aparece en la figura 23.1.

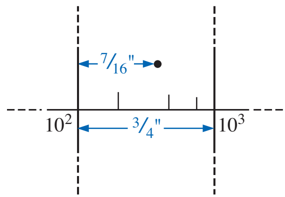


FIGURA 23.4
Ejemplo 23.1.

EJEMPLO 23.1

Determine el valor del punto que aparece sobre la gráfica logarítmica de la figura 23.4 utilizando las mediciones realizadas mediante una regla (lineal).

Solución:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{7/16''}{3/4''} = \frac{0.438''}{0.750''} = 0.584$$

Utilizando una calculadora:

$$10^{d_1/d_2} = 10^{0.584} = 3.837$$

Al aplicar la ecuación (23.3):

$$\text{Valor} = 10^x \times 10^{d_1/d_2} = 10^2 \times 3.837$$
$$= \mathbf{383.7}$$

23.2 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Existen algunas características de los logaritmos que deben enfatizarse:

1. ***El logaritmo común o natural del número 1 es 0.***

$$\log_{10} 1 = 0 \quad \textbf{(23.4)}$$

ya que $10^x = 1$ requiere que $x = 0$.

2. ***El logaritmo de cualquier número menor a 1 es un número negativo.***

$$\log_{10} \tfrac{1}{2} = \log_{10} 0.5 = -0.3$$

$$\log_{10} \tfrac{1}{10} = \log_{10} 0.1 = -1$$

3. ***El logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de los números.***

$$\log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b \quad \textbf{(23.5)}$$

4. ***El logaritmo del cociente de dos números es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.***

$$\log_{10} \frac{a}{b} = \log_{10} a - \log_{10} b \qquad (23.6)$$

5. ***El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual al producto de la potencia por el logaritmo del número.***

$$\log_{10} a^n = n \log_{10} a \qquad (23.7)$$

Funciones de calculadora

En la mayoría de las calculadoras el logaritmo de un número se obtiene simplemente al ingresar el número y presionar las teclas [LOG] o [IN].

Por ejemplo,

$$\log_{10} 80 = \text{[8] [0] [LOG]}$$

presentará **1.903**.

Para el proceso inverso, donde se desea obtener N, o el antilogaritmo, se utiliza la función 10^x. En la mayoría de las calculadoras 10^x aparece como una segunda función por encima de la tecla [LOG]. Para el caso de:

$$0.6 = \log_{10} N$$

se utilizan las siguientes teclas:

$$\text{[·] [6] [2ND F] [}10^x\text{]}$$

con el resultado de **3.981**. Al verificar: $\log_{10} 3.981 = 0.6$.

EJEMPLO 23.2 Evalúe cada una de las siguientes expresiones logarítmicas:

a. $\log_{10} 0.004$
b. $\log_{10} 250{,}000$
c. $\log_{10}(0.08)(240)$
d. $\log_{10} \dfrac{1 \times 10^4}{1 \times 10^{-4}}$
e. $\log_{10}(10)^4$

Soluciones:

a. $\mathbf{-2.398}$
b. $\mathbf{+5.398}$
c. $\log_{10}(0.08)(240) = \log_{10} 0.08 + \log_{10} 240 = -1.097 + 2.380$
$= \mathbf{1.283}$
d. $\log_{10} \dfrac{1 \times 10^4}{1 \times 10^{-4}} = \log_{10} 1 \times 10^4 - \log_{10} 1 \times 10^{-4} = 4 - (-4)$
$= \mathbf{8}$
e. $\log_{10} 10^4 = 4 \log_{10} 10 = 4(1) = \mathbf{4}$

23.3 DECIBELES

Ganancia de potencia

Dos niveles de potencia pueden compararse utilizando una unidad de medición llamada *bel*, la cual está definida por la siguiente ecuación:

$$B = \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \qquad \text{(bels)} \tag{23.8}$$

Sin embargo, para proporcionar una unidad de medición de magnitud *menor*, se define un **decibel**, donde:

$$1 \text{ bel} = 10 \text{ decibeles (dB)} \tag{23.9}$$

El resultado es la siguiente importante ecuación, que compara los niveles de potencia P_2 y P_1 en decibeles:

$$\text{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \qquad \text{(decibeles, dB)} \tag{23.10}$$

Si los niveles de potencia son iguales ($P_2 = P_1$), no existirá cambio en el nivel de potencia, y dB = 0. Si existe un incremento en el nivel de potencia ($P_2 > P_1$), el nivel resultante en decibeles será positivo. Si existe una disminución en el nivel de potencia ($P_2 < P_1$), el nivel resultante en decibeles será negativo.

Para el caso especial de $P_2 = 2P_1$, la ganancia en decibeles es:

$$\text{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} 2 = \mathbf{3\ dB}$$

En consecuencia, para un sistema de bocinas, un incremento de 3 dB en la salida requerirá que el nivel de potencia se duplique. En la industria del audio, una regla generalmente aceptada es que un aumento en el nivel de sonido se logra mediante incrementos de 3 dB en el nivel de salida. En otras palabras, un aumento de 1 dB es apenas perceptible, y un aumento de 2 dB ya es apreciable. Un aumento de 3 dB normalmente da por resultado un incremento fácil de distinguir en el nivel audible. Un incremento adicional en el nivel audible se logra, por lo general, mediante el simple aumento del nivel de salida por otros 3 dB. Si se utilizara un sistema de 8 W, un aumento de 3 dB requeriría una salida de 16 W, mientras que un incremento adicional de 3 dB (en total 6 dB) requeriría un sistema de 32 W, como se demuestra mediante los cálculos siguientes:

$$\text{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{16}{8} = 10 \log_{10} 2 = \mathbf{3\ dB}$$

$$\text{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{32}{8} = 10 \log_{10} 4 = \mathbf{6\ dB}$$

Para $P_2 = 10P_1$,

$$\text{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} 10 = 10(1) = \mathbf{10\ dB}$$

dando por resultado una situación singular donde la ganancia de potencia tiene la misma magnitud que el nivel de decibeles.

En algunas aplicaciones se establece un nivel de referencia para permitir la comparación entre niveles de decibeles de una situación a otra. En los sistemas de comunicación, un nivel de referencia aplicado comúnmente es:

$$P_{ref} = 1 \text{ mW} \qquad \text{(en una carga de 600 } \Omega\text{)}$$

De ahí que la ecuación (23.10) se escriba típicamente como:

$$\text{dB}_m = 10 \log_{10} \frac{P}{1 \text{ mW}}\bigg|_{600\ \Omega} \tag{23.11}$$

Advierta el subíndice *m* para denotar que el nivel de decibeles está determinado con un nivel de referencia de 1 mW.

En particular, para $P = 40$ mW,

$$\text{dB}_m = 10 \log_{10} \frac{40 \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 10 \log_{10} 40 = 10(1.6) = \mathbf{16\ dB_{\mathit{m}}}$$

en tanto que para $P = 4$ W,

$$\text{dB}_m = 10 \log_{10} \frac{4000 \text{ mW}}{1 \text{ mW}} = 10 \log_{10} 4000 = 10(3.6) = \mathbf{36\ dB_{\mathit{m}}}$$

Aun cuando el nivel de potencia se ha incrementado por un factor de 4000 mW/40 mW = 100, el incremento de dB_m está limitado a 20 dB_m. Con el tiempo, la importancia de los niveles de dB_m de 16 dB_m y 36 dB_m generará una apreciación inmediata con respecto a los niveles de potencia involucrados. Un incremento de 20 dB_m también estará asociado con una ganancia importante en los niveles de potencia.

Ganancia de voltaje

Los decibeles también se utilizan para ofrecer una comparación entre niveles de voltaje. Al sustituir las ecuaciones básicas de potencia $P_2 = V_2^2/R_2$ y $P_1 = V_1^2/R_1$ en la ecuación (23.10) se obtendrá:

$$\begin{aligned} \text{dB} &= 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{V_2^2/R_2}{V_1^2/R_1} \\ &= 10 \log_{10} \frac{V_2^2/V_1^2}{R_2/R_1} = 10 \log_{10}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 10 \log_{10}\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

y

$$\text{dB} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} - 10 \log_{10} \frac{R_2}{R_1}$$

Para la situación donde $R_2 = R_1$, es una condición supuesta normalmente, al comparar niveles de voltaje sobre una base de decibeles, el segundo término de la ecuación anterior se elimina ($\log_{10} 1 = 0$), y

$$\text{dB}_v = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} \quad \text{(dB)} \tag{23.12}$$

Observe el subíndice *v* para definir el nivel obtenido en decibeles.

EJEMPLO 23.3 Obtenga la ganancia de voltaje en dB de un sistema donde la señal aplicada es de 2 mV y el voltaje de salida de 1.2 V.

Solución:

$$\text{dB}_v = 20 \log_{10} \frac{V_o}{V_i} = 20 \log_{10} \frac{1.2 \text{ V}}{2 \text{ mV}} = 20 \log_{10} 600 = \mathbf{55.56\ dB}$$

para una ganancia de voltaje $A_v = V_o/V_i$ de 600.

EJEMPLO 23.4 Si un sistema tiene una ganancia de voltaje de 36 dB, obtenga el voltaje aplicado cuando el voltaje de salida es de 6.8 V.

Solución:

$$dB_v = 20 \log_{10} \frac{V_o}{V_i}$$

$$36 = 20 \log_{10} \frac{V_o}{V_i}$$

$$1.8 = \log_{10} \frac{V_o}{V_i}$$

A partir del antilogaritmo:

$$\frac{V_o}{V_i} = 63.096$$

y $$V_i = \frac{V_o}{63.096} = \frac{6.8 \text{ V}}{63.096} = \mathbf{107.77 \text{ mV}}$$

TABLA 23.1

V_o/V_i	$dB = 20 \log_{10}(V_o/V_i)$
1	0 dB
2	6 dB
10	20 dB
20	26 dB
100	40 dB
1,000	60 dB
100,000	100 dB

La tabla 23.1 compara la magnitud de ganancias específicas con el nivel resultante en decibeles. Observe en particular que, cuando se comparan los niveles de voltaje, el doble de un nivel da por resultado un cambio de 6 dB en lugar de uno de 3 dB, como se obtuvo para los niveles de potencia.

Además, advierta que un incremento en la ganancia de 1 a 100,000 da por resultado un cambio en decibeles que puede graficarse fácilmente en una sola hoja milimétrica. También observe que duplicar la ganancia (de 1 a 2 y de 10 a 20) resulta en un aumento de 6 dB en el nivel de decibeles, mientras que un cambio de 10 a 1 (de 10 a 1, 100 a 100, etc.) siempre da por resultado una disminución de 20 dB en el nivel de decibeles.

Respuesta auditiva humana

Una de las aplicaciones más frecuentes de la escala de decibeles se encuentra en las industrias de comunicación y entretenimiento. El oído humano no responde de una forma lineal a los cambios en el nivel de potencia de una fuente; es decir, la duplicación del nivel de potencia de audio de 1/2 W a 1 W no da por resultado la duplicación del nivel de sonoridad para el oído humano. Además, un cambio de 5 W a 10 W será recibido por el oído como el mismo cambio en intensidad sonora que el experimentado de 1/2 W a 1 W. En otras palabras, la proporción entre niveles es la misma en cada caso (1 W/0.5 W = 10 W/5 W = 2), ocasionando el mismo cambio logarítmico o en decibeles definido por la ecuación (23.10). Por tanto, el oído responde en forma logarítmica a cambios en los niveles de potencia de audio.

Para establecer una base de comparación entre niveles de audio, se seleccionó un nivel de referencia de 0.0002 **microbar** (μbar), donde 1 μbar es igual a la presión de sonido de 1 dina por centímetro cuadrado, o aproximadamente 1 millonésimo de la presión atmosférica normal a nivel del mar. El nivel de 0.0002 μbar es el nivel de umbral de audición. Utilizando este nivel de referencia, el nivel de presión del sonido en decibeles se define mediante la siguiente ecuación:

$$dB_s = 20 \log_{10} \frac{P}{0.0002 \ \mu\text{bar}} \qquad \textbf{(23.13)}$$

donde P es la presión del sonido en microbars.

Los niveles en decibeles de la figura 23.5 están definidos por la ecuación (23.13). Los instrumentos diseñados para medir niveles de audio se calibran a los niveles definidos por la ecuación (23.13), como se muestra en la figura 23.5.

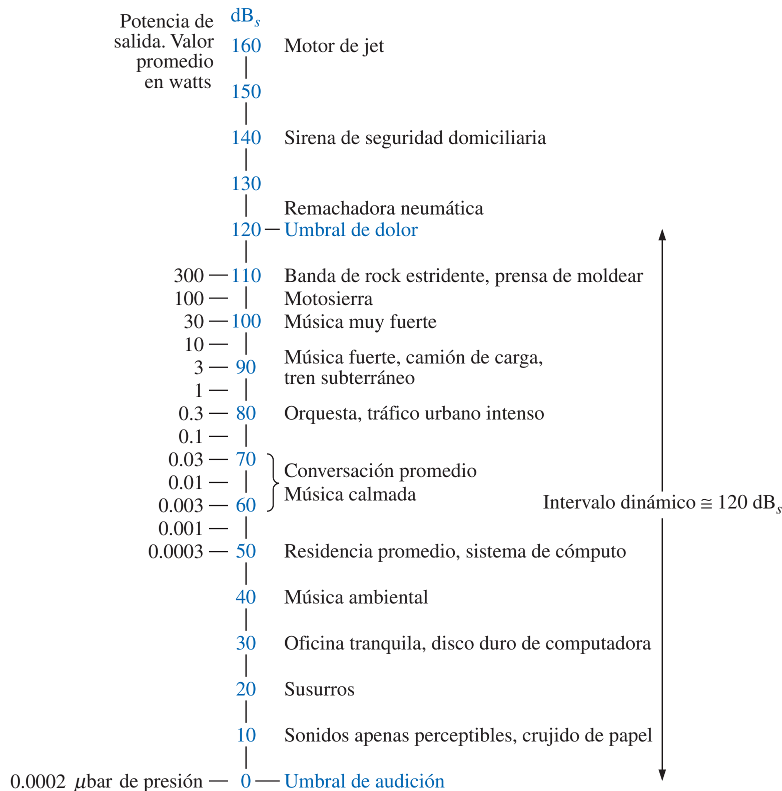


FIGURA 23.5
Niveles de sonido típicos y sus niveles en decibeles.

Una pregunta común con respecto a los niveles de audio es cuánto deberá incrementarse el nivel de potencia de una fuente acústica para duplicar el nivel de sonido recibido por el oído humano. La cuestión no es tan simple como podría parecer debido a consideraciones tales como el contenido de frecuencia del sonido, las condiciones acústicas del entorno, las características físicas del medio ambiente y, por supuesto, las características únicas del oído humano. Sin embargo, es posible formular una conclusión general de valor práctico si observamos los niveles de potencia de una fuente acústica que aparece a la izquierda de la figura 23.5. Cada nivel de potencia está asociado con un nivel en decibeles particular, y un cambio de 10 dB en la escala corresponde a un incremento o una disminución en la potencia por un factor de 10. Por ejemplo, un cambio de 90 a 100 dB está asociado con un cambio en la potencia desde 3 hasta 30 W. Experimentalmente se ha encontrado que sobre una base promedio el nivel de sonoridad se duplicará para cada cambio de 10 dB en el nivel de audio —conclusión que de alguna forma se verifica mediante los ejemplos registrados a la derecha de la figura 23.5—. El que un cambio de 10 dB corresponda a un incremento de diez veces en el nivel de potencia sustenta la siguiente conclusión (sobre una base aproximada): experimentalmente se ha encontrado que sobre una base promedio, el nivel de sonoridad se duplicará para cada cambio de 10 dB en el nivel de audio.

Para duplicar el nivel de sonido recibido por el oído humano, el nivel de potencia (en watts) de la fuente acústica debe incrementarse por un factor de 10.

En otras palabras, la duplicación del nivel de sonido disponible de una fuente acústica de 1 W requerirá desplazarse hacia una fuente de 10 W.

Instrumentación

Muchos de los modernos VOM y DMM tienen una escala en dB diseñada para proporcionar una señal de razones de potencia referenciadas a un nivel estándar de 1 mW a 600 Ω. Dado que la lectura solamente es precisa cuando la carga tiene impedancia característica de 600 Ω, el nivel de referencia de 1 mW, 600 normalmente estará impreso en algún lugar de la carátula del instrumento, como se muestra en la figura 23.6. La escala de dB generalmente está calibrada a

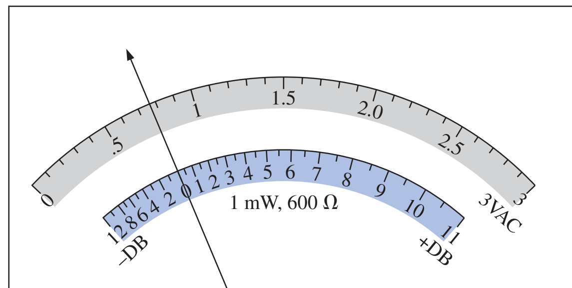


FIGURA 23.6
Definición de la relación existente entre una escala de dB referenciada a 1 mW, 600 Ω y una escala de voltaje de 3 V rms.

la escala de ca más baja del medidor. En otras palabras, al tomar las mediciones de dB, seleccione la escala de ca más baja, pero lea la escala de dB. Si se selecciona una escala de voltaje mayor, deberá utilizarse un factor de corrección que ocasionalmente viene impreso en la carátula del medidor, pero que siempre está disponible en el manual del instrumento. Si la impedancia es diferente a 600 Ω o no es sólo resistiva, deberán utilizarse otros factores de corrección que por lo general se incluyen en el manual del instrumento. Mediante la ecuación de potencia básica $P = V^2/R$ se verá que 1 mW en una carga de 600 Ω es lo mismo que aplicar 0.775 V rms en una carga de 600 Ω; es decir, $V = \sqrt{PR} = \sqrt{(1 \text{ mW})(600\ \Omega)} = 0.775$ V. El resultado es que una pantalla analógica exhibirá 0 dB [definiendo el punto de referencia de 1 mW, $\text{dB} = 10 \log_{10} P_2/P_1 = 10 \log_{10} (1 \text{ mW}/1 \text{ mW(ref)}) = 0$ dB] y 0.775 V rms en la misma proyección de la aguja, como se muestra en la figura 23.6. Un voltaje de 2.5 V en una carga de 600 Ω daría por resultado un nivel de dB de $\text{dB} = 20 \log_{10} V_2/V_1 = 20 \log_{10} 2.5 \text{ V}/0.775 \text{ V} = 10.17$ dB, ocasionando que 2.5 V y 10.17 dB aparezcan a lo largo de la misma proyección de la aguja. Un voltaje menor a 0.775 V, tal como 0.5 V, dará por resultado un nivel de dB de $\text{dB} = 20 \log_{10} V_2/V_1 = 20 \log_{10} 0.5 \text{ V}/0.775 \text{ V} = -3.8$ dB, como también se muestra en la escala de la figura 23.6. Aun cuando una lectura de 10 dB mostrará que el nivel de potencia es 10 veces el de referencia, no asuma que una lectura de 5 dB significa que el nivel de salida es de 5 mW. La proporción 10:1 es especial en los círculos logarítmicos. Para el nivel de 5 dB, el nivel de potencia deberá obtenerse utilizando el antilogaritmo (3.126), el cual revela que el nivel de potencia asociado con 5 dB es cerca de 3.1 veces el de referencia o 3.1 mW. Con frecuencia se proporciona una tabla de conversión en el manual del usuario para realizar tales conversiones.

23.4 FILTROS

Cualquier combinación de elementos pasivos (R, L y C) y/o activos (transistores o amplificadores operacionales) diseñados para seleccionar o rechazar una

banda de frecuencias se denomina **filtro**. En sistemas de comunicación, los filtros se utilizan para dejar pasar aquellas frecuencias que contengan la información deseada y rechazar las restantes. En los sistemas estereofónicos, los filtros pueden utilizarse para aislar bandas particulares de frecuencias con el propósito de aumentar o disminuir el énfasis de la salida del sistema acústico (amplificador, bocina, etc.). Los filtros se utilizan para filtrar cualquier frecuencia no deseada, comúnmente denominada *ruido*, debido a las características no lineales de algunos dispositivos electrónicos o a señales captadas del medio ambiente. En general, existen dos clasificaciones de filtros:

1. **Filtros pasivos** son los compuestos de combinaciones en serie o en paralelo de elementos R, L y C.
2. **Filtros activos** son los que utilizan dispositivos activos tales como transistores y amplificadores operacionales en combinación con elementos R, L y C.

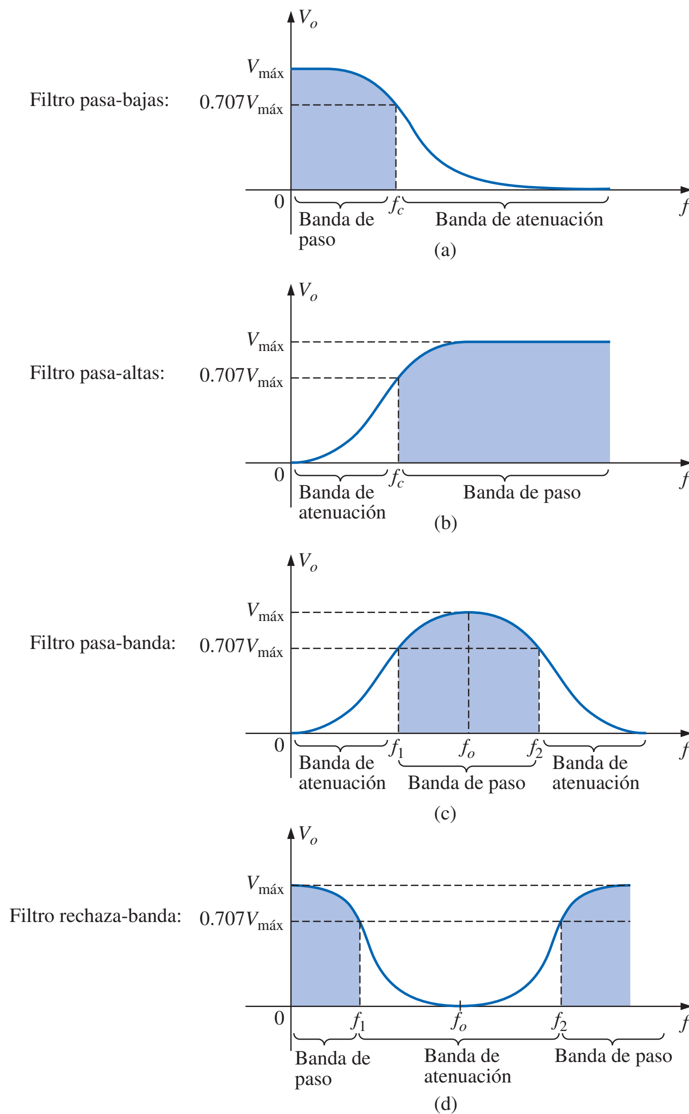


FIGURA 23.7
Definición de las cuatro categorías comunes de filtros.

Dado que este texto está limitado al tratamiento de los dispositivos pasivos, el análisis del presente capítulo se circunscribe a los filtros pasivos. Además, en las siguientes secciones sólo se analizarán las formas más fundamentales. El tema de los filtros es muy amplio y continúa recibiendo gran apoyo de investigación por parte de la industria y los gobiernos a medida que se desarrollan nuevos sistemas de comunicación para cubrir las demandas de mayor volumen y velocidad. Existen cursos y textos dedicados únicamente al análisis y diseño de sistemas de filtros que pueden volverse muy complejos y sofisticados. Sin embargo, en general, todos los filtros pertenecen a las cuatro amplias categorías de **pasa-bajas**, **pasa-altas**, **pasa-banda** y **rechaza-banda**, como se ilustra en la figura 23.7. Para cada tipo, existen frecuencias críticas que definen las regiones de bandas de paso y bandas de atenuación (a menudo llamadas bandas de *rechazo*). Cualquier frecuencia dentro de la banda de paso cruzará a la siguiente etapa con al menos el 70.7% del voltaje de salida máximo. Recuerde el uso del nivel de 0.707 para definir el ancho de banda de un circuito resonante en serie o en paralelo (ambos con la forma general del filtro pasa banda).

Para algunos filtros rechaza banda, la banda de atenuación está definida por condiciones diferentes del nivel de 0.707. De hecho, para muchos filtros rechaza banda, la condición $V_o = 1/1000V_{\text{máx}}$ (que corresponde a -60 dB en los análisis que se presentan en seguida) se utiliza para definir la región de la banda de rechazo, con la banda de paso todavía definida por el nivel de 0.707 V. Las frecuencias resultantes entre estas dos regiones se denominan entonces *frecuencias de transición* y establecen la *región de transición*.

Al menos un ejemplo de cada filtro de la figura 23.7 se analizará con cierto detalle en las secciones siguientes. Ponga particular atención en la relativa simplicidad de algunos de los diseños.

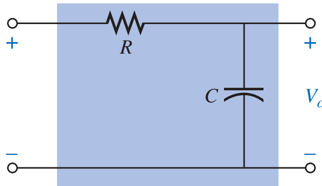


FIGURA 23.8
Filtro pasa-bajas.

23.5 FILTRO *R-C* PASA-BAJAS

El filtro *R-C*, cuyo diseño es asombrosamente sencillo, puede utilizarse como un filtro pasa-bajas o pasa-altas. Si la salida se toma del capacitor, como se muestra en la figura 23.8, responderá como un filtro pasa-bajas. Si las posiciones del resistor y del capacitor se intercambian y la salida se toma del resistor, la respuesta será la de un filtro pasa altas.

Un vistazo a la figura 23.7(a) revela que el circuito debe comportarse de una manera que resultará en una salida de nivel alto para bajas frecuencias y un nivel cada vez más bajo para frecuencias por encima del valor crítico. Primero examinemos la red situada a los extremos de frecuencia de $f = 0$ Hz y a frecuencias muy altas para verificar la respuesta del circuito.

En $f = 0$ Hz,

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \infty\ \Omega$$

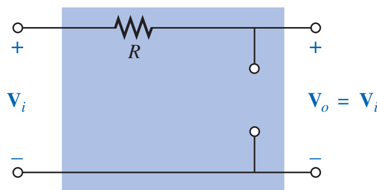


FIGURA 23.9
Filtro R-C pasa-bajas a bajas frecuencias.

puede sustituirse el equivalente de circuito abierto para el capacitor, como se muestra en la figura 23.9, dando por resultado $\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_i$.

A frecuencias muy altas, la reactancia es:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} \cong 0\ \Omega$$

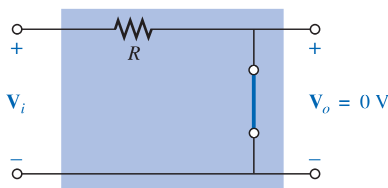


FIGURA 23.10
Filtro R-C pasa-bajas a altas frecuencias.

y puede sustituirse el equivalente de corto circuito para el capacitor, como se muestra en la figura 23.10, dando por resultado $\mathbf{V}_o = 0$ V.

Una gráfica de la magnitud de V_o en función de la frecuencia producirá la curva de la figura 23.11. Nuestro siguiente objetivo queda ahora claramente definido: obtener la frecuencia a la que ocurre la transición de la banda de paso a la banda de atenuación.

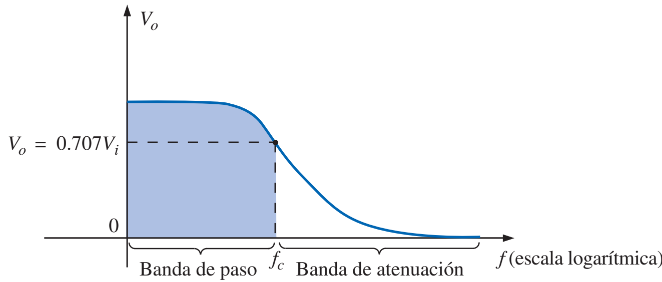


FIGURA 23.11
V_o en función de la frecuencia para un filtro R-C pasa-bajas.

Para los filtros, muy a menudo se utiliza una gráfica normalizada en lugar de la gráfica de V_o en función de la frecuencia de la figura 23.11.

La normalización es un proceso por medio del cual cantidades tales como voltaje, corriente o impedancia se dividen entre una cantidad con la misma unidad de medición para establecer un nivel adimensional de un valor o intervalo específicos.

Se puede obtener una gráfica normalizada en el dominio de los filtros al dividir la cantidad graficada como V_o de la figura 23.11 entre el voltaje aplicado V_i para el intervalo de frecuencias de interés. Dado que el valor máximo de V_o para el filtro pasa-bajas de la figura 23.8 es V_i, cada nivel de V_o en la figura 23.11 se divide entre el nivel de V_i. El resultado es la gráfica de $A_v = V_o/V_i$ de la figura 23.12. Observe que el valor máximo es 1 y la frecuencia de corte está definida en el nivel de 0.707.

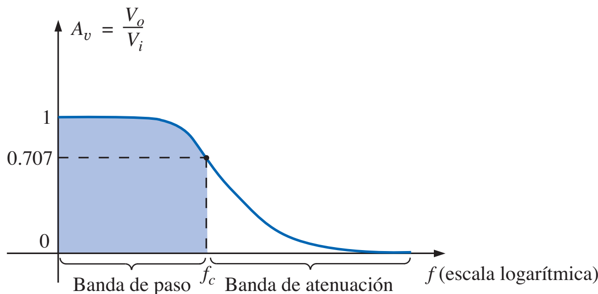


FIGURA 23.12
Gráfica normalizada de la figura 23.11.

En cualquier frecuencia intermedia, el voltaje de salida $\mathbf{V}_o$ de la figura 23.8 puede determinarse utilizando la regla del divisor de voltaje:

$$\mathbf{V}_o = \frac{X_C \angle -90° \mathbf{V}_i}{R - j X_C}$$

o bien:

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{X_C \angle -90°}{R - j X_C} = \frac{X_C \angle -90°}{\sqrt{R^2 + X_C^2} \angle -\tan^{-1}(X_C/R)}$$

y

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \angle -90° + \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right)$$

Por tanto, la magnitud de la razón V_o/V_i se determina mediante:

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{X_C}\right)^2 + 1}} \tag{23.14}$$

y el ángulo de fase se determina por:

$$\theta = -90° + \tan^{-1}\frac{X_C}{R} = -\tan^{-1}\frac{R}{X_C} \tag{23.15}$$

Para la frecuencia especial en que $X_C = R$, la magnitud se convierte en:

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{X_C}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

la cual define la frecuencia crítica o de corte de la figura 23.12.

La frecuencia en que $X_C = R$ está determinada por:

$$\frac{1}{2\pi f_c C} = R$$

y

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \tag{23.16}$$

El impacto de la ecuación (23.16) va más allá de su relativa sencillez. Para todo filtro pasa-bajas, la aplicación de cualquier frecuencia menor a f_c da por resultado un voltaje de salida V_o que es al menos el 70.7% del máximo. Para cualquier frecuencia por arriba de f_c, la salida será menor que 70.7% de la señal aplicada.

Al resolver para $\mathbf{V}_o$ y sustituir $\mathbf{V}_i = V_i \angle 0°$ tenemos:

$$\mathbf{V}_o = \left[\frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \angle\theta\right]\mathbf{V}_i = \left[\frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \angle\theta\right]V_i \angle 0°$$

y

$$\mathbf{V}_o = \frac{X_C V_i}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \angle\theta$$

El ángulo θ será, por tanto, el ángulo por el que $\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$. Dado que $\theta = -\tan^{-1} R/X_C$ siempre es negativo (excepto cuando $f = 0$ Hz), resulta claro que $\mathbf{V}_o$ siempre se encontrará atrasado con respecto a $\mathbf{V}_i$, lo que lleva a nombrar la red de la figura 23.8 como una *red de atraso*.

A frecuencias altas, X_C es muy pequeña y R/X_C muy grande, ocasionando que $\theta = -\tan^{-1} R/X_C$ se aproxime a $-90°$.

A frecuencias bajas, X_C es muy grande y R/X_C muy pequeña, ocasionando que θ se aproxime a 0º.

En $X_C = R$, o $f = f_c$, $-\tan^{-1} R/X_C = -\tan^{-1} 1 = -45°$.

Una gráfica de θ en función de la frecuencia da por resultado la gráfica de fase de la figura 23.13.

La gráfica es de $\mathbf{V}_o$ adelantando a $\mathbf{V}_i$, pero dado que el ángulo de fase es siempre negativo, la gráfica de fase de la figura 23.14 ($\mathbf{V}_o$ atrasado con respecto a $\mathbf{V}_i$) resulta más apropiada. Observe que un cambio de signo requiere que el eje vertical se cambie al ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ está atrasado con respecto a $\mathbf{V}_i$. En particular, advierta que el ángulo de fase entre $\mathbf{V}_o$ y $\mathbf{V}_i$ es menor a 45º en la

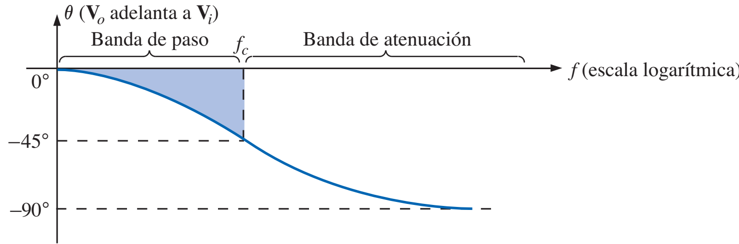


FIGURA 23.13
Ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ *adelanta a* $\mathbf{V}_i$.

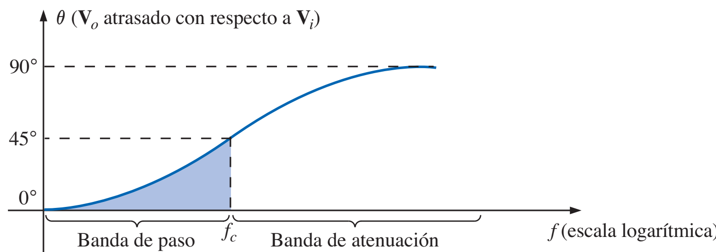


FIGURA 23.14
Ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ *se atrasa con respecto a* $\mathbf{V}_i$.

banda de paso y se aproxima a 0º a frecuencias más bajas.

En resumen, para el filtro *R-C* pasa-bajas de la figura 23.8:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Para	$f < f_c$,	$V_o > 0.707V_i$
mientras que para	$f > f_c$,	$V_o < 0.707V_i$
A f_c,	$\mathbf{V}_o$ atrasado con respecto a $\mathbf{V}_i$ por 45°	

La respuesta del filtro pasa-bajas de la figura 23.7(a) puede obtenerse también utilizando la combinación *R-L* de la figura 23.15 con:

$$f_c = \frac{R}{2\pi L} \tag{23.17}$$

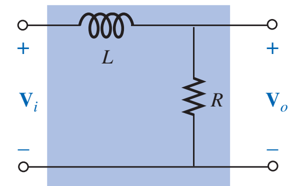


FIGURA 23.15
Filtro R-L pasa-bajas.

Sin embargo, en general, la combinación *R-C* es más popular debido al tamaño más pequeño de los elementos capacitivos y a las no linealidades asociadas con los elementos inductivos. Los detalles del análisis del pasa-bajas *R-L* se dejarán como un ejercicio para el lector.

EJEMPLO 23.5

a. Trace el voltaje de salida V_o en función de la frecuencia para el filtro *R-C* pasa-bajas de la figura 23.16.
b. Determine el voltaje V_o a f = 100 kHz y 1 MHz, y compare los resultados con los obtenidos a partir de la curva del inciso (a).
c. Trace la ganancia normalizada $A_v = V_o/V_i$.

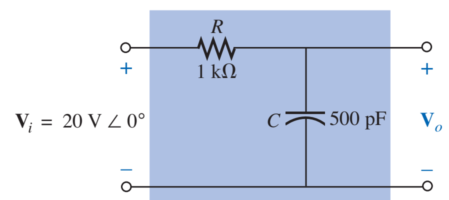


FIGURA 23.16
Ejemplo 23.5.

Soluciones:

a. Ecuación (23.16):

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi(1\ \text{k}\Omega)(500\ \text{pF})} = \mathbf{318.31\ kHz}$$

A f_c, $V_o = 0.707(20\ \text{V}) = 14.14\ \text{V}$. Vea la figura 23.17.

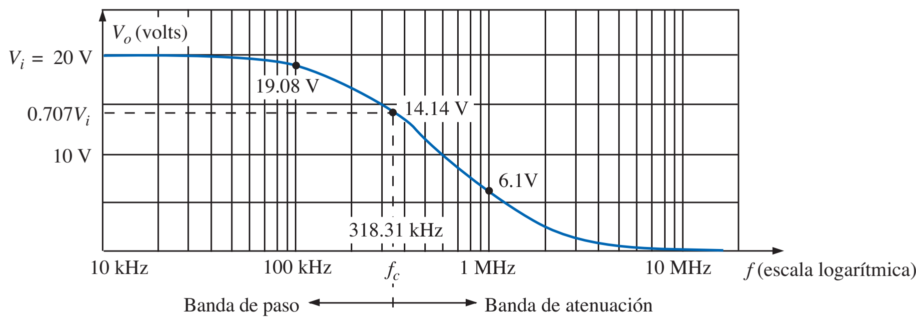


FIGURA 23.17
Respuesta en frecuencia para la red R-C pasa-bajas de la figura 23.16.

b. Ecuación (23.14):

$$V_o = \frac{V_i}{\sqrt{\left(\frac{R}{X_C}\right)^2 + 1}}$$

En $f = 100\ \text{kHz}$:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(100\ \text{kHz})(500\ \text{pF})} = 3.18\ \text{k}\Omega$$

y $$V_o = \frac{20\ \text{V}}{\sqrt{\left(\frac{1\ \text{k}\Omega}{3.18\ \text{k}\Omega}\right)^2 + 1}} = \mathbf{19.08\ V}$$

En $f = 1\ \text{MHz}$:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(1\ \text{MHz})(500\ \text{pF})} = 0.32\ \text{k}\Omega$$

y $$V_o = \frac{20\ \text{V}}{\sqrt{\left(\frac{1\ \text{k}\Omega}{0.32\ \text{k}\Omega}\right)^2 + 1}} = \mathbf{6.1\ V}$$

Ambos niveles están verificados por la figura 23.17.

c. Al dividir cada nivel de la figura 23.17 entre $V_i = 20\ \text{V}$ se obtendrá la gráfica normalizada de la figura 23.18

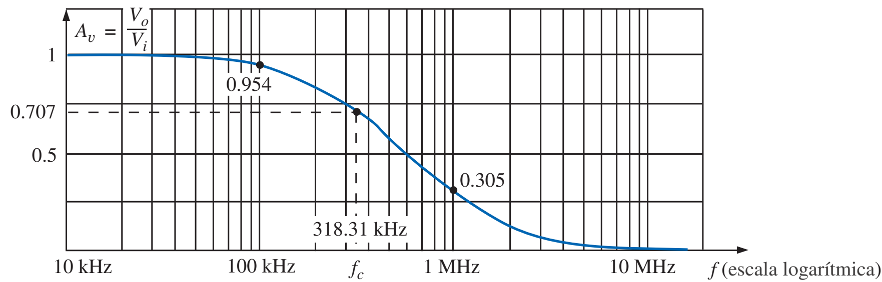


FIGURA 23.18
Gráfica normalizada de la figura 23.17.

23.6 FILTRO *R-C* PASA-ALTAS

Como se observó en la figura 23.5, puede construirse un filtro *R-C* pasa-altas invirtiendo simplemente las posiciones del capacitor y del resistor, como se muestra en la figura 23.19.

A frecuencias muy altas la reactancia del capacitor es muy pequeña y se puede sustituir el equivalente de corto circuito, como se muestra en la figura 23.20. El resultado es que $\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_i$.

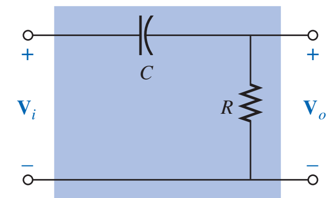


FIGURA 23.19
Filtro pasa-altas.

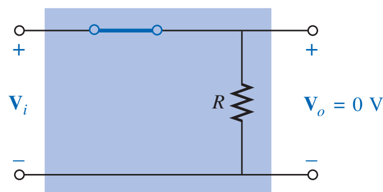


FIGURA 23.20
Filtro R-C pasa-altas a frecuencias muy altas.

En $f = 0$ Hz, la reactancia del capacitor es muy alta y se puede sustituir el equivalente de circuito abierto, como se muestra en la figura 23.21. En este caso, $\mathbf{V}_o = 0$ V.

En la figura 23.22 se proporciona una gráfica de la magnitud en función de la frecuencia, con la gráfica normalizada en la figura 23.23.

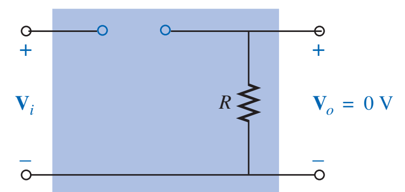


FIGURA 23.21
Filtro R-C pasa-altas a f = 0 Hz.

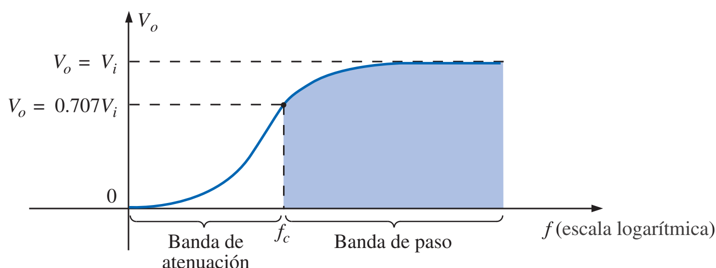


FIGURA 23.22
V_o en función de la frecuencia para un filtro R-C pasa-altas.

En cualquier frecuencia intermedia, el voltaje de salida puede determinarse utilizando la regla del divisor de voltaje:

$$\mathbf{V}_o = \frac{R \angle 0° \, \mathbf{V}_i}{R - j\,X_C}$$

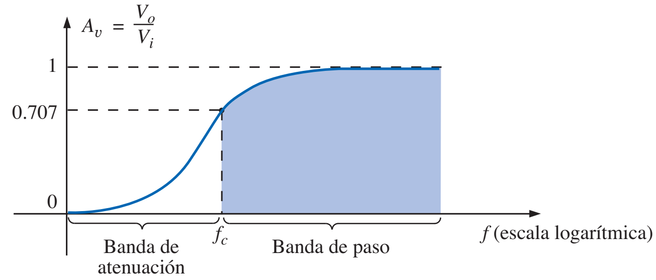


FIGURA 23.23
Gráfica normalizada de la figura 23.22.

o bien:

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{R \angle 0°}{R - jX_C} = \frac{R \angle 0°}{\sqrt{R^2 + X_C^2} \angle -\tan^{-1}(X_C/R)}$$

y
$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \angle \tan^{-1}(X_C/R)$$

Por tanto, la magnitud de la razón $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ se determina mediante:

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_C}{R}\right)^2}} \tag{23.18}$$

y el ángulo de fase θ por:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{X_C}{R} \tag{23.19}$$

Para la frecuencia a la que $X_C = R$, la magnitud se convierte en:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_C}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

como se muestra en la figura 23.23.

La frecuencia a la que $X_C = R$ está determinada por:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_c C} = R$$

y
$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \tag{23.20}$$

Para el filtro *R*-*C* pasa-altas, la aplicación de toda frecuencia mayor a f_c dará por resultado un voltaje de salida V_o que es al menos el 70.7% de la magnitud de la señal de entrada. Para cualquier frecuencia por debajo de f_c, la salida es menor que el 70.7% de la señal aplicada.

Para el ángulo de fase, las frecuencias altas dan por resultado valores pequeños de X_C, y la razón X_C/R se aproximará a cero con $\tan^{-1}(X_C/R)$ aproximándose a 0º, como se muestra en la figura 23.24. A frecuencias bajas, la razón X_C/R se vuelve muy grande, y $\tan^{-1}(X_C/R)$ se aproximará a 90º. Para el caso

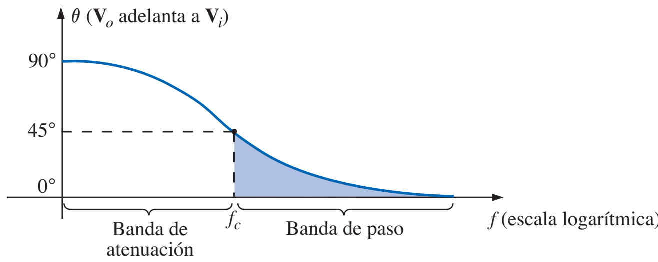


FIGURA 23.24
Ángulo de fase de la respuesta para el filtro R-C pasa-altas.

$X_C = R$, $\tan^{-1}(X_C/R) = \tan^{-1}1 = 45^\circ$. Al asignar un ángulo de fase de 0º a $\mathbf{V}_i$ tal que $\mathbf{V}_i = V_i \angle 0^\circ$, el ángulo de fase asociado con $\mathbf{V}_o$ es θ, dando por resultado que $\mathbf{V}_o = V_o \angle\theta$ y revelando que θ es el ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$. Dado que el ángulo θ es el ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$ a lo largo del intervalo de frecuencias de la figura 23.24, el filtro *R-C* pasa-altas se denomina *red de adelanto*.

En resumen, para el filtro *R-C* pasa-altas:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Para	$f < f_c$,	$V_o < 0.707V_i$
mientras que para	$f > f_c$,	$V_o > 0.707V_i$
A f_c,	$\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$ por 45°	

La respuesta del filtro pasa-altas de la figura 23.23 también puede obtenerse utilizando los mismos elementos de la figura 23.15, pero intercambiando sus posiciones como se muestra en la figura 23.25.

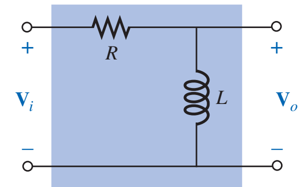


FIGURA 23.25
Filtro R-L pasa-altas.

EJEMPLO 23.6 Dados $R = 20\ \text{k}\Omega$ y $C = 1200$ pF.

a. Trace la gráfica normalizada si el filtro se utiliza tanto como un filtro pasa-altas como uno pasa-bajas.
b. Trace la gráfica de fase para ambos filtros del inciso (a).
c. Determine la magnitud y la fase de $\mathbf{A}_v = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ y $f = \frac{1}{2}f_c$ para el filtro pasa-altas.

Soluciones:

a. $f_c = \dfrac{1}{2\pi RC} = \dfrac{1}{(2\pi)(20\ \text{k}\Omega)(1200\ \text{pF})}$

$= \mathbf{6631.46\ Hz}$

Las gráficas normalizadas aparecen en la figura 23.26.

b. Las gráficas de fase aparecen en la figura 23.27.

c. $f = \dfrac{1}{2}f_c = \dfrac{1}{2}(6631.46\ \text{Hz}) = 3315.73\ \text{Hz}$

$X_C = \dfrac{1}{2\pi fC} = \dfrac{1}{(2\pi)(3315.73\ \text{Hz})(1200\ \text{pF})}$

$\cong 40\ \text{k}\Omega$

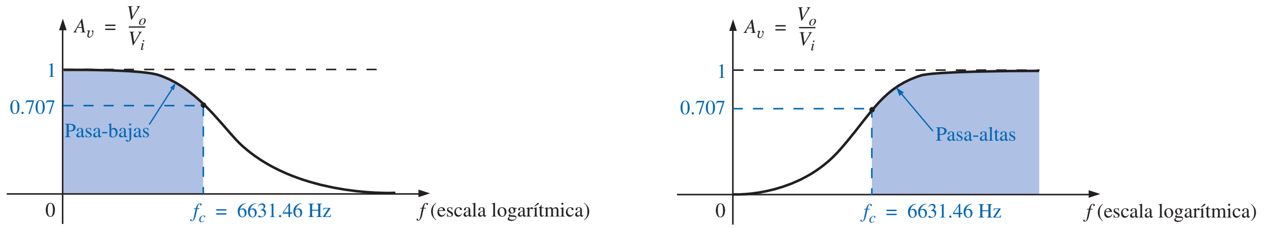


FIGURA 23.26
Gráficas normalizadas para un filtro pasa-bajas y uno pasa-altas utilizando los mismos elementos.

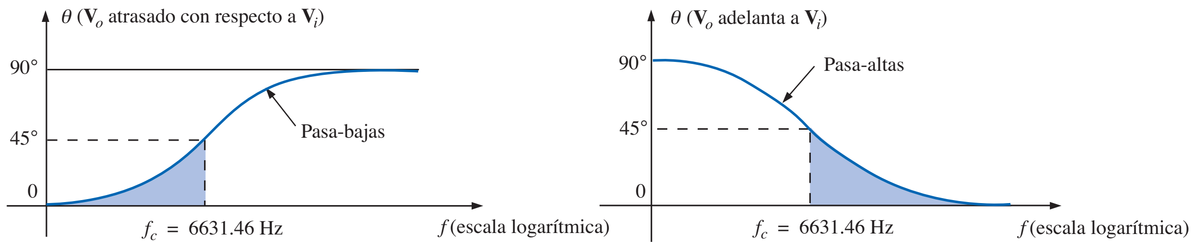


FIGURA 23.27
Gráficas de fase para un filtro pasa-bajas y uno pasa-altas utilizando los mismos elementos.

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_C}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{40\ \text{k}\Omega}{20\ \text{k}\Omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{X_C}{R} = \tan^{-1}\frac{40\ \text{k}\Omega}{20\ \text{k}\Omega} = \tan^{-1} 2 = 63.43°$$

y
$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \mathbf{0.4472\ \angle 63.43°}$$

23.7 FILTROS PASA-BANDA

Para establecer la característica pasa-banda de la figura 23.7(c) se utilizan varios métodos. Un método emplea los filtros pasa-bajas y pasa-altas en cascada, como se muestra en la figura 23.28.

Los componentes se seleccionan para establecer una frecuencia de corte para el filtro pasa-altas que es menor que la frecuencia crítica del filtro pasa-bajas, como se muestra en la figura 23.29. Una frecuencia f_1 podrá pasar a través del

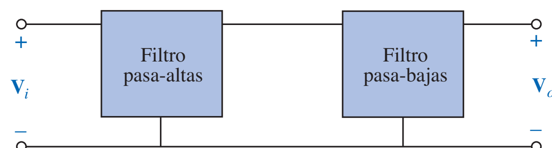


FIGURA 23.28
Filtro pasa-banda.

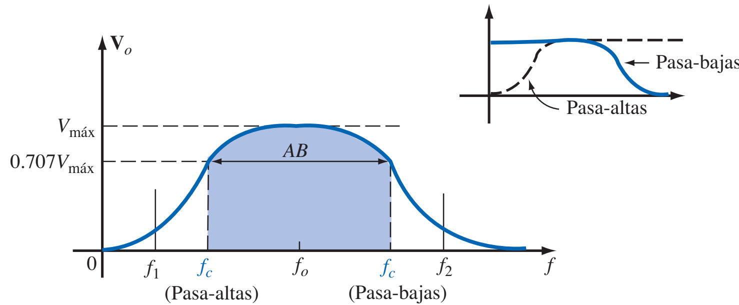


FIGURA 23.29
Características pasa-banda.

filtro pasa-bajas, pero tendrá poco efecto sobre V_o debido a las características de rechazo del filtro pasa-altas. Una frecuencia f_2 podrá pasar a través del filtro pasa-altas sin problema, pero no podrá alcanzar el filtro pasa-altas debido a las características pasa-bajas. Una frecuencia f_o cercana al centro del filtro pasa-banda cruzará a través de ambos filtros con muy poca atenuación.

La red del ejemplo 23.7 generará las características de la figura 23.29. Sin embargo, para un circuito como el mostrado en la figura 23.30, existe una carga entre las etapas en cada frecuencia que afectará el nivel de $\mathbf{V}_o$. Mediante un diseño adecuado, el nivel de $\mathbf{V}_o$ podría estar muy cercano al nivel de $\mathbf{V}_i$ en la banda de paso, pero nunca lo igualaría exactamente. Además, a medida que las frecuencias críticas de cada filtro se acerquen más y más entre sí para incrementar el factor de calidad de la curva de respuesta, los valores pico dentro de la banda de paso continuarán cayendo. Para los casos en que $V_{o_{máx}} \neq V_{i_{máx}}$ el ancho de banda se define a 0.707 del $V_{o_{máx}}$ resultante.

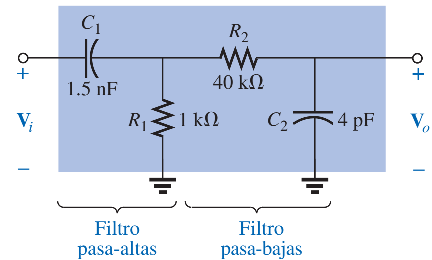


FIGURA 23.30
Filtro pasa-banda.

EJEMPLO 23.7 Para el filtro pasa-banda de la figura 23.30:

a. Determine las frecuencias críticas para los filtros pasa-bajas y pasa-altas.
b. Utilizando únicamente las frecuencias críticas, trace las características de respuesta.
c. Determine el valor real de V_o a la frecuencia crítica pasa-altas calculada en el inciso (a), y compárelo con el nivel que definirá la frecuencia superior para la banda de paso.

Soluciones:

a. Filtro pasa-altas:

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = \frac{1}{2\pi(1\text{ k}\Omega)(1.5\text{ nF})} = \mathbf{106.1\text{ kHz}}$$

Filtro pasa-bajas:

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = \frac{1}{2\pi(40\text{ k}\Omega)(4\text{ pF})} = \mathbf{994.72\text{ kHz}}$$

b. En la región media de la banda de paso, aproximadamente a 500 kHz, un análisis de la red mostrará que $V_o \cong 0.9V_i$ como se muestra en la figura 23.31. El ancho de banda está, por tanto, definido a un nivel de $0.707(0.9\ V_i) = 0.636V_i$, como también se muestra en la figura 23.31.
c. En $f = 994.72$ kHz,

$$X_{C_1} = \frac{1}{2\pi f C_1} \cong 107\ \Omega$$

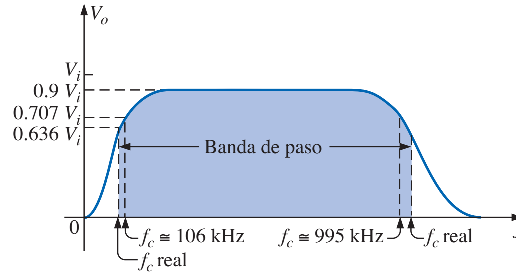


FIGURA 23.31
Características pasa-banda para el filtro de la figura 23.30.

y
$$X_{C_2} = \frac{1}{2\pi f C_2} = R_2 = 40\ \text{k}\Omega$$

dando por resultado la red de la figura 23.32.

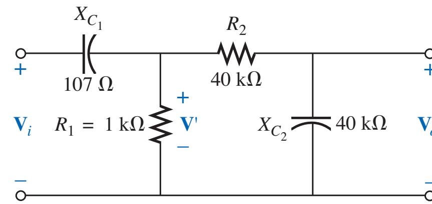


FIGURA 23.32
Red de la figura 23.30 en f = 994.72 kHz.

La combinación en paralelo $R_1 \| (R_2 - jX_{C_2})$ esencialmente es de 0.976 kΩ $\angle 0°$ dado que la combinación $R_2 - X_{C_2}$ es muy grande en comparación con el resistor en paralelo R_1.

Entonces:

$$\mathbf{V}' = \frac{0.976\ \text{k}\Omega \angle 0°(\mathbf{V}_i)}{0.976\ \text{k}\Omega - j0.107\ \text{k}\Omega} \cong 0.994\mathbf{V}_i \angle 6.26°$$

con:

$$\mathbf{V}_o = \frac{(40\ \text{k}\Omega \angle -90°)(0.994\mathbf{V}_i \angle 6.26°)}{40\ \text{k}\Omega - j40\ \text{k}\Omega}$$

$$\mathbf{V}_o \cong 0.703\mathbf{V}_i \angle -39°$$

de manera que:

$$V_o \cong \mathbf{0.703}V_i \qquad \text{En } f = 994.72\ \text{kHz}$$

Dado que el ancho de banda está definido en $0.636V_i$, la frecuencia de corte superior será mayor que 994.72 kHz, tal como se muestra en la figura 23.31.

La respuesta pasa-banda puede obtenerse también utilizando los circuitos resonantes en serie y en paralelo analizados en el capítulo 20. Sin embargo, en cada caso, V_o no será igual a V_i en la banda de paso, pero se podrá definir un intervalo de frecuencia en el que V_o será igual o mayor que $0.707V_{\text{máx}}$.

Para el circuito resonante en serie de la figura 23.33, $X_L = X_C$ en la resonancia, y

$$V_{o_{\text{máx}}} = \frac{R}{R + R_l} V_i \Bigg|_{f = f_s} \qquad \textbf{(23.21)}$$

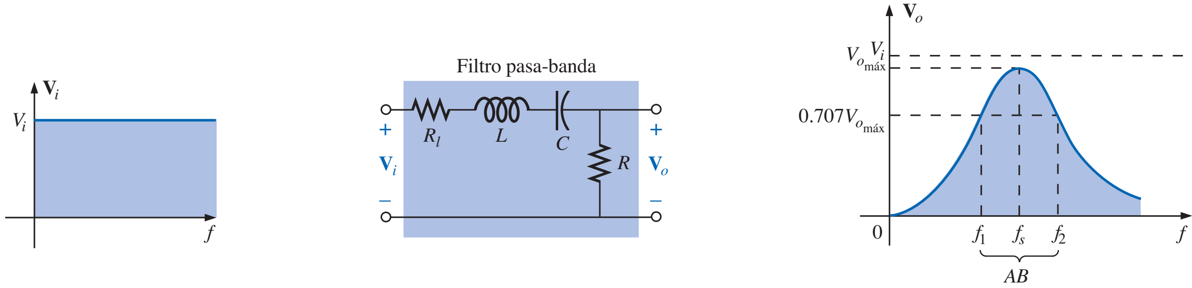


FIGURA 23.33
Filtro pasa-banda resonante en serie.

y
$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (23.22)$$

con:
$$Q_s = \frac{X_L}{R + R_l} \quad (23.23)$$

y
$$AB = \frac{f_s}{Q_s} \quad (23.24)$$

Para el circuito resonante en paralelo de la figura 23.34, Z_{T_p} es un valor máximo en la resonancia, y

$$V_{o_{máx}} = \frac{Z_{T_p}V_i}{Z_{T_p} + R} \Bigg|_{f = f_p} \quad (23.25)$$

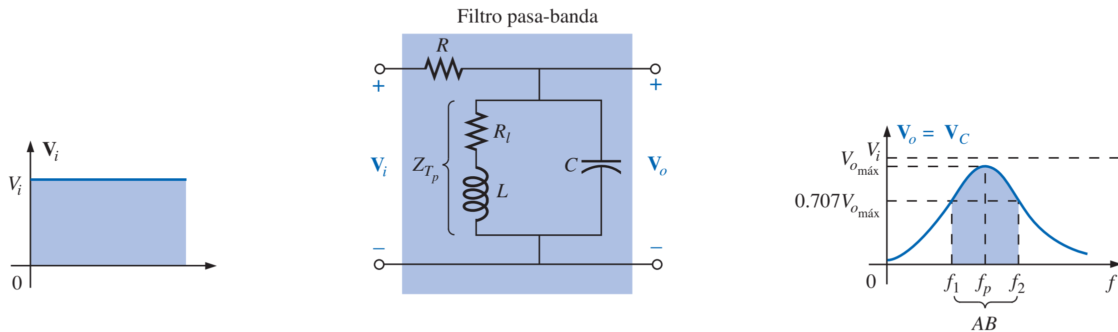


FIGURA 23.34
Filtro pasa-banda resonante en paralelo.

con:
$$Z_{T_p} = Q_l^2 R_l \Bigg|_{Q_l \geq 10} \quad (23.26)$$

y
$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Bigg|_{Q_l \geq 10} \quad (23.27)$$

Para el circuito resonante en paralelo:

$$Q_p = \frac{X_L}{R_l} \quad \textbf{(23.28)}$$

y

$$AB = \frac{f_p}{Q_p} \quad \textbf{(23.29)}$$

Como una primera aproximación que sea aceptable para la mayoría de las aplicaciones prácticas, se puede suponer que la frecuencia resonante biseca al ancho de banda.

EJEMPLO 23.8

a. Determine la respuesta en frecuencia del voltaje V_o para el circuito en serie de la figura 23.35.
b. Trace la respuesta normalizada $A_v = V_o/V_i$.
c. Trace una respuesta normalizada definida por $A'_v = A_v/A_{v_{máx}}$.

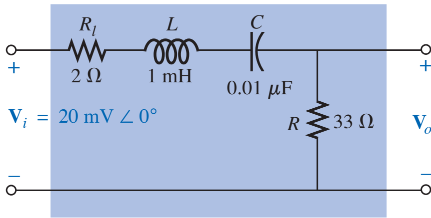


FIGURA 23.35
Filtro pasa-banda resonante en serie para el ejemplo 23.8.

Soluciones:

a. $f_s = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(1\text{ mH})(0.01\ \mu\text{F})}} = \mathbf{50{,}329.21\ Hz}$

$$Q_s = \frac{X_L}{R + R_l} = \frac{2\pi(50{,}329.21\text{ Hz})(1\text{ mH})}{33\ \Omega + 2\ \Omega} = \mathbf{9.04}$$

$$AB = \frac{f_s}{Q_s} = \frac{50{,}329.21\text{ Hz}}{9.04} = \mathbf{5.57\ kHz}$$

En resonancia:

$$V_{o_{máx}} = \frac{RV_i}{R + R_l} = \frac{33\ \Omega(V_i)}{33\ \Omega + 2\ \Omega} = 0.943V_i = 0.943(20\text{ mV})$$
$$= \mathbf{18.86\ mV}$$

En la frecuencia de corte:

$$V_o = (0.707)(0.943V_i) = 0.667V_i = 0.667(20\text{ mV})$$
$$= \mathbf{13.34\ mV}$$

Observe la figura 23.36.

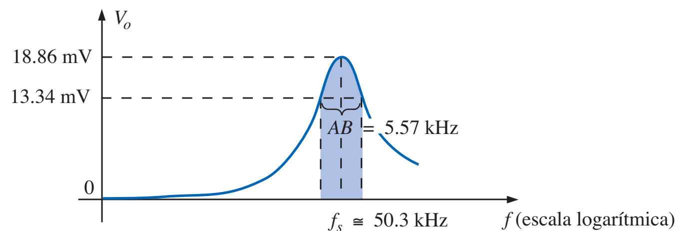


FIGURA 23.36
Respuesta pasa-banda para la red.

b. Al dividir todos los niveles de la figura 23.36 entre V_i = 20 mV se obtendrá la gráfica normalizada de la figura 23.37(a).

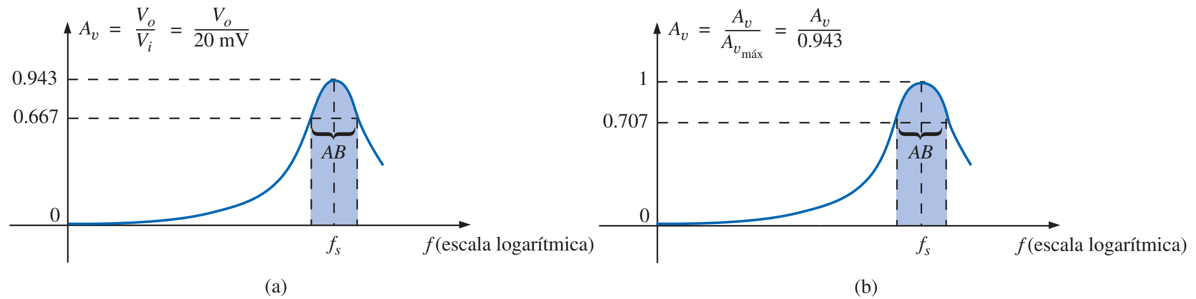


FIGURA 23.37
Gráficas normalizadas para el filtro pasa-banda de la figura 23.35.

c. Al dividir todos los niveles de la figura 23.37(a) entre $A_{v_{máx}} = 0.943$ se obtendrá la gráfica normalizada de la figura 23.37(b).

23.8 FILTROS RECHAZA-BANDA

Los filtros rechaza-banda también pueden construirse utilizando un filtro pasa-bajas y uno pasa-altas. Sin embargo, en lugar de la configuración en cascada que se emplea para el filtro pasa-banda, se requiere un arreglo en paralelo, como se muestra en la figura 23.38. Una frecuencia baja f_1 podrá atravesar el filtro pasa-bajas, y una frecuencia alta f_2 podrá utilizar la trayectoria en paralelo, como se muestra en las figuras 23.38 y 23.39. Sin embargo, una frecuencia tal como f_o en la banda de rechazo será mayor que la frecuencia crítica del pasa-bajas y menor que la frecuencia crítica del pasa-altas, y por tanto estará impedida de contribuir a los niveles de V_o por encima de $0.707V_{máx}$.

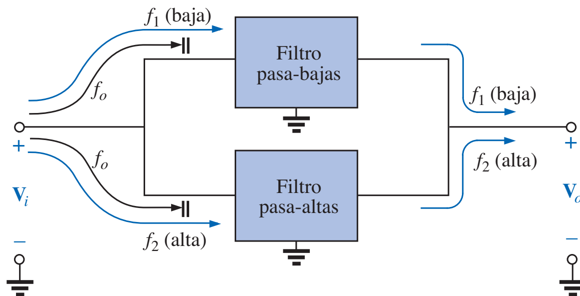


FIGURA 23.38
Filtro rechaza-banda.

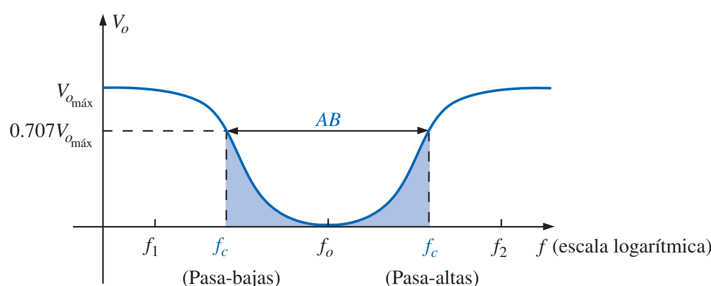


FIGURA 23.39
Características rechaza-banda.

Debido a que las características de un filtro rechaza-banda son las inversas a las del patrón obtenido para los filtros pasa-banda, podemos utilizar el hecho de que a cualquier frecuencia la suma de las magnitudes de las dos formas de onda a la derecha del signo de igual en la figura 23.40 serán iguales al voltaje aplicado V_i.

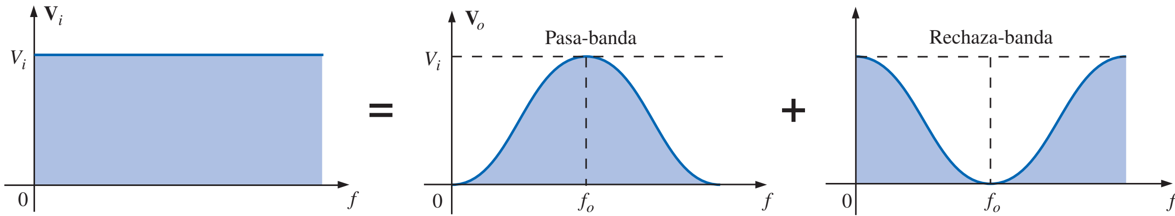


FIGURA 23.40
Demostración de cómo una señal aplicada de magnitud fija puede dividirse en una curva de respuesta pasa-banda y una de respuesta rechaza-banda.

Por tanto, para los filtros pasa-banda de las figuras 23.33 y 23.34, si tomamos la salida de los otros elementos en serie como se muestra en las figuras 23.41 y 23.42, se obtendrá una característica rechaza-banda, como lo requiere la ley de voltaje de Kirchhoff.

Para el circuito resonante en serie de la figura 23.41, las ecuaciones de la (23.22) a la (23.24) siguen siendo válidas, pero ahora en resonancia,

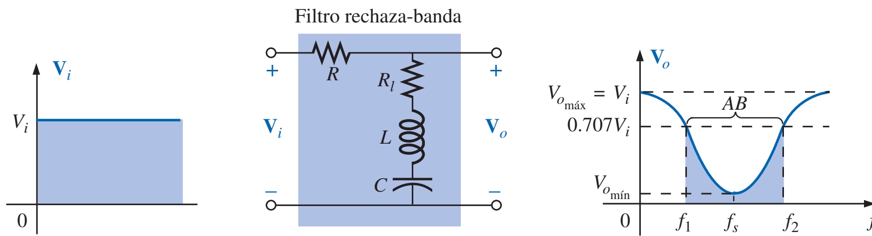


FIGURA 23.41
Filtro rechaza-banda utilizando un circuito resonante en serie.

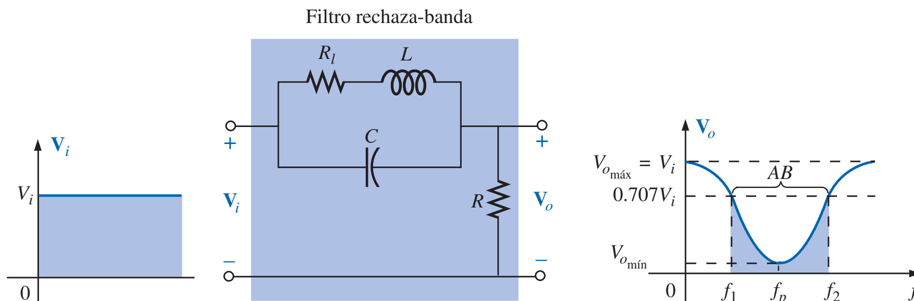


FIGURA 23.42
Filtro rechaza-banda utilizando una red resonante en paralelo.

$$V_{o_{\text{mín}}} = \frac{R_l V_i}{R_l + R} \tag{23.30}$$

Para el circuito resonante en paralelo de la figura 23.42, las ecuaciones de la (23.26) a la (23.29) siguen siendo válidas, pero ahora en resonancia,

$$V_{o_{\text{mín}}} = \frac{R V_i}{R + Z_{T_p}} \tag{23.31}$$

El valor máximo de V_o para el circuito resonante en serie es V_i en el extremo inferior debido al equivalente de circuito abierto para el capacitor, y V_i en el extremo superior debido a la alta impedancia del elemento inductivo.

Para el circuito resonante en paralelo, en $f = 0$ Hz, la bobina puede reemplazarse por un equivalente de corto circuito, y el capacitor se puede reemplazar por un circuito abierto y $V_o = RV_i/(R + R_l)$. En el extremo de alta frecuencia, el capacitor se aproxima a su equivalente de corto circuito, y V_o se incrementa hacia V_i.

23.9 FILTRO DE DOBLE SINTONIZACIÓN

Algunas configuraciones de red presentan características pasa-banda y rechaza-banda, como se muestra en la figura 23.43. Tales redes se denominan **filtros de doble sintonización**. En la red de la figura 23.43(a), el circuito resonante en paralelo establecerá una banda de rechazo para el intervalo de frecuencias no permitidas a fin de establecer un V_L importante. La mayor parte del voltaje aplicado se presentará en el circuito resonante en paralelo para este intervalo de frecuencias debido a su muy alta impedancia comparada con R_L. En el pasa-banda, el circuito resonante en paralelo está diseñado para ser capacitivo (inductivo si L_s es reemplazada por C_s). La inductancia L_s está seleccionada para cancelar los efectos de la reactancia capacitiva neta resultante a la frecuencia pasa-banda resonante del circuito tanque, actuando por ello como un circuito resonante en serie. El voltaje aplicado aparecerá entonces en R_L a esta frecuencia.

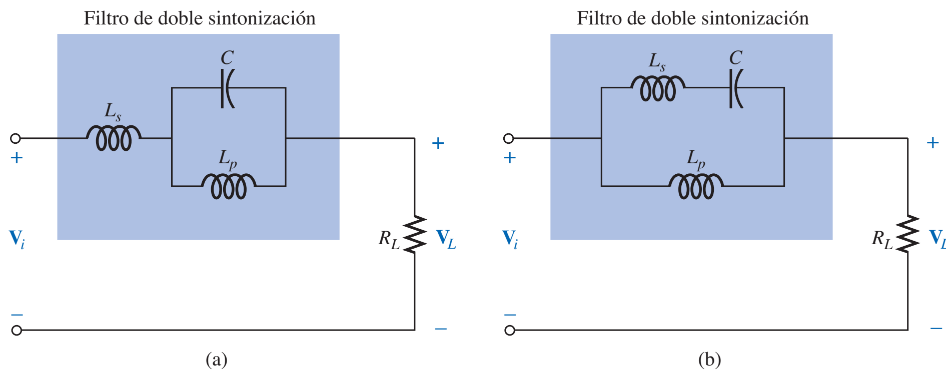


FIGURA 23.43
Redes de doble sintonización.

Para la red de la figura 23.43(b), el circuito resonante en serie seguirá determinando la banda de paso, actuando como una impedancia muy baja en el inductor paralelo en resonancia. En la frecuencia resonante rechaza-banda deseada,

el circuito resonante en serie es capacitivo. La inductancia L_p se selecciona para establecer resonancia paralela a la frecuencia resonante rechaza-banda. La alta impedancia del circuito resonante en paralelo dará por resultado un voltaje de carga V_L muy bajo.

Para las frecuencias rechazadas por debajo de la banda de paso, las redes deberán aparecer como se muestra en la figura 23.43. En la situación inversa, L_s en la figura 23.43(a) y L_p en la figura 23.43(b) se reemplazan por capacitores.

EJEMPLO 23.9 Para la red de la figura 23.43(b), determine L_s y L_p para una capacitancia C de 500 pF si se rechaza una frecuencia de 200 kHz y se acepta una frecuencia de 600 kHz.

Solución: Para la resonancia en serie, tenemos:

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

y
$$L_s = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 C} = \frac{1}{4\pi^2(600\text{ kHz})^2(500\text{ pF})} = \mathbf{140.7\ \mu H}$$

A 200 kHz,

$$X_{L_s} = \omega L = 2\pi f_s L_s = (2\pi)(200\text{ kHz})(140.7\ \mu\text{H}) = 176.8\ \Omega$$

y
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(2\pi)(200\text{ kHz})(500\text{ pF})} = 1591.5\ \Omega$$

Para los elementos en serie,

$$j\,(X_{L_s} - X_C) = j\,(176.8\ \Omega - 1591.5\ \Omega) = -j\,1414.7\ \Omega = -j\,X'_C$$

A la resonancia paralela (se asume que $Q_l \geq 10$),

$$X_{L_p} = X'_C$$

y
$$L_p = \frac{X_{L_p}}{\omega} = \frac{1414.7\ \Omega}{(2\pi)(200\text{ kHz})} = \mathbf{1.13\ mH}$$

La respuesta en frecuencia para la red anterior aparece como uno de los ejemplos de PSpice en la última sección del presente capítulo.

Estadounidense
(Madison, WI; Summit, NJ; Cambridge, MA)
(1905-1981)
Vicepresidente de Laboratorios Bell
Profesor de Ingeniería de Sistemas, Universidad de Harvard



Cortesía de los archivos de AT&T

En sus primeros años en los Laboratorios Bell, Hendrik Bode participó en las áreas de *filtros eléctricos* y *diseño de ecualizadores*. Luego fue transferido al Grupo de Investigación en Matemáticas, donde se especializó en la investigación relacionada con la teoría de redes eléctricas y su aplicación en las instalaciones de comunicaciones de larga distancia. En 1946 fue premiado con el Presidential Certificate of Merit por su trabajo en el área de dispositivos electrónicos de control de incendios. Además de publicar el libro *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* (*Análisis de Redes y Diseño de Amplificadores con Retroalimentación*) en 1945, el cual se considera un clásico en su campo, obtuvo 25 patentes en ingeniería eléctrica y diseño de sistemas. A su retiro, Bode fue elegido profesor Gordon McKay de Ingeniería en Sistemas en la Universidad de Harvard. Fue miembro de la IEEE y de la Academia Estadounidense de Artes y Ciencias.

FIGURA 23.44
Hendrik Wade Bode.

23.10 DIAGRAMAS DE BODE

Existe una técnica para trazar la respuesta en frecuencia de factores tales como filtros, amplificadores y sistemas sobre una escala de decibeles que puede ahorrar bastante tiempo y esfuerzo, y proporciona una excelente forma para comparar niveles de decibeles a diferentes frecuencias.

Las curvas obtenidas para la magnitud y/o el ángulo de fase en función de la frecuencia se denominan* Diagramas de Bode *(Figura 23.44). Mediante el uso de segmentos de recta llamados diagramas de Bode ideales, se puede obtener la respuesta en frecuencia de un sistema de forma eficiente y precisa.

Para asegurar que la deducción del método se comprenda clara y correctamente, la primera red a ser analizada se revisará con todo detalle. La segunda red será tratada de manera más breve y, finalmente, se presentará un método para determinar de forma rápida la respuesta.

Filtro *R-C* pasa-altas

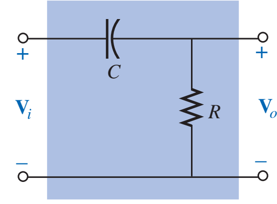


FIGURA 23.45
Filtro pasa-altas.

Comencemos por volver a analizar el filtro pasa-altas de la figura 23.45. Se eligió este filtro como punto de partida debido a que las frecuencias de principal interés se encuentran en el extremo inferior del espectro de frecuencias.

La ganancia de voltaje del sistema está dada por:

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{R}{R - jX_C} = \frac{1}{1 - j\dfrac{X_C}{R}} = \frac{1}{1 - j\dfrac{1}{2\pi fCR}}$$

$$= \frac{1}{1 - j\left(\dfrac{1}{2\pi RC}\right)\dfrac{1}{f}}$$

Si sustituimos:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \qquad \textbf{(23.32)}$$

la cual reconocemos como la frecuencia de corte de secciones anteriores, y obtenemos:

$$\mathbf{A}_v = \frac{1}{1 - j(f_c/f)} \qquad \textbf{(23.33)}$$

En el análisis siguiente veremos que la habilidad de expresar la ganancia de forma que tenga las características generales de la ecuación (23.33) es crítica para la aplicación de la técnica de Bode. Diversas configuraciones darán por resultado variaciones del formato de la ecuación (23.33), pero las similitudes deseadas serán obvias a medida que avancemos en el tratamiento del material.

En forma de magnitud y fase:

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = A_v \angle\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_c/f)^2}} \angle\tan^{-1}(f_c/f) \qquad \textbf{(23.34)}$$

que proporciona una ecuación para la magnitud y la fase del filtro pasa-altas en términos de los niveles de frecuencia.

Utilizando la ecuación (23.12),

$$A_{v_{\text{dB}}} = 20 \log_{10} A_v$$

y, al sustituir el componente de magnitud de la ecuación (23.34),

$$A_{v_{\text{dB}}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (f_c/f)^2}} = \underbrace{20 \log_{10} 1}_{0} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + (f_c/f)^2}$$

y

$$\mathbf{A}_{v_{\text{dB}}} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Si reconocemos que $\log_{10}\sqrt{x} = \log_{10} x^{1/2} = \frac{1}{2}\log_{10} x$, tenemos:

$$A_{v_{\text{dB}}} = -\frac{1}{2}(20) \log_{10}\left[1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]$$

$$= -10 \log_{10}\left[1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]$$

Para frecuencias donde $f \ll f_c$ o $(f_c/f)^2 \gg 1$,

$$1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 \cong \left(\frac{f_c}{f}\right)^2$$

y $$A_{v_{dB}} = -10 \log_{10}\left(\frac{f_c}{f}\right)^2$$

pero: $$\log_{10} x^2 = 2 \log_{10} x$$

dando por resultado: $$A_{v_{dB}} = -20 \log_{10} \frac{f_c}{f}$$

Sin embargo, una propiedad de los logaritmos es:

$$-\log_{10} b = +\log_{10} \frac{1}{b}$$

y al sustituir $b = f_c/f$, tenemos:

$$A_{v_{dB}} = +20 \log_{10} \frac{f}{f_c} \qquad f \ll f_c \tag{23.35}$$

Primero observe las similitudes entre la ecuación (23.35) y la ecuación básica de la ganancia en decibeles: $G_{dB} = 20 \log_{10} V_o/V_i$. Por tanto, los comentarios con respecto a cambios en los niveles de decibeles debido a cambios en V_o/V_i pueden aplicarse también aquí, excepto que ahora un cambio en la frecuencia en una proporción de 2:1 dará por resultado un cambio de 6 dB en la ganancia. Un cambio en la frecuencia en una proporción de 10:1 ocasionará un cambio de 20 dB en la ganancia.

Se dice que dos frecuencias separadas por una proporción de 2:1 se encuentran a una octava de distancia.

Para los diagramas de Bode, un cambio en la frecuencia por una octava ocasionará un cambio de 6 dB en la ganancia.

Se dice que dos frecuencias separadas por una proporción de 10:1 se encuentran a una década de distancia.

Para los diagramas de Bode, un cambio en la frecuencia por una década ocasionará un cambio de 20 dB en la ganancia.

Podría cuestionarse todo el desarrollo matemático para obtener una ecuación que de forma inicial parece confusa y de valor limitado. Como se especifica, la ecuación (23.35) es precisa sólo para niveles de frecuencia mucho menores a f_c.

Primero, observe que el desarrollo matemático de la ecuación (23.35) no tendrá que repetirse para cada configuración que se encuentre. Segundo, la ecuación en sí rara vez se aplica; en cambio, simplemente se utiliza, en la forma que se describirá, para definir una línea recta sobre una gráfica logarítmica que permite trazar la respuesta en frecuencia de un sistema con un mínimo de esfuerzo y alto nivel de precisión.

Para trazar la gráfica de la ecuación (23.35), considere los siguientes niveles para frecuencias en aumento:

Para $f = f_c/10$,	$f/f_c = 0.1$	y	$+20 \log_{10} 0.1 = -20$ dB
Para $f = f_c/4$,	$f/f_c = 0.25$	y	$+20 \log_{10} 0.25 = -12$ dB
Para $f = f_c/2$,	$f/f_c = 0.51$	y	$+20 \log_{10} 0.5 = -6$ dB
Para $f = f_c$,	$f/f_c = 1$	y	$+20 \log_{10} 1 = 0$ dB

Observe, a partir de las ecuaciones anteriores, que a medida que la frecuencia de interés se aproxima a f_c la ganancia en dB se vuelve menos negativa y se acerca al valor final normalizado de 0 dB. El signo positivo frente a la ecuación (23.35) puede interpretarse entonces como una señal de que la ganancia en dB tendrá una pendiente positiva ante un incremento en la frecuencia. Una gráfica de estos puntos sobre una escala logarítmica dará por resultado el segmento de recta de la figura 23.46 a la izquierda de f_c.

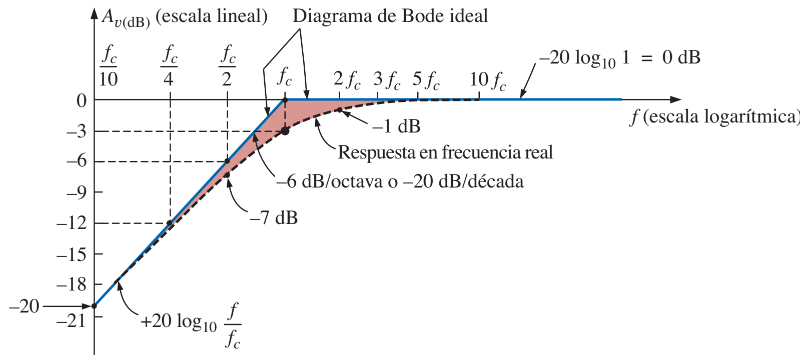


FIGURA 23.46

Diagrama de Bode ideal para la región de baja frecuencia.

Para el futuro, observe que la gráfica resultante es una recta que interseca la línea de 0 dB en f_c. Se incrementa a la derecha a una velocidad de $+6$ dB por octava o $+20$ dB por década. En otras palabras, una vez que determine f_c, obtenga $f_c/2$, y se presentará un punto de gráfica en -6 dB (u obtenga $f_c/10$ y se presentará un punto de gráfica en -20 dB).

Los diagramas de Bode son segmentos de recta debido a que el cambio en dB por década o por octava es constante.

La respuesta real se aproximará a una asíntota (segmento de recta) definida por $A_{v_{\text{dB}}} = 0$ dB dado que en altas frecuencias:

$$f \gg f_c \quad \text{y} \quad f_c/f \cong 0$$

con:
$$A_{v_{\text{dB}}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (f_c/f)^2}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + 0}}$$
$$= 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

Las dos asíntotas definidas se intersecarán en f_c, como se muestra en la figura 23.46, formando una envolvente para la respuesta en frecuencia real.

En $f = f_c$, la frecuencia de corte,

$$A_{v_{\text{dB}}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (f_c/f)^2}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \mathbf{-3\ dB}$$

En $f = 2f_c$,

$$A_{v_{\text{dB}}} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{2f_c}\right)^2} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= -20 \log_{10} \sqrt{1.25} = \mathbf{-1\ dB}$$

como se muestra en la figura 23.46.

En $f = f_c/2$,

$$A_{v_{\mathrm{dB}}} = -20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{f_c}{f_c/2}\right)^2} = -20\log_{10}\sqrt{1+(2)^2}$$
$$= -20\log_{10}\sqrt{5}$$
$$= \mathbf{-7\ dB}$$

separando el diagrama de Bode ideal de la respuesta real por 7 dB – 6 dB = 1 dB, como se muestra en la figura 23.46.

Revisando lo anterior,

en $f = f_c$, la curva de respuesta real está 3 dB por debajo del diagrama de Bode ideal, mientras que en $f = 2f_c$ y $f_c/2$, la curva de respuesta real está 1 dB por debajo de la respuesta asintótica.

La respuesta de fase también puede trazarse utilizando asíntotas rectas al considerar algunos puntos críticos en el espectro de frecuencias.

La ecuación (23.34) establece la respuesta de fase (el ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$) mediante:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{f_c}{f} \qquad \textbf{(23.36)}$$

Para frecuencias por debajo de $f_c (f \ll f_c)$, $\theta = \tan^{-1}(f_c/f)$ se aproxima a 90º y para frecuencias por encima de $f_c (f \gg f_c)$, $\theta = \tan^{-1}(f_c/f)$ se aproximará a 0º, como se vio en secciones previas. En $f = f_c$, $\theta = \tan^{-1}(f_c/f) = \tan^{-1} 1 = 45º$.

Al definir $f \ll f_c$ para $f = f_c/10$ (y menor) y $f \gg f_c$ para $f = 10f_c$ (y mayor), podemos determinar

una asíntota en $\theta = 90º$ para $f \ll f_c/10$, una asíntota en $\theta = 0º$ para $f \gg 10f_c$, y una asíntota de $f_c/10$ a $10f_c$ que pasa a través de $\theta = 45º$ en $f = f_c$.

Estas asíntotas aparecen en la figura 23.47. Nuevamente, el diagrama de Bode para la ecuación (23.36) es una recta debido a que el cambio en el ángulo de fase será de 45º para cada cambio de diez veces en la frecuencia.

Al sustituir $f = f_c/10$ en la ecuación (23.36),

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{f_c}{f_c/10}\right) = \tan^{-1} 10 = \mathbf{84.29°}$$

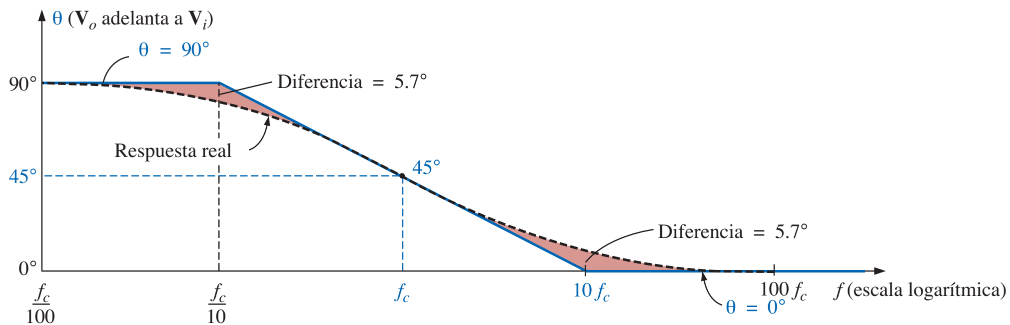


FIGURA. 23.47
Respuesta de fase para un filtro R-C pasa-altas.

para una diferencia de 90º − 84.29º ≅ 5.7º a partir de una respuesta ideal.

Al sustituir $f = 10f_c$,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{f_c}{10f_c}\right) = \tan^{-1}\frac{1}{10} \cong \mathbf{5.7°}$$

Por tanto, en resumen,

a $f = f_c$, $\theta = 45º$, mientras que a $f = f_c/10$ y $10f_c$, la diferencia entre la respuesta de fase real y la gráfica asintótica es de 5.7º.

EJEMPLO 23.10

a. Grafique $A_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia para el filtro *R-C* pasa-altas de la figura 23.48.
b. Determine el nivel de decibeles en $f = 1$ kHz.
c. Grafique la respuesta de fase en función de la frecuencia sobre una escala logarítmica.

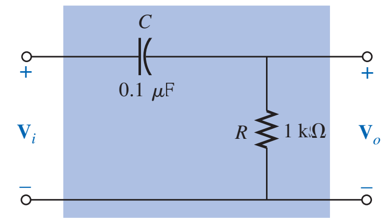


FIGURA 23.48
Ejemplo 23.10.

Soluciones:

a. $f_c = \dfrac{1}{2\pi RC} = \dfrac{1}{(2\pi)(1\text{ k}\Omega)(0.1\ \mu\text{F})} = 1591.55\text{ Hz}$

La frecuencia f_c se identifica sobre la escala logarítmica como se muestra en la figura 23.49. Luego se traza una recta de f_c con una pendiente que intersecará −20 dB a $f_c/10 = 159.15$ Hz o −6 dB a $f_c/2 = 795.77$ Hz. Se traza una segunda asíntota de f_c a frecuencias mayores que 0 dB. Entonces puede trazarse la curva de respuesta real a través del nivel de −3 dB con f_c aproximándose a las dos asíntotas de la figura 23.49. Observe la diferencia de 1 dB entre la respuesta real y el diagrama de Bode ideal en $f = 2f_c$ y $0.5f_c$.

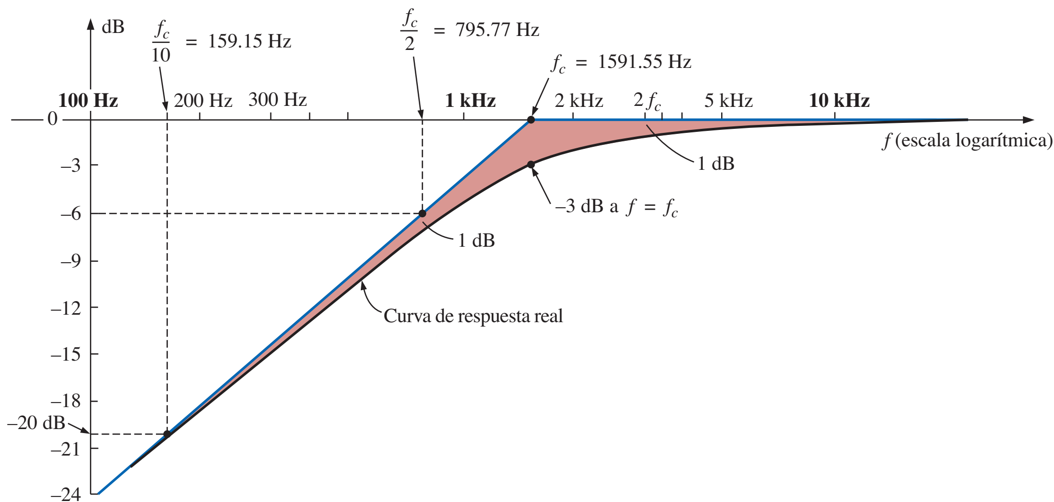


FIGURA 23.49
Respuesta en frecuencia para el filtro pasa-altas de la figura 23.48.

Observe que en la solución del inciso (a), no hubo necesidad de utilizar la ecuación (23.35) ni de realizar alguna manipulación matemática extensa.

b. Ecuación (23.33):

$$|A_{v\text{dB}}| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1591.55 \text{ Hz}}{1000}\right)^2}}$$

$$= 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (1.592)^2}} = 20 \log_{10} 0.5318 = \mathbf{-5.49\ dB}$$

como lo comprueba la figura 23.49.

c. Vea la figura 23.50. Observe que $\theta = 45°$ a $f = f_c = 1591.55$ Hz, y la diferencia entre el segmento de recta y la respuesta real es de 5.7° a $f = f_c/10 = 159.2$ Hz y $f = 10f_c = 15{,}923.6$ Hz.

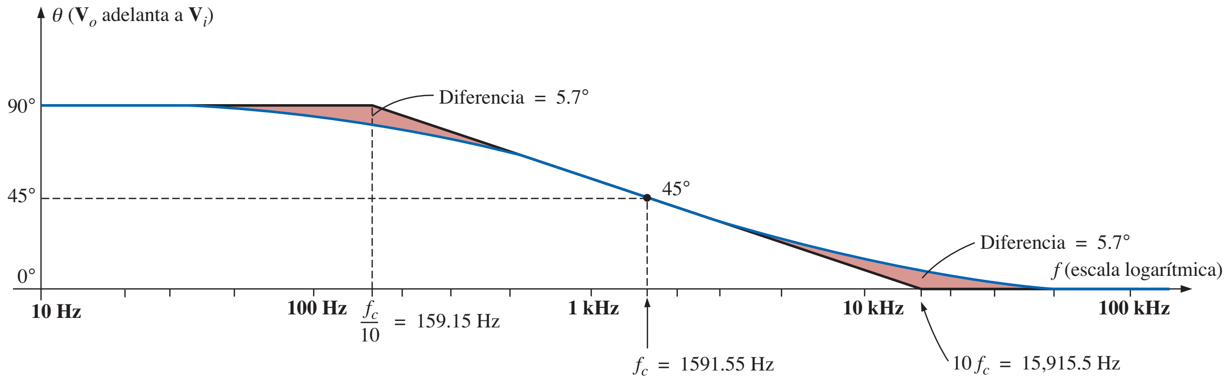


FIGURA 23.50
Gráfica de fase para el filtro R-C pasa-altas.

Filtro *R-C* pasa-bajas

Para el filtro pasa-bajas de la figura 23.51,

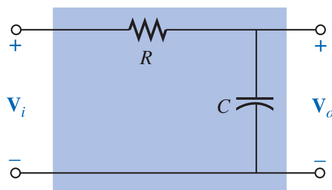


FIGURA 23.51
Filtro pasa-bajas.

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{-j X_C}{R - j X_C} = \frac{1}{\frac{R}{-j X_C} + 1}$$

$$= \frac{1}{1 + j\frac{R}{X_C}} = \frac{1}{1 + j\frac{R}{\frac{1}{2\pi f C}}} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{\frac{1}{2\pi RC}}}$$

y

$$\mathbf{A}_v = \frac{1}{1 + j\,(f/f_c)} \tag{23.37}$$

con:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \tag{23.38}$$

como se definió antes.

Observe que ahora el signo del componente imaginario en el denominador es positivo y que f_c aparece como denominador en razón de frecuencias en lugar de hacerlo en el numerador, como en el caso de f_c para el filtro pasa-altas.

En términos de magnitud y fase,

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = A_v \angle\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} \angle -\tan^{-1}(f/f_c) \qquad \textbf{(23.39)}$$

Un análisis similar al realizado para el filtro pasa-altas dará por resultado

$$A_{v_{\text{dB}}} = -20 \log_{10} \frac{f}{f_c} \Bigg|_{f \gg f_c} \qquad \textbf{(23.40)}$$

Observe en particular que la ecuación es exacta únicamente para frecuencias mucho mayores que f_c, pero una gráfica de la ecuación (23.40) proporciona una asíntota que realiza la misma función que la asíntota derivada para el filtro pasa-altas. Además, advierta que es exactamente la misma que la ecuación (23.35) excepto por el signo menos, el cual sugiere que el diagrama de Bode resultante tendrá una pendiente negativa [recuerde la pendiente positiva de la ecuación (23.35)] para frecuencias mayores superiores a f_c.

En la figura 23.52 aparece una gráfica de la ecuación (23.40) para $f_c = 1$ kHz. Observe la caída de 6 dB a $f = 2f_c$ y la caída de 20 dB a $f = 10f_c$.

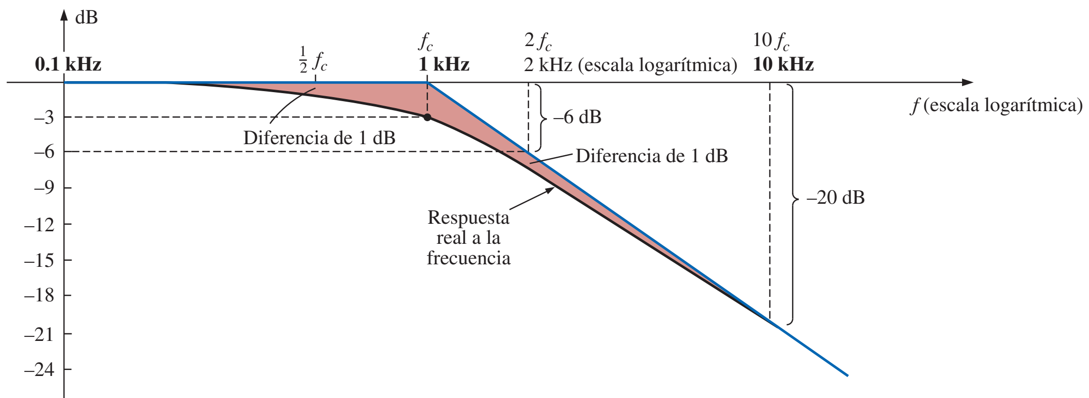


FIGURA 23.52
Diagrama de Bode para la región de alta frecuencia de un filtro R-C pasa-bajas.

En $f \gg f_c$, el ángulo de fase $\theta = -\tan^{-1}(f/f_c)$ se aproxima a $-90°$, mientras que en $f \ll f_c$, $\theta = -\tan^{-1}(f/f_c)$ se aproxima a 0°. En $f = f_c$, $\theta = -\tan^{-1} 1 = -45°$, estableciendo la gráfica de la figura 23.53. Observe nuevamente el cambio de 45° en el ángulo de fase para cada incremento de diez veces en la frecuencia.

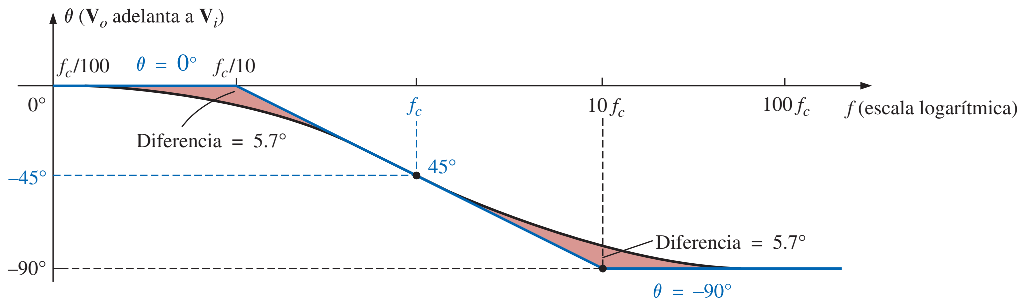


FIGURA 23.53
Gráfica de fase para un filtro R-C pasa-bajas.

Aun cuando el análisis anterior se limitó únicamente a la combinación *R-C*, los resultados obtenidos tendrán impacto sobre redes más complejas. Un buen ejemplo es la respuesta en altas y bajas frecuencias de la configuración del transistor estándar. Algunos elementos capacitivos en una red práctica de transistores afectarán la respuesta de baja frecuencia, y otros afectarán la respuesta de alta frecuencia. En ausencia de los elementos capacitivos, la respuesta en frecuencia de un transistor estaría idealmente nivelada en el valor de banda media. Sin embargo, los capacitores de acoplamiento a bajas frecuencias y los capacitores de paso y parásitos en altas frecuencias definirán un ancho de banda para muchas configuraciones del transistor. En la región de baja frecuencia, capacitores y resistores específicos formarán una combinación *R-C* que definirá una frecuencia inferior de corte. Existen además otros elementos y capacitores que forman una segunda combinación *R-C* para definir una frecuencia superior de corte. Una vez que se conocen las frecuencias de corte, se establecen los puntos de -3 dB, y puede determinarse el ancho de banda del sistema.

23.11 GRÁFICA DEL DIAGRAMA DE BODE

En la sección anterior vimos que las funciones normalizadas de la forma que aparece en la figura 23.54 tenían la envolvente de Bode y la respuesta en dB indicada en la misma figura. En esta sección se presentan funciones adicionales y sus respuestas, las cuales pueden utilizarse junto con las de la figura 23.54 para determinar, en forma sistemática, rápida y precisa, la respuesta en dB de sistemas más sofisticados.

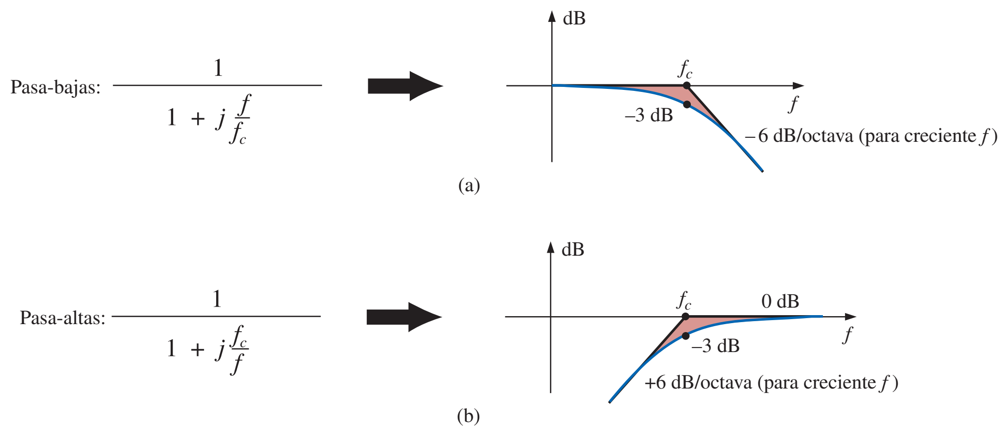


FIGURA 23.54
Respuesta en dB de (a) un filtro pasa-bajas, (b) un filtro pasa-altas.

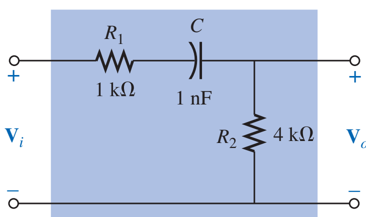


FIGURA 23.55
Filtro pasa-altas con salida atenuada.

En camino hacia la presentación de una función adicional que aparece con mucha frecuencia, analizaremos el filtro pasa-altas de la figura 23.55, el cual tiene una salida de alta frecuencia menor que el voltaje completo aplicado.

Antes de desarrollar una expresión matemática para $\mathbf{A}_v = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$, realicemos un bosquejo de la respuesta esperada.

En $f = 0$ Hz, el capacitor aparecerá como su equivalente de circuito abierto, y $V_o = 0$ V. A frecuencias muy altas, el capacitor aparece como su equivalente de corto circuito, y

$$V_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_i = \frac{4\text{ k}\Omega}{1\text{ k}\Omega + 4\text{ k}\Omega} V_i = 0.8V_i$$

La resistencia que se utilizará en la ecuación para la frecuencia de corte puede determinarse mediante el sencillo cálculo de la resistencia de Thévenin "observada" por el capacitor. Al establecer $V_i = 0$ V y resolviendo para R_{Th} (para el capacitor C) se obtendrá la red de la figura 23.56, donde queda claro que:

$$R_{Th} = R_1 + R_2 = 1\text{ k}\Omega + 4\text{ k}\Omega = 5\text{ k}\Omega$$

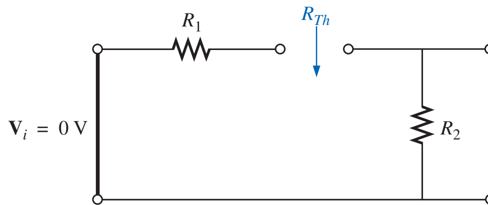


FIGURA 23.56
Determinación de R_{Th} para la ecuación de la frecuencia de corte.

Por tanto,

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_{Th} C} = \frac{1}{2\pi(5\text{ k}\Omega)(1\text{ nF})} = 31.83\text{ kHz}$$

En la figura 23.57(a) se proporciona una gráfica de V_o en función de la frecuencia. Una gráfica normalizada utilizando V_i como la cantidad de normalización dará por resultado la respuesta de la figura 23.57(b). Si el valor máximo de A_v se utiliza en el proceso de normalización, se obtendrá la respuesta de la figura 23.57(c).

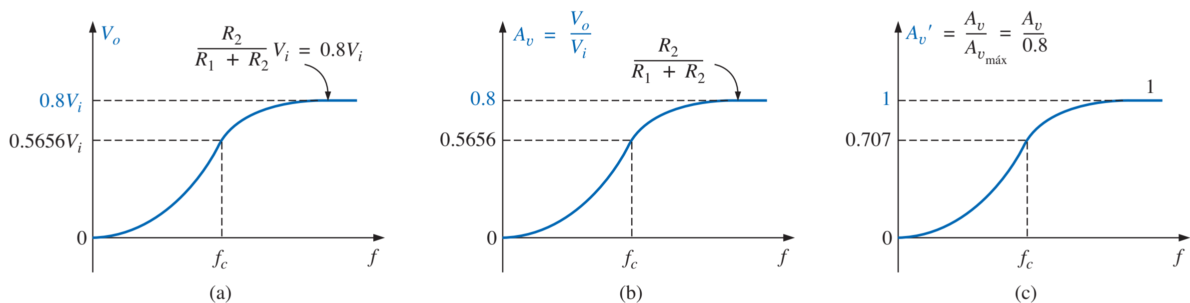


FIGURA 23.57
Obtención de la gráfica normalizada para la ganancia del filtro pasa-altas de la figura 23.55 con salida atenuada.

En todas las gráficas obtenidas en la sección anterior, V_i era el valor máximo, y la razón V_o/V_i tenía un valor máximo de 1. En muchas situaciones, éste no será el caso y debemos tener cuidado acerca de cuál razón se está graficando en función de la frecuencia. Las curvas de respuesta en dB para las gráficas de las figuras 23.57(b) y 23.57(c) pueden obtenerse de forma directa utilizando los principios establecidos por las conclusiones ilustradas en la figura 23.54, pero tenga cuidado acerca de qué esperar y de cómo diferirán tales curvas. En la figura 23.57(b) se compara el nivel de salida con el voltaje de entrada. En la figura

23.57(c) se grafica A_v en función del valor máximo de A_v. En la mayoría de las hojas de información y de las técnicas de investigación utilizadas comúnmente, se emplea la gráfica normalizada de la figura 23.57(c) debido a que establece 0 dB como una asíntota para la gráfica de dB. Para asegurar que se comprenda el impacto de utilizar las figuras 23.57(b) o 23.57(c) en la gráfica de frecuencia, el análisis del filtro de la figura 23.55 incluirá la gráfica en dB resultante para ambas curvas normalizadas.

Para la red de la figura 23.55:

$$\mathbf{V}_o = \frac{R_2\mathbf{V}_i}{R_1 + R_2 - jX_C} = R_2\left[\frac{1}{R_1 + R_2 - jX_C}\right]\mathbf{V}_i$$

Al dividir las partes superior e inferior de la ecuación entre $R_1 + R_2$ se obtiene:

$$\mathbf{V}_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left[\frac{1}{1 - j\dfrac{X_C}{R_1 + R_2}}\right]$$

pero $-j\dfrac{X_C}{R_1 + R_2} = -j\dfrac{1}{\omega(R_1 + R_2)C} = -j\dfrac{1}{2\pi f(R_1 + R_2)C}$

$$= -j\frac{f_c}{f} \quad \text{con} \quad f_c = \frac{1}{2\pi R_{Th}C} \quad \text{y} \quad R_{Th} = R_1 + R_2$$

de manera que: $\mathbf{V}_o = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\left[\dfrac{1}{1 - j(f_c/f)}\right]\mathbf{V}_i$

Si dividimos ambos lados entre $\mathbf{V}_i$, obtenemos:

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left[\frac{1}{1 - j(f_c/f)}\right] \tag{23.41}$$

a partir de la cual se puede obtener la gráfica de magnitud de la figura 23.57(b). Si dividimos ambos lados entre $\mathbf{A}_{v_{\text{máx}}} = R_2/(R_1 + R_2)$, tenemos:

$$\mathbf{A}'_v = \frac{\mathbf{A}_v}{\mathbf{A}_{v_{\text{máx}}}} = \frac{1}{1 - j(f_c/f)} \tag{23.42}$$

a partir de lo cual se puede obtener la gráfica de magnitud de la figura 23.57(c).

Con base en la sección anterior, una gráfica en dB de la magnitud de $A'_v = A_v/A_{v_{\text{máx}}}$ es ahora bastante directa utilizando la figura 23.54(b). Tal gráfica aparece en la figura 23.58.

Para la ganancia $A_v = V_o/V_i$, podemos aplicar la ecuación (23.5):

$$20 \log_{10} ab = 20 \log_{10} a + 20 \log_{10} b$$

donde:

$$20 \log_{10}\left\{\frac{R_2}{R_1 + R_2}\left[\frac{1}{1 - j(f_c/f)}\right]\right\}$$

$$= 20 \log_{10} \frac{R_2}{R_1 + R_2} + 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (f_c/f)^2}}$$

El segundo término dará por resultado la misma gráfica de la figura 23.58, pero el primer término deberá sumarse al segundo para obtener la respuesta total de dB.

Dado que $R_2/(R_1 + R_2)$ siempre debe ser menor que 1, podemos volver a escribir el primer término como:

$$20 \log_{10} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20 \log_{10} \frac{1}{\dfrac{R_1 + R_2}{R_2}} = \underbrace{20 \log_{10} 1}_{0} - 20 \log_{10} \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

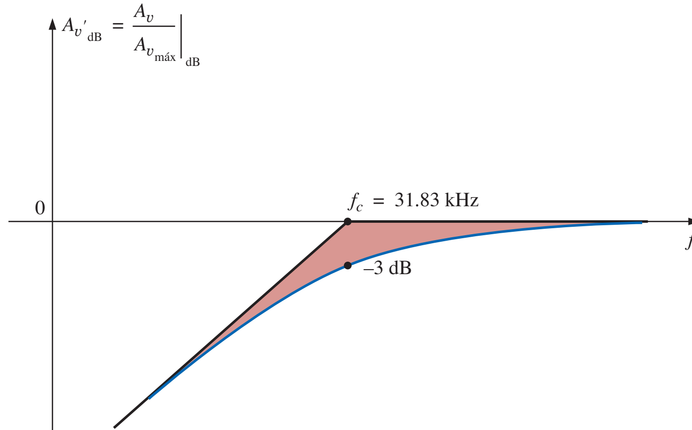


FIGURA 23.58
Gráfica en dB para A'_v para el filtro pasa-altas de la figura 23.55.

y

$$20 \log_{10} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = -20 \log_{10} \frac{R_1 + R_2}{R_2} \qquad \textbf{(23.43)}$$

que proporciona la caída en dB a partir del nivel de 0 dB para la gráfica. Al sumar una gráfica logarítmica a la otra *a cada frecuencia*, como lo permite la ecuación (23.5), se obtendrá la gráfica de la figura 23.59.

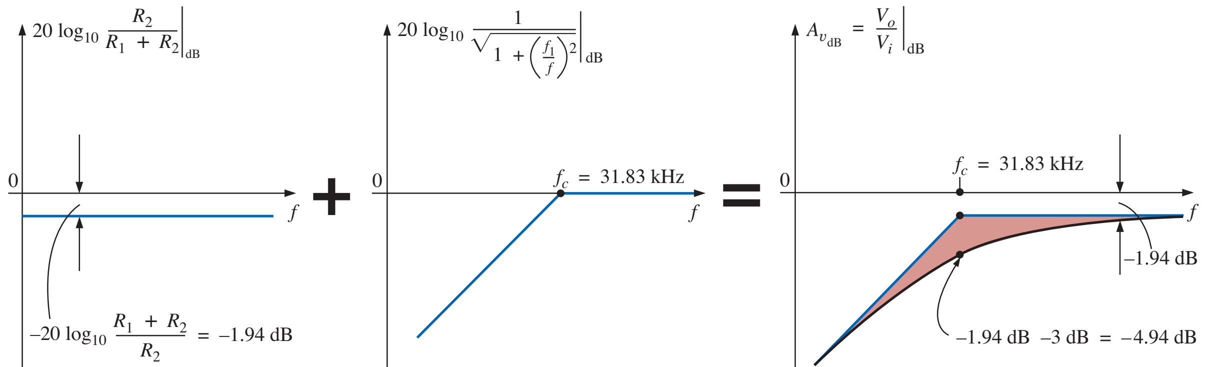


FIGURA 23.59
Obtención de una gráfica en dB de $A_{v_{dB}} = \frac{V_o}{V_i}\Big|_{dB}$.

Para la red de la figura 23.55, la ganancia $\mathbf{A}_v = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ también puede obtenerse de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}_o = \frac{R_2\mathbf{V}_i}{R_1 + R_2 - j\,X_C}$$

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 - j\,X_C} = \frac{j\,R_2}{j\,(R_1 + R_2) + X_C} = \frac{j\,R_2/X_C}{j\,(R_1 + R_2)/X_C + 1}$$

$$= \frac{j\,\omega R_2 C}{1 + j\,\omega(R_1 + R_2)C} = \frac{j\,2\pi f R_2 C}{1 + j\,2\pi f(R_1 + R_2)C}$$

y
$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{j\,(f/f_1)}{1 + j\,(f/f_c)} \tag{23.44}$$

con:
$$f_1 = \frac{1}{2\pi R_2 C} \quad \text{y} \quad f_c = \frac{1}{2\pi(R_1 + R_2)C}$$

La parte inferior de la ecuación (23.44) corresponde al denominador de la función pasa-bajas de la figura 23.54(a). Sin embargo, el numerador es una función nueva que definirá una asíntota de Bode única que será útil para diversas configuraciones de red.

Al aplicar la ecuación (23.5):

$$20 \log_{10} \frac{V_o}{V_i} = 20 \log_{10}\left[\frac{f}{f_1}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}}\right]$$
$$= 20 \log_{10}(f/f_1) + 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}}$$

Consideremos ahora frecuencias específicas para el primer término.

En $f = f_1$:
$$20 \log_{10} \frac{f}{f_1} = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

En $f = 2f_1$:
$$20 \log_{10} \frac{f}{f_1} = 20 \log_{10} 2 = +6 \text{ dB}$$

En $f = \frac{1}{2}f_1$:
$$20 \log_{10} \frac{f}{f_1} = 20 \log_{10} 0.5 = -6 \text{ dB}$$

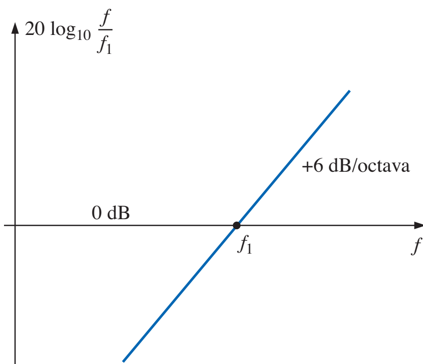


FIGURA 23.60
Gráfica en dB de f/f_1.

En la figura 23.60 se proporciona una gráfica en dB de $20 \log_{10}(f/f_1)$. Observe que la asíntota pasa a través de la línea de 0 dB en $f = f_1$ y tiene una pendiente positiva de +6 dB/octava (o 20 dB/década) en frecuencias por encima y por debajo de f_1 para valores crecientes de f.

Al analizar la función original A_v, encontramos que el ángulo de fase asociado con $j\,f/f_1 = f/f_1 \angle 90°$ está fijo en 90°, ocasionando un ángulo de fase para $\mathbf{A}_v$ de $90° - \tan^{-1}(f/f_c) = +\tan^{-1}(f_c/f)$.

Ahora que se tiene una gráfica de la respuesta en dB para la magnitud de la función f/f_1, es posible trazar la respuesta en dB de la magnitud de $\mathbf{A}_v$ utilizando el procedimiento delineado por la figura 23.61.

Al resolver para f_1 y f_c:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi R_2 C} = \frac{1}{2\pi(4\text{ k}\Omega)(1\text{ nF})} = 39.79\text{ kHz}$$

con:
$$f_c = \frac{1}{2\pi(R_1 + R_2)C} = \frac{1}{2\pi(5\text{ k}\Omega)(1\text{ nF})} = 31.83\text{ kHz}$$

En este desarrollo las asíntotas rectas para cada término resultante de la aplicación de la ecuación (23.5) se trazarán sobre el mismo eje de frecuencia para permitir un análisis del impacto de una sección de línea sobre la otra. En aras de mayor claridad, el espectro de frecuencia de la figura 23.61 fue dividido en dos regiones.

En la región 1 tenemos una asíntota de 0 dB y otra que se incrementa en 6 dB/octava ante frecuencias crecientes. La suma de las dos asíntotas, según la define la ecuación (23.5), es simplemente la asíntota de 6 dB/octava mostrada en la figura.

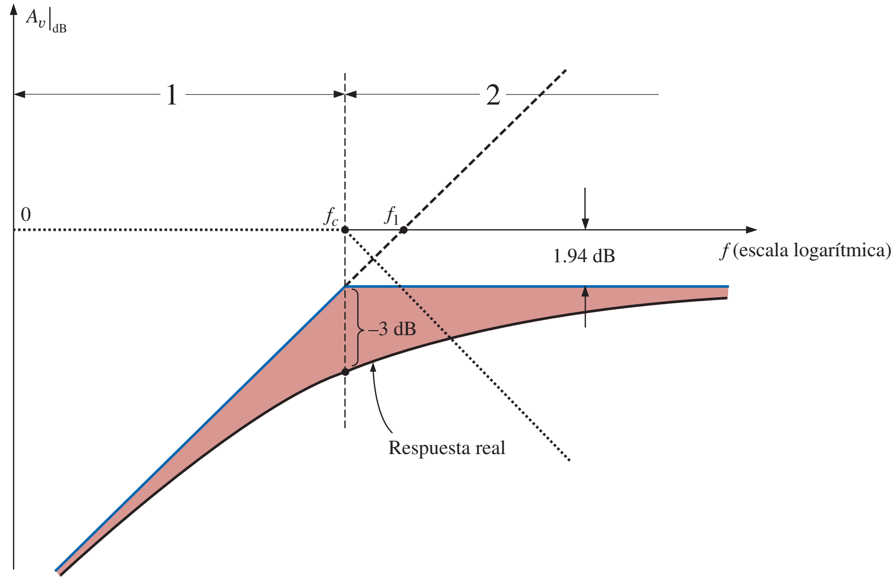


FIGURA 23.61
Gráfica de $A_v|_{dB}$ para la red de la figura 23.55.

En la región 2 una asíntota se incrementa en 6 dB y la otra disminuye en −6 dB/octava ante frecuencias crecientes. El efecto neto es que una cancelará a la otra para la región superior a $f = f_c$, dejando una asíntota horizontal que comienza en $f = f_c$. El trazo cuidadoso de las asíntotas sobre una escala logarítmica revelará que la asíntota horizontal se encuentra en −1.94 dB, como se obtuvo antes para la misma función. El nivel horizontal también puede determinarse añadiendo simplemente $f = f_c$ en el diagrama de Bode definido por f/f_1; es decir,

$$20 \log \frac{f}{f_1} = 20 \log_{10} \frac{f_c}{f_1} = 20 \log_{10} \frac{31.83 \text{ kHz}}{39.79 \text{ kHz}}$$
$$= 20 \log_{10} 0.799 = -1.94 \text{ dB}$$

La respuesta real podrá trazarse entonces utilizando las asíntotas y las diferencias conocidas en $f = f_c(-3 \text{ dB})$ y en $f = 0.5f_c$ o $2f_c(-1 \text{ dB})$.

En consecuencia, y en resumen, se puede obtener la misma respuesta en dB para $\mathbf{A}_v = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ al aislar el valor máximo o al definir la ganancia de una forma distinta. El segundo método permitió la introducción de una nueva función para nuestro catálogo de diagramas de Bode ideales que demostrará ser útil en el futuro.

23.12 FILTRO PASA-BAJAS CON ATENUACIÓN LIMITADA

El análisis que nos ocupa continuará ahora con el filtro pasa-bajas de la figura 23.62, el cual posee atenuación limitada en el extremo de alta frecuencia. Es decir, la salida no caerá a cero a medida que la frecuencia se vuelva relativamente alta. El filtro es similar en construcción al de la figura 23.55, pero observe que ahora $\mathbf{V}_o$ incluye un elemento capacitivo.

En $f = 0$ Hz, el capacitor puede tomar su equivalencia de circuito abierto, y $\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_i$. En altas frecuencias el capacitor puede aproximarse mediante una equivalencia de corto circuito, y

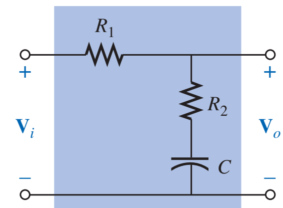


FIGURA 23.62
Filtro pasa-bajas con atenuación limitada.

$$\mathbf{V}_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathbf{V}_i$$

En la figura 23.63(a) se proporciona una gráfica de V_o en función de la frecuencia. Una gráfica de $A_v = V_o/V_i$ aparecerá como la mostrada en la figura 23.63(b).

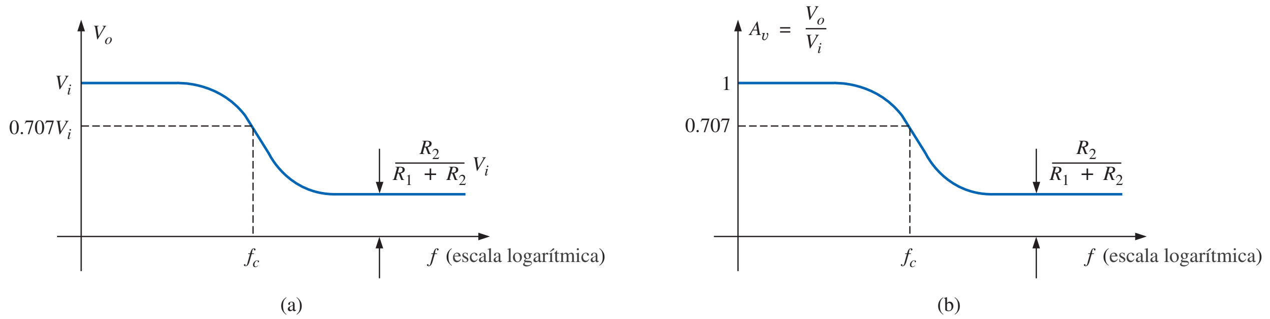


FIGURA 23.63
Filtro pasa-bajas con atenuación limitada.

Es posible derivar una ecuación para $\mathbf{V}_o$ en términos de $\mathbf{V}_i$ al aplicar primero la regla del divisor de voltaje:

$$\mathbf{V}_o = \frac{(R_2 - j\,X_C)\mathbf{V}_i}{R_1 + R_2 - j\,X_C}$$

y
$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{R_2 - j\,X_C}{R_1 + R_2 - j\,X_C} = \frac{R_2/X_C - j}{(R_1 + R_2)/X_C - j}$$

$$= \frac{(j)(R_2X_C - j)}{(j)((R_1 + R_2)/X_C - j)}$$

$$= \frac{j(R_2/X_C) + 1}{j((R_1 + R_2)/X_C) + 1} = \frac{1 + j\,2\pi f R_2 C}{1 + j\,2\pi f(R_1 + R_2)C}$$

de manera que:
$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{1 + j\,(f/f_1)}{1 + j\,(f/f_c)} \tag{23.45}$$

con:
$$f_1 = \frac{1}{2\pi R_2 C} \quad \text{y} \quad f_c = \frac{1}{2\pi(R_1 + R_2)C}$$

El denominador de la ecuación (23.45) es simplemente el denominador de la función pasa-bajas de la figura 23.54(a). El numerador, sin embargo, es nuevo y deberá analizarse.

Al aplicar la ecuación (23.5):

$$A_{v_{\text{dB}}} = 20\log_{10}\frac{V_o}{V_i} = 20\log_{10}\sqrt{1 + (f/f_1)^2} + 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}}$$

Para $f \gg f_1$, $(f/f_1)^2 \gg 1$, y el primer término se convierte en:

$$20\log_{10}\sqrt{(f/f_1)^2} = 20\log_{10}((f/f_1)^2)^{1/2} = 20\log_{10}(f/f_1)\Big|_{f \gg f_1}$$

lo cual define la asíntota de Bode ideal para el numerador de la ecuación (23.45).

En $f = f_1$, $20\log_{10} 1 = 0$ dB, y en $f = 2f_1$, $20\log_{10} 2 = 6$ dB. Para frecuencias mucho menores que f_1, $(f/f_1)^2 \ll 1$, y el primer término de la expansión en la forma de la ecuación (23.5) deriva en $20\log_{10}\sqrt{1} = 20\log_{10} 1 = 0$ dB, lo cual establecerá la asíntota de baja frecuencia.

La respuesta de Bode ideal completa para el numerador de la ecuación (23.45) se proporciona en la figura 23.64.

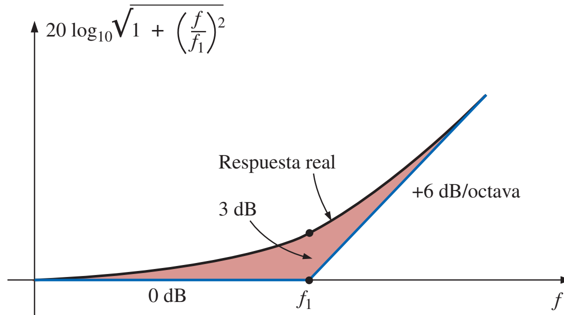


FIGURA 23.64
Respuestas ideal y real para la magnitud de $(1 + j(f/f_1))$.

Ahora nos encontramos en una posición que permite determinar $A_v|_{dB}$ al graficar la asíntota para cada función de la ecuación (23.45) sobre el mismo eje de frecuencia, como se muestra en la figura 23.65. Observe que f_c deberá ser menor que f_1 dado que el denominador de f_1 incluye sólo a R_2, mientras que el denominador de f_c incluye tanto a R_2 como a R_1.

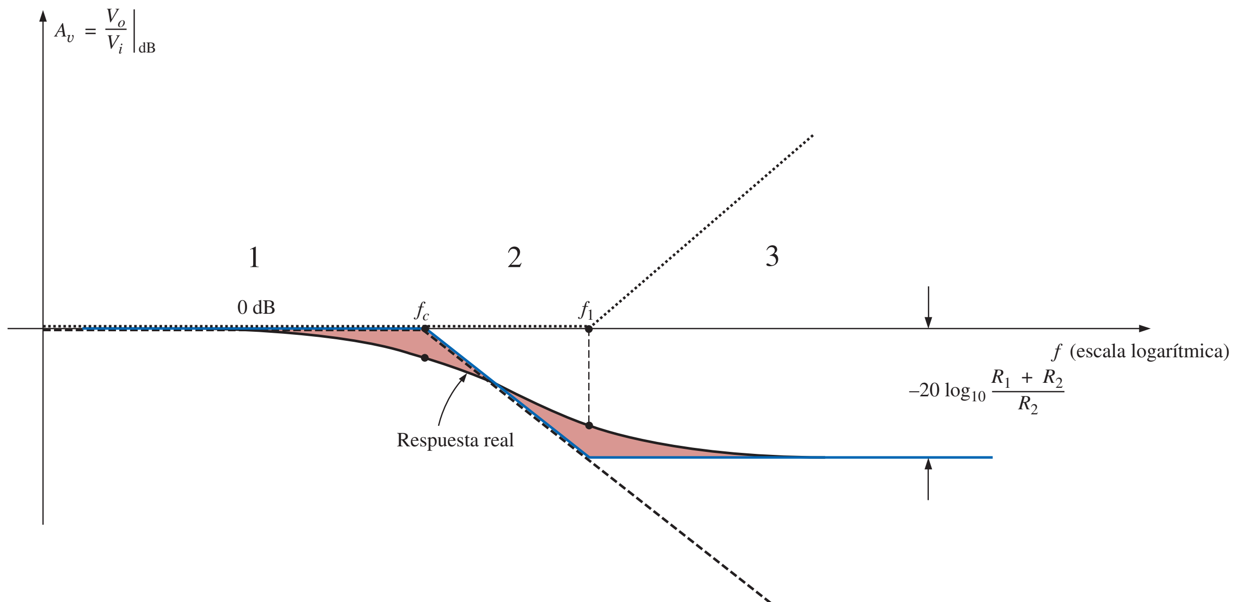


FIGURA 23.65
$A_{v_{dB}}$ *en función de la frecuencia para el filtro pasa-bajas con atenuación limitada de la figura 23.62.*

Dado que $R_2/(R_1 + R_2)$ siempre será menor que 1, podemos utilizar un desarrollo anterior y obtener una ecuación para la caída en dB por debajo del eje de 0 dB en altas frecuencias. Es decir,

$$20 \log_{10} R_2/(R_1 + R_2) = 20 \log_{10} 1/((R_1 + R_2)/R_2)$$
$$= \underbrace{20 \log_{10} 1}_{0} - 20 \log_{10}((R_1 + R_2)/R_2)$$

y
$$20 \log_{10} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = -20 \log_{10} \frac{R_1 + R_2}{R_2} \tag{23.46}$$

como se muestra en la figura 23.65.

En la región 1 de la figura 23.65, ambas asíntotas se encuentran a 0 dB, ocasionando una asíntota de Bode neta en 0 dB para la región. En $f = f_c$, una asíntota mantiene su nivel de 0 dB, mientras que la otra desciende a 6 dB/octava. La suma de las dos será la caída de 6 dB por octava mostrada para la región. En la región 3 la asíntota de −6 dB/octava está balanceada por la asíntota de +6 dB/octava, estableciendo una asíntota en el nivel de dB negativo alcanzado por la asíntota de f_c en $f = f_1$. El nivel de dB de la asíntota horizontal en la región 3 podrá determinarse utilizando la ecuación (23.46), o por la simple sustitución de $f = f_1$ en la expresión asintótica definida por f_c.

La envolvente ideal de Bode completa está ahora definida, permitiendo trazar la respuesta real con sólo desplazar 3 dB en la dirección correcta en cada frecuencia de corte, como se muestra en la figura 23.65.

El ángulo de fase asociado con $\mathbf{A}_v$ podrá determinarse de forma directa a partir de la ecuación (23.45). Es decir,

$$\theta = \tan^{-1} f/f_1 - \tan^{-1} f/f_c \tag{23.47}$$

Se puede obtener una gráfica completa de θ en función de la frecuencia al sustituir varias frecuencias clave en la ecuación (23.47) y graficando el resultado sobre una escala logarítmica.

El primer término de la ecuación (23.47) define el ángulo de fase establecido por el numerador de la ecuación (23.45). En la figura 23.66 se proporciona la gráfica asintótica establecida por el numerador. Observe el ángulo de fase de 45º cuando $f = f_1$, y la asíntota recta entre $f_1/10$ y $10f_1$.

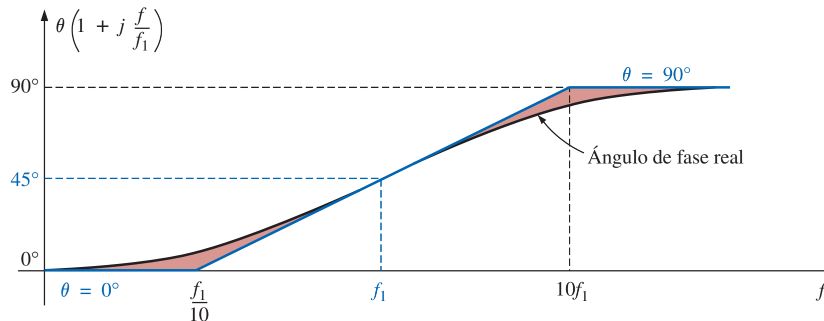


FIGURA 23.66
Ángulo de fase para $(1 + j(f/f_1))$.

Ahora que tenemos una gráfica asintótica para el ángulo de fase del numerador, podemos graficar la respuesta de fase completa trazando las asíntotas para ambas funciones de la ecuación (23.45) sobre la misma gráfica, como se muestra en la figura 23.67.

Las asíntotas de la figura 23.67 indican claramente que el ángulo de fase será de 0º en el intervalo de baja frecuencia y de 0º (90º − 90º = 0º) en el intervalo de alta frecuencia. En la región 2 la gráfica de fase cae por debajo de 0º debido al impacto de la asíntota de f_c. En la región 4 el ángulo de fase se incrementa dado que la asíntota debida a f_c permanece fija en −90º, mientras que la debida a f_1 se incrementa. En el intervalo medio, la gráfica debida a

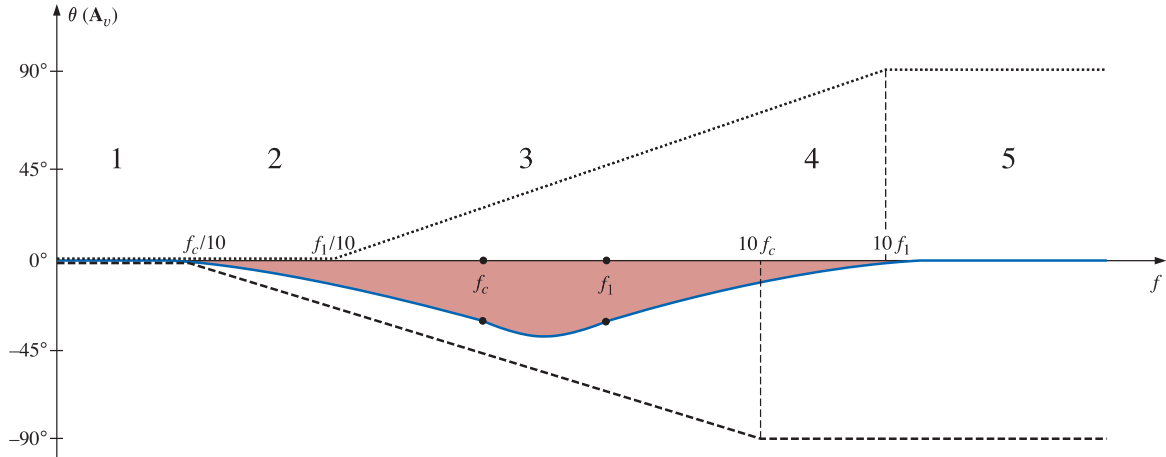


FIGURA 23.67
Ángulo de fase para el filtro pasa-bajas de la figura 23.62.

f_1 balancea la caída negativa continua ocasionada por la asíntota de f_c, dando por resultado la respuesta niveladora indicada. A causa de las pendientes iguales y opuestas de las asíntotas en la región media, los ángulos de f_1 y f_c serán iguales, pero observe que son menores a 45º. El ángulo negativo máximo se presentará entre f_1 y f_c. Los puntos restantes de la curva de la figura 23.67 pueden determinarse al sustituir frecuencias específicas en la ecuación (23.45). Sin embargo, también es útil saber que los cambios más pronunciados (los más rápidos) en el ángulo de fase se presentan cuando la gráfica en dB de la magnitud también atraviesa por sus mayores cambios (tal como en f_1 y f_c).

23.13 FILTRO PASA-ALTAS CON ATENUACIÓN LIMITADA

El filtro de la figura 23.68 está diseñado para limitar la atenuación de baja frecuencia en forma similar a la descrita para el filtro pasa-bajas de la sección anterior.

En $f = 0$ Hz el capacitor puede tomar su equivalente de circuito abierto, y $\mathbf{V}_o = [R_2/(R_1 + R_2)]\mathbf{V}_i$. En altas frecuencias el capacitor puede aproximarse mediante un equivalente de corto circuito, y $\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_i$.

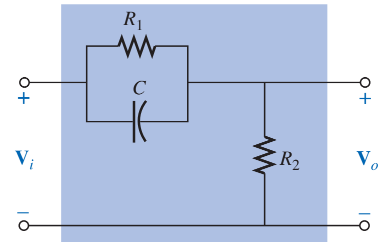


FIGURA 23.68
Filtro pasa-altas con atenuación limitada.

La resistencia que se utilizará al determinar f_c puede obtenerse con la resistencia de Thévenin para el capacitor C, como se muestra en la figura 23.69. Una revisión cuidadosa de la configuración resultante mostrará que $R_{Th} = R_1 \parallel R_2$ y $f_c = 1/2\pi(R_1 \parallel R_2)C$.

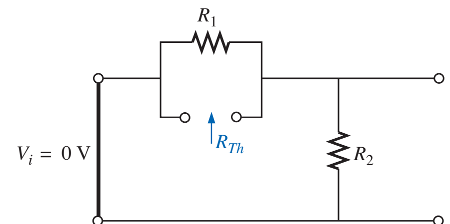


FIGURA 23.69
Determinación de R para el cálculo de f_c para el filtro de la figura 23.68.

En la figura 23.70(a) se proporciona una gráfica de V_o en función de la frecuencia, y en la figura 23.70(b) aparece una gráfica de $A_v = V_o/V_i$.

Es posible deducir una ecuación para $\mathbf{A}_v = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ al aplicar primero la regla del divisor de voltaje:

$$\mathbf{V}_o = \frac{R_2\mathbf{V}_i}{R_2 + R_1\| -jX_C}$$

y
$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{R_2}{R_2 + R_1\| -jX_C} = \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{R_1(-jX_C)}{R_1 - jX_C}}$$

$$= \frac{R_2(R_1 - jX_C)}{R_2(R_1 - jX_C) - jR_1X_C} = \frac{R_1R_2 - jR_2X_C}{R_1R_2 - jR_2X_C - jR_1X_C}$$

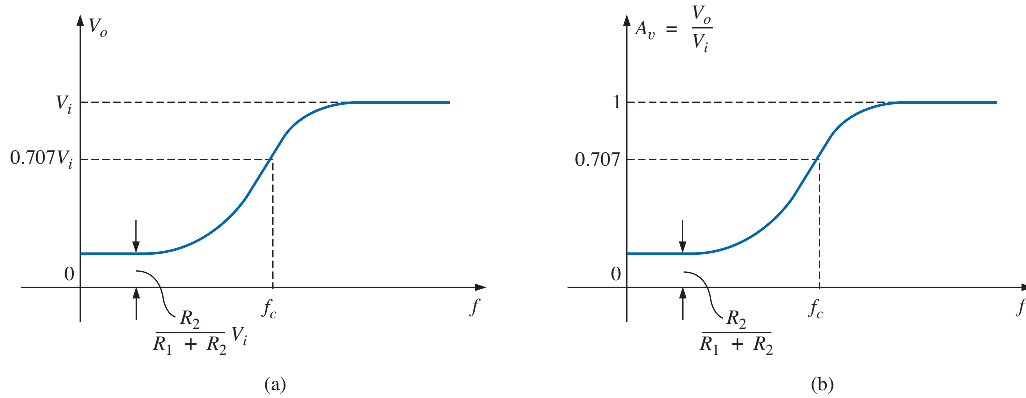


FIGURA 23.70
Filtro pasa-altas con atenuación limitada.

$$= \frac{R_1R_2 - j\,R_2X_C}{R_1R_2 - j\,(R_1 + R_2)X_C} = \frac{1 - j\,\dfrac{R_2X_C}{R_1R_2}}{1 - j\,\dfrac{(R_1 + R_2)}{R_1R_2}X_C}$$

$$= \frac{1 - j\,\dfrac{X_C}{R_1}}{1 - j\,\dfrac{X_C}{\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}} = \frac{1 - j\,\dfrac{X_C}{R_1}}{1 - j\,\dfrac{X_C}{R_1 \parallel R_2}} = \frac{1 - j\,\dfrac{1}{2\pi f R_1 C}}{1 - j\,\dfrac{1}{2\pi f(R_1 \parallel R_2)C}}$$

de manera que:
$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{1 - j\,(f_1/f)}{1 - j\,(f_c/f)} \qquad \textbf{(23.48)}$$

con:
$$f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C} \quad \text{y} \quad f_c = \frac{1}{2\pi(R_1 \parallel R_2)C}$$

El denominador de la ecuación (23.48) es simplemente el denominador de la función pasa-altas de la figura 23.54(b). Sin embargo, el numerador es nuevo y debe analizarse.

Al aplicar la ecuación (23.5):

$$A_{v_{\text{dB}}} = 20\log_{10}\frac{V_o}{V_i} = 20\log_{10}\sqrt{1 + (f_1/f)^2} + 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+(f_c/f)^2}}$$

Para $f \ll f_1$, $(f_1/f)^2 \gg 1$, y el primer término se convierte en:

$$20\log_{10}\sqrt{(f_1/f)^2} = 20\log_{10}(f_1/f)\Big|_{f \ll f_1}$$

lo cual define la asíntota ideal de Bode para el numerador de la ecuación (23.48).

En $f = f_1$, $\quad 20\log_{10} 1 = 0$ dB
En $f = 0.5f_1$, $\quad 20\log_{10} 2 = 6$ dB
En $f = 0.1f_1$, $\quad 20\log_{10} 10 = 20$ dB

Para frecuencias mayores que f_1, $f_1/f \ll 1$ y $20\log_{10} 1 = 0$ dB, lo que establece la asíntota de alta frecuencia. En la figura 23.71 aparece el diagrama de Bode ideal completo para el numerador de la ecuación (23.48).

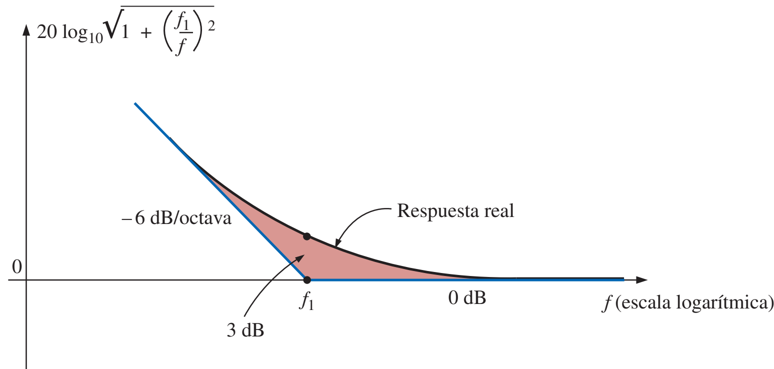


FIGURA 23.71
Respuestas de Bode ideal y real para la magnitud de $(1 - j(f_1/f))$.

Ahora nos encontramos en una posición que permite determinar $A_{v_{dB}}$ al graficar las asíntotas para cada función de la ecuación (23.48) sobre el mismo eje de frecuencia, como se muestra en la figura 23.72. Observe que f_c debe ser mayor que f_1 dado que $R_1 \| R_2$ debe ser menor que R_1.

Al determinar la respuesta de Bode linealizada, analizaremos primero la región 2, donde una función está en 0 dB y la otra desciende a 6 dB/octava para frecuencias que disminuyen. El resultado es una asíntota descendente desde f_c hasta f_1. En la intersección de la resultante de la región 2 con f_1, ingresamos a la región 1, donde las asíntotas tienen pendientes opuestas y cancelan el efecto entre sí. El nivel resultante en f_1 está determinado por $-20 \log_{10}(R_1 + R_2)/R_2$, como se obtuvo en secciones anteriores. La caída también puede determinarse al sustituir $f = f_1$ en la ecuación asintótica definida para f_c. En la región 3 ambas

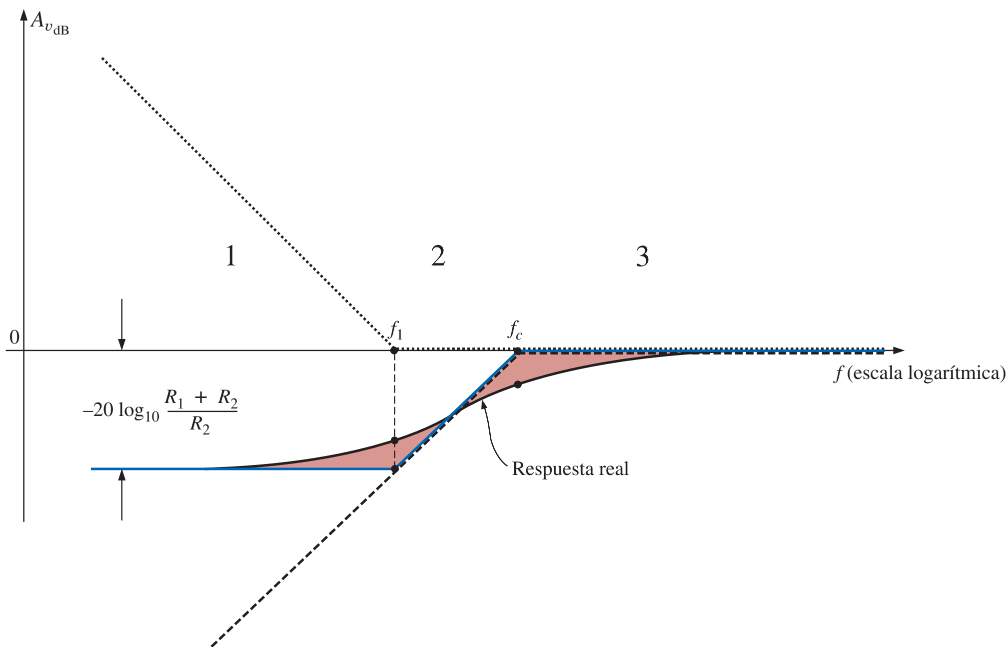


FIGURA 23.72
$A_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia para el filtro pasa-altas con atenuación limitada de la figura 23.68.

se encuentran en 0 dB, dando por resultado una asíntota de 0 dB para la región. Las respuestas real y asintótica resultantes aparecen en la figura 23.72.

El ángulo de fase asociado con A_v puede determinarse en forma directa a partir de la ecuación (23.48); es decir,

$$\theta = -\tan^{-1}\frac{f_1}{f} + \tan^{-1}\frac{f_c}{f} \tag{23.49}$$

Es posible obtener una gráfica completa de θ en función de la frecuencia al sustituir distintas frecuencias clave en la ecuación (23.49) y graficar el resultado sobre una escala logarítmica.

El primer término de la ecuación (23.49) define el ángulo de fase establecido por el numerador de la ecuación (23.48). En la figura 23.73 se proporciona la gráfica asintótica resultante del numerador. Observe el ángulo de fase con adelanto de 45º cuando $f = f_1$, y la asíntota recta desde $f_1/10$ hasta $10f_1$.

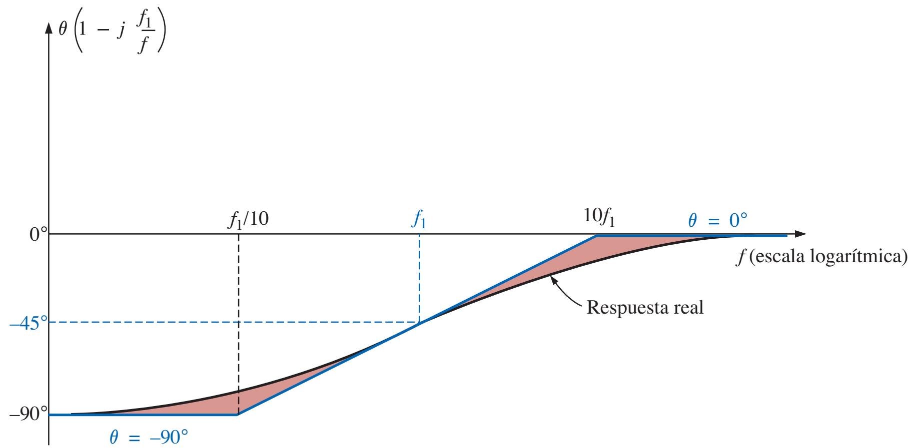


FIGURA 23.73
Ángulo de fase para $(1 - j(f_1/f))$.

Ahora que tenemos una gráfica asintótica para el ángulo de fase del numerador, podemos graficar la respuesta de fase completa al trazar las asíntotas para ambas funciones de la ecuación (23.48) sobre la misma gráfica, como se muestra en la figura 23.74.

Las asíntotas de la figura 23.74 indican claramente que el ángulo de fase será de 90º en el intervalo de baja frecuencia y de 0º (90º − 90º = 0º) en el intervalo de alta frecuencia. En la región 2 el ángulo de fase se incrementa por encima de 0º debido a que un ángulo está fijo en 90º y el otro se vuelve menos negativo. En la región 4 un ángulo se encuentra a 0º y el otro disminuye, ocasionando un ángulo θ que disminuye para esta región. En la región 3 el ángulo positivo es siempre mayor que el negativo, dando por resultado un ángulo positivo para toda la región. Dado que las pendientes de las asíntotas en la región 3 son iguales pero opuestas, los ángulos en f_c y f_1 son iguales. La figura 23.74 revela que el ángulo en f_c y f_1 será menor de 45º. El ángulo máximo ocurrirá entre f_c y f_1, como se muestra en la figura. Observe nuevamente que el mayor cambio en θ se presenta en las frecuencias de corte, que coinciden con las regiones de mayor cambio en la gráfica de dB.

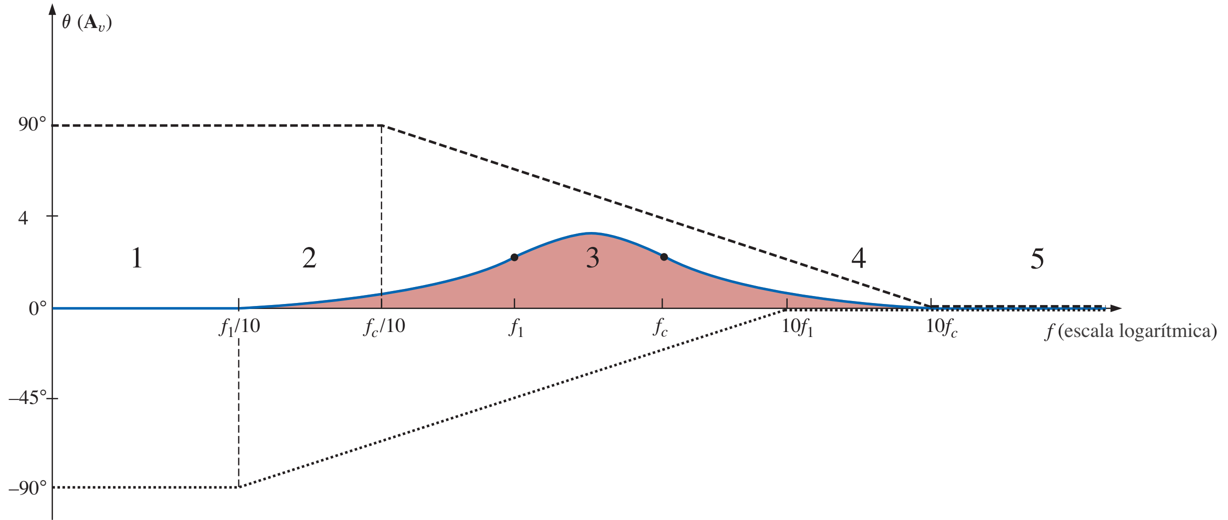


FIGURA 23.74
Respuesta de fase para el filtro pasa-altas de la figura 23.68.

EJEMPLO 23.11 Para el filtro de la figura 23.75:

a. Trace la curva de $A_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia utilizando una escala logarítmica.
b. Trace la curva de θ en función de la frecuencia utilizando una escala logarítmica.

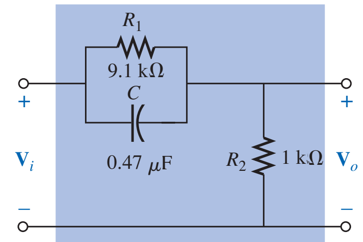


FIGURA 23.75
Ejemplo 23.11.

Soluciones:

a. Para las frecuencias de corte:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C} = \frac{1}{2\pi(9.1\text{ k}\Omega)(0.47\ \mu\text{F})} = \mathbf{37.2\ Hz}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi\left(\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)C} = \frac{1}{2\pi(0.9\text{ k}\Omega)(0.47\ \mu\text{F})} = \mathbf{376.25\ Hz}$$

La máxima atenuación en el nivel bajo es:

$$-20\log_{10}\frac{R_1 + R_2}{R_2} = -20\log_{10}\frac{9.1\text{ k}\Omega + 1\text{ k}\Omega}{1\text{ k}\Omega}$$
$$= -20\log_{10} 10.1 = \mathbf{-20.09\ dB}$$

La gráfica resultante aparece en la figura 23.76.

b. Para las frecuencias de corte:

En $f = f_1 = 37.2$ Hz,

$$\theta = -\tan^{-1}\frac{f_1}{f} + \tan^{-1}\frac{f_c}{f}$$
$$= -\tan^{-1} 1 + \tan^{-1}\frac{376.25\text{ Hz}}{37.2\text{ Hz}}$$
$$= -45° + 84.35°$$
$$= \mathbf{39.35°}$$

En $f = f_c = 376.26$ Hz,

$$\theta = -\tan^{-1}\frac{37.2\text{ Hz}}{376.26\text{ Hz}} + \tan^{-1} 1$$

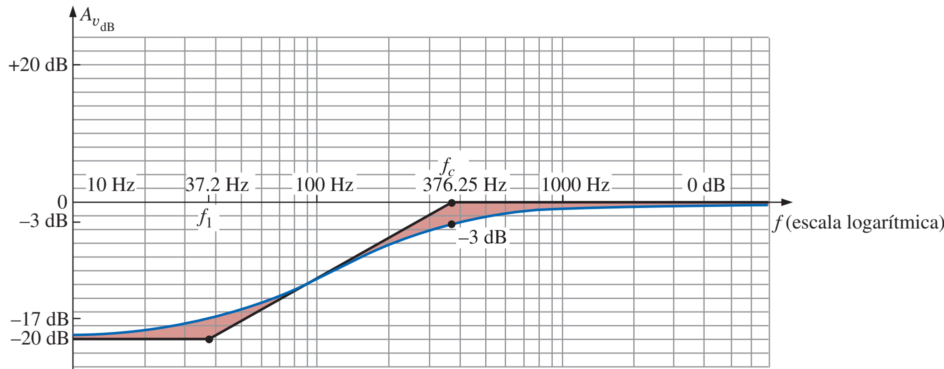


FIGURA 23.76
$A_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia para el filtro de la figura 23.75.

$$= -5.65° + 45°$$
$$= \mathbf{39.35°}$$

A una frecuencia media entre f_c y f_1 sobre una escala logarítmica, por ejemplo, 120 Hz:

$$\theta = -\tan^{-1}\frac{37.2\text{ Hz}}{120\text{ Hz}} + \tan^{-1}\frac{376.26\text{ Hz}}{120\text{ Hz}}$$
$$= -17.22° + 72.31°$$
$$= \mathbf{55.09°}$$

La gráfica de fase resultante aparece en la figura 23.77.

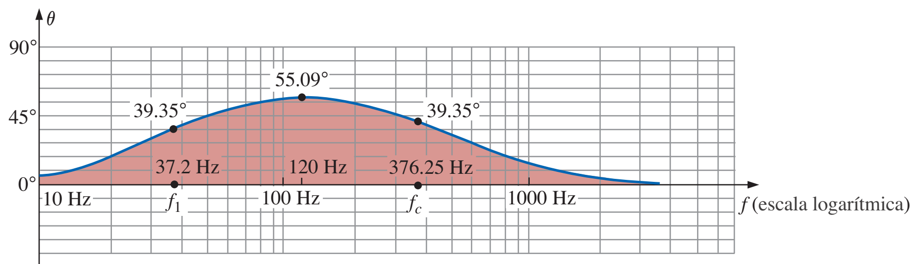


FIGURA 23.77
θ (ángulo de fase asociado con A_v) en función de la frecuencia para el filtro de la figura 23.75.

23.14 OTRAS PROPIEDADES Y UNA TABLA DE RESUMEN

Los diagramas de Bode no están limitados a los filtros, también pueden aplicarse a cualquier sistema para el cual se desee trazar una gráfica en dB en función de la frecuencia. Aunque las secciones previas no cubrieron todas las funciones que se prestan para las asíntotas lineales ideales, se presentaron muchas de las que se encuentran más a menudo.

Ahora analizaremos algunas de las situaciones especiales que pueden desarrollarse y que demostrarán la adaptabilidad y utilidad del método lineal de Bode para el análisis de frecuencia.

En todas las situaciones ya descritas en este capítulo, había sólo un término en el numerador o en el denominador. Para los casos en que exista más de un término, se presentará una interacción entre las funciones que debe ser analizada y comprendida. En muchos casos el uso de la ecuación (23.5) probará ser útil. Por ejemplo, si $\mathbf{A}_v$ tuviera el formato:

$$\mathbf{A}_v = \frac{200(1 - j f_2/f)(j f/f_1)}{(1 - j f_1/f)(1 + j f/f_2)} = \frac{(a)(b)(c)}{(d)(e)} \qquad \textbf{(23.50)}$$

podemos expandir la función de la siguiente forma:

$$A_{v_{\text{dB}}} = 20 \log_{10} \frac{(a)(b)(c)}{(d)(e)}$$
$$= 20 \log_{10} a + 20 \log_{10} b + 20 \log_{10} c - 20 \log_{10} d - 20 \log_{10} e$$

revelando que el nivel en dB resultante o neto es igual a la suma algebraica de las contribuciones de todos los términos de la función original. Por tanto, podremos sumar algebraicamente los diagramas de Bode linealizados de todos los términos en cada intervalo de frecuencias y determinar el diagrama de Bode ideal para la función completa.

Si resulta que dos términos tienen los mismos formato y frecuencia de corte, como en la función:

$$\mathbf{A}_v = \frac{1}{(1 - j f_1/f)(1 - j f_1/f)}$$

la función se puede volver a escribir como:

$$\mathbf{A}_v = \frac{1}{(1 - j f_1/f)^2}$$

de manera que: $$A_{v\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{1}{(\sqrt{1 + (f_1/f)^2})^2}$$
$$= -20 \log_{10}(1 + (f_1/f)^2)$$

Para $f \ll f_1$, $(f_1/f)^2 \gg 1$, y

$$A_{v_{\text{dB}}} = -20 \log_{10}(f_1/f)^2 = -40 \log_{10} f_1/f$$

contra el $-20 \log_{10} (f_1/f)$ obtenido para un solo término en el denominador. La asíntota en dB resultante caerá, por tanto, a un ritmo de -12 dB/octava (-40 dB/década) para frecuencias decrecientes en lugar de hacerlo a -6 dB/década. La frecuencia de corte será la misma, y la asíntota de alta frecuencia permanece en 0 dB. El diagrama de Bode ideal para la función anterior se proporciona en la figura 23.78.

Observe la pendiente más pronunciada de la asíntota y el hecho de que la curva real pasará ahora a -6 dB por debajo de la frecuencia de corte en lugar de hacerlo en -3 dB, como sucedió para el término sencillo.

Tenga presente que si las frecuencias de corte de los dos términos en el numerador o el denominador se encuentran cercanas pero no son exactamente iguales, la caída total en dB será la suma algebraica de los términos que contribuyen a la expansión. Por ejemplo, considere el diagrama de Bode linealizado de la figura 23.79 con frecuencias de corte f_1 y f_2.

En la región 3 ambas asíntotas están en 0 dB, dando por resultado una asíntota en 0 dB para frecuencias mayores que f_2. Para la región 2, una asíntota se encuentra en 0 dB, mientras que la otra cae a -6 dB/octava para frecuencias decrecientes. El resultado neto para esta región es una asíntota que desciende a -6 dB, como se muestra en la misma figura. En f_1, encontramos dos asíntotas descendiendo a -6 dB para frecuencias decrecientes. El resultado es una asíntota que desciende a -12 dB/octava para esta región.

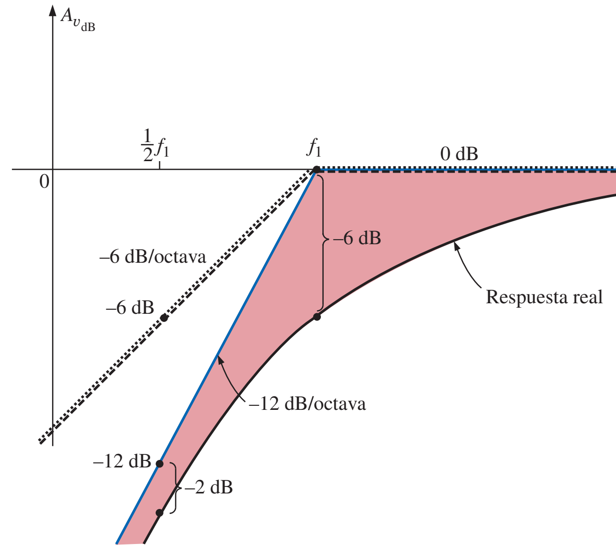


FIGURA 23.78
Trazado del diagrama de Bode linealizado de $\dfrac{1}{(1 - j(f_1/f))^2}$.

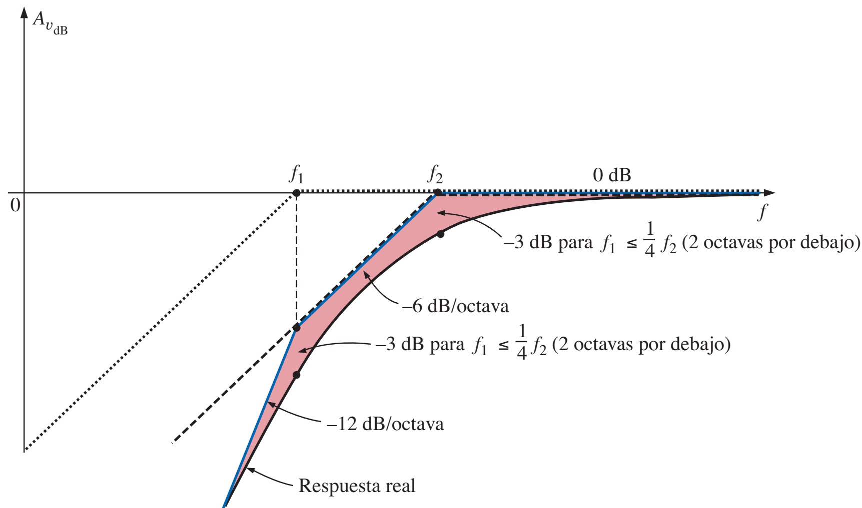


FIGURA 23.79
Gráfica de $A_{v\,dB}$ *para* $\dfrac{1}{(1 - j(f_1/f))(1 - j(f_2/f))}$ *con* $f_1 < f_2$.

Si f_1 y f_2 están separadas al menos por dos octavas, el efecto de una sobre la graficación de la respuesta real de la otra podrá ser ignorado. En otras palabras, para este ejemplo, si $f_1 < \frac{1}{4} f_2$, entonces la respuesta real descenderá -3 dB en $f = f_2$ y f_1.

La argumentación anterior puede ampliarse para cualquier número de términos a la misma frecuencia o en la misma región. Para tres términos iguales en el denominador, la asíntota caerá a -18 dB/octava, y así sucesivamente. Con el tiempo, de alguna forma, el procedimiento se hará evidente y relativamente directo de aplicar. En muchos casos, la parte más difícil de obtener una solución es poner la función original en la forma deseada.

EJEMPLO 23.12 Un amplificador con un transistor tiene la siguiente ganancia:

$$\mathbf{A}_v = \frac{100}{\left(1 - j\dfrac{50\text{ Hz}}{f}\right)\left(1 - j\dfrac{200\text{ Hz}}{f}\right)\left(1 + j\dfrac{f}{10\text{ kHz}}\right)\left(1 + j\dfrac{f}{20\text{ kHz}}\right)}$$

a. Trace la respuesta normalizada $A'_v = A_v/A_{v_{\text{máx}}}$, y determine el ancho de la banda del amplificador.
b. Grafique la respuesta de fase, y determine una frecuencia donde el ángulo de fase esté cercano a 0º.

Soluciones:

a. $$A'_v = \frac{A_v}{A_{v_{\text{máx}}}} = \frac{A_v}{100}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - j\dfrac{50\text{ Hz}}{f}\right)\left(1 - j\dfrac{200\text{ Hz}}{f}\right)\left(1 + j\dfrac{f}{10\text{ kHz}}\right)\left(1 + j\dfrac{f}{20\text{ kHz}}\right)}$$

$$= \frac{1}{(a)(b)(c)(d)} = \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}\right)$$

y

$$A'_{v_{\text{dB}}} = -20\log_{10} a - 20\log_{10} b - 20\log_{10} c - 20\log_{10} d$$

respaldando claramente el hecho de que el número total de decibeles es igual a la suma algebraica de los términos que contribuyen.

Una verificación cuidadosa de la función original revelará que los primeros dos términos en el denominador son funciones de filtro pasa-altas, mientras que los últimos dos son funciones de filtro pasa-bajas. La figura 23.80 demuestra la forma en que la combinación de los dos tipos de función definen un ancho de banda para el amplificador. Las funciones de filtro de alta frecuencia definen la frecuencia inferior de corte, y las funciones de filtro de baja frecuencia definen la frecuencia superior de corte.

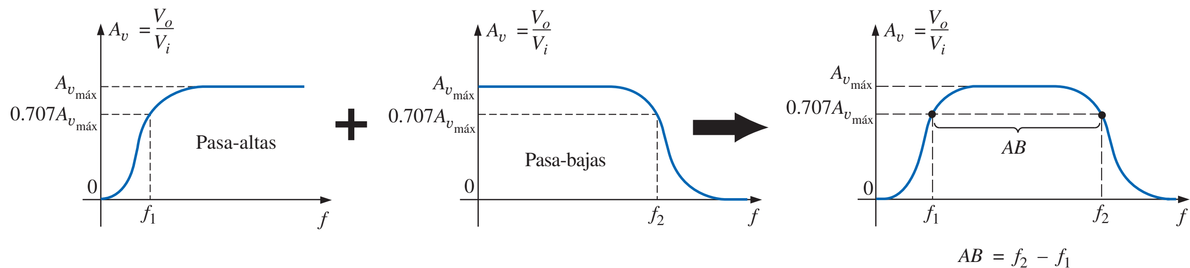


FIGURA 23.80
Obtención de la ganancia general en función de la frecuencia para el ejemplo 23.12.

Al trazar todos los diagramas de Bode ideales sobre el mismo eje se obtendrá la gráfica de la figura 23.81. Para frecuencias menores a 50 Hz, observe que la asíntota resultante cae a −12 dB/octava. Además, dado que 50 y 200 Hz están separados por dos octavas, la respuesta real descenderá sólo por −3 dB a las frecuencias de corte de 50 y 200 Hz.

Para la región de alta frecuencia, las frecuencias de corte no están separadas por dos octavas, y la diferencia entre la gráfica ideal y la respuesta de Bode real deberá analizarse con más cuidado. Dado que 10 kHz están a una

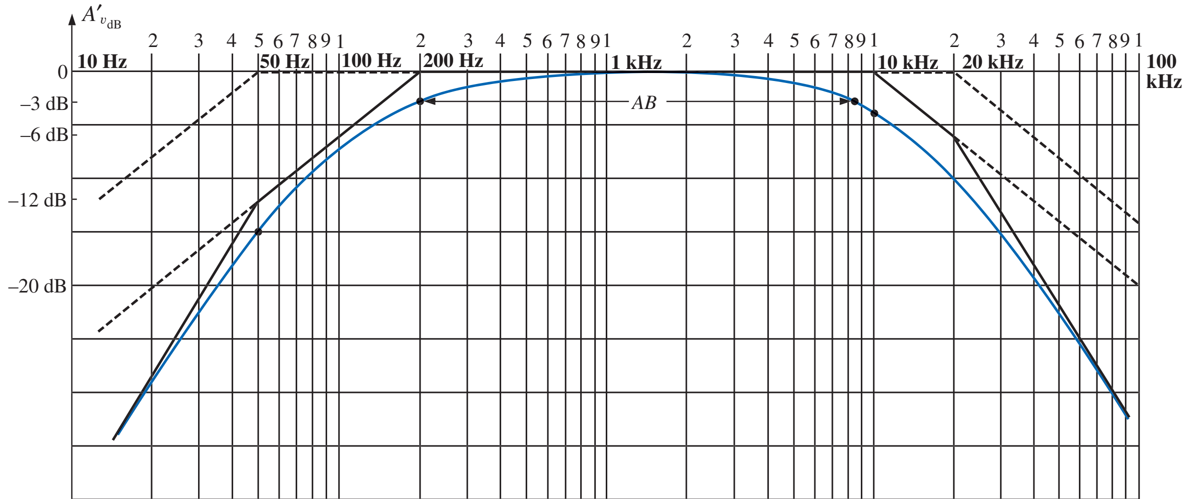


FIGURA 23.81
$A'_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia para el ejemplo 23.12.

octava por debajo de 20 kHz, podemos utilizar el hecho de que la diferencia entre la respuesta idealizada y la respuesta real para una sola frecuencia de corte es 1 dB. Si añadimos una caída adicional de −1 dB, debido a la frecuencia de corte de 20 kHz, a la caída de −3 dB a f = 10 kHz, podremos concluir que la caída a 10 kHz será de −4 dB, como se muestra sobre la gráfica. Para verificar la conclusión, escribimos la expresión completa para el nivel de dB a 10 kHz y obtenemos el nivel real para propósitos de comparación.

$$\begin{aligned} A'_{v_{dB}} &= -20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{50\text{ Hz}}{10\text{ kHz}}\right)^2} - 20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{200\text{ Hz}}{10\text{ kHz}}\right)^2} \\ &\quad - 20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{10\text{ kHz}}{10\text{ kHz}}\right)^2} - 20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{10\text{ kHz}}{20\text{ kHz}}\right)^2} \\ &= -0.00011\text{ dB} - 0.0017\text{ dB} - 3.01\text{ dB} - 0.969\text{ dB} \\ &= -3.98\text{ dB} \cong \mathbf{-4\ dB} \qquad \text{como antes} \end{aligned}$$

Un análisis de los cálculos anteriores demuestra claramente que los últimos dos términos predominan en la región de alta frecuencia y básicamente eliminan la necesidad de considerar los primeros dos términos en esa región. Para la región de baja frecuencia, un análisis de los primeros dos términos será suficiente.

Procediendo en forma similar, encontramos una diferencia de −4 dB a f = 20 kHz, dando por resultado la respuesta real que aparece en la figura 23.81. Dado que el ancho de banda está definido en el nivel de −3 dB, deberá tomarse un estimado acerca del lugar donde la respuesta real cruza el nivel de −3 dB en la región de alta frecuencia. Un bosquejo sugiere que se encuentra cerca de 8.5 kHz. Al añadir esta frecuencia a los términos de alta frecuencia se obtiene:

$$\begin{aligned} A'_{v_{dB}} &= -20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{8.5\text{ kHz}}{10\text{ kHz}}\right)^2} - 20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{8.5\text{ kHz}}{20\text{ kHz}}\right)^2} \\ &= -2.148\text{ dB} - 0.645\text{ dB} \cong \mathbf{-2.8\ dB} \end{aligned}$$

lo cual se encuentra relativamente cerca del nivel de −3 dB, y

$$AB = f_{\text{alta}} - f_{\text{baja}} = 8.5 \text{ kHz} - 200 \text{ Hz} = \mathbf{8.3 \text{ kHz}}$$

En el intervalo medio del ancho de banda, $A'_{v_{\text{dB}}}$ se aproximará a 0 dB. En $f = 1$ kHz:

$$\begin{aligned} A'_{v_{\text{dB}}} &= -20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{50 \text{ Hz}}{1 \text{ kHz}}\right)^2} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{200 \text{ Hz}}{1 \text{ kHz}}\right)^2} \\ &\quad - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}}\right)^2} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1 \text{ kHz}}{20 \text{ kHz}}\right)^2} \\ &= -0.0108 \text{ dB} - 0.1703 \text{ dB} - 0.0432 \text{ dB} - 0.0108 \text{ dB} \\ &= \mathbf{-0.2351 \text{ dB}} \cong \mathbf{-\frac{1}{5} \text{ dB}} \end{aligned}$$

lo cual ciertamente es cercano al nivel de 0 dB, como se muestra sobre la gráfica.

b. La respuesta de fase puede determinarse al sustituir varias frecuencias clave en la siguiente ecuación, derivada directamente de la función original $\mathbf{A}_v$:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{50 \text{ Hz}}{f} + \tan^{-1} \frac{200 \text{ Hz}}{f} - \tan^{-1} \frac{f}{10 \text{ kHz}} - \tan^{-1} \frac{f}{20 \text{ kHz}}$$

Sin embargo, se utilizan todas las asíntotas definidas por cada término de $\mathbf{A}_v$ y se grafica la respuesta al obtener el ángulo de fase resultante en puntos críticos sobre el eje de la frecuencia. En la figura 23.82 se proporcionan las asíntotas resultantes y la gráfica de fase. Observe que cuando $f = 50$ Hz, la suma de los dos ángulos determinados por las asíntotas rectas es 45º + 75º = 120º (real = 121º). Cuando $f = 1$ kHz, si restamos 5.7º de una frecuencia de corte, obtenemos un ángulo neto de 14º − 5.7º ≅ 8.3º (real = 5.6º).

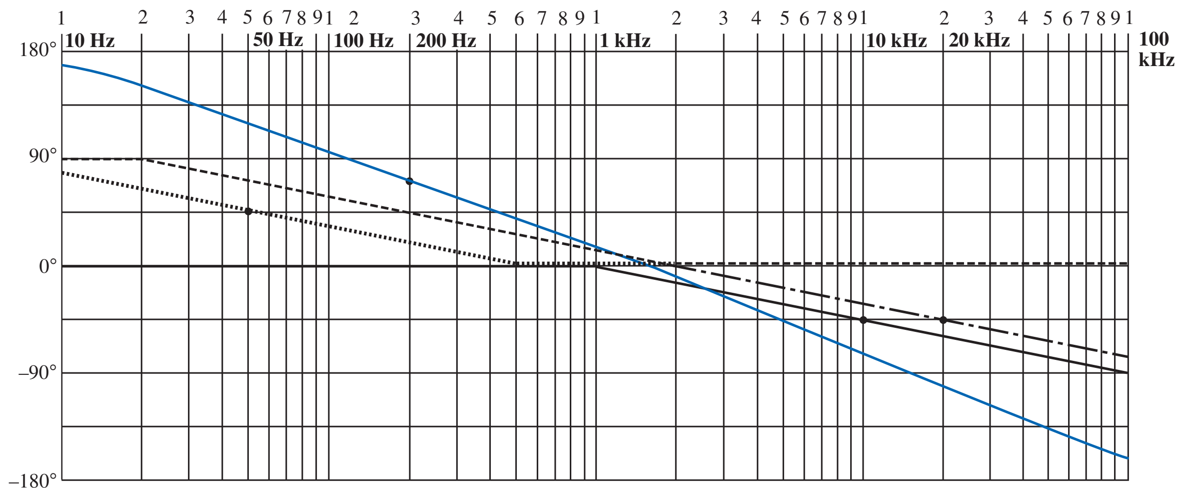


FIGURA 23.82
Respuesta de fase para el ejemplo 23.12.

En 10 kHz las asíntotas nos dejan con $\theta \cong -45º - 32º = -77º$ (real = −71.56º). La gráfica de fase neta aparece cercana a 0º a 1300 Hz aproximadamente. Como una verificación de nuestros supuestos y del uso del método asintótico, se agrega $f = 1300$ Hz a la ecuación de θ:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{50\text{ Hz}}{1300\text{ Hz}} + \tan^{-1}\frac{200\text{ Hz}}{1300\text{ Hz}} - \tan^{-1}\frac{1300\text{ Hz}}{10\text{ kHz}} - \tan^{-1}\frac{1300\text{ Hz}}{20\text{ kHz}}$$
$$= 2.2° + 8.75° - 7.41° - 3.72°$$
$$= -0.18° \cong 0° \qquad \text{como se anticipó}$$

En resumen, la gráfica de fase parece desplazarse desde un ángulo positivo de 180º ($\mathbf{V}_o$ adelantando a $\mathbf{V}_i$) hasta un ángulo negativo de 180º a medida que el espectro de frecuencia se extiende desde frecuencias muy bajas hasta altas frecuencias. En la región media la gráfica de fase es cercana a 0º ($\mathbf{V}_o$ en fase con $\mathbf{V}_i$), lo cual es muy similar a la respuesta de un amplificador con un transistor en base común.

En un esfuerzo por consolidar parte del material presentado en este capítulo y proporcionar una referencia para futuras investigaciones, se desarrolló la tabla 23.2; incluye las gráficas de fase y dB linealizadas para las funciones que aparecen en la primera columna. No se trata de incluir todas las funciones encontradas, sino de proporcionar una base sobre la cual se puedan añadir más funciones.

Una revisión del desarrollo de los filtros en las secciones 23.12 y 23.13 probablemente evidencie que el establecer la función $\mathbf{A}_v$ en la forma adecuada es la parte más difícil del análisis. Sin embargo, con práctica y cuidado del formato deseado, surgirán métodos que reducirán en forma importante el esfuerzo requerido.

23.15 REDES PARA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

El tema de las *redes distribuidoras de frecuencias* se incorpora principalmente para presentar una excelente demostración de la operación de filtrado sin un nivel alto de complejidad. Las redes distribuidoras de frecuencias se utilizan en los sistemas de audio para asegurar que las frecuencias adecuadas se canalizan a la bocina correcta. Aunque los sistemas de audio económicos dependen de una sola bocina para cubrir el intervalo completo de audio desde cerca de 20 Hz hasta 20 kHz, los sistemas más completos utilizan al menos tres bocinas para cubrir el intervalo bajo (20 Hz hasta cerca de 500 Hz), el intervalo medio (500 Hz hasta unos 5 kHz) y el intervalo alto (5 kHz y superior). El término *distribuidor* se deriva del hecho de que el sistema está diseñado para realizar una distribución de espectros de frecuencia para bocinas adyacentes al nivel de −3 dB, como se muestra en la figura 23.83. Dependiendo del diseño, cada filtro puede cortar a 6, 12 o 18 dB, con una mayor complejidad en proporción al nivel de corte en dB deseado. La red distribuidora de frecuencias de tres vías de la figura 23.83 es de diseño muy simple, con un filtro *R-L* pasa-bajas para el *woofer*, un filtro *R-L-C* pasa-banda para el intervalo medio, y un filtro *R-C* pasa-altas para el *tweeter*. Las ecuaciones básicas para los componentes se proporcionan a continuación. Observe las similitudes entre las ecuaciones, siendo la frecuencia de corte la única diferencia en cada tipo de elemento:

$$L_{\text{baja}} = \frac{R}{2\pi f_1} \qquad L_{\text{media}} = \frac{R}{2\pi f_2} \tag{23.51}$$

$$C_{\text{media}} = \frac{1}{2\pi f_1 R} \qquad C_{\text{alta}} = \frac{1}{2\pi f_2 R} \tag{23.52}$$

TABLA 23.2
Diagramas de Bode ideales para distintas funciones.

Función	Gráfica en	Gráfica de fase
$\mathbf{A}_v = 1 - j\dfrac{f_1}{f}$	$A_{v_{dB}}$; 0; –6 dB/octava; 0 dB; f_1; f	θ ($\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$); 90°; 45°; 0°; –45°; –90°; $f_1/10$; f_1; $10f_1$; 0°; –45°; –90°; f
$\mathbf{A}_v = 1 + j\dfrac{f}{f_1}$	$A_{v_{dB}}$; 0; 0 dB; +6 dB/octava; f_1; f	θ ($\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$); 90°; 45°; 0°; –90°; 0°; +45°; +90°; $\dfrac{f_1}{10}$; f_1; $10f_1$; f
$\mathbf{A}_v = j\dfrac{f}{f_1}$	$A_{v_{dB}}$; 0; +6 dB/octava; f_1; f	θ ($\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$); 90°; 45°; 0°; +90°; $\dfrac{f_1}{10}$; f_1; $10f_1$; f
$\mathbf{A}_v = \dfrac{1}{1 - j\dfrac{f_c}{f}}$	$A_{v_{dB}}$; 0; f_c; 0 dB; –6 dB/octava; f	θ ($\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$); +90°; 90°; 45°; 0°; +45°; 0°; $\dfrac{f_1}{10}$; f_1; $10f_1$; f
$\mathbf{A}_v = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}$	$A_{v_{dB}}$; 0; 0 dB; f_c; –6 dB/octava; f	θ ($\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$); 90°; 45°; 0°; –45°; –90°; 0°; $f_2/10$; f_2; $10f_2$; –45°; –90°; f

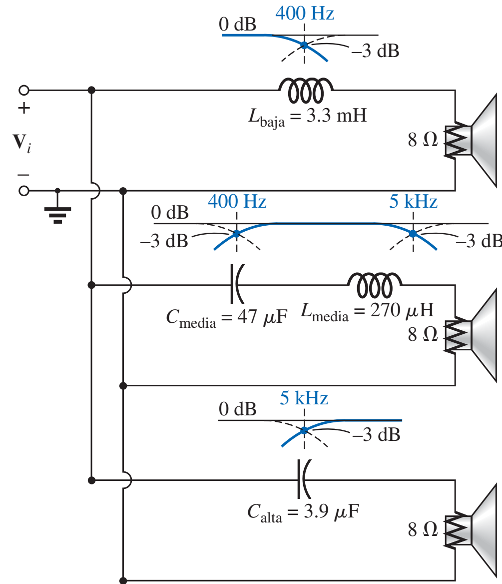


FIGURA 23.83
Red de distribución de frecuencias de tres vías y 6 dB por octava.

Para la *red de distribución* de frecuencias de la figura 23.83 con tres bocinas de 8 Ω, los valores resultantes son:

$$L_{baja} = \frac{R}{2\pi f_1} = \frac{8\ \Omega}{2\pi(400\ \text{Hz})} = 3.183\ \text{mH} \longrightarrow 3.3\ \text{mH}$$
(valor comercial)

$$L_{media} = \frac{R}{2\pi f_2} = \frac{8\ \Omega}{2\pi(5\ \text{kHz})} = 254.65\ \mu\text{H} \longrightarrow 270\ \mu\text{H}$$
(valor comercial)

$$C_{media} = \frac{1}{2\pi f_1 R} = \frac{1}{2\pi(400\ \text{Hz})(8\ \Omega)} = 49.736\ \mu\text{F} \longrightarrow 47\ \mu\text{F}$$
(valor comercial)

$$C_{alta} = \frac{1}{2\pi f_2 R} = \frac{1}{2\pi(5\ \text{kHz})(8\ \Omega)} = 3.979\ \mu\text{F} \longrightarrow 3.9\ \mu\text{F}$$
(valor comercial)

como aparecen en la figura 23.83.

Para cada filtro, se incluye un bosquejo de la respuesta en frecuencia para mostrar la distribución de frecuencias específicas de interés. Ya que las tres bocinas se encuentran en paralelo, la fuente de voltaje y la impedancia para cada una serán iguales. La carga total sobre la fuente es, por supuesto, una función de la frecuencia aplicada, pero la entrega total está determinada solo por las bocinas dado que básicamente son de naturaleza resistiva.

Para verificar el sistema, se aplica una señal de 4 V a una frecuencia de 1 kHz (una frecuencia predominante para la curva de respuesta de audición humana típica) y se observa la bocina que tenga el mayor nivel de potencia.

En $\boldsymbol{f} = \mathbf{1\ kHz}$,

$$X_{L_{baja}} = 2\pi f L_{baja} = 2\pi(1\ \text{kHz})(3.3\ \text{mH}) = 20.74\ \Omega$$

$$\mathbf{V}_o = \frac{(\mathbf{Z}_R\ \angle 0°)(V_i\ \angle 0°)}{\mathbf{Z}_T} = \frac{(8\ \Omega\angle 0°)(4\ \text{V}\angle 0°)}{8\ \Omega + j\,20.74\ \Omega}$$
$$= 1.44\ \text{V}\angle -68.90°$$

$$X_{L_{media}} = 2\pi f L_{media} = 2\pi(1\text{ kHz})(270\ \mu\text{H}) = 1.696\ \Omega$$

$$X_{C_{media}} = \frac{1}{2\pi f C_{media}} = \frac{1}{2\pi(1\text{ kHz})(47\ \mu\text{F})} = 3.386\ \Omega$$

$$\mathbf{V}_o = \frac{(\mathbf{Z}_R \angle 0°)(V_i \angle 0°)}{\mathbf{Z}_T} = \frac{(8\ \Omega \angle 0°)(4\text{ V} \angle 0°)}{8\ \Omega + j\,1.696\ \Omega - j\,3.386\ \Omega}$$
$$= 3.94\text{ V} \angle 11.93°$$

$$X_{C_{alta}} = \frac{1}{2\pi f C_{alta}} = \frac{1}{2\pi(1\text{ kHz})(3.9\ \mu\text{F})} = 40.81\ \Omega$$

$$\mathbf{V}_o = \frac{(Z_R \angle 0°)(V_i \angle 0°)}{\mathbf{Z}_T} = \frac{(8\ \Omega \angle 0°)(4\text{ V} \angle 0°)}{8\ \Omega - j\,40.81\ \Omega}$$
$$= 0.77\text{ V} \angle 78.91°$$

Utilizando la ecuación básica de potencia $P = V^2/R$, la potencia en el woofer es:

$$P_{baja} = \frac{V^2}{R} = \frac{(1.44\text{ V})^2}{8\ \Omega} = \mathbf{0.259\ W}$$

en la bocina de intervalo medio,

$$P_{media} = \frac{V^2}{R} = \frac{(3.94\text{ V})^2}{8\ \Omega} = \mathbf{1.94\ W}$$

y en el tweeter,

$$P_{alta} = \frac{V^2}{R} = \frac{(0.77\text{ V})^2}{8\ \Omega} = \mathbf{0.074\ W}$$

dando por resultado una proporción de potencia de 7.5 : 1 entre el intervalo medio y el woofer, y de 26 : 1 entre el intervalo medio y el tweeter. Obviamente la respuesta de la bocina de intervalo medio eclipsará completamente las otras dos respuestas.

23.16 APLICACIONES

Atenuadores

Los atenuadores, por definición, son cualquier dispositivo o sistema que pueda reducir la potencia o el nivel de voltaje de una señal introduciendo poca o nula distorsión. Existen dos tipos generales de atenuadores: activos y pasivos. El tipo pasivo utiliza solamente resistores, mientras que el activo emplea dispositivos electrónicos como transistores y circuitos integrados. Dado que la electrónica es un tema a tratar en cursos posteriores, nuestra atención aquí será sólo para el tipo resistivo. Los atenuadores se utilizan comúnmente en equipo de audio (como en los ecualizadores gráficos y paramétricos presentados en el capítulo anterior), sistemas de antenas, sistemas de AM o FM donde se puede requerir atenuación antes de mezclar las señales, y en cualquier otra aplicación donde se necesite reducir la fuerza de una señal.

La unidad de la figura 23.84 tiene terminales coaxiales de entrada y salida e interruptores para configurar el nivel de reducción en dB. Cuenta con una respuesta plana desde cd hasta cerca de 6 GHz, lo cual indica básicamente que su introducción en la red no afectará la respuesta en frecuencia para esta banda de frecuencias. El diseño es bastante sencillo, con resistores conectados ya sea en

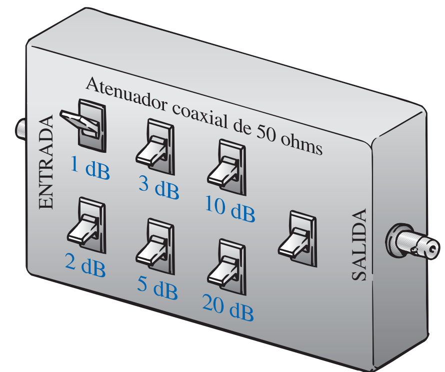
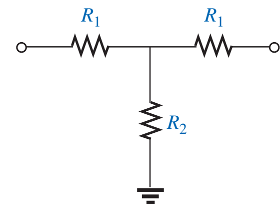
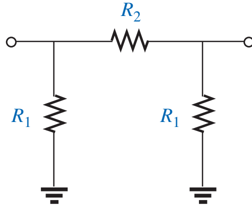


FIGURA 23.84
Atenuador coaxial pasivo.



Atenuación	R_1	R_2
1 dB	2.9 Ω	433.3 Ω
2 dB	5.7 Ω	215.2 Ω
3 dB	8.5 Ω	141.9 Ω
5 dB	14.0 Ω	82.2 Ω
10 dB	26.0 Ω	35.0 Ω
20 dB	41.0 Ω	10.0 Ω

FIGURA 23.85
Configuración T.



Atenuación	R_1	R_2
1 dB	870.0 Ω	5.8 Ω
2 dB	436.0 Ω	11.6 Ω
3 dB	292.0 Ω	17.6 Ω
5 dB	178.6 Ω	30.4 Ω
10 dB	96.2 Ω	71.2 Ω
20 dB	61.0 Ω	247.5 Ω

FIGURA 23.86
Configuración Y.

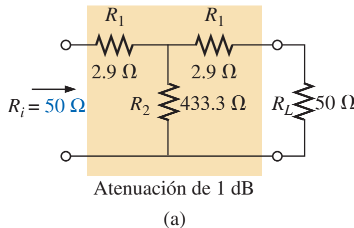
configuración *te* (T) o en *ye* (Y), como se muestra en las figuras 23.85 y 23.86, respectivamente, para un sistema coaxial de 50 Ω. En cada caso, los resistores fueron elegidos para asegurar que las impedancias de entrada y de salida coincidan con la línea. Es decir, las impedancias de entrada y de salida de cada configuración serán de 50 Ω. En las figuras 23.85 y 23.86, se proporcionan los valores de resistor para las configuraciones T y Y para diversas atenuaciones en dB. Observe en cada diseño que dos de los resistores son iguales, mientras el tercer resistor tiene un valor mucho menor o mayor.

Para la atenuación de 1 dB, los valores de resistor para la configuración T se insertaron en la figura 23.87(a). Al terminar la configuración con una carga de 50 Ω, a través de los siguientes cálculos encontramos que la impedancia de entrada es, de hecho, de 50 Ω:

$$R_i = R_1 + R_2 \| (R_1 + R_L) = 2.9\ \Omega + 433.3\ \Omega \| (2.9\ \Omega + 50\ \Omega)$$
$$= 2.9\ \Omega + 47.14\ \Omega$$
$$= \mathbf{50.04\ \Omega}$$

Al proceder de regreso desde la carga como se muestra en la figura 23.87(b) con la fuente establecida en cero volts, mediante los siguientes cálculos encontramos que la impedancia de salida es también de 50 Ω:

$$R_o = R_1 + R_2 \| (R_1 + R_s) = 2.9\ \Omega + 433.3\ \Omega \| (2.9\ \Omega + 50\ \Omega)$$
$$= 2.9\ \Omega + 47.14\ \Omega$$
$$= \mathbf{50.04\ \Omega}$$



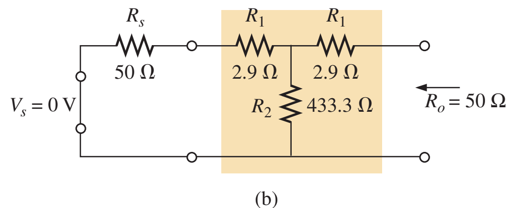


FIGURA 23.87
Atenuador de 1 dB: (a) con carga; (b) cálculo de R_o.

En la figura 23.88 se aplicó una carga de 50 Ω, y el voltaje de salida se determina de la siguiente forma:

$$R' = R_2 \| (R_1 + R_L) = 47.14\ \Omega \qquad \text{de lo anterior}$$

y
$$V_{R_2} = \frac{R'V_s}{R' + R_1} = \frac{47.14\ \Omega\ V_s}{47.14\ \Omega + 2.9\ \Omega} = 0.942V_s$$

con:
$$V_L = \frac{R_L V_{R_2}}{R_L + R_1} = \frac{50\ \Omega\ (0.942V_s)}{50\ \Omega + 2.9\ \Omega} = 0.890V_s$$

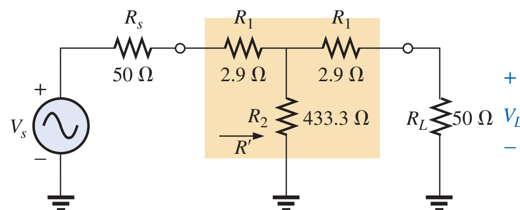


FIGURA 23.88
Determinación de los niveles de voltaje para el atenuador de 1 dB de la figura 23.87(a).

Al calcular la caída en dB se obtendrá lo siguiente:

$$A_{v_{\text{dB}}} = 20 \log_{10} \frac{V_L}{V_s} = 20 \log_{10} \frac{0.890V_s}{V_s}$$
$$= 20 \log_{10} 0.890 = \mathbf{-1.01\ dB}$$

lo cual apoya el hecho de que existe una atenuación de 1 dB.

Como se mencionó, existen otros métodos para atenuación que son más sofisticados en diseño, pero están más allá del alcance de este texto. Sin embargo, los diseños anteriores son muy efectivos y relativamente baratos, y realizan su labor bastante bien.

Filtros de ruido

El ruido es un problema que se presenta en todo sistema electrónico. En general, se trata de la presencia de cualquier señal no deseada que puede afectar la operación general de un sistema. Puede provenir de una fuente de energía (zumbido de 60 Hz), de redes de retroalimentación, de sistemas mecánicos conectados a sistemas eléctricos, de capacitancias parásitas y efectos inductivos o posiblemente de una fuente local de señal que no se encuentra adecuadamente blindada, etc., —la lista es interminable—. La forma en que el ruido se puede eliminar o manejar normalmente es analizada por alguien que posee amplios conocimientos prácticos y tiene cierta idea del origen del ruido no deseado y de cómo eliminarlo de manera sencilla y directa. En la mayoría de los casos el problema no será parte del diseño original, sino un segundo esfuerzo en la fase de pruebas para eliminar problemas inesperados. Aunque se pueden aplicar métodos sofisticados cuando el problema es de naturaleza seria, la mayoría de las situaciones se enfrentan de manera sencilla mediante la adecuada ubicación de uno o dos elementos con un valor sensible al problema.

En la figura 23.89 se colocaron estratégicamente dos capacitores en las secciones de grabación y reproducción de cinta de una grabadora de casetes para

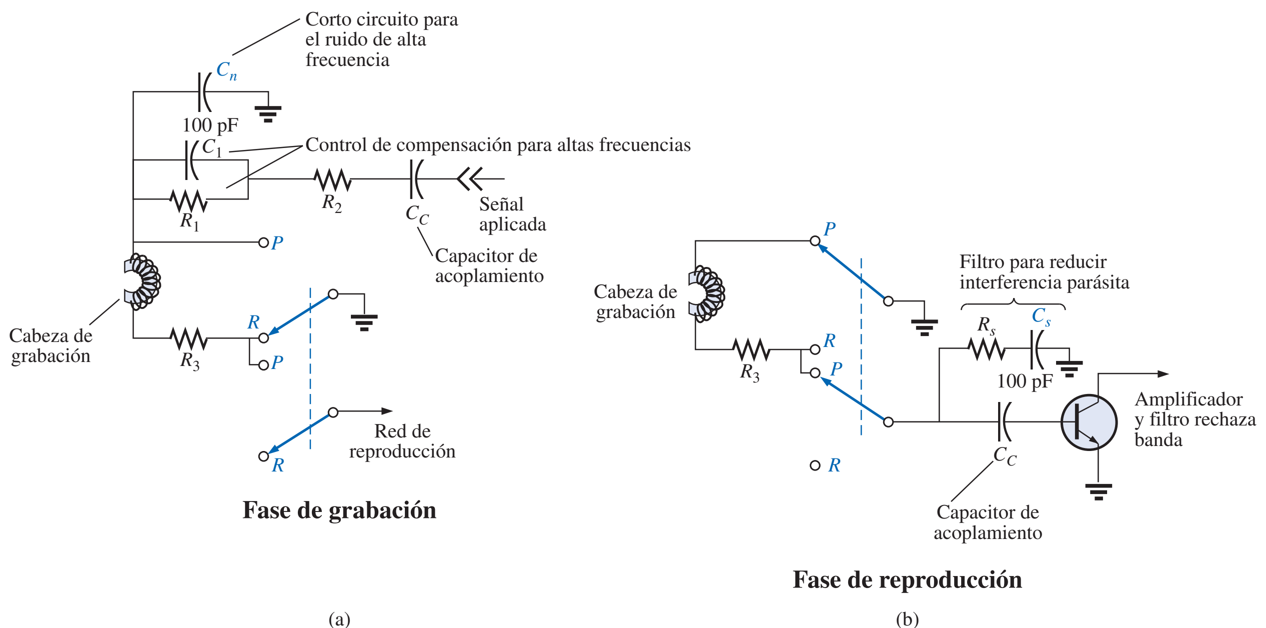


FIGURA 23.89
Reducción de ruido en una grabadora de cinta.

eliminar el ruido no deseado de alta frecuencia (ruido de siseo) que puede generarse por partículas inesperadas ubicadas aleatoriamente sobre la cinta magnética, ruido que capta la línea o por ruido introducido del medio ambiente. En el modo de grabación, con los interruptores en las posiciones mostradas (R), el capacitor de 100 pF de la parte superior del esquema actuará como un corto circuito para el ruido de alta frecuencia. Se incluye el capacitor C_1 para compensar el hecho de que la grabación sobre una cinta no es un proceso lineal en función de la frecuencia. En otras palabras, se graban ciertas frecuencias a mayores amplitudes que otras.

En la figura 23.90 se proporciona una gráfica del nivel de grabación en función de la frecuencia, indicando claramente que el intervalo audible humano de cerca de 40 Hz hasta 20 kHz es bastante pobre para el proceso de grabado de cinta, comenzando a elevarse éste sólo después de 20 kHz. Por ello, las grabadoras de cinta deben incluir una frecuencia de polarización fijas la cual, al añadirse a la señal de audio real, desplazará el intervalo de frecuencias a ser amplificado a la región de grabación de alta amplitud. En algunas cintas se proporciona la *frecuencia de polarización real (actual bias frequency)*, mientras que en otras se utiliza la frase *polarización normal* (*normal bias*). Incluso después de pasar la frecuencia de polarización, existirá un intervalo de frecuencias siguiente que cae de forma considerable. La compensación para esta caída la proporciona la combinación en paralelo del resistor R_1 y el capacitor C_1 mencionados antes. En frecuencias cercanas a la frecuencia de polarización, el capacitor está diseñado para actuar básicamente como un circuito abierto (alta reactancia) y la corriente y el voltaje de la cabeza estarán limitados por los resistores R_1 y R_2. A las frecuencias en la región donde la ganancia de la cinta desciende con la frecuencia, el capacitor comienza a tomar un menor nivel de reactancia y a reducir la impedancia neta en la rama paralela de R_1 y C_1. El resultado es un incremento en la corriente y el voltaje de la cabeza debido a la menor impedancia neta en la línea, dando por resultado una nivelación de la ganancia de la cinta posterior a la frecuencia de polarización. Al final, el capacitor comenzará a tomar las características de un corto circuito, colocando en corto, efectivamente, a la resistencia R_1, y logrando que la corriente y el voltaje de la cabeza se encuentren al máximo. Durante la reproducción, esta frecuencia de polarización será eliminada por un filtro rechaza-banda de manera que el sonido original no se distorsione por la señal de alta frecuencia.

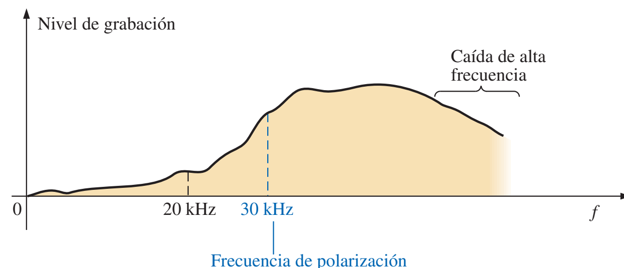


FIGURA 23.90
Reducción de ruido en una grabadora de cinta.

Durante la reproducción (P), el circuito superior de la figura 23.89 se conecta a tierra mediante el interruptor superior, y entra la red inferior. Nuevamente observe el segundo capacitor de 100 pF conectado a la base del transistor para llevar a tierra cualquier ruido de alta frecuencia no deseado. El resistor está presente para absorber cualquier energía asociada con la señal de ruido cuando el capacitor toma el equivalente de corto circuito. Recuerde que el capacitor fue seleccionado para actuar como un equivalente de corto circuito para un intervalo de frecuencias particular y no para el intervalo audible donde esencialmente es un circuito abierto.

Los alternadores de los automóviles son conocidos por desarrollar ruido de alta frecuencia en la línea que llega al radio, como se muestra en la figura 23.91(a). Este problema se modera a menudo al colocar un filtro de alta frecuencia en la línea como se muestra. El inductor de 1 H ofrecerá una alta impedancia para el intervalo de frecuencias de ruido, mientras que el capacitor (1000 a 47,000 μF) actuará como un equivalente de corto circuito para cualquier ruido que llegue a cruzar. Para el sistema de bocinas en la figura 23.91(b), el arreglo de potencia push-pull de los transistores en la sección de salida frecuentemente puede ocasionar un pequeño salto entre pulsos, donde el voltaje de señal fuerte es cero volts. Durante ese breve lapso la bobina de la bocina desarrolla sus efectos inductivos, observará una trayectoria inesperada a tierra como un interruptor abriéndose, y rápidamente cortará la corriente de la bocina. Mediante la conocida relación $v_L = L(di_L/dt)$, se desarrollará un voltaje inesperado en la bobina y establecerá una oscilación de alta frecuencia sobre la línea que encontrará su camino de regreso al amplificador y ocasionará mayor distorsión. Este efecto puede reducirse al colocar una trayectoria *R-C* a tierra que ofrecerá una trayectoria de baja resistencia desde la bocina hasta tierra para el intervalo de frecuencias generadas característicamente por esta distorsión de señal. Dado que el capacitor tomará un equivalente de corto circuito para el intervalo de perturbación de ruido, se añadió el resistor con el propósito de limitar la corriente y absorber la energía asociada con la señal de ruido.

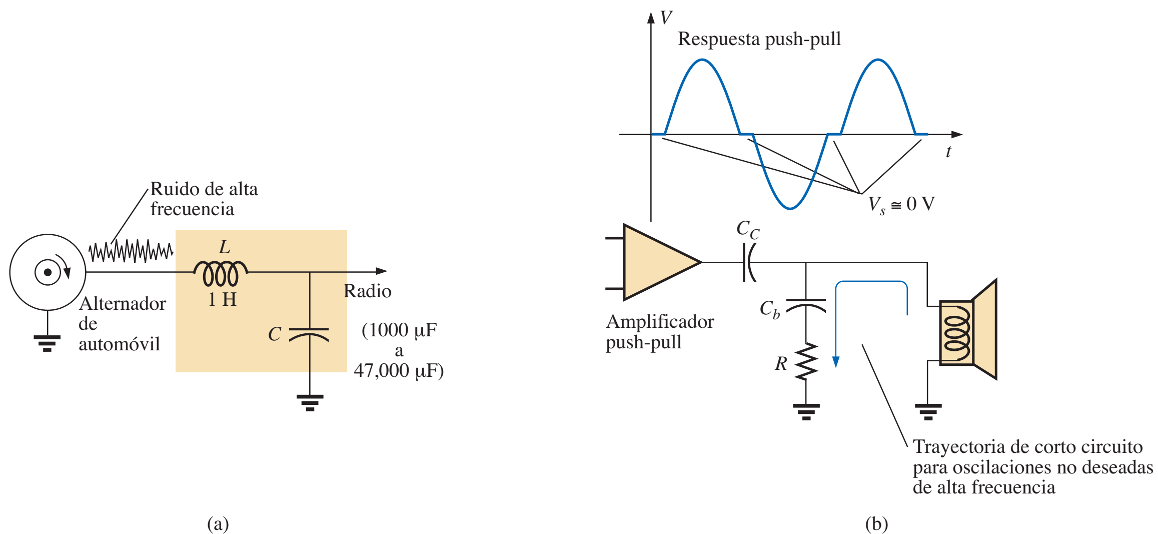


FIGURA 23.91
Generación de ruido: (a) debido a un alternador de automóvil; (b) en un amplificador push-pull.

En reguladores como el de 5 V de la figura 23.92(a), cuando un pico de corriente llega a la línea por cualquier motivo, habrá una caída de voltaje a lo largo de la línea y el voltaje de entrada al regulador también caerá. El regulador, al efectuar su labor principal, detectará esta caída en el voltaje de entrada e incrementará su nivel de amplificación mediante un lazo de retroalimentación para mantener una salida constante. Sin embargo, el pico tiene tan baja duración que el voltaje de salida presentará un pico propio debido a que el voltaje de entrada regresó rápidamente a su nivel normal, y con la mayor amplificación la salida saltará a un nivel más alto. Luego el regulador detectará su error y rápidamente cortará su ganancia. La sensibilidad a los cambios en el nivel de entrada habrá ocasionado que el nivel de salida atraviese por varias oscilaciones rápidas que pueden constituirse en un problema real para el equipo al cual se aplique el

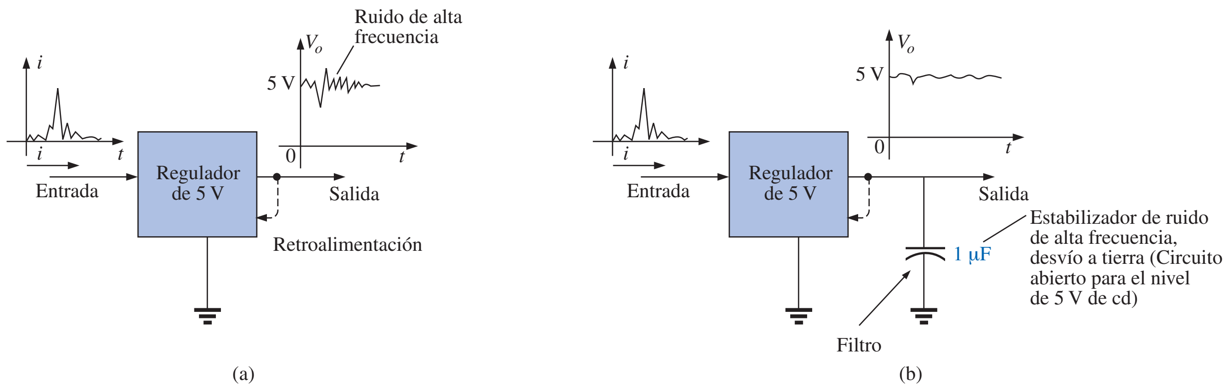


FIGURA 23.92
Regulador: (a) efecto de un pico de corriente en la sección de entrada; (b) reducción de ruido.

voltaje de cd: se habrá desarrollado una señal de ruido de alta frecuencia. Una forma de reducir esta reacción y, de hecho, retardar la respuesta del sistema de manera que picos de intervalos muy pequeños tengan menor impacto es añadir un capacitor en la salida como se muestra en la figura 23.92(b). Dado que el regulador proporciona un nivel de cd fijo, se puede utilizar un capacitor mayor de 1 μF para poner en corto circuito un amplio intervalo de perturbaciones de alta frecuencia. Sin embargo, no se debe utilizar un capacitor demasiado grande o de lo contrario se presentará demasiado *amortiguamiento* y se podrían desarrollar grandes sobrecargas y caídas. Con el propósito de maximizar la entrada del capacitor añadido, se debe colocar físicamente más cercano al regulador para asegurar que no se capte ruido entre el regulador y el capacitor y evitar el desarrollo de algún momento de retardo entre la señal de salida y la reacción capacitiva.

En general, a medida que el lector analice el esquema de los sistemas en funcionamiento y observe elementos que no parecen ser parte de algún procedimiento de diseño estándar, puede suponer que se encuentran ahí ya sea como dispositivos protectores o debido al ruido sobre la línea que afecta la operación del sistema. Al advertir su tipo, valor y ubicación, a menudo se revela su propósito y modo de operar.

23.17 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Filtro pasa-altas El análisis por computadora comenzará con el estudio del filtro pasa-altas de la figura 23.93. La frecuencia de corte está determinada por $f_c = 1/2\pi RC$ = 1.592 kHz, con el voltaje en el resistor aproximándose a 1 V en altas frecuencias con un ángulo de fase de 0º.

Para este análisis, se utilizó la fuente de voltaje de ca **VAC**. Dentro del editor de propiedades, **Property Editor**, las cantidades definidas aparecen junto a la fuente en la figura 23.93. Por lo demás, la construcción del circuito es bastante directa.

Nuestro interés reside en el efecto de la frecuencia sobre la magnitud del voltaje de salida en el resistor y el ángulo de fase resultante. Posterior a la selección de **AC Sweep** bajo el encabezado **Analysis type**, la frecuencia inicial, **Start Frequency**, deberá establecerse en 10 Hz para tener puntos de información en el extremo más bajo y una frecuencia final, **End Frequency**, de 100 kHz con la que sea posible desenvolverse bien dentro de altas frecuencias. Aquí hay una ven-

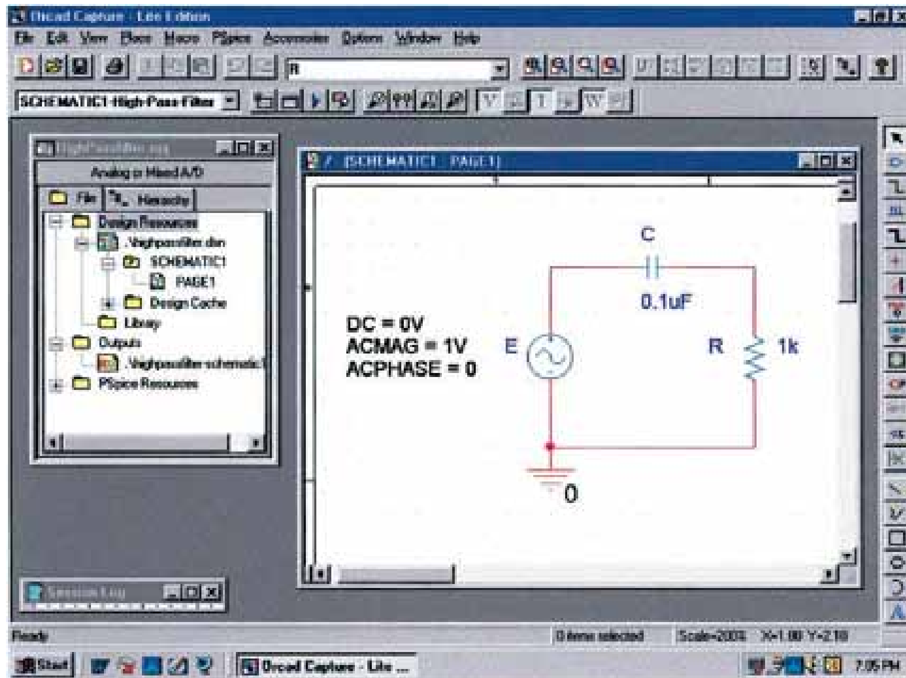


FIGURA 23.93
Filtro R-C pasa-altas para analizarse utilizando PSpice.

taja obvia del eje logarítmico: un amplio intervalo de valores sobre una gráfica de tamaño limitado. Para asegurar suficientes puntos de información, se configuró la opción **Points/Decade** en 10k. Cuando se selecciona **V(R:1)** aparece el esquema resultante **SCHEMATIC1** como se muestra en la figura 23.94. Observe la nítida transición de una región a la otra. A bajas frecuencias, cuando la reactancia del capacitor supera por mucho la del resistor, la mayor parte del voltaje aplicado aparecerá en el capacitor, y muy poco en el resistor. A frecuencias mucho mayores la reactancia del capacitor cae muy rápido y el voltaje en el resistor crece hasta un máximo de 1 V.

Seleccione **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace-P(V(R:1))-OK** y aparecerá la gráfica de fase de la figura 23.94 mostrando un desplazamiento a partir de 90º, cuando la red es de naturaleza altamente capacitiva, hasta 0º, cuando se vuelve resistiva. Si elegimos la gráfica de fase **SEL>>** y hacemos clic sobre el botón **Toggle cursor**, mediante un clic izquierdo se ubicará el cursor que podrá definir sobre la pantalla la frecuencia a la cual el ángulo de fase es igual a 45º. En 45.12º, lo más cercano que pudimos llegar con los puntos de información disponibles, vemos que la frecuencia correspondiente es de 1.585 kHz, lo cual es bastante cercano a los 1.592 kHz calculados antes. El cursor del clic derecho puede colocarse en 100 kHz para mostrar que el ángulo de fase ha caído a 0.91º, lo cual define a la red, naturalmente, como resistiva a esta frecuencia.

Filtro de doble sintonización Nuestro análisis se enfocará ahora en un filtro de apariencia bastante compleja que, si se utilizara una calculadora manual, requeriría de una cantidad enorme de tiempo para generar una gráfica detallada de la ganancia en función de la frecuencia. Se trata del mismo filtro analizado en el ejemplo 23.9, por lo que se tiene la oportunidad de verificar la solución teórica. El esquema aparece en la figura 23.95 con **VAC** seleccionado nuevamente ya que el intervalo de frecuencias de interés estará establecido mediante

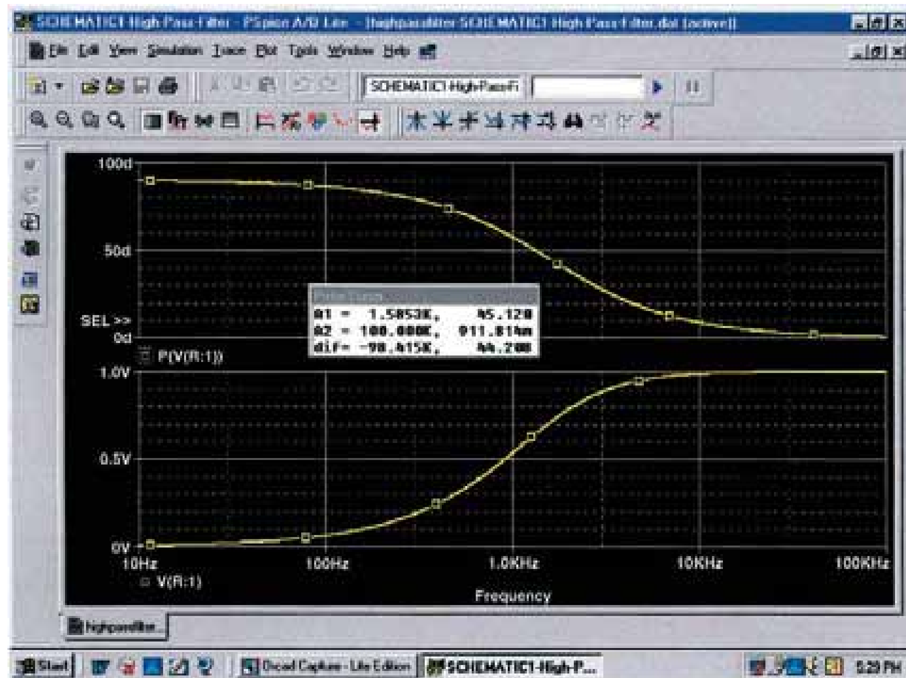


FIGURA 23.94
Gráfica de magnitud y fase para el filtro R-C pasa-altas de la figura 23.93.

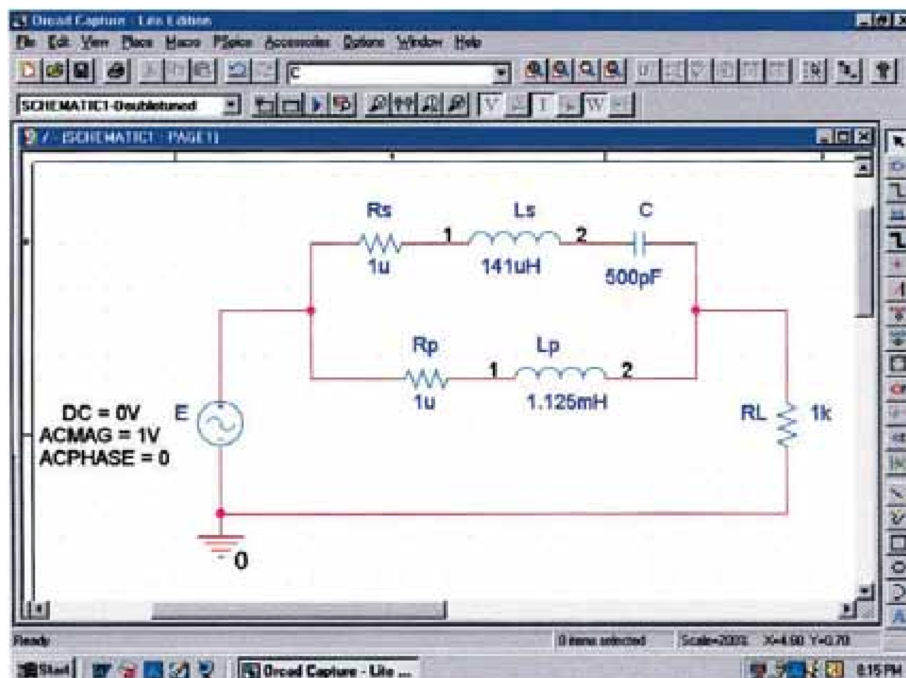


FIGURA 23.95
Utilización de PSpice para analizar un filtro de doble sintonización.

Simulation Profile. De nuevo, los atributos para la fuente se configuraron en el cuadro del editor de propiedades, **Property Editor**, en lugar de seleccionar los componentes desde la pantalla. Observe la necesidad de colocar los dos resistores en serie con los inductores dado que los inductores no pueden considerarse elementos ideales. Sin embargo, el bajo valor de los elementos resistivos no tendrá efecto sobre los resultados.

En el cuadro de diálogo **Simulation Settings** nuevamente se seleccionó **AC Sweep** con frecuencia inicial, **Start Frequency**, de 100 Hz y frecuencia final, **End Frequency**, de 10 MHz (asegúrese de ingresar este valor como **10MEGHZ**) para garantizar que se proporcione el efecto de intervalo completo. Podemos utilizar entonces los controles del eje para acercarnos sobre la gráfica deseada. La opción **Points/Decade** permanece en 10k, aunque con este intervalo de frecuencias la simulación podría tomar algunos segundos. Una vez que **SCHEMATIC1** aparece, **Trace-Add Trace-V(RL:1)-OK** dará por resultado la gráfica de la figura 23.96. Obviamente, existe una banda de rechazo alrededor de 200 kHz y una banda de paso alrededor de 600 kHz. No importa que hasta 10 kHz tengamos otra banda de paso ya que el inductor L_p proporciona una trayectoria de baja impedancia, casi directa, desde la entrada hasta la salida. A frecuencias próximas a 10 MHz, existe una banda de rechazo continua debido a la equivalencia de circuito abierto del inductor L_p. Utilizando la opción de cursor, podemos colocar el cursor del clic izquierdo sobre el punto mínimo de la gráfica utilizando las teclas de **Cursor Trough** (el segundo botón a la derecha del de **Toggle cursor**). El clic derecho puede utilizarse para identificar la frecuencia del punto máximo sobre la curva cercano a 600 kHz. Los resultados que aparecen en el cuadro **Probe Cursor** apoyan claramente nuestros cálculos teóricos de 200 kHz para la banda de atenuación mínima (**A1** = 200.032 kHz con una magnitud básica de 0 V) y 600 Hz para la banda de paso máxima (**A2** = 603.115 kHz con magnitud de 1 V).

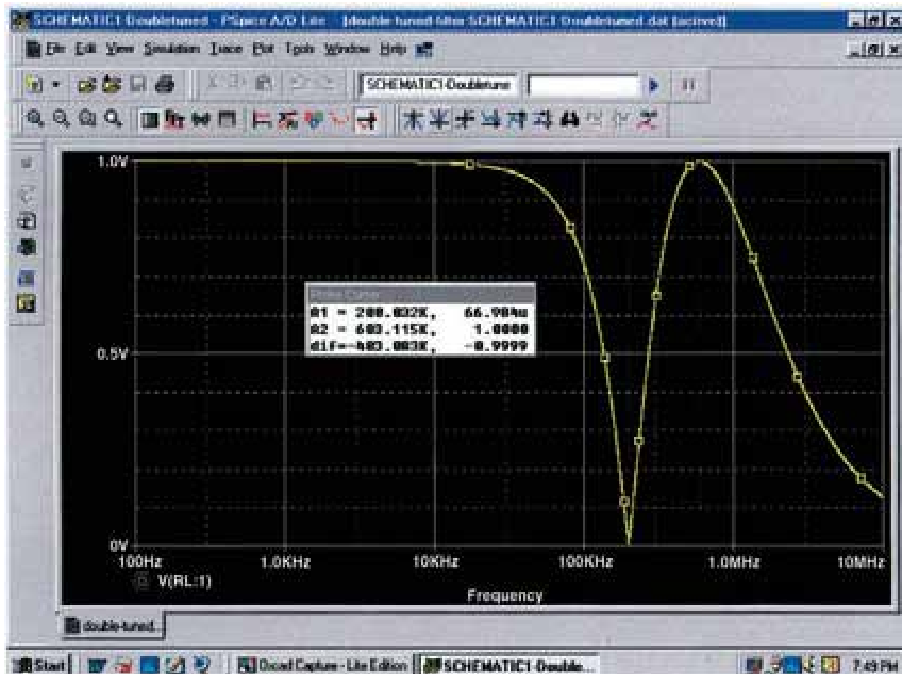


FIGURA 23.96
Gráfica de magnitud en función de la frecuencia para el voltaje en R_L de la red de la figura 23.95.

Ahora nos concentraremos en el intervalo de 10 kHz a 1 MHz donde ocurre la mayor parte de la acción de filtrado. Ésta es la ventaja de haber seleccionado un intervalo de frecuencias tan alto cuando se configuró la opción **Simulation Settings**. Como ya se estableció la información para el amplio intervalo de frecuencias, simplemente se selecciona una banda de interés cuando la región de mayor actividad se ha definido. Si el intervalo de frecuencias fuera demasiado angosto en la simulación original, tendría que definirse otra simulación. Seleccione **Plot-Axis Settings-X Axis-User Defined-10kHz to 1MEGHz-OK** para obtener la gráfica de la parte inferior de la figura 23.97. También se puede desplegar una gráfica en dB de los resultados en la misma figura al seleccionar **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace-DB(V(RL:1))-OK**, dando por resultado la gráfica de la parte superior de la figura. Al utilizar la opción de cursor de clic izquierdo y la tecla de **Cursor Trough**, vemos que el mínimo está en −83.48 dB a una frecuencia de 200 kHz, lo cual es una excelente característica para un filtro rechaza-banda. Al utilizar el cursor de clic derecho y establecerlo en 600 kHz, encontramos que la caída es igual a −30.11 μdB o básicamente de 0 dB, lo cual es excelente para la región de banda de paso.

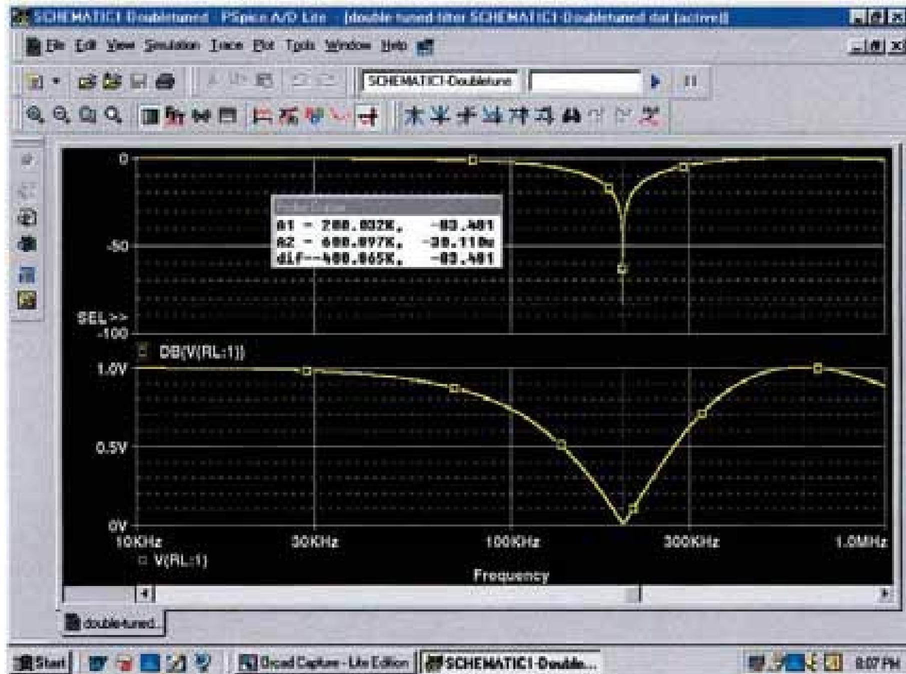


FIGURA 23.97
Gráfica en dB y magnitud para el voltaje en R_L de la red de la figura 23.95.

PROBLEMAS

SECCIÓN 23.1 Logaritmos

1. **a.** Determine las frecuencias (en kHz) en los puntos indicados sobre la gráfica de la figura 23.98(a).
   b. Determine los voltajes (en mV) en los puntos indicados sobre la gráfica de la figura 23.98(b).

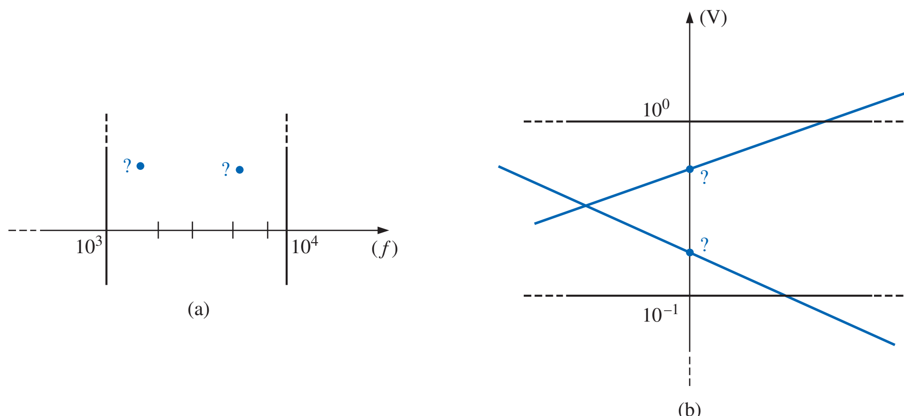


FIGURA 23.98
Problema 1.

SECCIÓN 23.2 Propiedades de los logaritmos

2. Determine $\log_{10} x$ para cada valor de x.
   a. 100,000 **b.** 0.0001
   c. 10^8 **d.** 10^{-6}
   e. 20 **f.** 8643.4
   g. 56,000 **h.** 0.318

3. Dado $N = \log_{10} x$, determine x para cada valor de N.
   a. 3 **b.** 12
   c. 0.2 **d.** 0.04
   e. 10 **f.** 3.18
   g. 1.001 **h.** 6.1

4. Determine $\log_e x$ para cada valor de x.
   a. 100,000 **b.** 0.0001
   c. 20 **d.** 8643.4
   Compare las soluciones con las del problema 2.

5. Determine $\log_{10} 48 = \log_{10}(8)(6)$, y compare con $\log_{10} 8 + \log_{10} 6$.

6. Determine $\log_{10} 0.2 = \log_{10} 18/90$, y compare con $\log_{10} 18 - \log_{10} 90$.

7. Verifique si $\log_{10} 0.5$ es igual a $-\log_{10} 1/0.5 = -\log_{10} 2$.

8. Obtenga $\log_{10}(3)^3$, y compare con $3 \log_{10} 3$.

SECCIÓN 23.3 Decibeles

9. **a.** Determine el número de bels que relacionan los niveles de potencia de $P_2 = 280$ mW y $P_1 = 4$ mW.
   b. Determine el número de decibeles para los niveles de potencia del inciso (a) y compare los resultados.

10. Un nivel de potencia de 100 W está 6 dB por encima de ¿qué nivel de potencia?

11. Si una bocina de 2 W se reemplaza por otra bocina con salida de 40 W, ¿cuál es el incremento en el nivel de decibeles?

12. Determine el nivel en dB_m para una potencia de salida de 120 mW.

13. Encuentre la ganancia en dB_v de un amplificador que eleva el nivel de voltaje desde 0.1 mV hasta 8.4 mV.

14. Obtenga el voltaje de salida de un amplificador si el voltaje aplicado es de 20 mV y alcanza una ganancia en dB_v de 22 dB.

15. Si el nivel de presión del sonido se incrementa desde 0.001 μbar hasta 0.016 μbar, ¿cuál será el incremento en el nivel de dB_s?

16. ¿Cuál es el incremento requerido en potencia acústica para elevar un nivel sonoro desde música calmada hasta música demasiado fuerte? Utilice la figura 23.5.

17. **a.** Utilizando un papel semilogarítmico, grafique X_L en función de la frecuencia para una bobina de 10 mH y un intervalo de frecuencias de 100 Hz a 1 MHz. Seleccione la mejor escala vertical para el intervalo de X_L.
b. Repita el inciso (a) utilizando un papel log log. Compare con los resultados del inciso (a). ¿Cuál gráfica proporciona más información?
c. Utilizando papel semilogarítmico, grafique X_C en función de la frecuencia para una capacitor de 1 μF y un intervalo de frecuencias de 10 Hz a 100 kHz. Nuevamente seleccione la mejor escala vertical para el intervalo de X_C.
d. Repita el inciso (a) utilizando una papel log log. Compare con los resultados del inciso (c). ¿Cuál gráfica proporciona más información?

18. **a.** Para el medidor de la figura 23.6, obtenga la potencia entregada a la carga de una lectura de 8 dB.
b. Repita el inciso (a) para una lectura de −5 dB.

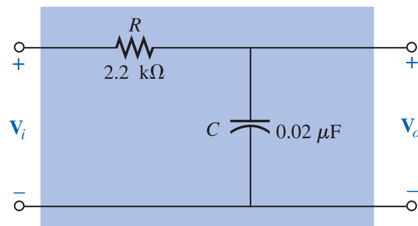


FIGURA 23.99
Problema 19.

SECCIÓN 23.5 Filtro *R-C* pasa-bajas

19. Para el filtro *R-C* pasa-bajas de la figura 23.99:
a. Trace $A_v = V_o/V_i$ en función de la frecuencia utilizando una escala logarítmica para el eje de la frecuencia. Determine $A_v = V_o/V_i$ a $0.1f_c$, $0.5f_c$, f_c, $2f_c$ y $10f_c$.
b. Trace la gráfica de fase de θ en función de la frecuencia, donde θ es el ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$. Determine θ en $f = 0.1f_c$, $0.5f_c$, f_c, $2f_c$ y $10f_c$.

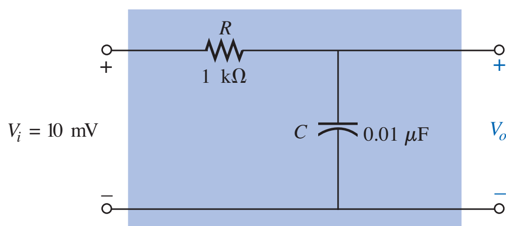


FIGURA 23.100
Problema 20.

***20.** Para la red de la figura 23.100:
a. Determine V_o a una frecuencia una octava por encima de la frecuencia crítica.
b. Determine V_o a una frecuencia una década por debajo de la frecuencia crítica.
c. ¿Los niveles de los incisos (a) y (b) confirman la gráfica de frecuencia esperada de V_o en función de la frecuencia para el filtro?

21. Diseñe un filtro *R-C* pasa-bajas que tenga frecuencia de corte de 500 Hz utilizando un resistor de 1.2 kΩ. Luego trace la magnitud resultante y la gráfica de fase para un intervalo de frecuencias de $0.1f_c$ a $10f_c$.

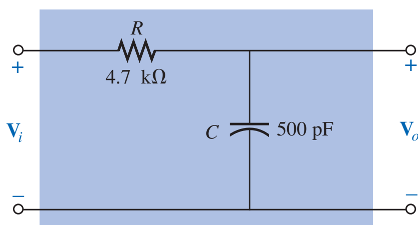


FIGURA 23.101
Problema 22.

22. Para el filtro pasa-bajas de la figura 23.101:
a. Determine f_c.
b. Obtenga $A_v = V_o/V_i$ a $f = 0.1f_c$, y compárelo con el valor máximo de 1 para el intervalo de baja frecuencia.
c. Obtenga $A_v = V_o/V_i$ a $f = 10f_c$, y compárelo con el valor mínimo de 0 para el intervalo de alta frecuencia.
d. Determine la frecuencia a la que $A_v = 0.01$ o $V_o = \frac{1}{100}V_i$.

SECCIÓN 23.6 Filtro *R-C* pasa-altas

23. Para el filtro *R-C* pasa-altas de la figura 23.102:
   a. Trace $A_v = V_o/V_i$ en función de la frecuencia utilizando una escala logarítmica para el eje de frecuencia. Determine $A_v = V_o/V_i$ a f_c, una octava por encima y por debajo de f_c, y una década por encima y por debajo de f_c.
   b. Trace la gráfica de fase de θ en función de la frecuencia, donde θ es el ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$. Determine θ en las mismas frecuencias observadas en el inciso (a).

24. Para la red de la figura 23.103:
   a. Determine $A_v = V_o/V_i$ en $f = f_c$ para el filtro pasa-altas.
   b. Determine $A_v = V_o/V_i$ a dos octavas por encima de f_c. ¿Es importante la elevación en V_o a partir del nivel $f = f_c$?
   c. Determine $A_v = V_o/V_i$ a dos décadas por encima de f_c. ¿Es importante la elevación en V_o a partir del nivel $f = f_c$?
   d. Si $V_i = 10$ mV, ¿cuál es la potencia entregada a R en la frecuencia crítica?

25. Diseñe un filtro *R-C* pasa-altas que tenga frecuencia de corte de 2 kHz, dado un capacitor de 0.1 μF. Seleccione el valor comercial más cercano para R, y luego vuelva a calcular la frecuencia de corte resultante. Trace la ganancia normalizada $A_v = V_o/V_i$ para un intervalo de frecuencias de $0.1f_c$ a $10f_c$.

26. Para el filtro pasa-altas de la figura 23.104:
   a. Determine f_c.
   b. Obtenga $A_v = V_o/V_i$ a $f = 0.01f_c$, y compárelo con el nivel mínimo de 0 para la región de baja frecuencia.
   c. Obtenga $A_v = V_o/V_i$ a $f = 100f_c$, y compárelo con el nivel máximo de 1 para la región de alta frecuencia.
   d. Determine la frecuencia a la que $V_o = \frac{1}{2}V_i$.

SECCIÓN 23.7 Filtros pasa-banda

27. Para el filtro pasa-banda de la figura 23.105:
   a. Trace la respuesta en frecuencia de $A_v = V_o/V_i$ contra una escala logarítmica que se extiende desde 10 Hz hasta 10 kHz.
   b. ¿Cuál es el ancho de banda y la frecuencia central?

***28.** Diseñe un filtro pasa-banda como el que aparece en la figura 23.105 que tenga frecuencia inferior de corte de 4 kHz y frecuencia superior de corte de 80 kHz.

29. Para el filtro pasa-banda de la figura 23.106:
   a. Determine f_s.
   b. Calcule Q_s y el ancho de banda para $\mathbf{V}_o$.
   c. Trace $A_v = V_o/V_i$ para un intervalo de frecuencias de 1 kHz a 1 MHz.
   d. Encuentre la magnitud de V_o a $f = f_s$ y las frecuencias de corte.

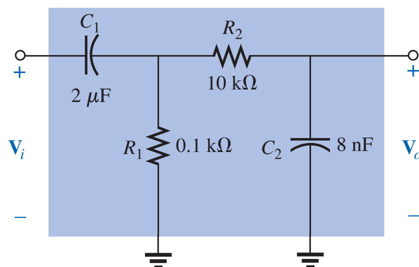


FIGURA 23.105
Problemas 27 y 28.

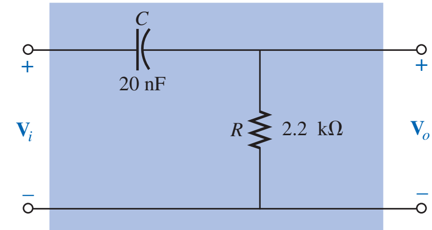


FIGURA 23.102
Problema 23.

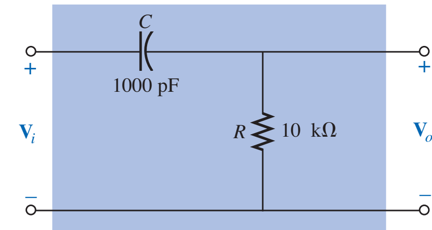


FIGURA 23.103
Problema 24.

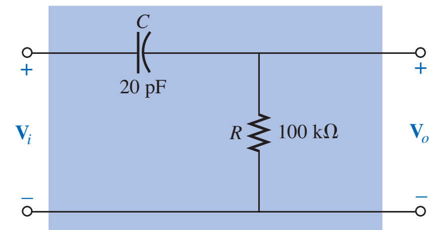


FIGURA 23.104
Problemas 26 y 54.

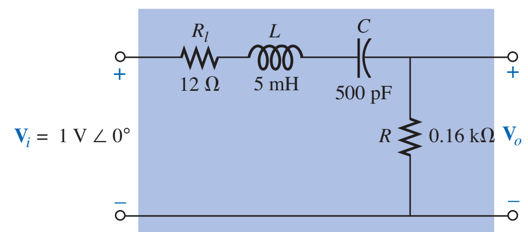


FIGURA 23.106
Problema 29.

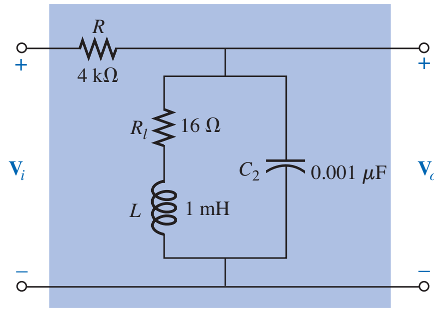


FIGURA 23.107
Problemas 30 y 55.

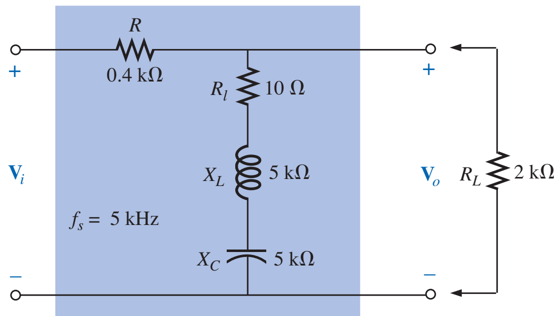


FIGURA 23.108
Problema 31.

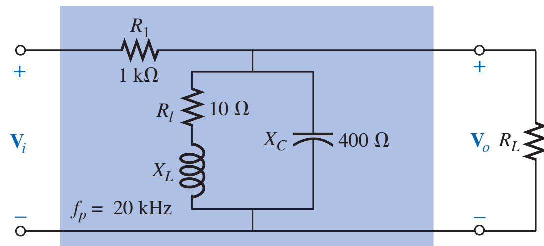


FIGURA 23.109
Problema 32.

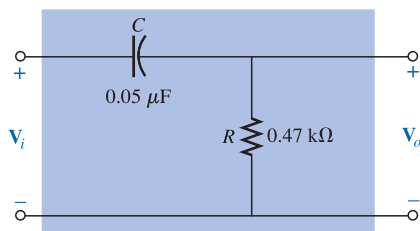


FIGURA 23.110
Problema 35.

30. Para el filtro pasa-banda de la figura 23.107:
- **a.** Determine la respuesta en frecuencia de $A_v = V_o/V_i$ para un intervalo de frecuencias de 100 Hz a 1 MHz.
- **b.** Encuentre el factor de calidad Q_p y el ancho de banda de la respuesta.

SECCIÓN 23.8 Filtros rechaza-banda

***31.** Para el filtro rechaza-banda de la figura 23.108:
- **a.** Determine Q_s.
- **b.** Obtenga el ancho de banda y las frecuencias de potencia-media.
- **c.** Trace las características de frecuencia de $A_v = V_o/V_i$.
- **d.** ¿Cuál es el efecto sobre la curva del inciso (c) si se aplica una carga de 2 kΩ?

***32.** Para el filtro pasa-banda de la figura 23.109:
- **a.** Determine Q_p ($R_L = \infty$ Ω, un circuito abierto).
- **b.** Trace las características de frecuencia de $A_v = V_o/V_i$.
- **c.** Obtenga Q_p (con carga) para R_L = 100 kΩ, e indique el efecto de R_L sobre las características del inciso (b).
- **d.** Repita el inciso (c) para R_L = 20 kΩ.

SECCIÓN 23.9 Filtro de doble sintonización

33. **a.** Para la red de la figura 23.43(a), si L_p = 400 μH ($Q > 10$), L_s = 60 μH, y C = 120 pF, determine las frecuencias rechazadas y aceptadas.
- **b.** Trace la curva de respuesta del inciso (a).

34. **a.** Para la red de la figura 23.43(b), si la frecuencia de rechazo es de 30 kHz y la de aceptación de 100 kHz, determine los valores de L_s y L_p ($Q > 10$) para una capacitancia de 200 pF.
- **b.** Trace la curva de respuesta para el inciso (a).

SECCIÓN 23.10 Diagramas de Bode

35. **a.** Trace el diagrama de Bode ideal para $A_v = V_o/V_i$ para el filtro pasa-altas de la figura 23.110.
- **b.** Utilizando los resultados del inciso (a), trace la respuesta en frecuencia real para el mismo intervalo de frecuencia.
- **c.** Determine el nivel de decibel en f_c, $\frac{1}{2}f_c$, $2f_c$, $\frac{1}{10}f_c$, y $10f_c$.
- **d.** Determine la ganancia $A_v = V_o/V_i$ según $f = f_c$, $\frac{1}{2}f_c$ y $2f_c$.
- **e.** Trace la respuesta de fase para el mismo intervalo de frecuencias.

***36.** **a.** Trace la respuesta de la magnitud de V_o (en términos de V_i) en función de la frecuencia para el filtro pasa-altas de la figura 23.111.
- **b.** Utilizando los resultados del inciso (a), trace la respuesta $A_v = V_o/V_i$ para el mismo intervalo de frecuencias.
- **c.** Trace el diagrama de Bode ideal.

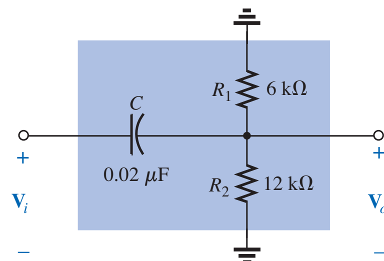


FIGURA 23.111
Problema 36.

d. Trace la respuesta real, indicando la diferencia en dB entre las respuestas ideal y real en $f = f_c$, $0.5f_c$ y $2f_c$.
e. Determine $A_{v_{dB}}$ a $f = 1.5f_c$ a partir de la gráfica del inciso (d), y luego determine la magnitud correspondiente de $A_v = V_o/V_i$.
f. Trace la respuesta de fase para el mismo intervalo de frecuencias (el ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$).

37. **a.** Trace el diagrama de Bode ideal para $A_v = V_o/V_i$ para el filtro pasa-bajas de la figura 23.112.
b. Utilizando los resultados del inciso (a), trace la respuesta en frecuencia real para el mismo intervalo de frecuencias.
c. Determine el nivel de decibel en f_c, $\frac{1}{2}f_c$, $2f_c$, $\frac{1}{10}f_c$, y $10f_c$.
d. Determine la ganancia $A_v = V_o/V_i$ en $f = f_c$, $\frac{1}{2}f_c$, y $2f_c$.
e. Trace la respuesta de fase para el mismo intervalo de frecuencias.

***38.** **a.** Trace la respuesta de la magnitud de V_o (en términos de V_i) en función de la frecuencia para el filtro pasa-bajas de la figura 23.113.
b. Utilizando los resultados del inciso (a), trace la respuesta $A_v = V_o/V_i$ para el mismo intervalo de frecuencias.
c. Trace el diagrama de Bode ideal.
d. Trace la respuesta real, indicando la diferencia en dB entre las respuestas ideal y real en $f = f_c$, $0.5f_c$ y $2f_c$.
e. Determine $A_{v_{dB}}$ a $f = 0.25f_c$ a partir de la gráfica del inciso (d), y luego determine la magnitud correspondiente de $A_v = V_o/V_i$.
f. Trace la respuesta de fase para el mismo intervalo de frecuencias (el ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$).

SECCIÓN 23.11 Gráfica del diagrama de Bode

39. Para el filtro de la figura 23.114:
a. Trace la curva de $A_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia utilizando una escala logarítmica.
b. Trace la curva de θ en función de la frecuencia para el mismo intervalo de frecuencias que en el inciso (a).

***40.** Para el filtro de la figura 23.115:
a. Trace la curva de $A_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia utilizando una escala logarítmica.
b. Trace la curva de θ en función de la frecuencia para el mismo intervalo de frecuencias que en el inciso (a).

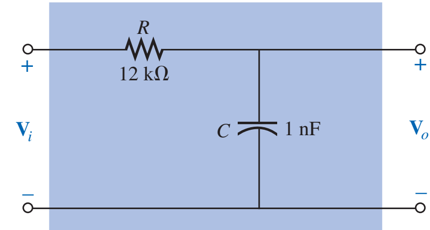


FIGURA 23.112
Problema 37.

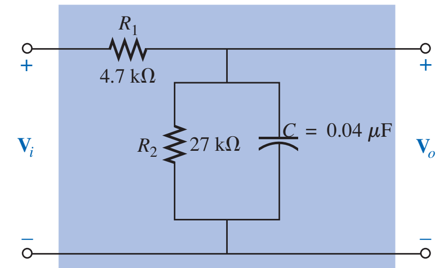


FIGURA 23.113
Problema 38.

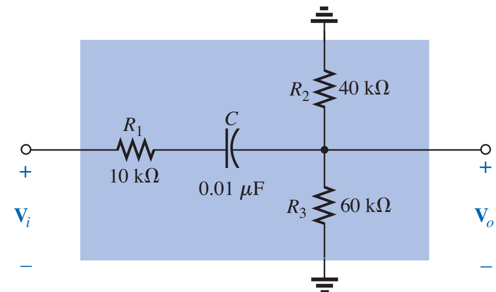


FIGURA 23.114
Problema 39.

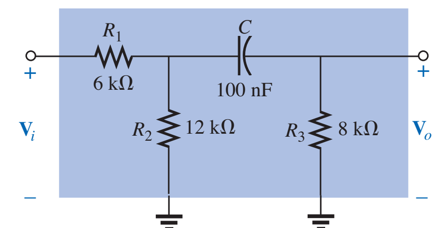


FIGURA 23.115
Problema 40.

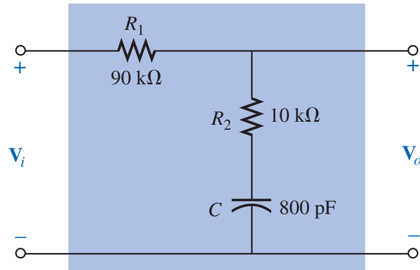


FIGURA 23.116
Problema 41.

SECCIÓN 23.12 Filtro pasa-bajas con atenuación limitada

41. Para el filtro de la figura 23.116:
  a. Trace la curva de $A_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia utilizando las gráficas ideales de Bode como guía.
  b. Trace la curva de θ en función de la frecuencia.

***42.** Para el filtro de la figura 23.117:
  a. Trace la curva de $A_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia utilizando las gráficas ideales de Bode como guía.
  b. Trace la curva de θ en función de la frecuencia.

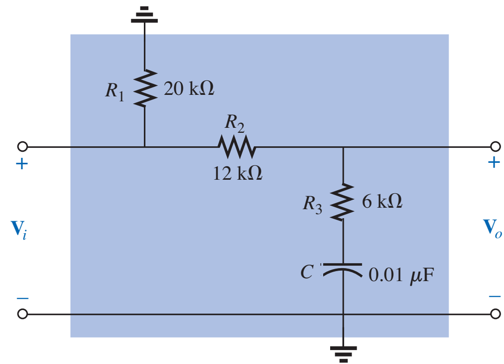


FIGURA 23.117
Problema 42.

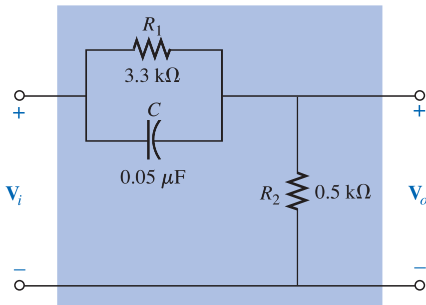


FIGURA 23.118
Problema 43.

SECCIÓN 23.13 Filtro pasa-altas con atenuación limitada

43. Para el filtro de la figura 23.118:
  a. Trace la curva de $A_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia utilizando las gráficas ideales de Bode como una envolvente para la respuesta real.
  b. Trace la curva de θ (el ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$) en función de la frecuencia.

***44.** Para el filtro de la figura 23.119:
  a. Trace la curva de $A_{v_{dB}}$ en función de la frecuencia utilizando los diagramas de Bode ideales como una envolvente para la respuesta real.
  b. Trace la curva de θ (el ángulo por el cual $\mathbf{V}_o$ adelanta a $\mathbf{V}_i$) en función de la frecuencia.

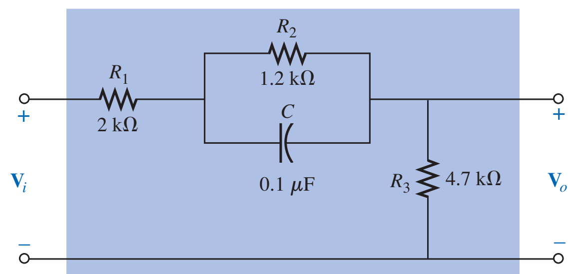


FIGURA 23.119
Problema 44.

SECCIÓN 23.14 Otras propiedades y una tabla de resumen

45. Un amplificador de transistor bipolar tiene la siguiente ganancia:

$$\mathbf{A}_v = \frac{160}{\left(1 - j\dfrac{100\text{ Hz}}{f}\right)\left(1 - j\dfrac{130\text{ Hz}}{f}\right)\left(1 + j\dfrac{f}{20\text{ kHz}}\right)\left(1 + j\dfrac{f}{50\text{ kHz}}\right)}$$

a. Grafique la respuesta de Bode normalizada $A'_{v_{\text{dB}}} = (A_v/A_{v_{\text{máx}}})|_{\text{dB}}$, y determine el ancho de banda del amplificador. Asegúrese de utilizar las frecuencias de corte.

b. Grafique la respuesta de fase, y determine una frecuencia donde el ángulo de fase esté relativamente cercano a 45º.

46. Un amplificador de transistor JFET tiene la siguiente ganancia:

$$\mathbf{A}_v = \frac{-5.6}{\left(1 - j\dfrac{10\text{ Hz}}{f}\right)\left(1 - j\dfrac{45\text{ Hz}}{f}\right)\left(1 - j\dfrac{68\text{ Hz}}{f}\right)\left(1 + j\dfrac{f}{23\text{ kHz}}\right)\left(1 + j\dfrac{f}{50\text{ kHz}}\right)}$$

a. Grafique la respuesta de Bode normalizada $A'_{v_{\text{dB}}} = (A_v/A_{v_{\text{máx}}}|_{\text{dB}})$, y determine el ancho de banda del amplificador. Al normalizar asegúrese de que el valor máximo de A'_v sea $+1$. Señale claramente las frecuencias de corte sobre la gráfica.

b. Grafique la respuesta de fase, y observe las regiones de mayor cambio en el ángulo de fase. ¿Cómo corresponden las regiones con las frecuencias que aparecen en la función $\mathbf{A}_v$?

47. Un amplificador con un transistor tiene una ganancia de banda media de -120, una frecuencia superior de corte de 36 kHz, y un ancho de banda de 35.8 kHz. Además, la respuesta real también está alrededor de -15 dB a $f = 50$ Hz. Escriba la función de transferencia $\mathbf{A}_v$ para el amplificador.

48. Trace el diagrama de Bode para la siguiente función:

$$\mathbf{A}_v = \frac{0.05}{0.05 - j\,100/f}$$

49. Trace el diagrama de Bode para la siguiente función:

$$\mathbf{A}_v = \frac{200}{200 + j\,0.1f}$$

50. Trace el diagrama de Bode para la siguiente función:

$$\mathbf{A}_v = \frac{j\,f/1000}{(1 + j\,f/1000)(1 + j\,f/10{,}000)}$$

***51.** Trace el diagrama de Bode para la siguiente función:

$$\mathbf{A}_v = \frac{(1 + j\,f/1000)(1 + j\,f/2000)}{(1 + j\,f/3000)^2}$$

***52.** Trace el diagrama de Bode para la siguiente función (advierta la presencia de ω en lugar de f):

$$\mathbf{A}_v = \frac{40(1 + j\,0.001\omega)}{(j\,0.001\omega)(1 + j\,0.0002\omega)}$$

SECCIÓN 23.15 Redes para distribución de frecuencias

***53.** La red distribuidora de frecuencia de tres vías de la figura 23.120 tiene salida de 12 dB en las frecuencias de corte.

a. Determine la razón V_o/V_i para el woofer y el tweeter en las frecuencias de corte de 400 Hz y 5 kHz, respectivamente, y compárela con el nivel deseado de 0.707.

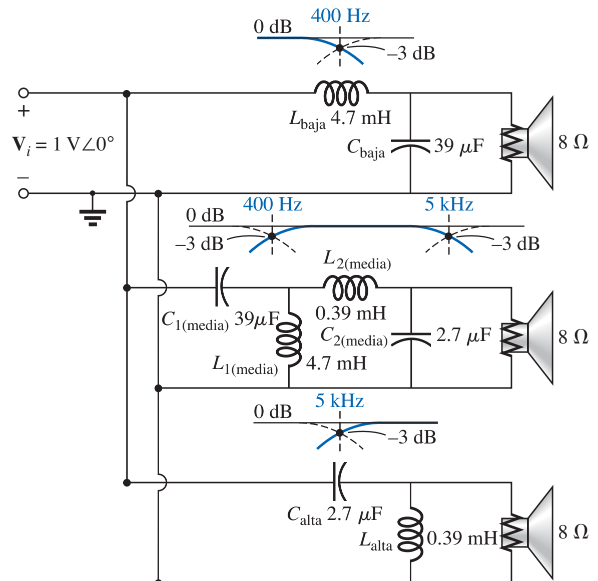


FIGURA 23.120
Problemas 53 y 57.

b. Calcule la razón V_o/V_i para el woofer y el tweeter a la frecuencia de 3 kHz, donde la bocina de intervalo medio está diseñada para predominar.

c. Determine la razón V_o/V_i para la bocina de intervalo medio a la frecuencia de 3 kHz, y compárela con el nivel deseado de 1.

SECCIÓN 23.17 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

54. Mediante un esquema, obtenga la magnitud y la respuesta de fase en función de la frecuencia para la red de la figura 23.104.

55. Mediante un esquema, obtenga la magnitud y la respuesta de fase en función de la frecuencia para la red de la figura 23.107.

***56.** Obtenga las gráficas de fase y de dB para la red de la figura 23.75, y compárelas con las gráficas de las figuras 23.76 y 23.77.

***57.** Mediante un esquema, obtenga las gráficas de magnitud y de dB en función de la frecuencia para cada filtro de la figura 23.120, y verifique si las curvas descienden a 12 dB por octava.

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

58. Escriba un programa que tabule la ganancia de la ecuación (23.14) en función de la frecuencia para un intervalo de frecuencias que se extiende desde $0.1f_1$ hasta $2f_1$ en incrementos de $0.1f_1$. Observe si $f = f_1$ cuando $V_o/V_i = 0.707$. Utilice $R = 1\ \text{k}\Omega$ y $C = 500$ pF.

59. Escriba un programa para tabular $A_{v_{dB}}$ según lo determina la ecuación (23.34) y $A_{v_{dB}}$ como se calcula mediante la ecuación (23.35). Para un intervalo de frecuencia que se extiende desde $0.01f_1$ hasta f_1 en incrementos de $0.01f_1$, compare las magnitudes, y observe si los valores son más cercanos cuando $f \ll f_1$ y si $A_{v_{dB}} = -3$ dB cuando $f = f_1$ para la ecuación (23.34) y cero para la (23.35).

GLOSARIO

Decibel Unidad de medición utilizada para comparar niveles de potencia.

Filtro Redes diseñadas ya sea para dejar pasar o para rechazar la transferencia de señales a ciertas frecuencias para una carga.

Filtro activo Filtro que emplea dispositivos activos tales como transistores o amplificadores operacionales en combinación con elementos *R*, *L* y *C*.

Filtro rechaza-banda Red diseñada para rechazar (bloquear) señales dentro de un intervalo de frecuencias particular.

Filtro de doble sintonización Red que posee tanto una región de banda de paso como una rechaza-banda.

Filtro pasa-altas Filtro diseñado para dejar pasar frecuencias altas y rechazar frecuencias bajas.

Filtro pasa-bajas Filtro diseñado para dejar pasar frecuencias bajas y rechazar frecuencias altas.

Filtro pasa-banda (banda de paso) Red diseñada para dejar pasar señales dentro de un intervalo de frecuencias particular.

Filtro pasivo Filtro construido a partir de elementos *R*, *L* y *C* en serie, en paralelo o en serie-paralelo.

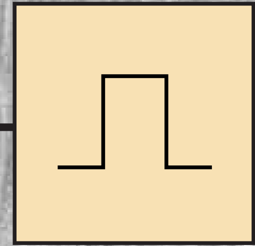
Diagrama de Bode Gráfica de la respuesta en frecuencia de un sistema que utiliza segmentos de recta llamados asíntotas.

Microbar (μbar) Unidad de medición para los niveles de presión de sonido que permite la comparación de niveles de audio en una escala de dB.

Papel log-log (doble logarítmico) Papel milimétrico con escalas logarítmicas vertical y horizontal.

Papel semilogarítmico Papel milimétrico con una escala logarítmica y una lineal.

24



Formas de onda de pulso y la respuesta *R-C*

24.1 INTRODUCCIÓN

Hasta ahora nuestro análisis se ha limitado a formas de onda alternantes que varían de manera senoidal. Este capítulo introducirá la terminología básica asociada con la forma de onda de pulso y examinará la respuesta de un circuito *R-C* a una entrada de onda cuadrada. La importancia de la forma de onda de pulso en la industria eléctrica y electrónica no se puede pasar por alto. Un gran número de dispositivos de instrumentación, de sistemas de comunicación, de computadoras, de sistemas de radar, etc., emplean señales de pulsos para controlar operaciones, transmitir datos y exhibir información en una gran diversidad de formatos.

La respuesta a una señal de pulso de las redes descritas hasta ahora es bastante diferente a la obtenida para señales senoidales. De hecho, retornaremos al capítulo de cd sobre capacitores (Capítulo 10) para recuperar algunos conceptos y ecuaciones fundamentales que nos ayudarán en los análisis a seguir. El contenido de este capítulo es introductorio, fue diseñado simplemente para proporcionar los fundamentos que servirán de ayuda cuando encontremos la forma de onda de pulso en áreas específicas de aplicación.

24.2 IDEAL CONTRA REAL

El **pulso ideal** de la figura 24.1 tiene lados verticales, esquinas agudas y una característica de pico plano; este pulso comienza instantáneamente en t_1 y termina abruptamente en t_2.

La forma de onda de la figura 24.1 será aplicada en el análisis a seguir en este capítulo, y probablemente aparecerá en la investigación inicial de áreas de aplicación que se encuentran más allá del alcance de este texto. Sólo hasta que la operación fundamental de un dispositivo, paquete o sistema sea entendida claramente usando características ideales, debe considerarse el efecto de un **pulso real** (**verdadero** o **práctico**). Si se intentara introducir todas las diferencias existentes entre un pulso ideal y uno real en una sola figura, probablemente el resultado sería complejo y confuso. Por tanto, se usarán varias formas de onda para definir los parámetros críticos.



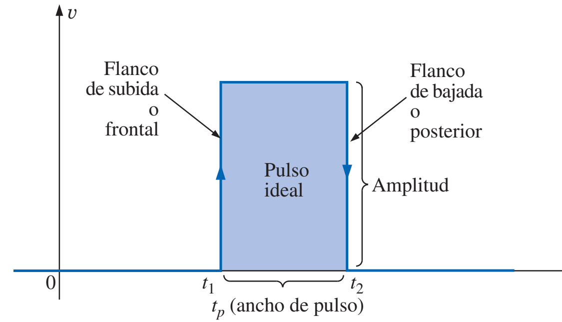


FIGURA 24.1
Forma de onda de pulso ideal.

Los elementos reactivos de una red, en su esfuerzo por prevenir cambios instantáneos en el voltaje (capacitor) y la corriente (inductor), establecen una pendiente en ambos flancos de la forma de onda de pulso, como se muestra en la figura 24.2. El *flanco de subida* de la forma de onda de la figura 24.2 se define como el flanco que se incrementa; es decir, que va desde un nivel inferior hasta uno superior.

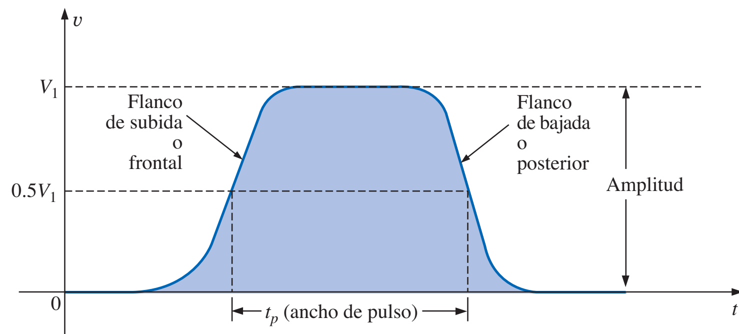


FIGURA 24.2
Forma de onda de pulso real.

El flanco de bajada está definido por la región o flanco donde la forma de onda disminuye; es decir, que va desde un nivel superior hasta uno inferior. Como el flanco de subida es el primero en encontrarse (está más cercano a t = 0 s), se le llama también flanco frontal. El flanco de bajada siempre sigue al flanco frontal, y por ello se le llama a menudo flanco posterior.

Ambas regiones están definidas en las figuras 24.1 y 24.2.

Amplitud

En la mayoría de las aplicaciones, la **amplitud de una forma de onda de pulso** se define como el valor pico a pico. Por supuesto, si todas las formas de onda comienzan y retornan al nivel de cero volts, entonces los valores pico y pico a pico son sinónimos.

Para los fines de este texto, la amplitud de una forma de onda de pulso es el valor pico a pico, como se ilustra en las figuras 24.1 y 24.2.



Ancho de pulso

El* ancho de pulso *(t_p), o duración de pulso, está definido por un nivel de pulso igual al 50% del valor pico.

Para el pulso ideal de la figura 24.1, el ancho de pulso es el mismo a cualquier nivel, mientras que para la forma de onda de la figura 24.2, t_p es un valor muy específico.

Voltaje base

El* voltaje base *(V_b) es el nivel de voltaje desde el cual se inicia el pulso.

Ambas formas de onda de las figuras 24.1 y 24.2 tienen un voltaje base de 0 V. En la figura 24.3(a), el voltaje base es de 1 V, mientras que en la figura 24.3(b) es de −4 V.

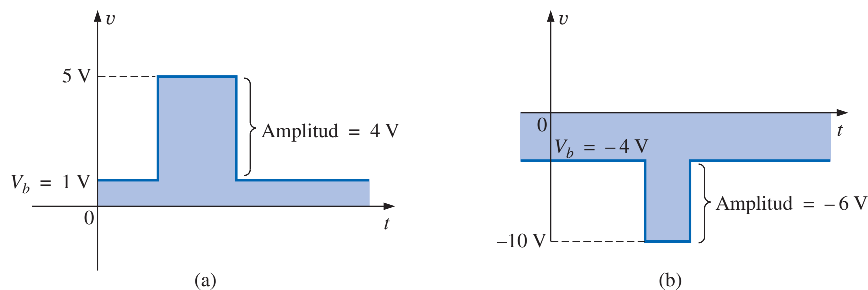


FIGURA 24.3
Definición del voltaje base.

Pulsos de crecimiento positivo y de crecimiento negativo

Un* pulso de crecimiento positivo *aumenta positivamente desde el voltaje base, mientras que un* pulso de crecimiento negativo *disminuye en la dirección negativa desde el voltaje base.

La forma de onda de la figura 24.3(a) representa un pulso de crecimiento positivo, mientras que la forma de onda de la figura 24.3(b) es un pulso de crecimiento negativo.

Aunque el voltaje base de la figura 24.4 es negativo, la forma de onda es de crecimiento positivo (con amplitud de 10 V), ya que el voltaje se incrementa en la dirección positiva desde el voltaje base.

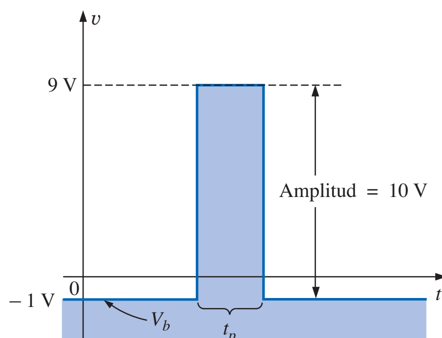


FIGURA 24.4
Pulso de crecimiento positivo.



Tiempo de subida (t_r) y tiempo de bajada (t_f)

El tiempo requerido para que el pulso se desplace de un nivel a otro es de particular importancia. El *redondeo* (definido en la figura 24.5) que ocurre al principio y al final de cada transición vuelve difícil definir con exactitud los puntos en que el tiempo de subida debe iniciarse y terminarse. Por esta razón,

el* tiempo de subida *y el* tiempo de bajada *se definen por los niveles de 10% y 90%, como se indica en la figura 24.5.

Observe que no es requisito que t_r sea igual a t_f.

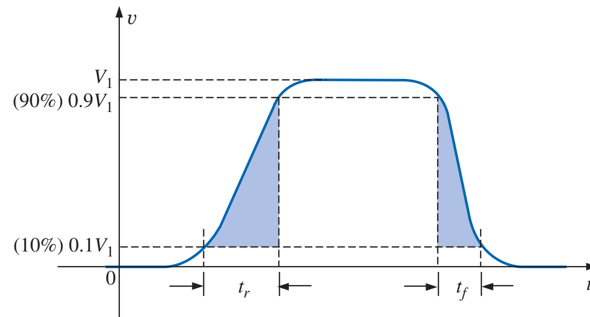


FIGURA 24.5
Definición de t_r y t_f.

Inclinación

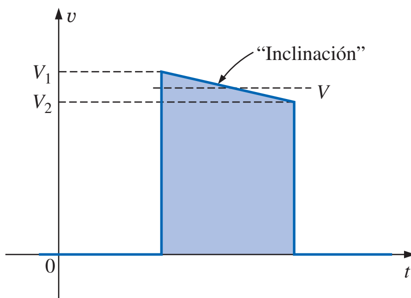


FIGURA 24.6
Definición de inclinación.

Una distorsión no deseable, pero común, que ocurre normalmente debido a una característica de respuesta pobre de baja frecuencia del sistema a través del cual ha pasado un pulso, aparece en la figura 24.6. La caída en el valor pico se llama **inclinación**. El porcentaje de inclinación está definido por:

$$\% \text{ de inclinación} = \frac{V_1 - V_2}{V} \times 100\% \qquad \textbf{(24.1)}$$

donde V es el valor promedio de la amplitud pico determinado por:

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2} \qquad \textbf{(24.2)}$$

Naturalmente, a menor porcentaje de inclinación, más ideal es el pulso. Debido al redondeo, puede ser difícil definir los valores de V_1 y V_2. Es necesario entonces aproximar sólo la región con pendiente por medio de una aproximación lineal y usar los valores resultantes de V_1 y V_2.

Otras distorsiones incluyen el *predisparo* y el *sobredisparo* que aparecen en la figura 24.7, debidos normalmente a los pronunciados efectos de alta frecuencia de un sistema, y las *oscilaciones secundarias*, provocadas por la interacción entre los elementos capacitivos e inductivos de una red en su frecuencia natural o resonante.

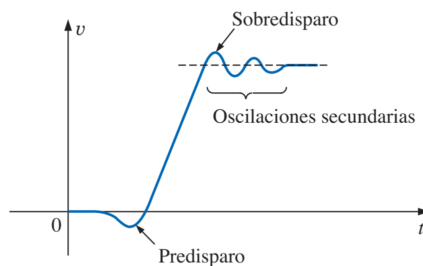


FIGURA 24.7
Definición de predisparo, sobredisparo y oscilaciones secundarias.

EJEMPLO 24.1 Determine lo siguiente para la forma de onda de pulso de la figura 24.8:

a. ¿Es de crecimiento positivo o negativo?
b. El voltaje base.

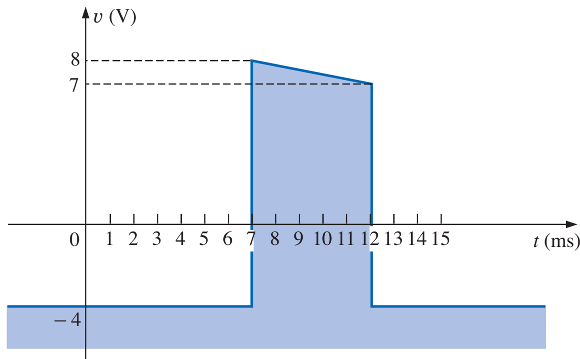


FIGURA 24.8
Ejemplo 24.1.

c. El ancho de pulso.
d. La amplitud máxima.
e. La inclinación.

Soluciones:
a. **de crecimiento positivo**
b. $V_b = \mathbf{-4\ V}$
c. $t_p = (12 - 7)\ \text{ms} = \mathbf{5\ ms}$
d. $V_{\text{máx}} = 8\ \text{V} + 4\ \text{V} = \mathbf{12\ V}$
e. $V = \dfrac{V_1 + V_2}{2} = \dfrac{12\ \text{V} + 11\ \text{V}}{2} = \dfrac{23\ \text{V}}{2} = 11.5\ \text{V}$

$$\%\ \text{de inclinación} = \frac{V_1 - V_2}{V} \times 100\% = \frac{12\ \text{V} - 11\ \text{V}}{11.5\ \text{V}} \times 100\% = \mathbf{8.696\%}$$

(Recuerde, V está definido por el valor promedio de la amplitud pico.)

EJEMPLO 24.2 Determine lo siguiente para la forma de onda de pulso de la figura 24.9:
a. ¿Es de crecimiento positivo o negativo?
b. El voltaje base.
c. La inclinación.
d. La amplitud.
e. t_p.
f. t_r y t_f.

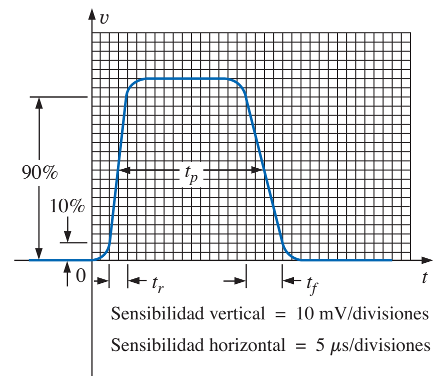


FIGURA 24.9
Ejemplo 24.2.

Soluciones:
a. **de crecimiento positivo**
b. $V_b = \mathbf{0\ V}$
c. % de inclinación = **0%**
d. amplitud = (4 divisiones)(10 mV/divisiones) = **40 mV**
e. t_p = (3.2 divisiones)(5 μs/divisiones) = **16 μs**
f. t_r = (0.4 divisiones)(5 μs/divisiones) = **2 μs**
t_f = (0.8 divisiones)(5 μs/divisiones) = **4 μs**

24.3 RAZÓN DE REPETICIÓN DE PULSO Y CICLO DE TRABAJO

Una serie de pulsos como los de la figura 24.10 se denomina **tren de pulsos**. Los anchos y las alturas variables pueden contener información susceptible de ser descifrada en el extremo receptor.



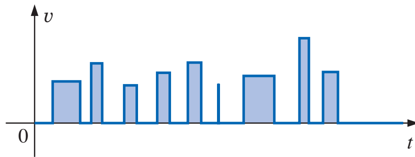


FIGURA 24.10
Tren de pulsos.

Si el patrón se repite de manera periódica como se muestra en las figuras 24.11 (a) y (b), el resultado se llama **tren de pulsos periódicos**.

El *periodo* (T) del tren de pulsos se define como la diferencia de tiempo entre dos puntos similares cualesquiera sobre el tren de pulsos, como se muestra en las figuras 24.11(a) y (b).

La **frecuencia de repetición de pulso** (frp), o **razón de repetición de pulso** (prr), está definida por:

$$\text{frp (o prr)} = \frac{1}{T} \qquad \text{(Hz o pulsos/s)} \tag{24.3}$$

Aplicar la ecuación (24.3) a cada forma de onda de la figura 24.11 resultará en la misma frecuencia de repetición de pulso ya que los periodos son los mismos. El resultado revela claramente que

la forma del pulso periódico no afecta la determinación de la frecuencia de repetición de pulso.

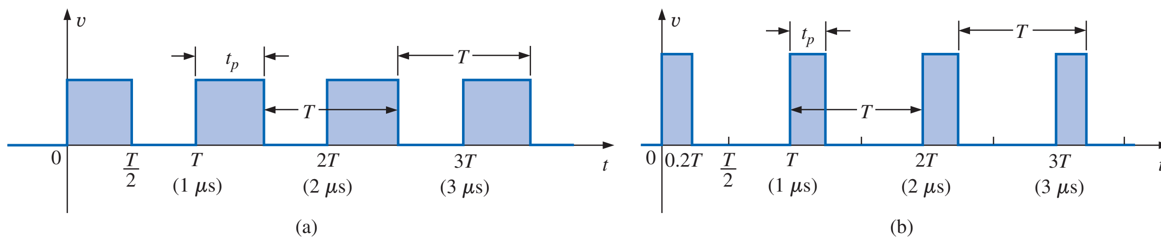


FIGURA 24.11
Trenes de pulsos periódicos.

La frecuencia de repetición de pulso está determinada solamente por el periodo del pulso repetido. El factor que revelará cuánto del periodo está abarcado por el pulso se llama **ciclo de trabajo**, y se define como sigue:

$$\text{Ciclo de trabajo} = \frac{\text{ancho de pulso}}{\text{periodo}} \times 100\%$$

o bien:

$$\text{Ciclo de trabajo} = \frac{t_p}{T} \times 100\% \tag{24.4}$$

Para la figura 24.11(a) (un patrón de onda cuadrada),

$$\text{Ciclo de trabajo} = \frac{0.5T}{T} \times 100\% = \mathbf{50\%}$$

y para la figura 24.11(b),

$$\text{Ciclo de trabajo} = \frac{0.2T}{T} \times 100\% = \mathbf{20\%}$$

Los resultados anteriores revelan claramente que

el ciclo de trabajo proporciona una indicación porcentual de la parte del periodo total comprendida por la forma de onda de pulso.



EJEMPLO 24.3 Determine la frecuencia de repetición de pulso y el ciclo de trabajo para la forma de onda de pulsos periódicos de la figura 24.12.

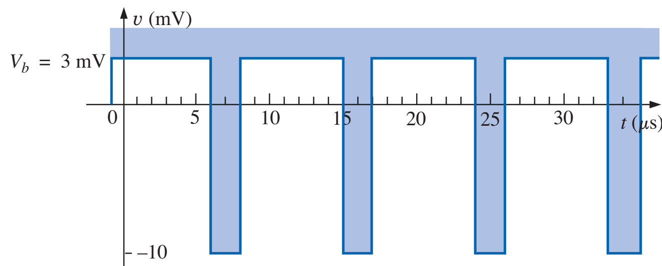


FIGURA 24.12
Ejemplo 24.3.

Solución:

$$T = (15 - 6)\ \mu s = 9\ \mu s$$

$$\text{prf} = \frac{1}{T} = \frac{1}{9\ \mu s} \cong \mathbf{111.11\ kHz}$$

$$\text{Ciclo de trabajo} = \frac{t_p}{T} \times 100\% = \frac{(8-6)\ \mu s}{9\ \mu s} \times 100\%$$

$$= \frac{2}{9} \times 100\% \cong \mathbf{22.22\%}$$

EJEMPLO 24.4 Determine la frecuencia de repetición de pulso y el ciclo de trabajo para el patrón de osciloscopio de la figura 24.13 que tiene las sensibilidades indicadas.

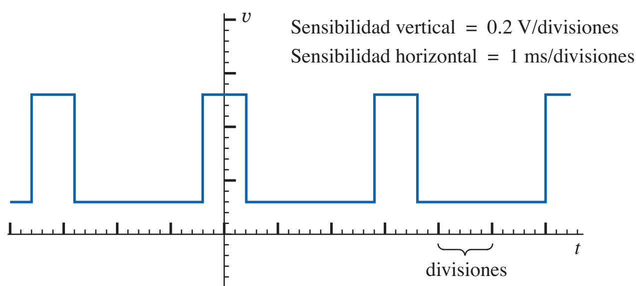


FIGURA 24.13
Ejemplo 24.4.

Solución:

$$T = (3.2\ \text{divisiones})(1\ \text{ms/divisiones}) = 3.2\ \text{ms}$$

$$t_p = (0.8\ \text{divisiones})(1\ \text{ms/divisiones}) = 0.8\ \text{ms}$$

$$\text{prf} = \frac{1}{T} = \frac{1}{3.2\ \text{ms}} = \mathbf{312.5\ Hz}$$

$$\text{Ciclo de trabajo} = \frac{t_p}{T} \times 100\% = \frac{0.8\ \text{ms}}{3.2\ \text{ms}} \times 100\% = \mathbf{25\%}$$



EJEMPLO 24.5 Determine la razón de repetición de pulso y el ciclo de trabajo para la forma de onda de disparo de la figura 24.14.

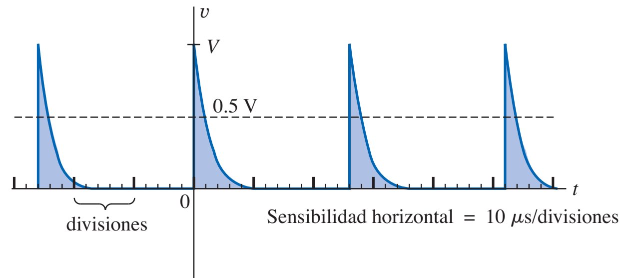


FIGURA 24.14
Ejemplo 24.5.

Solución:

$$T = (2.6 \text{ divisiones})(10\ \mu\text{s/divisiones}) = 26\ \mu\text{s}$$

$$\text{prf} = \frac{1}{T} = \frac{1}{26\ \mu\text{s}} = \mathbf{38{,}462\ kHz}$$

$$t_p \cong (0.2 \text{ divisiones})(10\ \mu\text{s/divisiones}) = 2\ \mu\text{s}$$

$$\text{Ciclo de trabajo} = \frac{t_p}{T} \times 100\% = \frac{2\ \mu\text{s}}{26\ \mu\text{s}} \times 100\% = \mathbf{7.69\%}$$

24.4 VALOR PROMEDIO

El valor promedio de una forma de onda de pulso puede determinarse usando uno de los dos métodos. El primer método es el procedimiento delineado en la sección 13.6, que puede aplicarse a cualquier forma de onda alterna. El segundo puede ser aplicado sólo a formas de onda de pulso ya que utiliza términos específicamente relacionados con formas de onda de pulso; es decir,

$$V_{\text{promedio}} = (\text{ciclo de trabajo})(\text{valor pico}) + (1 - \text{ciclo de trabajo})(V_b) \qquad \mathbf{(24.5)}$$

En la ecuación (24.5), el valor pico es la desviación máxima desde el nivel de referencia o cero volts, y el ciclo de trabajo está en forma decimal. La ecuación (24.5) no incluye el efecto de ninguna inclinación en formas de ondas de pulso con flancos inclinados.

EJEMPLO 24.6 Determine el valor promedio para la forma de onda de pulso periódico de la figura 24.15.

Solución: Mediante el método de la sección 13.6,

$$G = \frac{\text{área bajo la curva}}{T}$$

$$T = (12 - 2)\ \mu\text{s} = 10\ \mu\text{s}$$

$$G = \frac{(8\text{ mV})(4\ \mu\text{s}) + (2\text{ mV})(6\ \mu\text{s})}{10\ \mu\text{s}} = \frac{32 \times 10^{-9} + 12 \times 10^{-9}}{10 \times 10^{-6}}$$

$$= \frac{44 \times 10^{-9}}{10 \times 10^{-6}} = \mathbf{4.4\ mV}$$



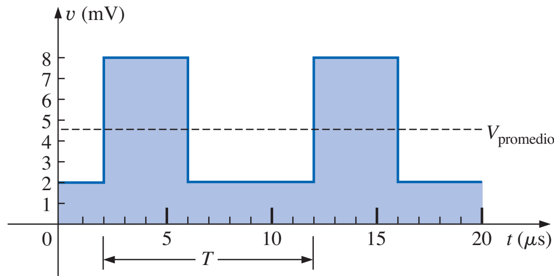


FIGURA 24.15
Ejemplo 24.6.

Mediante la ecuación (24.5),

$$V_b = +2 \text{ mV}$$

$$\text{Ciclo de trabajo} = \frac{t_p}{T} = \frac{(6-2)\ \mu\text{s}}{10\ \mu\text{s}} = \frac{4}{10} = 0.4 \text{ (forma decimal)}$$

$$\text{Valor pico (desde la referencia de 0 V)} = 8 \text{ mV}$$

$$\begin{aligned} V_{promedio} &= (\text{ciclo de trabajo})(\text{valor pico}) + (1 - \text{ciclo de trabajo})(V_b) \\ &= (0.4)(8 \text{ mV}) + (1 - 0.4)(2 \text{ mV}) \\ &= 3.2 \text{ mV} + 1.2 \text{ mV} = \mathbf{4.4\ mV} \end{aligned}$$

como se obtuvo antes.

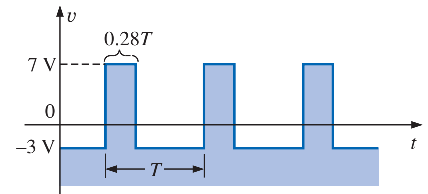


FIGURA 24.16
Solución a la parte (b) del ejemplo 24.7.

EJEMPLO 24.7 Dada una forma de onda de pulso periódico con ciclo de trabajo de 28%, valor pico de 7 V, y voltaje base de −3 V:

a. Determine el valor promedio.
b. Trace la forma de onda.
c. Verifique el resultado de la parte (a) usando el método de la sección 13.6.

Soluciones:

a. Mediante la ecuación (24.5),

$$\begin{aligned} V_{promedio} &= (\text{ciclo de trabajo})(\text{valor pico}) + (1 - \text{ciclo de trabajo})(V_b) \\ &= (0.28)(7 \text{ V}) + (1 - 0.28)(-3 \text{ V}) = 1.96 \text{ V} + (-2.16 \text{ V}) \\ &= \mathbf{-0.2\ V} \end{aligned}$$

b. Vea la figura 24.16.

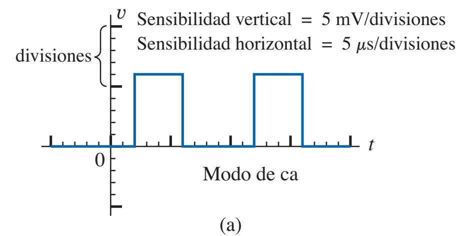
c. $$G = \frac{(7 \text{ V})(0.28T) - (3 \text{ V})(0.72T)}{T} = 1.96 \text{ V} - 2.16 \text{ V}$$

$$= \mathbf{-0.2\ V}$$

como se obtuvo antes.

Instrumentación

El valor promedio (valor de cd) de cualquier forma de onda puede ser determinado fácilmente usando el osciloscopio. Si el interruptor de modo del osciloscopio se fija en la posición de ca, el promedio o componente de cd de la forma de onda aplicada será bloqueado por un capacitor interno impidiendo que alcance la pantalla. El patrón puede ser ajustado para establecer la exhibición de la figura 24.17(a). Si el interruptor de modo se coloca entonces en la posición



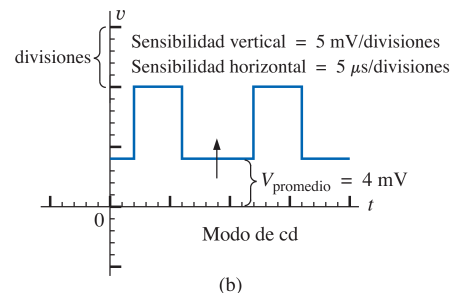


FIGURA 24.17
Determinación del valor promedio de una forma de onda de pulso utilizando un osciloscopio.



de cd, el desplazamiento vertical (positivo o negativo) revelará el nivel promedio o cd de la señal de entrada, como se muestra en la figura 24.17(b).

24.5 REDES *R-C* TRANSITORIAS

En el capítulo 10 se desarrolló la solución general para el comportamiento transitorio de una red *R-C* con o sin valores iniciales. La ecuación resultante para el voltaje en un capacitor se repite abajo por conveniencia.

$$v_C = V_f + (V_i - V_f)e^{-t/RC} \qquad \textbf{(24.6)}$$

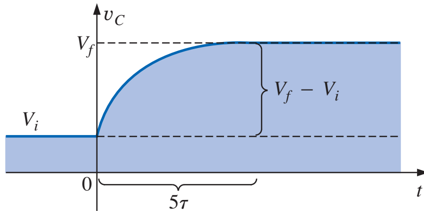


FIGURA 24.18
Definición de los parámetros de la ecuación (24.6).

Recuerde que V_i es el voltaje inicial en el capacitor cuando la fase transitoria empieza como se muestra en la figura 24.18. El voltaje V_f es el valor de estado estable (en reposo) del voltaje en el capacitor cuando ha terminado la fase transitoria. El periodo transitorio se aproxima por 5τ, donde τ es la constante de tiempo de la red y es igual al producto *RC*.

Para la situación en que el voltaje inicial es de cero volts, la ecuación se reduce a la siguiente forma conocida, donde V_f es a menudo el voltaje aplicado:

$$v_C = V_f(1 - e^{-t/RC}) \qquad V_i = 0\text{ V} \qquad \textbf{(24.7)}$$

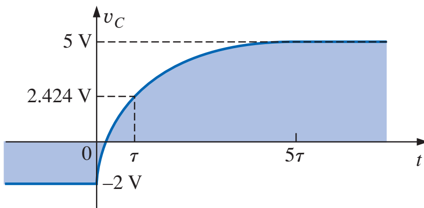


FIGURA 24.19
Ejemplo del uso de la ecuación (24.6).

Para el caso de la figura 24.19, $V_i = -2$ V, $V_f = +5$ V, y

$$\begin{aligned} v_C &= V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-t/RC}) \\ &= -2\text{ V} + [5\text{ V} - (-2\text{ V})](1 - e^{-t/RC}) \\ v_C &= -2\text{ V} + 7\text{ V}(1 - e^{-t/RC}) \end{aligned}$$

Para el caso en que $t = \tau = RC$,

$$\begin{aligned} v_C &= -2\text{ V} + 7\text{ V}(1 - e^{-t/\tau}) = -2\text{ V} + 7\text{ V}(1 - e^{-1}) \\ &= -2\text{ V} + 7\text{ V}(1 - 0.368) = -2\text{ V} + 7\text{ V}(0.632) \\ v_C &= 2.424\text{ V} \end{aligned}$$

como lo comprueba la figura 24.19.

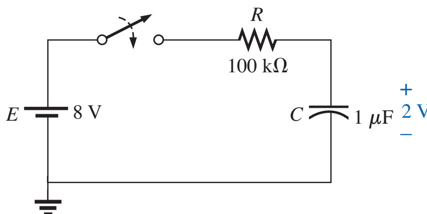


FIGURA 24.20
Ejemplo 24.8.

EJEMPLO 24.8 El capacitor de la figura 24.20 está cargado inicialmente a 2 V antes de cerrar el interruptor. Luego se cierra el interruptor.

a. Determine la expresión matemática para v_C.
b. Determine la expresión matemática para i_C.
c. Trace las formas de onda de v_C e i_C.

Soluciones:

a. $V_i = 2$ V
V_f (después de 5τ) $= E = 8$ V
$\tau = RC = (100\text{ k}\Omega)(1\ \mu\text{F}) = 100$ ms

Mediante la ecuación (24.6),

$$\begin{aligned} v_C &= V_f + (V_i - V_f)e^{-t/RC} \\ &= 8\text{ V} + (2\text{ V} - 8\text{ V})e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

y $$\boldsymbol{v_C = 8\text{ V} - 6\text{ V}\, e^{-t/\tau}}$$



b. Cuando el interruptor se cierra, el voltaje en el capacitor no puede cambiar instantáneamente, y $V_R = E - V_i = 8\text{ V} - 2\text{ V} = 6\text{ V}$. La corriente salta, por tanto, a un nivel determinado por la ley de Ohm:

$$I_{R_{\text{máx}}} = \frac{V_R}{R} = \frac{6\text{ V}}{100\text{ k}\Omega} = 0.06\text{ mA}$$

La corriente decaerá entonces a cero ampere con la misma constante calculada en la parte (a), e

$$i_C = \mathbf{0.06\ mA}e^{-t/\tau}$$

c. Vea la figura 24.21.

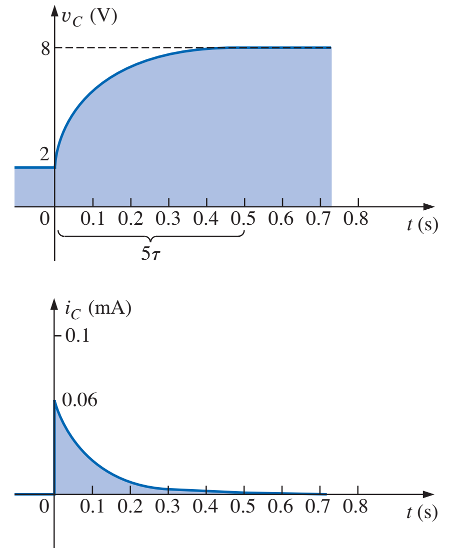


FIGURA 24.21
v_C e i_C para la red de la figura 24.20.

EJEMPLO 24.9 Trace v_C para el escalón de entrada mostrado en la figura 24.22. Suponga que el voltaje de -4 mV ha estado presente por un lapso mayor a cinco constantes de tiempo de la red. Determine entonces cuándo $v_C = 0$ V si el escalón cambia de niveles en $t = 0$ s.

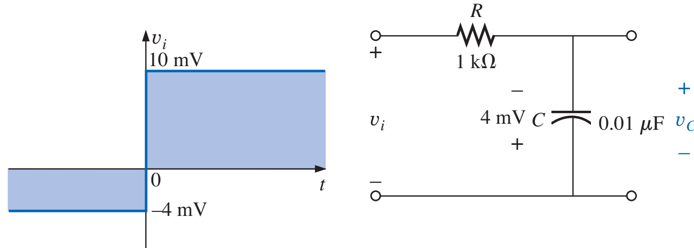


FIGURA 24.22
Ejemplo 24.9.

Solución:

$$V_i = -4\text{ mV} \qquad V_f = 10\text{ mV}$$
$$\tau = RC = (1\text{ k}\Omega)(0.01\ \mu\text{F}) = 10\ \mu\text{s}$$

Mediante la ecuación (24.6),

$$\begin{aligned} v_C &= V_f + (V_i - V_f)e^{-t/RC} \\ &= 10\text{ mV} + (-4\text{ mV} - 10\text{ mV})e^{-t/10\mu s} \end{aligned}$$

y
$$v_C = \mathbf{10\ mV - 14\ mV}\ e^{-t/10\mu s}$$

La forma de onda aparece en la figura 24.23.

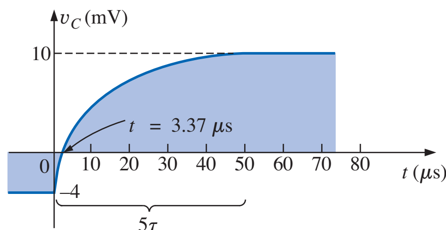


FIGURA 24.23
v_C para la red de la figura 24.22.



Al sustituir $v_C = 0$ V en la ecuación anterior resulta:

$$v_C = 0\text{ V} = 10\text{ mV} - 14\text{ mV}\, e^{-t/10\mu\text{s}}$$

y
$$\frac{10\text{ mV}}{14\text{ mV}} = e^{-t/10\mu\text{s}}$$

o bien:
$$0.714 = e^{-t/10\mu\text{s}}$$

pero:
$$\log_e 0.714 = \log_e(e^{-t/10\mu\text{s}}) = \frac{-t}{10\ \mu\text{s}}$$

y
$$t = -(10\ \mu\text{s})\log_e 0.714 = -(10\ \mu\text{s})(-0.377) = \mathbf{3.37\ \mu s}$$

como se indica en la figura 24.23.

24.6 RESPUESTA *R-C* A ENTRADAS DE ONDA CUADRADA

La **onda cuadrada** de la figura 24.24 es una forma particular de forma de onda de pulso. Tiene un ciclo de trabajo de 50% y valor promedio de cero volts, que se calculan como sigue:

$$\text{Ciclo de trabajo} = \frac{t_p}{T} \times 100\% = \frac{T/2}{T} \times 100\% = \mathbf{50\%}$$

$$V_{\text{promedio}} = \frac{(V_1)(T/2) + (-V_1)(T/2)}{T} = \frac{0}{T} = \mathbf{0\ V}$$

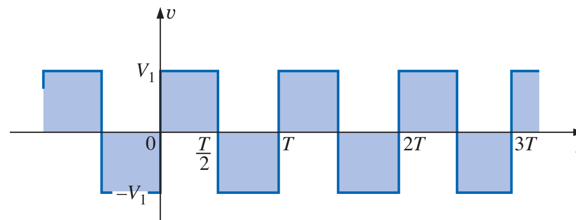


FIGURA 24.24
Onda cuadrada periódica.

La aplicación de un voltaje de cd V_1 en serie con la onda cuadrada de la figura 24.24 puede elevar el voltaje base desde $-V_1$ hasta cero volts, y el valor promedio a V_1 volts.

Si una onda cuadrada como la de la figura 24.25 se aplica a un circuito *R-C*

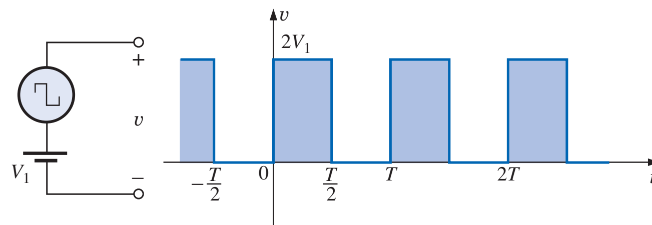


FIGURA 24.25
Subida del voltaje de línea base de una onda cuadrada a cero volts.

como se muestra en la figura 24.26, el periodo de la onda cuadrada puede tener un efecto pronunciado sobre la forma de onda resultante para v_C.

En el análisis siguiente supondremos que se han establecido condiciones de estado estable después que ha pasado un periodo de cinco constantes de tiempo. Las formas de onda desarrolladas en el capacitor pueden ser clasificadas en tres tipos fundamentales: $T/2 > 5\tau$; $T/2 = 5\tau$; y $T/2 < 5\tau$.

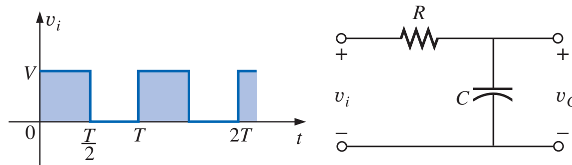


FIGURA 24.26
Aplicación de un tren de pulsos periódico de onda cuadrada a una red R-C.

$T/2 > 5\tau$

La condición $T/2 > 5\tau$, o $T > 10\tau$, establece una situación donde el capacitor puede cargarse a su valor de estado estable antes de $t = T/2$. Las formas de onda resultantes para v_C e i_C se verán como se muestra en la figura 24.27. Observe con cuánta semejanza el voltaje v_C "sombrea" la forma de onda aplicada, y cómo i_C es nada más que una serie de picos muy agudos. También advierta que el cambio de V_i desde V hasta cero volts en el flanco posterior simplemente produce una rápida descarga de v_C a cero volts. En esencia, cuando $V_i = 0$, el capacitor y el resistor están en paralelo y el capacitor simplemente se descarga a través de R con una constante de tiempo igual a la encontrada durante la fase de carga, pero con una dirección de flujo de carga (corriente) opuesta a la establecida durante la fase de carga.

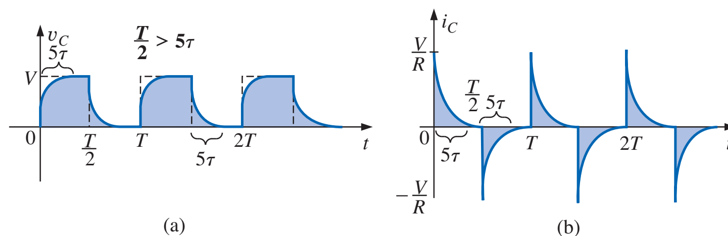


FIGURA 24.27
v_C e i_C para $T/2 > 5\tau$.

$T/2 = 5\tau$

Si la frecuencia de la onda cuadrada se elige de manera que $T/2 = 5\tau$ o $T = 10\tau$, el voltaje v_C alcanzará su valor final justo antes del principio de su fase de descarga, como se muestra en la figura 24.28. El voltaje v_C ya no se parece a la entrada de onda cuadrada y, de hecho, tiene algunas de las características de una forma de onda triangular. La constante de tiempo incrementada ha resultado en una v_C más redondeada, e i_C ha crecido considerablemente a lo ancho, lo cual muestra el periodo de carga más largo.



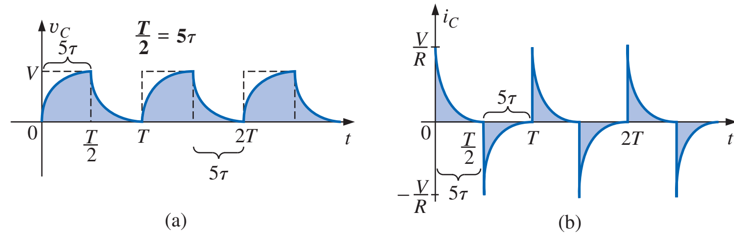


FIGURA 24.28
v_C e i_C para $T/2 = 5\tau$.

$T/2 < 5\tau$

Si $T/2 < 5\tau$ o $T < 10\tau$, el voltaje v_C no alcanzará su valor final durante el primer pulso (Figura 24.29), y el ciclo de descarga no retornará a cero volts. De hecho, el valor inicial para cada pulso sucesivo cambiará hasta que se alcancen condiciones de estado permanente. En la mayoría de los casos, es una buena aproximación suponer que se han establecido condiciones de estado permanente en cinco ciclos de la forma de onda aplicada.

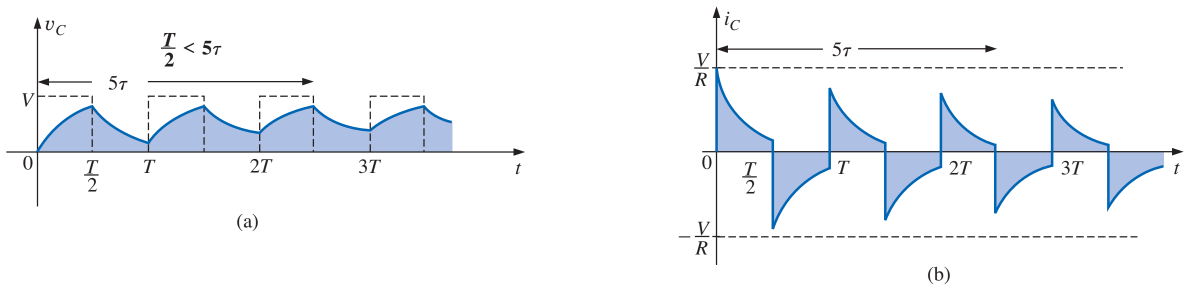


FIGURA 24.29
v_C e i_C para $T/2 < 5\tau$.

Conforme aumente la frecuencia y el periodo disminuya, habrá un aplanamiento de la respuesta para v_C hasta que resulte un patrón como el de la figura 24.30. Esta figura comienza a revelar una importante conclusión relativa a la curva de respuesta para v_C:

Bajo condiciones de estado permanente, el valor promedio de v_C será igual al valor promedio de la onda cuadrada aplicada.

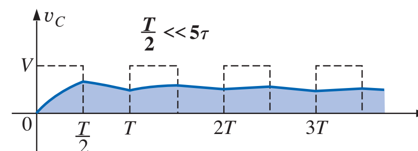


FIGURA 24.30
v_C para $T/2 \ll 5\tau$ o $T \ll 10\tau$.



En las figuras 24.29 y 24.30, observe que la forma de onda para v_C tiende a un valor promedio de $V/2$.

EJEMPLO 24.10 La onda cuadrada de 1000 Hz de la figura 24.31 se aplica al circuito *R-C* de la misma figura.

a. Compare el ancho de pulso de la onda cuadrada con la constante de tiempo del circuito.
b. Trace v_C.
c. Trace i_C.

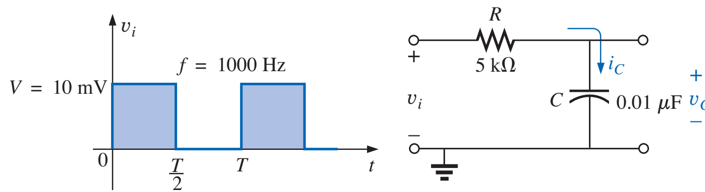


FIGURA 24.31
Ejemplo 24.10.

Soluciones:

a. $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{1000} = 1\text{ ms}$

$$t_p = \frac{T}{2} = 0.5\text{ ms}$$

$$\tau = RC = (5 \times 10^3\ \Omega)(0.01 \times 10^{-6}\text{ F}) = 0.05\text{ ms}$$

$$\frac{t_p}{\tau} = \frac{0.5\text{ ms}}{0.05\text{ ms}} = 10 \text{ y}$$

$$t_p = \mathbf{10\tau} = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}}$$

El resultado muestra que v_C se cargará a su valor final en medio ancho de pulso.

b. Para la fase de carga, $V_i = 0$ V y $V_f = 10$ mV, y

$$v_C = V_f + (V_i - V_f)e^{-t/RC}$$
$$= 10\text{ mV} + (0 - 10\text{ mV})e^{-t/\tau}$$

y $$v_C = \mathbf{10\ mV(1 - e^{-t/\tau})}$$

Para la fase de descarga, $V_i = 10$ mV y $V_f = 0$ V, y

$$v_C = V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau}$$
$$= 0\text{ V} + (10\text{ mV} - 0\text{ V})e^{-t/\tau}$$

y $$v_C = \mathbf{10\ mVe^{-t/\tau}}$$

En la figura 24.32 se muestra la forma de onda para v_C.

c. Para la fase de carga en $t = 0$ s, $V_R = V$ e $I_{R_{\text{máx}}} = V/R = 10\text{ mV}/5\text{ k}\Omega = 2\ \mu\text{A}$, e

$$i_C = I_{\text{máx}}e^{-t/\tau} = \mathbf{2\ \mu Ae^{-t/\tau}}$$

Para la fase de descarga, la corriente tendrá la misma forma matemática pero dirección opuesta, como se muestra en la figura 24.33.

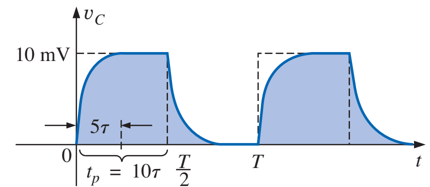


FIGURA 24.32
v_C para la red R-C de la figura 24.31.

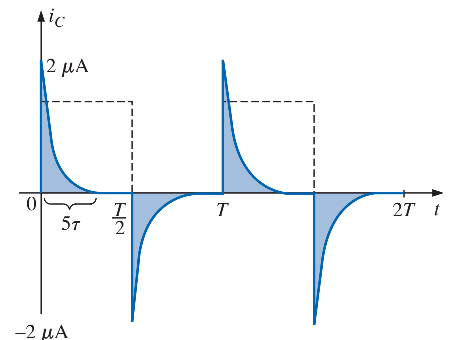


FIGURA 24.33
i_C para la red R-C de la figura 24.31.



EJEMPLO 24.11 Resuelva el ejemplo 24.10 para $f = 10$ kHz.

Solución:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10\text{ kHz}} = 0.1\text{ ms}$$

y
$$\frac{T}{2} = 0.05\text{ ms}$$

con:
$$\tau = t_p = \frac{T}{2} = 0.05\text{ ms}$$

En otras palabras, el ancho del pulso es exactamente igual a la constante de tiempo de la red. El voltaje v_C no alcanzará el valor final antes que el primer pulso de la entrada de onda cuadrada retorne a cero volts.

Para t en el intervalo $t = 0$ a $T/2$, $V_i = 0$ V y $V_f = 10$ mV, y

$$v_C = 10\text{ mV}(1 - e^{-t/\tau})$$

Recordemos del capítulo 10 que en $t = \tau$, $v_C = 63.2\%$ del valor final. Al sustituir $t = \tau$ en la ecuación anterior resulta:

$$\begin{aligned} v_C &= (10\text{ mV})(1 - e^{-1}) = (10\text{ mV})(1 - 0.368) \\ &= (10\text{ mV})(0.632) = 6.32\text{ mV} \end{aligned}$$

como se muestra en la figura 24.34.

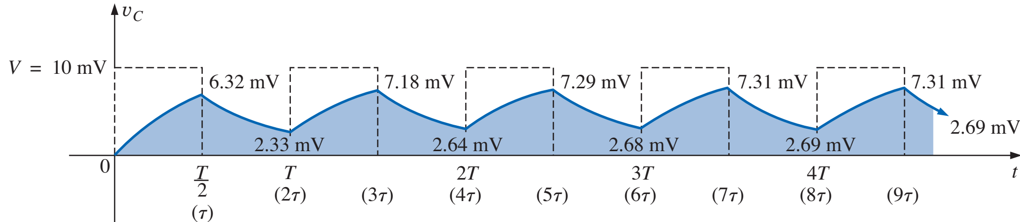


FIGURA 24.34
Respuesta v_C para $t_p = \tau = T/2$.

Para la fase de descarga entre $t = T/2$ y T, $V_i = 6.32$ mV y $V_f = 0$ V, y

$$\begin{aligned} v_C &= V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau} \\ &= 0\text{ V} + (6.32\text{ mV} - 0\text{ V})e^{-t/\tau} \\ v_C &= 6.32\text{ mV}e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

con t medida ahora a partir de $t = T/2$ en la figura 24.34. En otras palabras, para cada intervalo de la figura 24.34, el principio de la forma de onda transitoria está definido como $t = 0$ s. El valor de v_C en $t = T$ se determina, por tanto, sustituyendo $t = \tau$ en la ecuación anterior, y no 2τ como se definió mediante la figura 24.34.

Sustituyendo $t = \tau$,

$$\begin{aligned} v_C &= (6.32\text{ mV})(e^{-1}) = (6.32\text{ mV})(0.368) \\ &= 2.33\text{ mV} \end{aligned}$$

como se muestra en la figura 24.34.

Para el siguiente intervalo, $V_i = 2.33$ mV y $V_f = 10$ mV, y

$$\begin{aligned} \upsilon_C &= V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau} \\ &= 10 \text{ mV} + (2.33 \text{ mV} - 10 \text{ mV})e^{-t/\tau} \\ \upsilon_C &= 10 \text{ mV} - 7.67 \text{ mV } e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

En $t = \tau$ (como $t = T = 2\tau$ es ahora $t = 0$ s para este intervalo),

$$\begin{aligned} \upsilon_C &= 10 \text{ mV} - 7.67 \text{ mV}e^{-1} \\ &= 10 \text{ mV} - 2.82 \text{ mV} \\ \upsilon_C &= 7.18 \text{ mV} \end{aligned}$$

como se muestra en la figura 24.34.

Para el intervalo de descarga, $V_i = 7.18$ mV y $V_f = 0$ V, y

$$\begin{aligned} \upsilon_C &= V_f + (V_i - V_f)e^{-t/\tau} \\ &= 0 \text{ V} + (7.18 \text{ mV} - 0)e^{-t/\tau} \\ \upsilon_C &= 7.18 \text{ mV}e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

En $t = \tau$ (medido desde 3τ a partir de la figura 24.34),

$$\begin{aligned} \upsilon_C &= (7.18 \text{ mV})(e^{-1}) = (7.18 \text{ mV})(0.368) \\ &= 2.64 \text{ mV} \end{aligned}$$

como se muestra en la figura 24.34.

Continuando de la misma manera, la restante forma de onda para υ_C será generada como se describe en la figura 24.34. Observe que la repetición ocurre después de $t = 8\tau$, y la forma de onda esencialmente ha alcanzado condiciones de estado permanente en un periodo menor a 10τ, o cinco ciclos de la onda cuadrada aplicada.

Una inspección más atenta revelará que los niveles pico e inferiores continuaron aumentando hasta que se establecieron las condiciones de estado permanente. Como las formas de onda exponenciales entre $t = 4T$ y $t = 5T$ tienen la misma constante de tiempo, el valor promedio de υ_C puede ser determinado a partir de los niveles de estado permanente de 7.31 mV y 2.69 mV como sigue:

$$V_{\text{promedio}} = \frac{7.31 \text{ mV} + 2.69 \text{ mV}}{2} = \frac{10 \text{ mV}}{2} = 5 \text{ mV}$$

que es igual al valor promedio de la señal aplicada como se estableció en esta sección.

Podemos usar los resultados de la figura 24.34 para graficar i_C. En cualquier instante,

$$\upsilon_i = \upsilon_R + \upsilon_C \quad \text{o} \quad \upsilon_R = \upsilon_i - \upsilon_C$$

e

$$i_R = i_C = \frac{\upsilon_i - \upsilon_C}{R}$$

En $t = 0^+$, $\upsilon_C = 0$ V, e

$$i_R = \frac{\upsilon_i - \upsilon_C}{R} = \frac{10 \text{ mV} - 0}{5 \text{ k}\Omega} = 2 \ \mu\text{A}$$

como se muestra en la figura 24.35.

Conforme se desarrolle el proceso de carga, la corriente i_C disminuirá a una razón determinada por:

$$i_C = 2 \ \mu\text{A}e^{-t/\tau}$$

En $t = \tau$,

$$\begin{aligned} i_C &= (2 \ \mu\text{A})(e^{-\tau/\tau}) = (2 \ \mu\text{A})(e^{-1}) = (2 \ \mu\text{A})(0.368) \\ &= 0.736 \ \mu\text{A} \end{aligned}$$

como se muestra en la figura 24.35.



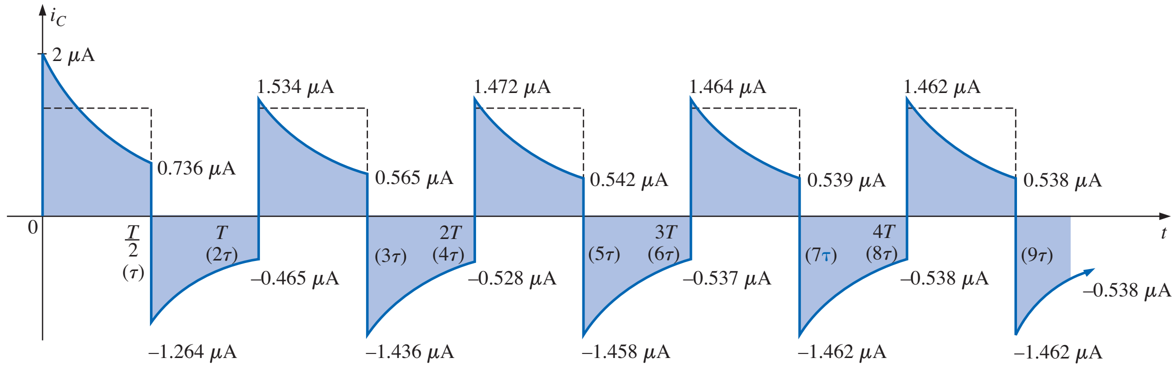


FIGURA 24.35
Respuesta i_C para $t_p = \tau = T/2$.

Para el flanco posterior del primer pulso, el voltaje en el capacitor no puede cambiar de manera instantánea, resultando en lo siguiente cuando v_i cae a cero volts:

$$i_C = i_R = \frac{v_i - v_C}{R} = \frac{0 - 6.32\text{ mV}}{5\text{ k}\Omega} = -1.264\ \mu\text{A}$$

como se ilustra en la figura 24.35. La corriente disminuirá entonces como lo determina:

$$i_C = -1.264\ \mu\text{A}e^{-t/\tau}$$

y en $t = \tau$ (en realidad $t = 2\tau$ en la figura 24.35),

$$\begin{aligned} i_C &= (-1.264\ \mu\text{A})(e^{-\tau/\tau}) = (-1.264\ \mu\text{A})(e^{-1}) \\ &= (-1.264\ \mu\text{A})(0.368) = -0.465\ \mu\text{A} \end{aligned}$$

como se muestra en la figura 24.35.

En $t = T$ ($t = 2\tau$), $v_C = 2.33$ mV, y v_i retorna a 10 mV, resultando en:

$$i_C = i_R = \frac{v_i - v_C}{R} = \frac{10\text{ mV} - 2.33\text{ mV}}{5\text{ k}\Omega} = 1.534\ \mu\text{A}$$

La ecuación para la corriente que disminuye es ahora:

$$i_C = 1.534\ \mu\text{A}e^{-t/\tau}$$

y en $t = \tau$ (en realidad $t = 3\tau$ en la figura 24.35),

$$i_C = (1.534\ \mu\text{A})(0.368) = 0.565\ \mu\text{A}$$

El proceso continuará hasta que se alcancen las condiciones de estado permanente en el mismo tiempo que se alcanzaron para v_C. Observe en la figura 24.35 que la corriente pico positiva disminuyó hacia condiciones de estado permanente mientras que el pico negativo se volvió más negativo. Es también interesante e importante darse cuenta de que la forma de onda de la corriente se vuelve simétrica con respecto al eje cuando se establecen condiciones de estado permanente. El resultado es que la corriente neta promedio sobre un ciclo es cero, como debe ser en un circuito *R-C* en serie. Recuerde del capítulo 10 que el capacitor bajo condiciones de cd de estado estable puede ser reemplazado por un circuito abierto equivalente, resultando en $I_C = 0$ A.

Aunque los dos ejemplos anteriores comenzaron con un capacitor descargado, no hay razón para que el mismo enfoque no pueda ser usado de manera efectiva en condiciones iniciales. Simplemente sustituya el voltaje inicial en el capacitor como V_i en la ecuación (24.6) y proceda como antes.

24.7 ATENUADOR DE OSCILOSCOPIO Y PUNTA DE PRUEBA COMPENSADA

La **punta de prueba atenuadora** ×10 empleada con los osciloscopios está diseñada para reducir la magnitud del voltaje de entrada por un factor de 10. Si la impedancia de entrada para un osciloscopio es de 1 MΩ, la punta de prueba atenuadora ×10 podría tener una resistencia interna de 9 MΩ, como se muestra en la figura 24.36.

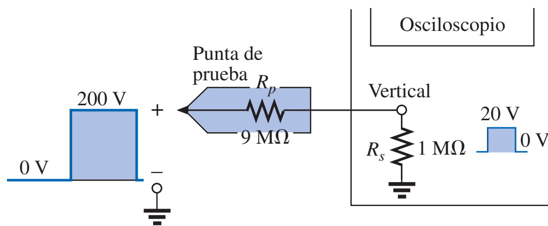


FIGURA 24.36
Punta de prueba atenuadora ×10.

Aplicando la regla del divisor de voltaje,

$$V_{\text{osciloscopio}} = \frac{(1\text{ M}\Omega)(V_i)}{1\text{ M}\Omega + 9\text{ M}\Omega} = \frac{1}{10}V_i$$

En adición a la resistencia de entrada, los osciloscopios tienen alguna capacitancia interna de entrada, y la prueba agregará una capacitancia adicional en paralelo con la capacitancia del osciloscopio, como se muestra en la figura 24.37. La capacitancia de la prueba es típicamente de cerca de 10 pF para un cable de 1 m (3.3 pies), alcanzando cerca de 15 pF en un cable de 3 m (9.9 pies). La capacitancia total de entrada es, por tanto, la suma de los dos elementos capacitivos, resultando en la red equivalente de la figura 24.38.

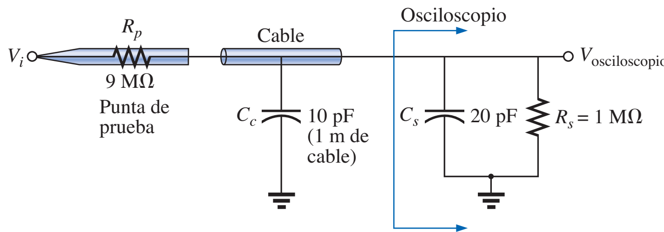


FIGURA 24.37
Elementos capacitivos presentes en un arreglo de punta de prueba atenuadora.

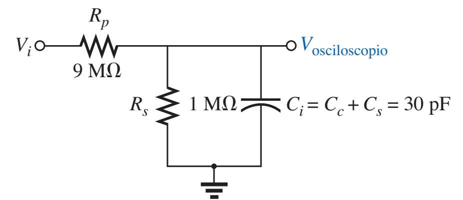


FIGURA 24.38
Red equivalente de la figura 24.37.

En el análisis que se presenta a continuación, determinemos el circuito equivalente de Thévenin para el capacitor C_i:

$$E_{Th} = \frac{(1\text{ M}\Omega)(V_i)}{1\text{ M}\Omega + 9\text{ M}\Omega} = \frac{1}{10}V_i$$

y

$$R_{Th} = 9\text{ M}\Omega \parallel 1\text{ M}\Omega = 0.9\text{ M}\Omega$$



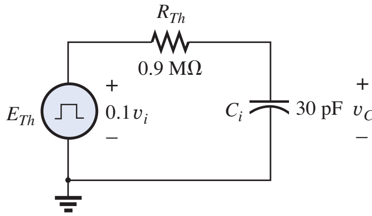


FIGURA 24.39
Equivalente de Thévenin para la C_i de la figura 24.38.

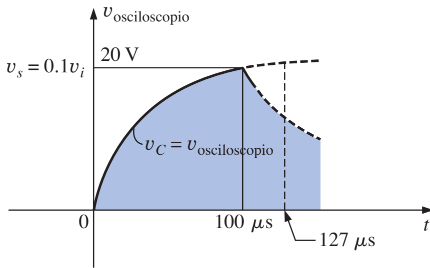


FIGURA 24.40
Patrón de osciloscopio para las condiciones de la figura 24.38 con v_i = 200 V pico.

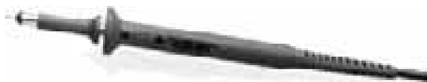


FIGURA 24.41
Punta de prueba atenuadora comercial compensada de 10 : 1. (Cortesía de Tektronix, Inc.)

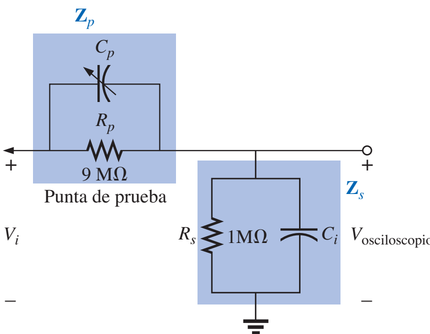


FIGURA 24.42
Atenuador compensado e impedancia de entrada a un osciloscopio, incluyendo la capacitancia del cable.

La red Thévenin se muestra en la figura 24.39.

Para v_i = 200 V (pico),

$$E_{Th} = 0.1v_i = 20 \text{ V (pico)}$$

y para v_C, V_f = 20 V y V_i = 0 V, con:

$$\tau = RC = (0.9 \times 10^6 \,\Omega)(30 \times 10^{-12}\text{ F}) = 27\,\mu\text{s}$$

Para una frecuencia aplicada de 5 kHz,

$$T = \frac{1}{f} = 0.2 \text{ ms} \quad \text{y} \quad \frac{T}{2} = 0.1 \text{ ms} = 100\,\mu\text{s}$$

con 5τ = 135 μs > 100 μs, como se muestra en la figura 24.40, produciendo claramente una severa distorsión de redondeo de la onda cuadrada y una pobre representación de la señal aplicada.

Para mejorar la situación, a menudo se agrega un capacitor variable en paralelo con la resistencia del atenuador, resultando en una **punta de prueba atenuadora compensada** como se muestra en la figura 24.41. En el capítulo 21, se demostró que una onda cuadrada se puede generar mediante una suma de señales senoidales de frecuencia y amplitud particulares. Por tanto, si diseñamos una red tal como la mostrada en la figura 24.42 que garantice que $V_{osciloscopio}$ es $0.1v_i$ para cualquier frecuencia, entonces la distorsión por redondeo será eliminada, y $V_{osciloscopio}$ tendrá la misma apariencia que v_i.

Aplicando la regla del divisor de voltaje a la red de la figura 24.42,

$$\mathbf{V}_{osciloscopio} = \frac{\mathbf{Z}_s\mathbf{V}_i}{\mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_p} \tag{24.8}$$

Si los parámetros se eligen o ajustan en forma tal que:

$$R_pC_p = R_sC_s \tag{24.9}$$

el ángulo de fase de $\mathbf{Z}_s$ y $\mathbf{Z}_p$ será el mismo, y la ecuación (24.8) se reducirá a:

$$\mathbf{V}_{osciloscopio} = \frac{R_s\mathbf{V}_i}{R_s + R_p} \tag{24.10}$$

lo cual no es sensible a la frecuencia ya que los elementos capacitivos han desaparecido de la relación.

En el laboratorio, simplemente se ajusta la capacitancia de la punta de prueba usando una señal de onda cuadrada estándar o conocida hasta obtener las esquinas agudas que se buscan para la onda cuadrada. Si el lector evita el paso de calibración, puede hacer que una señal redondeada se vea cuadrada, ya que supuso una onda cuadrada en el punto de medición.

Demasiada capacitancia producirá un efecto de sobredisparo, mientras que muy poca seguirá mostrando el efecto de redondeo.

24.8 APLICACIÓN

Control remoto de televisión

El control remoto de televisión se ha constituido en parte importante de nuestra vida moderna, y quizá en algún momento nos hemos preguntado cómo se ve por dentro o cómo funciona. En muchos aspectos, es similar al mecanismo que abre automáticamente la puerta de una cochera o al transmisor de la alarma de un auto en que no hay una conexión visible unida a su receptor, y cada transmisor está vinculado a su receptor con un código especial. La única e importante

diferencia entre el control remoto de la televisión y los otros controles mencionados es que el primero usa una frecuencia infrarroja, mientras los otros dos emplean una frecuencia de radio mucho menor.

El control remoto de televisión de la figura 24.43(a) ha sido abierto para mostrar la construcción interna de su teclado y su carátula en la figura 24.43(b). Los tres componentes de la figura 24.43(b) fueron colocados en un nivel que permite ajustar las cavidades de la cubierta con las teclas reales instaladas en la membrana interruptora y con la localización que cada botón sobre el cojincillo de la tecla oprimirá en la carátula del tablero del circuito impreso. Observe sobre el tablero del circuito impreso que hay un cojincillo negro para hacer coincidir cada tecla sobre la membrana. El lado posterior de la membrana se muestra en la

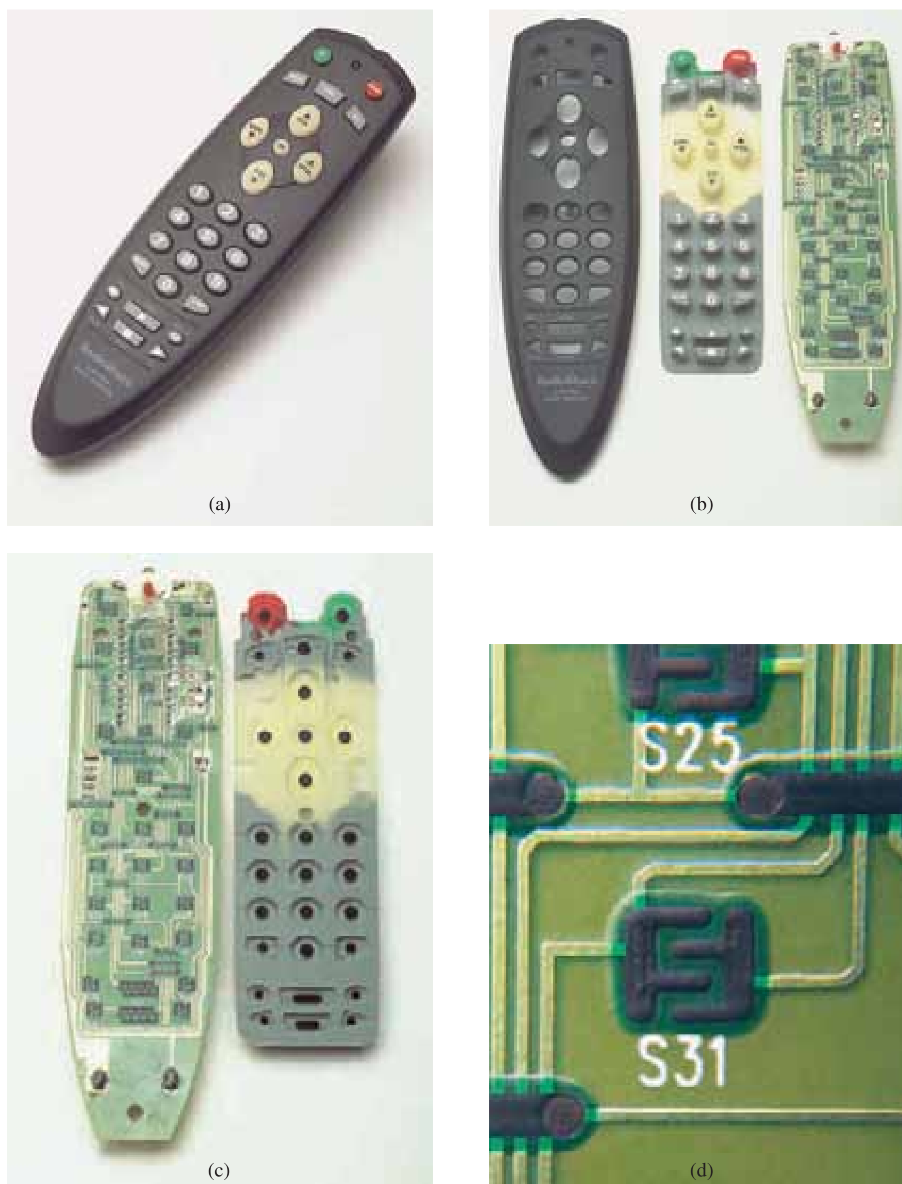


FIGURA 24.43
Control remoto de televisión: (a) apariencia externa; (b) construcción interna; (c) cojincillos de tecla de carbono; (d) vista ampliada del cojincillo de tecla S31.



figura 24.43(c) para permitir apreciar los suaves contactos de carbono que harán contacto con los contactos de carbono ubicados sobre el tablero impreso cuando los botones sean oprimidos. Una vista ampliada de uno de los contactos (S31) de la figura 24.43(c) se muestra en la figura 24.43(d) para ilustrar la separación entre los circuitos y el patrón usado para asegurar la continuidad cuando el redondo cojincillo sólido de carbono en el fondo de la tecla sea colocado en su lugar.

Todas las conexiones que se establecen cuando se oprime una tecla se transmiten a un chip IC codificador por matriz de interruptores relativamente grande que se aprecia sobre la parte posterior del tablero del circuito impreso en la figura 24.44. Para el cojincillo (S31) de la figura 24.43(d), se conectarán tres alambres de la matriz que se ve en la figura 24.43(b) cuando se oprima la tecla correspondiente (número 5). El codificador reaccionará entonces a esta combinación y enviará la señal apropiada como una señal infrarroja desde el IR LED que aparece en el extremo del control remoto, como se ilustra en las figuras 24.43(b) y 24.44. El segundo LED más pequeño (rojo en la unidad real) que aparece en la parte superior de la figura 24.43(b) destella durante la transmisión. Una vez que se insertan las baterías, la circuitería electrónica CMOS que maneja la operación del control remoto está *siempre encendida*. Esto sólo es posible debido a la muy pequeña extracción de potencia de la circuitería CMOS. El botón de potencia (PWR) se usa únicamente para encender la televisión y activar el receptor.

La señal enviada por la mayoría de los controles remotos es cualquiera de los dos tipos que aparecen en la figura 24.45. En cada caso, se tiene un *pulso clave* para iniciar la secuencia de señales e informar al receptor que la señal codificada está por llegar. En la figura 24.45(a), se transmite una señal binaria codificada de 4 bits usando pulsos en ubicaciones específicas para representar los “unos” y la ausencia de un pulso para representar los “ceros”. Esa señal codificada puede ser interpretada entonces por la unidad receptora para efectuar la operación apropiada. En la figura 24.45(b), la señal está controlada por la frecuencia. Cada tecla tendrá asociada una frecuencia diferente. El resultado es que cada tecla tendrá una frecuencia específica de transmisión. Como cada receptor de televisión responderá a un tren diferente de pulsos, un control remoto debe estar codificado para la televisión bajo control. Existen controles remotos con *programas fijos* que sólo pueden usarse con una televisión; pero también hay controles remotos *inteligentes* que están preprogramados internamente con

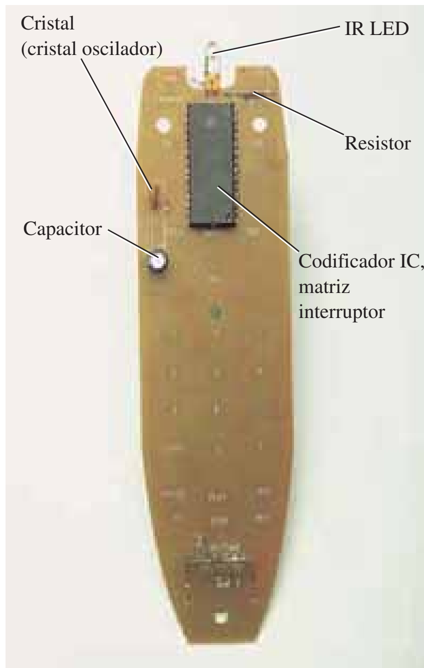


FIGURA 24.44
Parte posterior del control remoto de televisión de la figura 24.43.

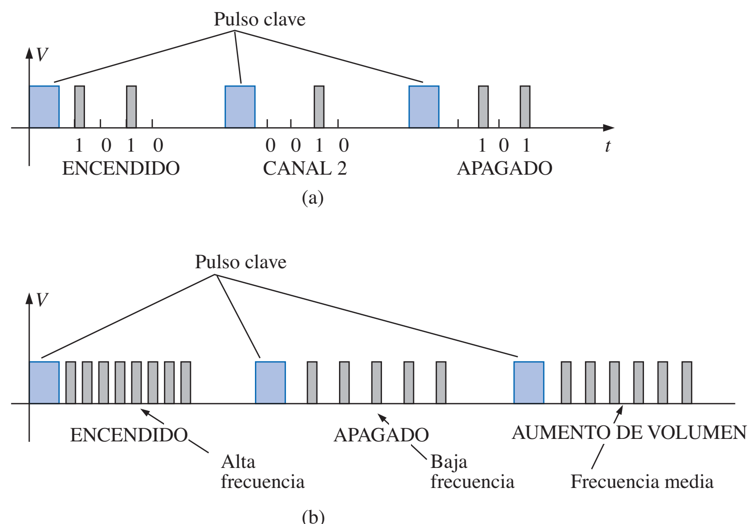


FIGURA 24.45
Transmisión de una señal: (a) tren de pulsos; (b) variación.

varios códigos. Los controles remotos de este tipo sólo necesitan ser "avisados" acerca de qué televisión está implicada usando un sistema codificador de tres dígitos, y se adaptarán en consecuencia. Los controles remotos de *aprendizaje* son aquellos que pueden usar un control remoto viejo para aprender el código y luego almacenarlo para uso futuro. En este caso, un control remoto se coloca directamente enfrente de otro y la información se transfiere del uno al otro cuando ambos son energizados. Existen también controles remotos que son una combinación de estos dos últimos.

El control remoto de la figura 24.43 usa cuatro baterías AAA en serie para entregar un total de 6 V. Tiene su propio cristal oscilador local separado del IC como se muestra mediante los elementos discretos localizados en la parte derecha superior y media izquierda del tablero del circuito impreso de la figura 24.43(c). El cristal mismo, que es relativamente grande comparado con los otros elementos, aparece en el otro lado del tablero justo arriba del capacitor electrolítico en la figura 24.44. Es responsabilidad del oscilador generar la señal de pulso requerida para una adecuada operación de IC. Observe lo bien nivelados que están la mayoría de los elementos discretos en la figura 24.43(b), y advierta el gran capacitor electrolítico sobre la parte posterior del tablero del circuito impreso en la figura 24.44. Las especificaciones sobre la unidad dan un espacio de cobertura del control de 25 pies con arco de cobertura de 30° como se muestra en la figura 24.46. El arco de cobertura de cualquier unidad de control remoto puede ser fácilmente probado apuntándolo de manera directa hacia la televisión y moviéndolo luego en cualquier dirección hasta que ya no controle al aparato.

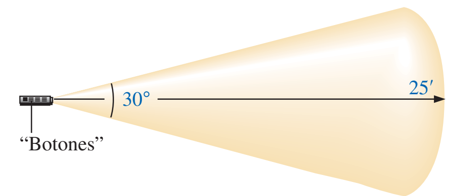


FIGURA 24.46
Espacio y ángulo de cobertura para el control remoto de televisión de la figura 24.43.

24.9 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Respuesta *R-C* Nuestro análisis comenzará con una verificación de los resultados del ejemplo 24.10, el cual examinó la respuesta del circuito *R-C* en serie que aparece en el diagrama esquemático de la figura 24.47. La fuente es una usada en los capítulos 10 y 12 para repetir la acción de un interruptor en serie con una fuente de cd. Por conveniencia, los atributos que definen a la forma de onda de pulso están repetidos en la figura 24.48. Recuérdese que el **PW** fue establecido lo suficientemente largo como para que pudiera ser examinado todo el periodo transitorio. En este análisis, el ancho de pulso se ajustará para permitir ver el comportamiento transitorio de una red *R-C* entre niveles cambiantes del pulso aplicado. Inicialmente, el **PW** se establecerá en 10 veces la constante de tiempo de la red de manera que toda la respuesta transitoria pueda ocurrir entre cambios en el nivel de voltaje. La constante de tiempo de la red es $\tau = RC = (5\ \text{k}\Omega)(0.01\ \mu\text{F}) = 0.05$ ms, resultando en un **PW** de 0.5 ms en la figura 24.47. Para establecer una apariencia de onda cuadrada, el periodo se eligió como el doble del ancho de pulso o 1 ms como se muestra en la lista **VPulse**.

En el cuadro de diálogo **Simulation Settings** seleccionamos **Time Domain-(Transient)** porque deseamos obtener una respuesta en función del tiempo. **Run to time** fue elegido igual a 2 ms de manera que resulten dos ciclos completos. **Start saving data after** se dejó en el valor predeterminado de 0 s, y **Maximum step size** se estableció en 2 ms/1000 = 2 μs. Después de la simulación, **Trace-Add Trace-I(C)-OK**, el resultado fue la gráfica inferior de la figura 24.49. Observe que la corriente máxima es de 2 μA de acuerdo con $I_{C\text{máx}} = 10\ \text{mV}/5\ \text{k}\Omega$, y que toda la respuesta transitoria aparece dentro de cada pulso. También advierta que la corriente cayó debajo del eje para mostrar un cambio en dirección cuando el voltaje aplicado cayó desde el nivel de 10 mV hasta 0 V. Por medio de **Plot-Add Plot to Window-Trace-Add Trace-V (Vpulse:+)-OK-Trace-Add Trace-V(C:1)-OK**, las gráficas del voltaje aplicado y del voltaje en el capacitor pueden desplegarse en la parte superior de la



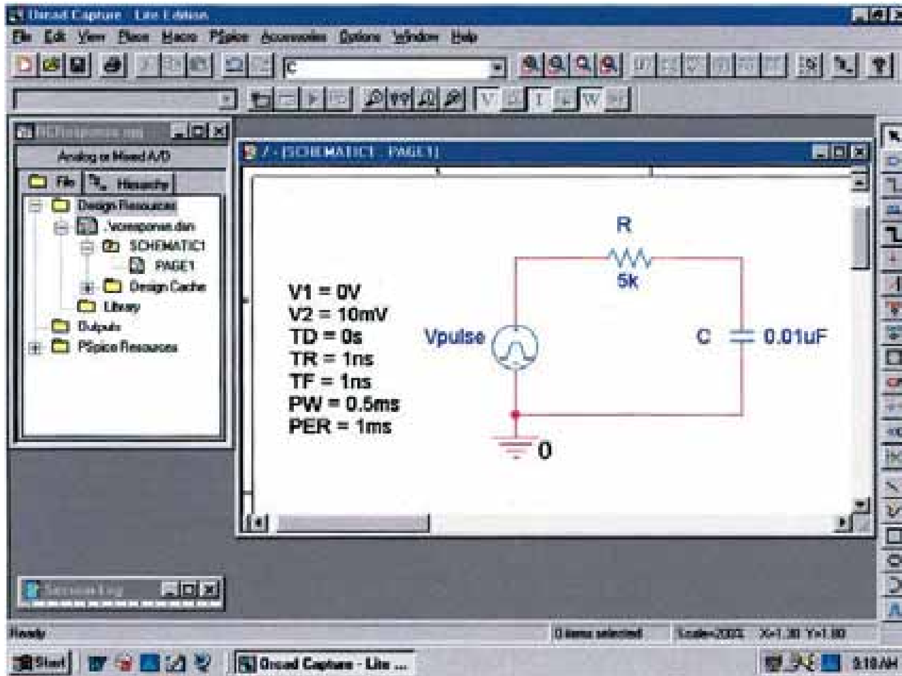


FIGURA 24.47
Uso de PSpice para verificar los resultados del ejemplo 24.10.

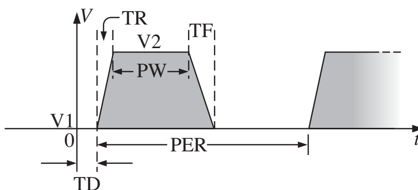


FIGURA 24.48
Definición de los parámetros **Vpulse** *de PSpice.*

figura 24.49. Primero seleccionamos la gráfica superior de la figura 24.49 hacia la cual mover **SEL>>**, y luego la tecla **Toggle cursor**. Entonces podemos hacer clic izquierdo sobre **V(C:1)** en el fondo derecho de la gráfica y colocar un cursor sobre ésta con un clic izquierdo del ratón. Establecer el cursor en cinco constantes de tiempo mostrará que el voltaje transitorio ha llegado a 9.935 mV. Fijando el cursor de clic derecho en diez constantes de tiempo veremos que esencialmente V_C ha alcanzado el nivel de 10 mV.

Estableciendo $t_p = \tau = T/2$ Los parámetros de la fuente serán modificados ahora cambiando la frecuencia de la forma de onda de pulso a 10 kHz con un periodo de 0.1 ms y ancho de pulso de 0.05 ms. Para **Vpulse** los cambios son **PW** = 0.05 ms y **PER** = 0.1 ms. La constante de tiempo de la red permanece igual a 0.05 ms, por lo que tenemos una situación donde el ancho de pulso es igual a la constante de tiempo del circuito. El resultado es que tomará varios pulsos antes de que el voltaje en el capacitor alcance su valor final de 10 mV. Bajo **Simulation Settings**, **Run to time** cambiará a 0.5 ms = 500 μs o cinco ciclos del voltaje aplicado. **Maximum step size** cambiará a 500 μs/1000 = 500 ns = 0.5 μs. Bajo la ventana **SCHEMATIC1** se selecciona **Trace-Add Trace-V(C:1)-OK** para obtener el voltaje transitorio en el capacitor, mientras que **Trace-Add Trace-V(Vpulse:+)-OK** colocará el voltaje aplicado en la misma pantalla. En las gráficas resultantes de la figura 24.50, observe que el voltaje se incrementa desde 0 V hasta que parece alcanzar un estado permanente después de 400 μs. A 400 μs, se utilizó un cursor izquierdo (**A1**) para encontrar el punto mínimo resultando en 2.71 mV —una estrecha concordancia con el cálculo manual del ejemplo 24.11 de 2.69 mV—. A 450 μs, el cursor de clic derecho (**A2**) proporcionó un nivel de 7.29 mV, el cual está de nuevo en estrecha concordancia con el nivel calculado antes de 7.31 mV.

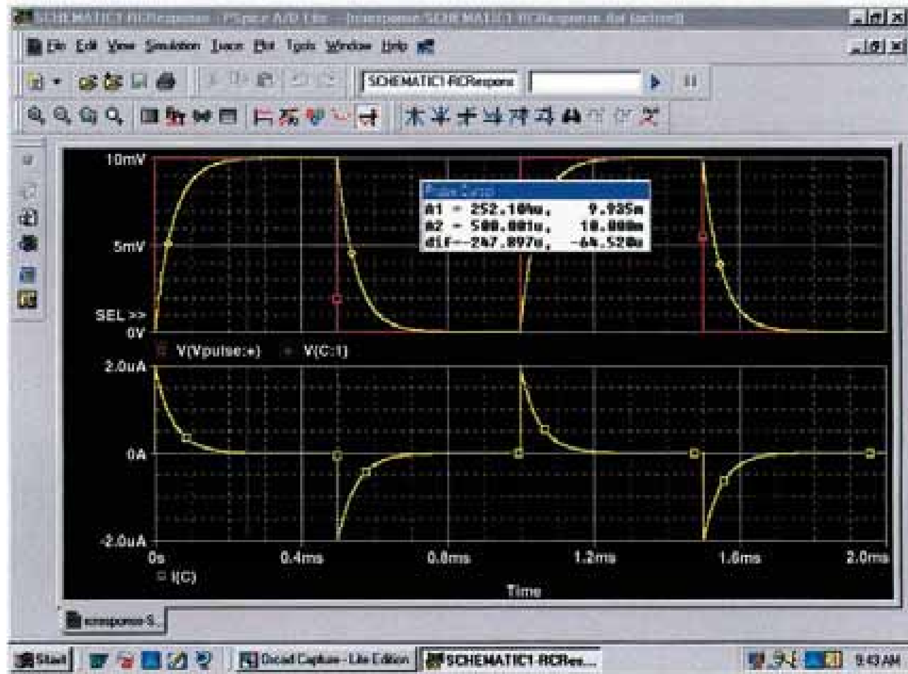


FIGURA 24.49
Gráfica de v_{pulso}, v_C e i_C para el circuito de la figura 24.47.

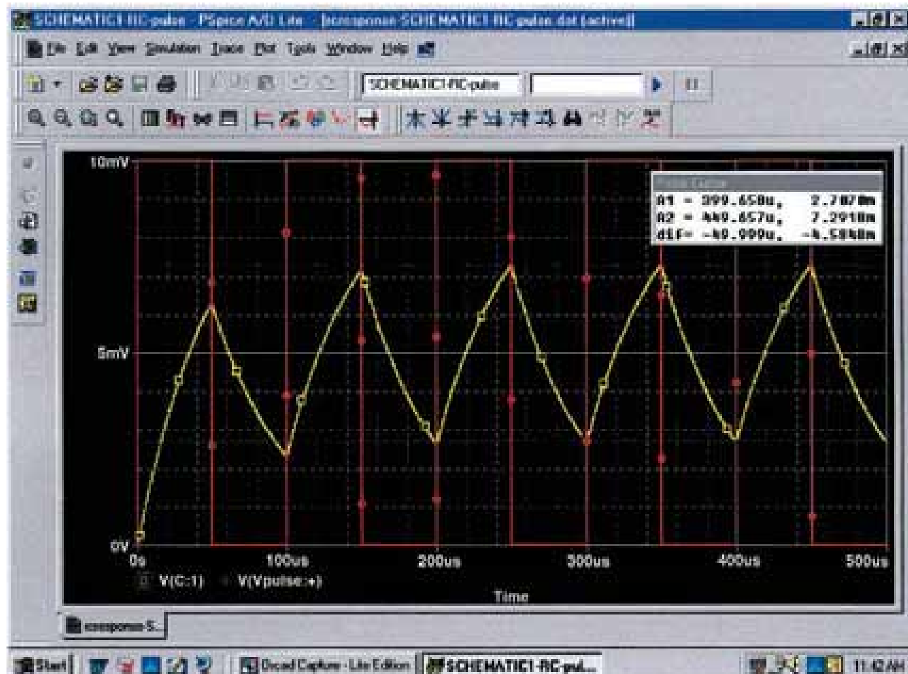


FIGURA 24.50
Gráfica de v_C para el circuito de la figura 24.47 con $t_p = \tau = T/2$.



PROBLEMAS

SECCIÓN 24.2 Ideal contra real

1. Determine lo siguiente para la forma de onda de pulso de la figura 24.51:
   a. ¿El pulso es de crecimiento positivo o negativo?
   b. Voltaje base.
   c. Ancho de pulso.
   d. Amplitud.
   e. Porcentaje de inclinación.
2. Resuelva el problema 1 para la forma de onda de pulso de la figura 24.52.

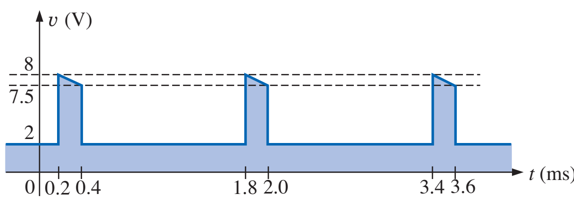


FIGURA 24.51
Problemas 1, 8 y 12.

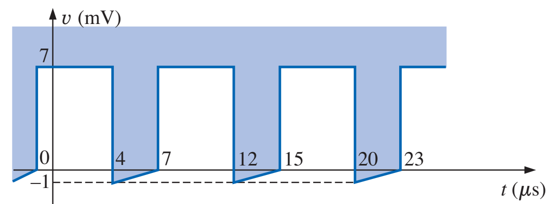


FIGURA 24.52
Problemas 2 y 9.

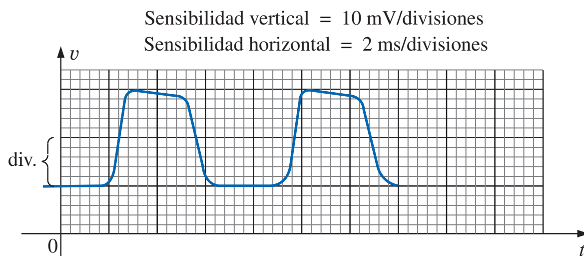


FIGURA 24.53
Problemas 3, 4, 10 y 13.

3. Resuelva el problema 1 para la forma de onda de pulso de la figura 24.53.
4. Determine el número de subidas y bajadas para la forma de onda de la figura 24.53.
5. Trace una forma de onda de pulso que tenga voltaje base de −5 mV, ancho de pulso de 2 μs, amplitud de 15 mV, inclinación de 10%, periodo de 10 μs, flancos verticales, y que sea de crecimiento positivo.
6. Para la forma de onda de la figura 24.54, establecida mediante aproximaciones lineales de la forma de onda original:
   a. Determine el tiempo de subida.
   b. Encuentre el tiempo de bajada.
   c. Encuentre el ancho de pulso.
   d. Calcule la frecuencia.
7. Para la forma de onda de la figura 24.55:
   a. Determine el periodo.
   b. Encuentre la frecuencia.
   c. Encuentre las amplitudes máxima y mínima.

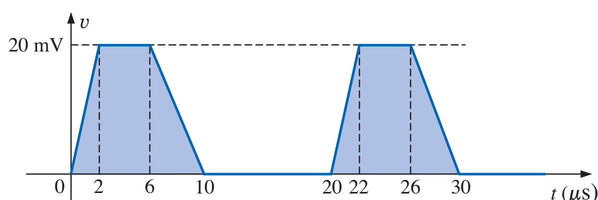


FIGURA 24.54
Problemas 6 y 14.

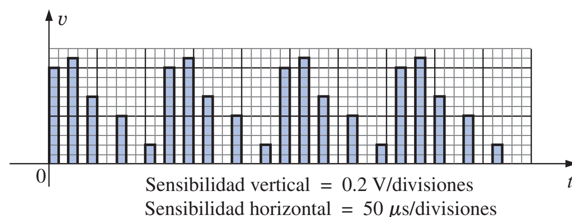


FIGURA 24.55
Problemas 7 y 15.



SECCIÓN 24.3 Razón de repetición de pulso y ciclo de trabajo

8. Determine la frecuencia de repetición de pulso y el ciclo de trabajo para la forma de onda de la figura 24.51.

9. Determine la frecuencia de repetición de pulso y el ciclo de trabajo para la forma de onda de la figura 24.52.

10. Determine la frecuencia de repetición de pulso y el ciclo de trabajo para la forma de onda de la figura 24.53.

SECCIÓN 24.4 Valor promedio

11. Para la forma de onda de la figura 24.56, determine:
- **a.** El periodo.
- **b.** El ancho de pulso.
- **c.** La frecuencia de repetición de pulso.
- **d.** El valor promedio.
- **e.** El valor efectivo.

12. Determine el valor promedio de la forma de onda de pulso periódica de la figura 24.51.

13. Con la mejor precisión posible, determine el valor promedio de la forma de onda de la figura 24.53.

14. Determine el valor promedio de la forma de onda de la figura 24.54.

15. Determine el valor promedio del tren de pulsos periódicos de la figura 24.55.

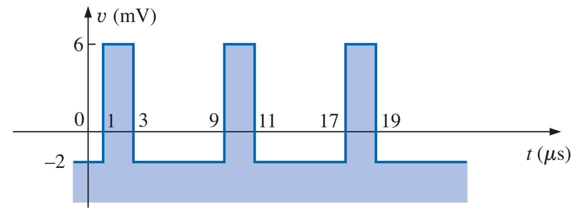


FIGURA 24.56
Problema 11.

SECCIÓN 24.5 Redes *R-C* transitorias

16. Inicialmente, el capacitor de la figura 24.57 está cargado a 5 V, con la polaridad indicada en la figura. Entonces, el interruptor se cierra en $t = 0$ s.
- **a.** ¿Cuál es la expresión matemática para el voltaje v_C?
- **b.** Trace v_C en función de t.
- **c.** ¿Cuál es la expresión matemática para la corriente i_C?
- **d.** Trace i_C en función de t.

17. Para el voltaje de entrada v_i que aparece en la figura 24.58, trace la forma de onda para v_o. Suponga que se establecieron condiciones de estado estable con $v_i = 8$ V.

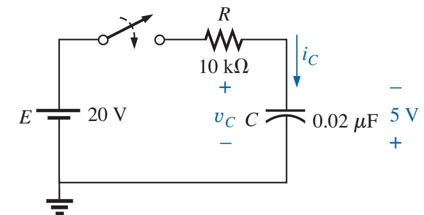
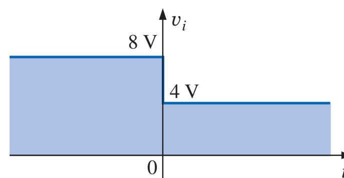


FIGURA 24.57
Problema 16.



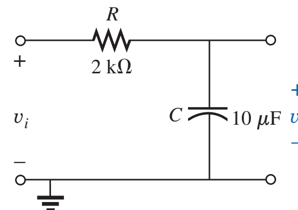


FIGURA 24.58
Problema 17.

18. El interruptor de la figura 24.59 está en la posición 1 hasta que se establecen condiciones de estado estable. Luego el interruptor se mueve (en $t = 0$ s) a la posición 2. Trace la forma de onda para el voltaje v_C.

19. Trace la forma de onda para i_C en el problema 18.

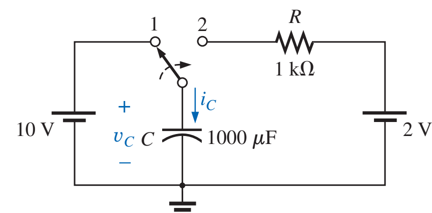
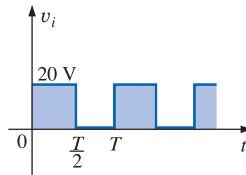


FIGURA 24.59
Problemas 18 y 19.



SECCIÓN 24.6 Respuesta *R-C* a entradas de onda cuadrada

20. Trace el voltaje v_C para la red de la figura 24.60 debido a la entrada de onda cuadrada de la misma figura con una frecuencia de:
a. 500 Hz.
b. 100 Hz.
c. 5000 Hz.



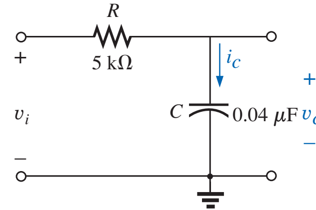


FIGURA 24.60
Problemas 20, 21, 23, 24, 27 y 28.

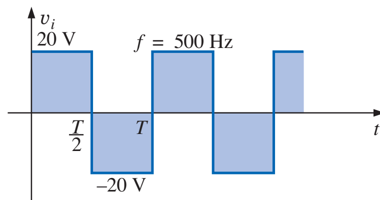


FIGURA 24.61
Problema 22.

21. Trace la corriente i_C para cada frecuencia del problema 20.

22. Trace la respuesta v_C de la red de la figura 24.60 a la entrada de onda cuadrada de la figura 24.61.

23. Si el capacitor de la figura 24.60 está cargado inicialmente a 20 V, trace la respuesta v_C a la misma señal de entrada (de la figura 24.60) a una frecuencia de 500 Hz.

24. Resuelva el problema 23 si el capacitor está inicialmente cargado a -10 V.

SECCIÓN 24.7 Atenuador de osciloscopio y punta de prueba compensada

25. Dada la red de la figura 24.42 con $R_p = 9\ \text{M}\Omega$ y $R_s = 1\ \text{M}\Omega$, encuentre $\mathbf{V}_{\text{osciloscopio}}$ en forma polar si $C_p = 3$ pF, $C_s = 18$ pF, $C_c = 9$ pF, y $v_i = \sqrt{2}(100)$ sen $2\pi 10{,}000t$. Es decir, determine $\mathbf{Z}_s$ y $\mathbf{Z}_p$, sustitúyalos en la ecuación (24.8), y compare los resultados obtenidos con la ecuación (24.10). ¿Se comprueba que el ángulo de fase de $\mathbf{Z}_s$ y $\mathbf{Z}_p$ es el mismo bajo la condición $R_pC_p = R_sC_s$?

26. Resuelva el problema 25 con $\omega = 10^5$ rad/s.

SECCIÓN 24.9 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

27. Mediante un esquema, obtenga las formas de onda para v_C e i_C para la red de la figura 24.60 y una frecuencia de 1 kHz.

***28.** Mediante un esquema, coloque las formas de onda de v_i, v_C e i_C sobre la misma impresión para la red de la figura 24.60 a una frecuencia de 2 kHz.

***29.** Mediante un esquema, obtenga la forma de onda que aparece en el osciloscopio de la figura 24.37 con un pulso de entrada de 20 V a una frecuencia de 5 kHz.

***30.** Coloque un capacitor en paralelo con R_p en la figura 24.37 que establezca una relación en fase entre $v_{\text{osciloscopio}}$ y v_i. Mediante un esquema, obtenga la forma de onda que aparece en el osciloscopio de la figura 24.37 con una entrada de pulso de 20 V a una frecuencia de 5 kHz.



Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

31. Dado un tren de pulsos periódico tal como el de la figura 24.11, escriba un programa para determinar el valor promedio, dados el voltaje base, el valor pico y el ciclo de trabajo.

32. Dados los valores inicial y final y los parámetros de red R y C, escriba un programa para tabular los valores de v_C a intervalos de una constante de tiempo (las primeras cinco) de la fase transitoria.

33. Para el caso de $T/2 < 5\tau$, como está definido por la figura 24.29, escriba un programa que determine los valores de v_C en cada medio periodo de la onda cuadrada aplicada. Pruebe la solución introduciendo las condiciones del ejemplo 24.10.

GLOSARIO

Amplitud de una forma de onda de pulso Valor pico a pico de una forma de onda de pulso.

Ancho de pulso (t_p) Ancho de pulso definido mediante el 50% del nivel de voltaje.

Ciclo de trabajo Factor que revela cuánto de un periodo abarca la forma de onda de pulso.

Frecuencia de repetición de pulso (razón de repetición de pulso) Frecuencia de un tren de pulsos periódicos.

Inclinación Caída en el valor pico en el ancho de pulso de una forma de onda de pulso.

Onda cuadrada Forma de onda de pulsos periódicos con un 50% de ciclo de trabajo.

Pulso de crecimiento negativo Pulso que aumenta en la dirección negativa desde el voltaje base.

Pulso de crecimiento positivo Pulso que aumenta en la dirección positiva desde el voltaje base.

Pulso ideal Forma de onda de pulso caracterizada por tener lados verticales, esquinas agudas y respuesta de pico plana.

Pulso real (verdadero o práctico) Forma de onda de pulso con un flanco delantero y otro trasero que no son verticales, junto con otros efectos de distorsión como inclinación, oscilaciones secundarias o sobredisparo.

Punta de prueba atenuadora Punta de prueba de osciloscopio que reducirá la intensidad de la señal aplicada al canal vertical de un osciloscopio.

Punta de prueba atenuadora compensada Punta de prueba de osciloscopio que reduce la señal aplicada y equilibra los efectos de la capacitancia de entrada de un osciloscopio sobre la señal que debe ser exhibida.

Tiempo de bajada (t_f) Tiempo requerido para que el flanco posterior de una forma de onda de pulso caiga del nivel de 90% al nivel de 10%.

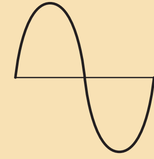
Tiempo de subida (t_r) Tiempo requerido para que el flanco delantero de una forma de onda de pulso viaje desde el nivel de 10% hasta el nivel de 90%.

Tren de pulsos Serie de pulsos que puede tener alturas y anchos variables.

Tren de pulsos periódicos Secuencia de pulsos que se repite a sí misma después de un periodo específico.

Voltaje base (V_b) Nivel de voltaje desde el cual se inicia un pulso.

25



Circuitos no senoidales

25.1 INTRODUCCIÓN

Cualquier forma de onda que difiera de la descripción básica de la forma de onda senoidal se denomina **no senoidal**. Las formas de onda más evidentes y conocidas son las de cd, onda cuadrada, triangular, diente de sierra y rectificada que aparecen en la figura 25.1.

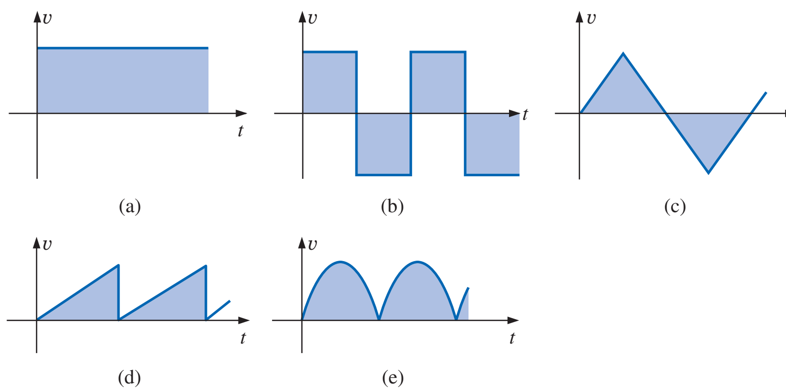


FIGURA 25.1
Formas de onda comunes no senoidales: (a) de cd; (b) onda cuadrada; (c) triangular; (d) diente de sierra; (e) rectificada.

La salida de muchos dispositivos eléctricos y electrónicos será no senoidal, aun si la señal aplicada es puramente senoidal. Por ejemplo, la red de la figura 25.2 emplea un diodo para eliminar la parte negativa de la señal aplicada en un proceso llamado *rectificación de media onda*, el cual se usa en el desarrollo de niveles de cd desde una entrada senoidal. En sus cursos sobre electrónica, el lector verá que el diodo es similar a un interruptor mecánico, pero diferente en el sentido de que puede conducir corriente en sólo una dirección. La forma de onda de salida es definitivamente no senoidal, pero advierta que tiene el mismo periodo que la señal aplicada y coincide con la entrada durante medio periodo.

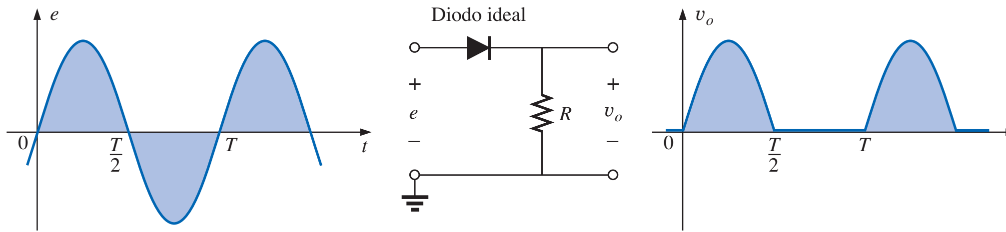


FIGURA 25.2
Rectificador de media onda que produce una forma de onda no senoidal.

Este capítulo demostrará cómo una forma de onda no senoidal como la salida de la figura 25.2 puede ser representada mediante una serie de términos. El lector aprenderá también cómo determinar la respuesta de una red a una entrada de tal tipo.

25.2 SERIE DE FOURIER

La **serie de Fourier** se refiere a una secuencia de términos, desarrollada en 1826 por el barón Jean Fourier (Figura 25.3), que puede usarse para representar una forma de onda periódica no senoidal. En el análisis de esas formas de onda, resolvemos para cada término de la serie de Fourier:

$$f(t) = \underbrace{A_0}_{\text{cd o valor promedio}} + \underbrace{A_1 \text{ sen } \omega t + A_2 \text{ sen } 2\omega t + A_3 \text{ sen } 3\omega t + \cdots + A_n \text{ sen } n\omega t}_{\text{términos seno}} + \underbrace{B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \cdots + B_n \cos n\omega t}_{\text{términos coseno}} \quad \textbf{(25.1)}$$

Francés
(Auxerre, Grenoble, París)
(1768-1830)
Matemático, Egiptólogo, y **administrador**
Profesor de matemáticas, École Polytechnique



Cortesía de Smithsonian Institution Fotografía núm. 56,822

Se le conoce mejor por haber formulado una serie matemática infinita de términos seno y coseno denominada *serie de Fourier*, la cual se usa para mostrar cómo puede ser analizada y definida la conducción de calor en los sólidos. Aunque fue principalmente un matemático, gran parte de la obra de Fourier tiene relación con los hechos físicos del mundo real, como la transferencia de calor, las manchas solares y el clima. Se integró como profesor a la École Polytechnique en París desde su inauguración. Napoleón solicitó su ayuda en la investigación de las antigüedades egipcias, lo cual dio como resultado una estancia de tres años en Egipto como secretario del Institut d'Égypte. Napoleón lo nombró barón en 1809, y fue elegido para integrar la Académie des Sciences en 1817.

FIGURA 25.3
Barón Jean Fourier.

Dependiendo de la forma de onda, puede requerirse un número grande de esos términos para aproximar estrechamente la forma de onda con propósitos de análisis de circuitos.

Como se muestra en la ecuación (25.1), la serie de Fourier tiene tres partes básicas. La primera es el término de cd A_0, que es el valor promedio de la forma de onda en un ciclo completo. La segunda es una serie de términos seno. No hay restricciones sobre los valores o valores relativos de las amplitudes de esos términos seno, pero cada uno tendrá una frecuencia que es un múltiplo entero de la frecuencia del primer término seno de la serie. La tercera parte es una serie de términos coseno. De nuevo, *no* hay restricciones sobre los valores o valores relativos de las amplitudes de esos términos coseno, pero cada uno tendrá una frecuencia que es un múltiplo entero de la frecuencia del primer término coseno de la serie. Para una forma de onda en particular, es posible que todos los términos seno *o* coseno sean cero. Características de este tipo pueden ser determinadas mediante un sencillo examen de la forma de onda no senoidal y su posición sobre el eje horizontal.

El primer término de las series seno y coseno se llama **componente fundamental**; representa el término de frecuencia mínima requerido para representar una forma de onda particular, y también tiene la misma frecuencia que la forma de onda representada. Por tanto, un término fundamental debe estar presente en cualquier representación por serie de Fourier. Los otros términos con frecuencias de orden superior (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental) son llamados **términos armónicos**. Un término que tiene una frecuencia igual al doble de la fundamental es el segundo armónico; tres veces, el tercer armónico, y así sucesivamente.

Valor promedio: A_0

El término de cd de la serie de Fourier es el valor promedio de la forma de onda sobre un ciclo completo. Si el área neta situada arriba del eje horizontal es igual al área localizada abajo de éste en un periodo completo, $A_0 = 0$, y el término de cd no aparece en el desarrollo. Si el área por arriba del eje es mayor que la de abajo en un ciclo completo, A_0 es positiva y aparecerá en la representación de la serie de Fourier. Si el área por abajo del eje es mayor, A_0 es negativa y aparecerá con signo negativo en el desarrollo.

Función impar (Simetría de punto)

***Si una forma de onda es tal que su valor para $+t$ es el negativo de su valor para $-t$, se le llama función impar o se dice que tiene* simetría de punto.**

La figura 25.4(a) es ejemplo de una forma de onda con simetría de punto. Observe que la forma de onda tiene un valor pico en t_1 que coincide con la magnitud (con el signo opuesto) del valor pico en $-t_1$. Para formas de onda de este tipo, todos los parámetros $B_{1\rightarrow\infty}$ de la ecuación (25.1) serán cero. De hecho,

las formas de onda con simetría de punto pueden ser descritas en su totalidad mediante los términos de cd y seno de la serie de Fourier.

En la figura 25.4(b), observe que una onda seno es una función impar con simetría de punto.

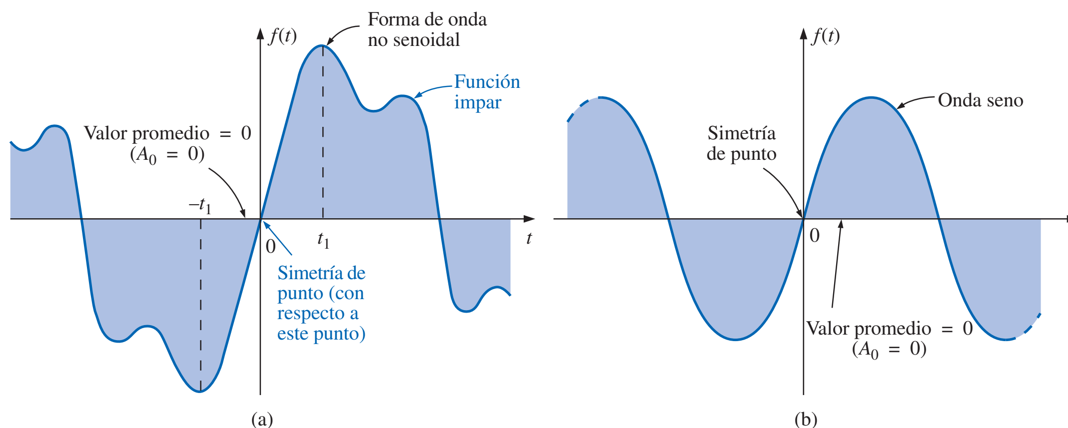


FIGURA 25.4
Simetría de punto.

Para ambas formas de onda de la figura 25.4, la siguiente relación matemática es verdadera:

$$f(t) = -f(-t) \qquad \text{(función impar)} \qquad \textbf{(25.2)}$$

En otras palabras, esta ecuación establece que la magnitud de la función en $+t$ es igual al negativo de la magnitud en $-t$ [t_1 en la figura 25.4(a)].

Función par (Simetría de eje)

***Si una forma de onda es simétrica con respecto al eje vertical, se le llama función par o se dice que tiene* simetría de eje.**

La figura 25.5(a) es ejemplo de una forma de onda de tal tipo. Observe que el valor de la función en t_1 es igual al valor en $-t_1$. Para formas de onda de este tipo, todos los parámetros $A_{1\rightarrow\infty}$ serán igual a cero. De hecho,

las formas de onda con simetría de eje pueden ser descritas en su totalidad mediante los términos de cd y coseno de la serie de Fourier.

En la figura 25.5(b), observe que una onda coseno es una función par con simetría de eje.

Para ambas formas de onda de la figura 25.5, la siguiente relación matemática es verdadera:

$$f(t) = f(-t) \qquad \text{(función impar)} \qquad \textbf{(25.3)}$$

En otras palabras, esta ecuación establece que la magnitud de la función es la misma en $+t_1$ que en $-t$ [t_1 en la figura 25.5(a)].

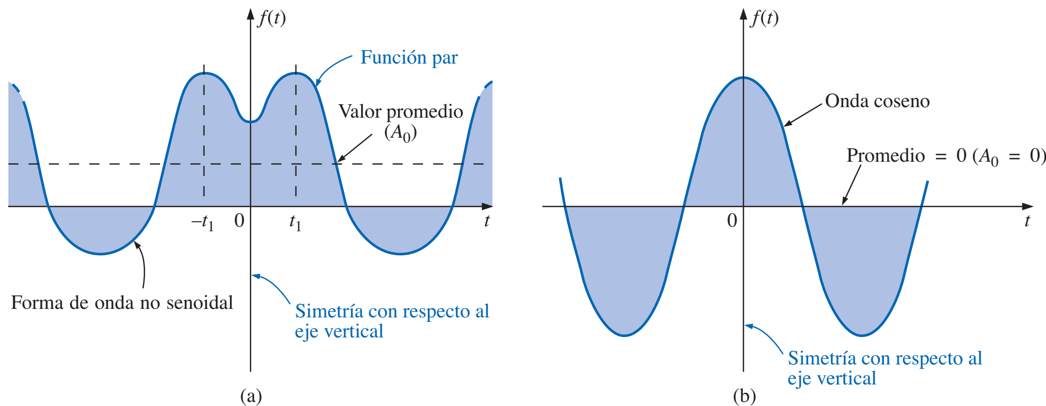


FIGURA 25.5
Simetría de eje.

Simetría de espejo o de media onda

Si una forma de onda tiene* simetría de espejo *o* de media onda*, como se muestra en la figura 25.6, los armónicos* pares *de la serie de términos seno y coseno serán cero.

De manera funcional, la forma de onda debe satisfacer la siguiente relación:

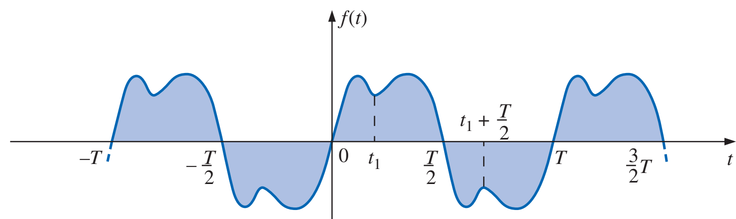


FIGURA 25.6
Simetría de espejo.

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) \tag{25.4}$$

La ecuación (25.4) establece que la forma de onda comprendida en un intervalo de tiempo $T/2$ se repetirá en el siguiente intervalo de tiempo $T/2$, pero en sentido negativo (t_1 en la figura 25.6). Por ejemplo, la forma de onda de la figura 25.6 desde cero hasta $T/2$ se repetirá en el intervalo de tiempo de $T/2$ a T, pero por debajo del eje horizontal.

Onda repetitiva en la mitad del ciclo

La naturaleza repetitiva de una forma de onda puede determinar si un armónico específico estará presente en el desarrollo de la serie de Fourier. En particular,

si una forma de onda es repetitiva en la mitad del ciclo como la forma de onda de la figura 25.7, los* armónicos impares *de la serie de términos seno y coseno son cero.

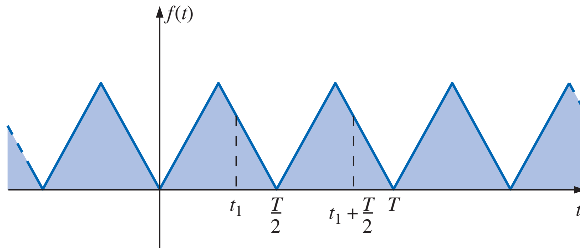


FIGURA 25.7
Forma de onda repetitiva en la mitad del ciclo.

De manera funcional, la forma de onda debe satisfacer la siguiente relación:

$$f(t) = f\left(t + \frac{T}{2}\right) \tag{25.5}$$

La ecuación (25.5) establece que la función se repite después de cada intervalo de tiempo $T/2$ (t_1 en la figura 25.7). Sin embargo, la forma de onda también se repite después de cada periodo T. Por tanto, en general, para una función de este tipo, si el periodo T de la forma de onda se elige como el doble del periodo mínimo ($T/2$), los armónicos impares serán todos cero.

Método matemático

Las constantes A_0, $A_{1\to n}$, $B_{1\to n}$ pueden determinarse usando las siguientes fórmulas integrales:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{25.6}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}\,n\omega t\,dt \tag{25.7}$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt \tag{25.8}$$

Estas ecuaciones han sido presentadas sólo con fines de reconocimiento; no serán usadas en el siguiente análisis.

Instrumentación



FIGURA 25.8
Analizador de espectro.
(Cortesía de Hewlett Packard.)

Existen tres tipos de instrumentos que revelan el contenido de cd, fundamental y armónico de una forma de onda: el *analizador de espectro*, el *analizador de onda* y el *analizador de Fourier*. El propósito de tal instrumentación no es sólo determinar la composición de una forma de onda en particular, sino también revelar el nivel de distorsión que pueda haber sido introducido por un sistema. Por ejemplo, un amplificador puede estar incrementando la señal aplicada por un factor de 50, pero en el proceso pudiera haber distorsionado la forma de onda en una manera imperceptible con respecto a la mostrada por el osciloscopio. La cantidad de distorsión aparece en la forma de armónicos a frecuencias que son múltiplos de la frecuencia aplicada. Cada uno de los instrumentos anteriores revela qué frecuencias tienen más impacto en la distorsión, lo cual permite eliminarlas por medio de filtros diseñados apropiadamente.

El *analizador de espectro* tiene el aspecto de un osciloscopio, como se aprecia en la figura 25.8, pero en lugar de desplegar una forma de onda del voltaje (el eje vertical) en función del tiempo (el eje horizontal), genera una pantalla con una escala en dB (eje vertical) en función de la frecuencia (eje horizontal). Se dice que tal pantalla está en el *dominio de la frecuencia* a diferencia del *dominio del tiempo* del osciloscopio estándar. La altura de la línea vertical en la pantalla de la figura 25.8 revela el impacto de esa frecuencia sobre la apariencia de la forma de onda. Los analizadores de espectro no proporcionan el ángulo de fase asociado con cada componente.



FIGURA 25.9
Analizador de onda.
(Cortesía de Hewlett Packard.)

El *analizador de onda* de la figura 25.9 es un voltímetro de rms verdadero cuya frecuencia de medición se puede cambiar manualmente. En otras palabras, el operador trabaja con las frecuencias que le interesan, y la pantalla analógica indicará el valor rms de todas las componentes armónicas presentes. Por supuesto, una vez determinada la componente fundamental, el operador puede desplazarse con rapidez por todos los valores armónicos posibles. El analizador de onda, igual que el de espectro, no proporciona el ángulo asociado con las diferentes componentes.



FIGURA 25.10
Analizador de Fourier.
(Cortesía de Hewlett Packard.)

El *analizador de Fourier* de la figura 25.10 es similar en muchos aspectos al analizador de espectro excepto por su capacidad para examinar todas las frecuencias de interés al mismo tiempo. El analizador de espectro debe revisar la señal una frecuencia a la vez. El analizador de Fourier tiene la singular ventaja de poder determinar el ángulo de fase de cada componente.

Los siguientes ejemplos mostrarán el uso de las ecuaciones y conceptos presentados hasta ahora en este capítulo.

EJEMPLO 25.1 Determine qué componentes de la serie de Fourier están presentes en las formas de onda de la figura 25.11.

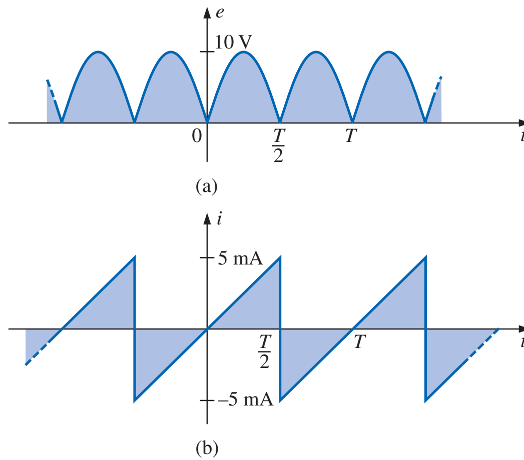


FIGURA 25.11
Ejemplo 25.1.

Soluciones:

a. La forma de onda tiene un área neta arriba del eje horizontal y, por tanto, tendrá **un término de cd positivo** A_0.

La forma de onda tiene simetría de eje, resultando en **sólo términos coseno** en el desarrollo.

La forma de onda tiene simetría de medio ciclo, resultando en **sólo términos pares** en la serie coseno.

b. La forma de onda tiene la misma área arriba y abajo del eje horizontal en cada periodo, resultando en $A_0 = 0$.

La forma de onda tiene simetría de punto, resultando en **sólo términos seno** en el desarrollo.

EJEMPLO 25.2 Escriba el desarrollo de la serie de Fourier para las formas de onda de la figura 25.12.

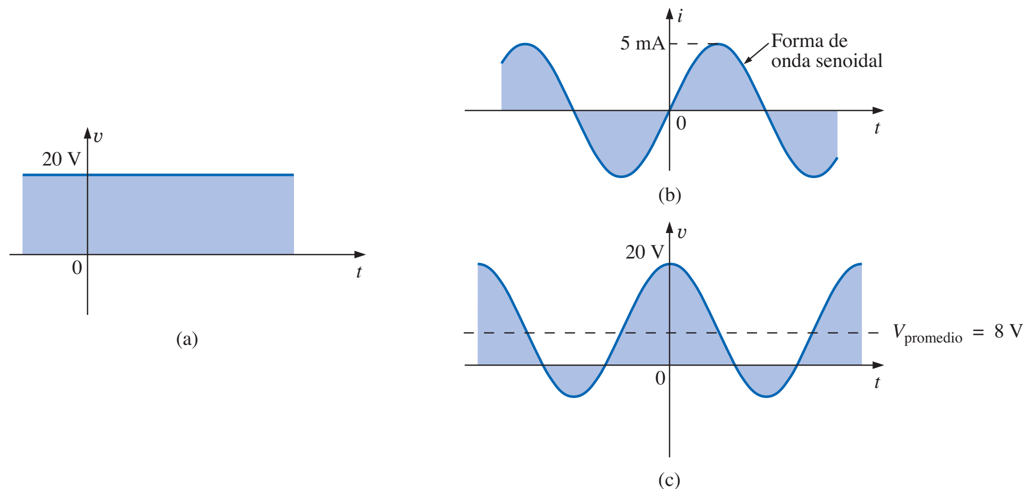


FIGURA 25.12
Ejemplo 25.2.

Soluciones:

a. $A_0 = 20 \qquad A_{1\to n} = 0 \qquad B_{1\to n} = 0$

$\quad v = \mathbf{20}$

b. $A_0 = 0 \qquad A_1 = 5 \times 10^{-3} \qquad A_{2\to n} = 0 \qquad B_{1\to n} = 0$

$\quad i = \mathbf{5 \times 10^{-3}\ sen\ \omega t}$

c. $A_0 = 8 \qquad A_{1-n} = 0 \qquad B_1 = 12 \qquad B_{2\to n} = 0$

$\quad v = \mathbf{8 + 12\cos\omega t}$

EJEMPLO 25.3 Trace el siguiente desarrollo de la serie de Fourier:

$$v = 2 + 1\cos\alpha + 2\ \text{sen}\ \alpha$$

Solución: Observe la figura 25.13.

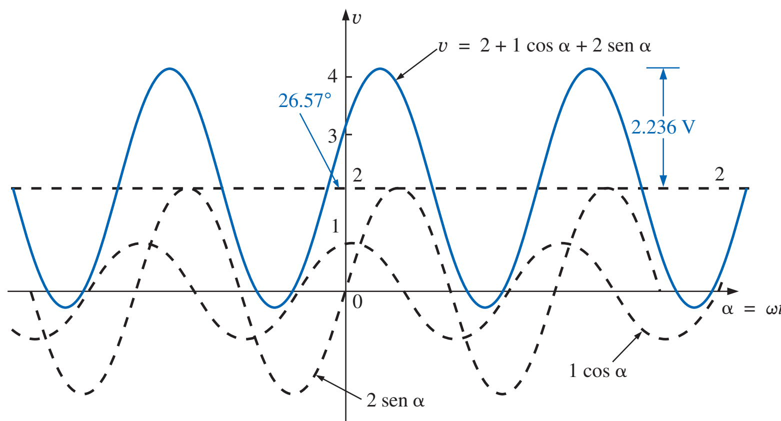


FIGURA 25.13
Ejemplo 25.3.

La solución podría obtenerse gráficamente trazando primero todas las funciones y considerando luego un número suficiente de puntos sobre el eje horizontal; o empleando álgebra fasorial como sigue:

$$\begin{aligned} 1\cos\alpha + 2\ \text{sen}\ \alpha &= 1\ \text{V}\ \angle 90^\circ + 2\ \text{V}\ \angle 0^\circ = j\,1\ \text{V} + 2\ \text{V} \\ &= 2\ \text{V} + j\,1\ \text{V} = 2.236\ \text{V}\ \angle 26.57^\circ \\ &= 2.236\ \text{sen}(\alpha + 26.57^\circ) \end{aligned}$$

y
$$v = 2 + 2.236\ \text{sen}(\alpha + 26.57^\circ)$$

lo cual es simplemente la parte de la onda seno sobre un nivel de cd de 2 V. Es decir, su máximo positivo es 2 V + 2.236 V = 4.236 V, y su mínimo es 2 V − 2.236 V = −0.236 V.

EJEMPLO 25.4 Trace el siguiente desarrollo de la serie de Fourier:

$$i = 1\ \text{sen}\ \omega t + 1\ \text{sen}\ 2\omega t$$

Solución: Vea la figura 25.14. Observe que en este caso la suma de las dos formas de onda senoidales de frecuencias diferentes *no* es una onda seno. Recuerde que el álgebra compleja puede aplicarse sólo a formas de onda con la *misma* frecuencia. En este caso la solución se obtiene gráficamente punto por punto, como se muestra para $t = t_1$.

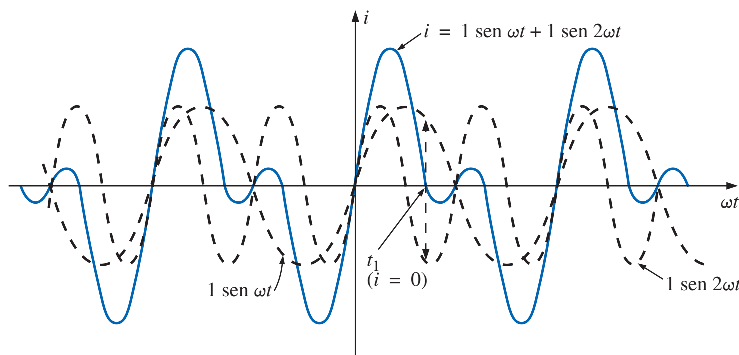


FIGURA 25.14
Ejemplo 25.4.

Como un ejemplo adicional en el uso del método matemático de la serie de Fourier, considere la onda cuadrada que aparece en la figura 25.15. El valor promedio es cero, por lo que $A_0 = 0$. Es una función impar, así que todas las constantes $B_{1\to n}$ son iguales a cero; en el desarrollo en serie, sólo estarán presentes términos seno. Como la forma de onda satisface los criterios para $f(t) = -f(t + T/2)$, los armónicos par también serán cero.

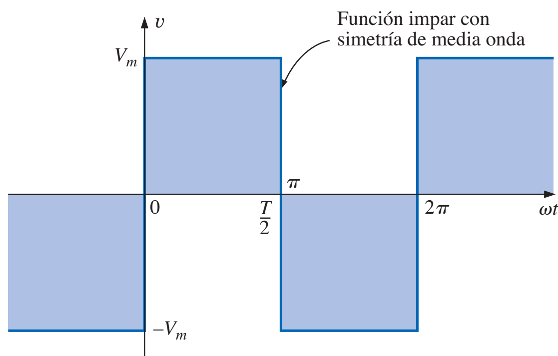


FIGURA 25.15
Onda cuadrada.

La expresión que se obtiene después de evaluar los diversos coeficientes usando la ecuación (25.8) es:

$$v = \frac{4}{\pi} V_m\left(\text{sen}\ \omega t + \frac{1}{3}\text{sen}\ 3\omega t + \frac{1}{5}\text{sen}\ 5\omega t + \frac{1}{7}\text{sen}\ 7\omega t + \cdots + \frac{1}{n}\text{sen}\ n\omega t\right) \qquad \textbf{(25.9)}$$

Observe que el término fundamental tiene la misma frecuencia que la onda cuadrada. Al sumar el término fundamental y el tercer armónico, se obtendrán los resultados mostrados en la figura 25.16.

Incluso con sólo los primeros dos términos, algunas características de la onda cuadrada empiezan a aparecer. Si agregamos los siguientes dos términos (Figura 25.17), el ancho de los pulsos aumenta así como el número de picos.

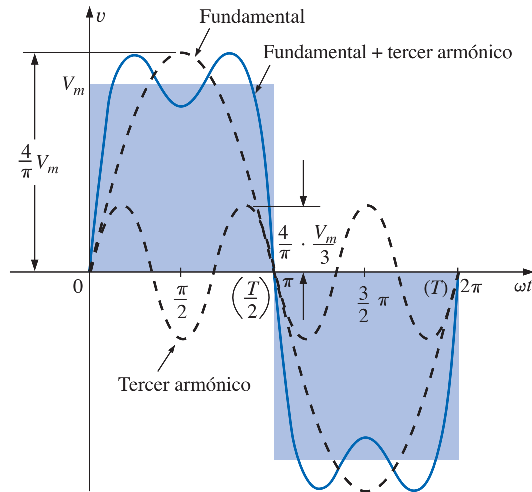


FIGURA 25.16
Fundamental más tercer armónico.

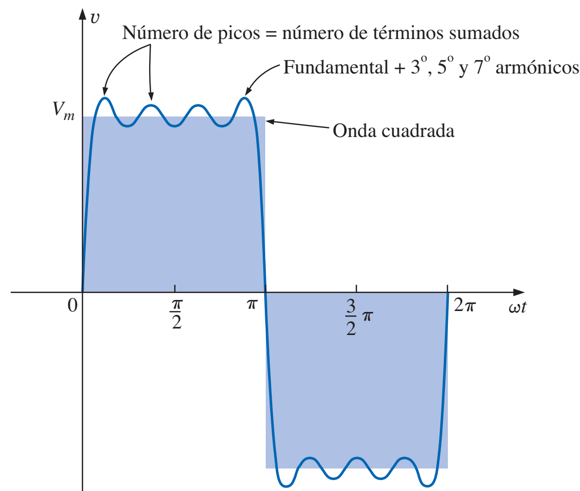


FIGURA 25.17
Fundamental más tercero, quinto y séptimo armónicos.

Al continuar agregando términos, la serie aproximará mejor la onda cuadrada. Sin embargo, observe que la amplitud de cada término sucesivo disminuye al punto en que será insignificante comparado con los primeros términos. Una buena aproximación sería suponer que la forma de onda está compuesta de los armónicos hasta, e incluyendo, el noveno. Cualquier armónico superior sería menor que un décimo del fundamental. Si la forma de onda descrita se desplazara arriba o abajo del eje horizontal, la serie de Fourier se alteraría sólo en un cambio en el término de cd. Por ejemplo, la figura 25.18(c) es la suma de las figuras 25.18(a) y (b). La serie de Fourier para toda la forma de onda es, entonces:

$$v = v_1 + v_2 = V_m + \text{ecuación (25.9)}$$

$$= V_m + \frac{4}{\pi}V_m\left(\text{sen } \omega t + \frac{1}{3}\text{ sen } 3\omega t + \frac{1}{5}\text{ sen } 5\omega t + \frac{1}{7}\text{ sen } 7\omega t + \cdots\right)$$

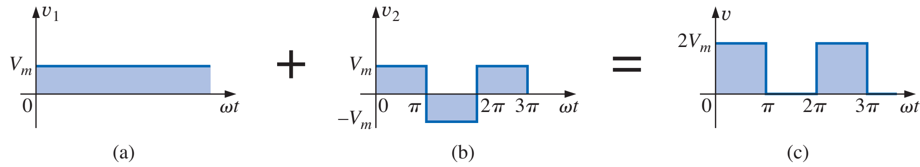


FIGURA 25.18

Desplazamiento vertical de una forma de onda con la adición de un término de cd.

y $$v = V_m\left[1 + \frac{4}{\pi}\left(\text{sen } \omega t + \frac{1}{3} \text{ sen } 3\omega t + \frac{1}{5} \text{ sen } 5\omega t + \frac{1}{7} \text{ sen } 7\omega t + \cdots\right)\right]$$

La ecuación para la forma de onda pulsante rectificada de media onda de la figura 25.19(b) es:

$$v_2 = 0.318V_m + 0.500V_m \text{ sen } \alpha - 0.212V_m \cos 2\alpha - 0.0424V_m \cos 4\alpha - \cdots \qquad \textbf{(25.10)}$$

La forma de onda en la figura 25.19(c) es la suma de las dos formas de onda de las figuras 25.19(a) y (b). La serie de Fourier para la forma de onda de la figura 25.19(c) es, por tanto,

$$v_T = v_1 + v_2 = -\frac{V_m}{2} + \text{ecuación (25.10)}$$
$$= -0.500V_m + 0.318V_m + 0.500V_m \text{ sen } \alpha - 0.212V_m \cos 2\alpha - 0.0424V_m \cos 4\alpha + \cdots$$

y $$v_T = -0.182V_m + 0.5V_m \text{ sen } \alpha - 0.212V_m \cos 2\alpha - 0.0424V_m \cos 4\alpha + \cdots$$

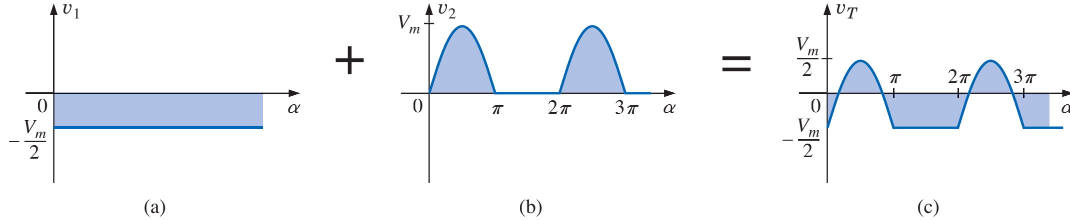


FIGURA 25.19

Disminución de una forma de onda con la suma de una componente negativa de cd.

Si cualquier forma de onda es desplazada a la derecha o a la izquierda, el desplazamiento de fase se resta o suma a, respectivamente, los términos seno y coseno. El término de cd no cambia con un desplazamiento a la derecha o a la izquierda.

Si la señal rectificada de media onda es desplazada 90° a la izquierda, como en la figura 25.20, la serie de Fourier se convierte en:

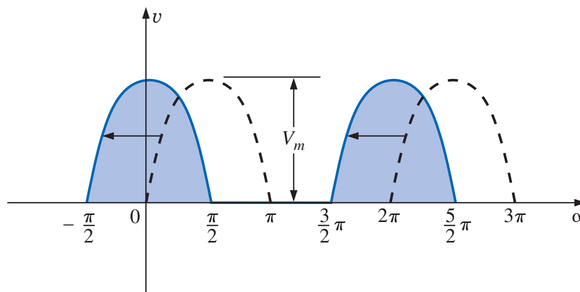


FIGURA 25.20

Cambio del ángulo de fase de una forma de onda.

$$v = 0.318V_m + 0.500V_m \underbrace{\text{sen}(\alpha + 90°)}_{\cos\alpha} - 0.212V_m \cos 2(\alpha + 90°) - 0.0424V_m \cos 4(\alpha + 90°) + \cdots$$

$$= 0.318V_m + 0.500V_m \cos\alpha - 0.212V_m \cos(2\alpha + 180°) - 0.0424V_m \cos(4\alpha + 360°) + \cdots$$

y $$v = 0.318V_m + 0.500V_m \cos\alpha + 0.212V_m \cos 2\alpha - 0.0424V_m \cos 4\alpha + \cdots$$

25.3 RESPUESTA DE UN CIRCUITO A UNA ENTRADA NO SENOIDAL

La representación de la serie de Fourier de una entrada no senoidal puede aplicarse a una red lineal usando el principio de superposición. Recuerde que el teorema de superposición permite considerar los efectos de cada fuente de un circuito de manera independiente. Si sustituimos la entrada no senoidal con los términos de la serie de Fourier que resulten necesarios para consideraciones prácticas, podemos usar la superposición y encontrar la respuesta de la red para cada término (Figura 25.21).

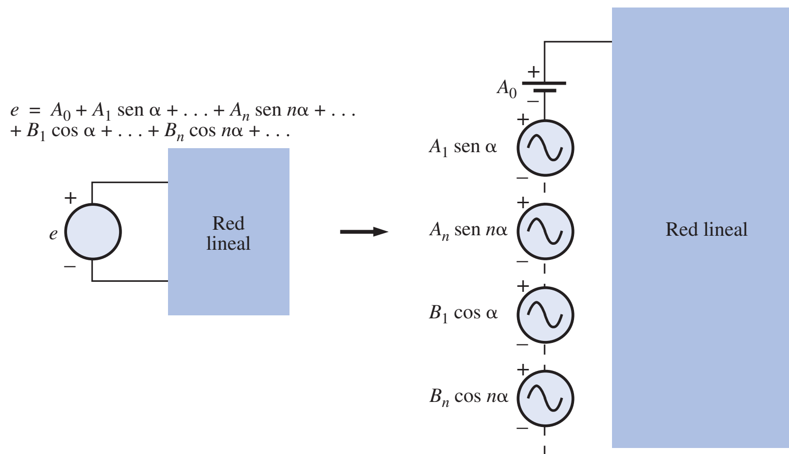


FIGURA 25.21
Aplicación de términos de una serie de Fourier a una red lineal.

En tal caso, la respuesta total del sistema es la suma algebraica de los valores obtenidos para cada término. El principal cambio entre usar este teorema para los circuitos no senoidales y emplearlo para los circuitos descritos antes es que la frecuencia será diferente en cada término de la aplicación no senoidal. Por tanto, las reactancias:

$$X_L = 2\pi fL \quad \text{y} \quad X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

cambiarán para cada término del voltaje o la corriente de entrada.

En el capítulo 13 encontramos que el valor rms de cualquier forma de onda se obtenía mediante:

$$\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}$$

Si aplicamos esta ecuación a la siguiente serie de Fourier:

$$v(\alpha) = V_0 + V_{m_1} \text{ sen } \alpha + \cdots + V_{m_n} \text{ sen } n\alpha + V'_{m_1} \cos \alpha + \cdots + V'_{m_n} \cos n\alpha$$

entonces:

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_0^2 + \frac{V_{m_1}^2 + \cdots + V_{m_n}^2 + V'^2_{m_1} + \cdots + V'^2_{m_n}}{2}} \tag{25.11}$$

Sin embargo, como:

$$\frac{V_{m_1}^2}{2} = \left(\frac{V_{m_1}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{V_{m_1}}{\sqrt{2}}\right) = (V_{1_{\text{rms}}})(V_{1_{\text{rms}}}) = V_{1_{\text{rms}}}^2$$

entonces:

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_0^2 + V_{1_{\text{rms}}}^2 + \cdots + V_{n_{\text{rms}}}^2 + V'^2_{1_{\text{rms}}} + \cdots + V'^2_{n_{\text{rms}}}} \tag{25.12}$$

Similarmente, para:

$$i(\alpha) = I_0 + I_{m_1} \text{ sen } \alpha + \cdots + I_{m_n} \text{ sen } n\alpha + I'_{m_1} \cos \alpha + \cdots + I'_{m_n} \cos n\alpha$$

tenemos:

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m_1}^2 + \cdots + I_{m_n}^2 + I'^2_{m_1} + \cdots + I'^2_{m_n}}{2}} \tag{25.13}$$

e

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{I_0^2 + I_{1_{\text{rms}}}^2 + \cdots + I_{n_{\text{rms}}}^2 + I'^2_{1_{\text{rms}}} + \cdots + I'^2_{n_{\text{rms}}}} \tag{25.14}$$

La potencia total entregada es la suma de las potencias entregadas por los términos correspondientes del voltaje y la corriente. En las ecuaciones siguientes, todos los voltajes y las corrientes son valores rms:

$$P_T = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos \theta_1 + \cdots + V_n I_n \cos \theta_n + \cdots \tag{25.15}$$

$$P_T = I_0^2 R + I_1^2 R + \cdots + I_n^2 R + \cdots \tag{25.16}$$

o bien:

$$P_T = I_{\text{rms}}^2 R \tag{25.17}$$

con I_{rms} como fue definida mediante la ecuación (25.13), y, similarmente,

$$P_T = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \tag{25.18}$$

con V_{rms} como fue definida mediante la ecuación (25.11).

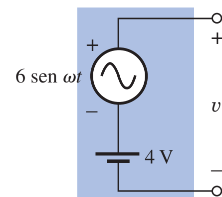


FIGURA 25.22
Ejemplo 25.5.

EJEMPLO 25.5

a. Trace la entrada resultante de la combinación de fuentes en la figura 25.22.

b. Determine el valor rms de la entrada de la figura 25.22.

Soluciones:

a. Observe la figura 25.23.

b. Ecuación (25.12):

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_0^2 + \frac{V_m^2}{2}}$$

$$= \sqrt{(4\text{ V})^2 + \frac{(6\text{ V})^2}{2}} = \sqrt{16 + \frac{36}{2}}\text{ V} = \sqrt{34}\text{ V}$$

$$= \mathbf{5.831\ V}$$

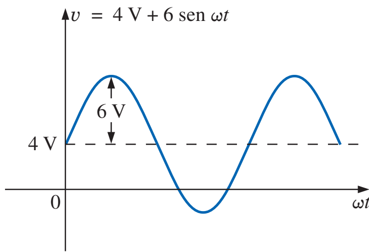


FIGURA 25.23
Patrón de onda generado por la fuente de la figura 25.22.

Es particularmente interesante observar, a partir del ejemplo 25.5, que el valor rms de la forma de onda que tiene componentes de cd y de ca no es simplemente la suma de los valores efectivos de cada una. En otras palabras, es tentador, en ausencia de la ecuación (25.12), plantear que $V_{\text{rms}} = 4\text{ V} + 0.707(6\text{ V}) = 8.242\text{ V}$, lo cual es inexacto y, de hecho, excede el nivel correcto en aproximadamente 41%.

Instrumentación

Es importante comprender que no todos los DMM leerán el valor rms de las formas de onda no senoidales como el que aparece en la figura 25.23. Muchos DMM están diseñados para leer sólo el valor rms de las formas de onda senoidales. Es importante leer el manual de cada instrumento para ver si es un medidor *de rms verdadero* que puede leer el valor rms de cualquier forma de onda.

En el capítulo 13 aprendimos que el valor rms de una onda cuadrada es el valor pico de la forma de onda. Probemos este resultado usando el desarrollo de Fourier y la ecuación (25.11).

EJEMPLO 25.6 Determine el valor rms de la onda cuadrada de la figura 25.15 con $V_m = 20$ V usando los primeros seis términos del desarrollo de Fourier, y compare el resultado con el valor rms real de 20 V.

Solución:

$$v = \frac{4}{\pi}(20\text{ V})\text{ sen }\omega t + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\right)(20\text{ V})\text{ sen }3\omega t + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{5}\right)(20\text{ V})\text{ sen }5\omega t + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{7}\right)(20\text{ V})\text{ sen }7\omega t$$
$$+ \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{9}\right)(20\text{ V})\text{ sen }9\omega t + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{11}\right)(20\text{ V})\text{ sen }11\omega t$$

$$v = 25.465\text{ sen }\omega t + 8.488\text{ sen }3\omega t + 5.093\text{ sen }5\omega t + 3.638\text{ sen }7\omega t + 2.829\text{ sen }9\omega t + 2.315\text{ sen }11\ \omega t$$

Ecuación (25.11):

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{V_0^2 + \frac{V_{m_1}^2 + V_{m_2}^2 + V_{m_3}^2 + V_{m_4}^2 + V_{m_5}^2 + V_{m_6}^2}{2}}$$

$$= \sqrt{(0\text{ V})^2 + \frac{(25.465\text{ V})^2 + (8.488\text{ V})^2 + (5.093\text{ V})^2 + (3.638\text{ V})^2 + (2.829\text{ V})^2 + (2.315\text{ V})^2}{2}}$$

$$= \mathbf{19.66\ V}$$

La solución difiere en menos de 0.4 V de la respuesta correcta de 20 V. Sin embargo, cada término adicional en la serie de Fourier acercará el resultado al nivel de 20 V. Un número infinito producirá una solución exacta de 20 V.

EJEMPLO 25.7 La entrada al circuito de la figura 25.24 es la siguiente:

$$e = 12 + 10 \text{ sen } 2t$$

a. Encuentre la corriente i y los voltajes v_R y v_C.
b. Encuentre los valores rms de i, v_R y v_C.
c. Encuentre la potencia entregada al circuito.

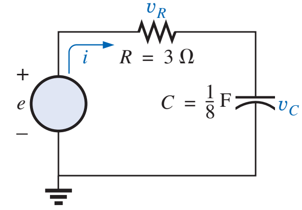


FIGURA 25.24
Ejemplo 25.7.

Soluciones:

a. Trace de nuevo el circuito original como se muestra en la figura 25.25. Luego aplique la superposición:

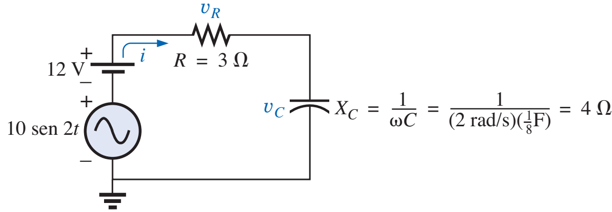


FIGURA 25.25
Circuito de la figura 25.24 con las componentes de la serie de Fourier en la entrada.

1. *Para la parte de la fuente de cd de 12 V de la entrada*, $I = 0$ ya que el capacitor es un circuito abierto a cd cuando v_C ha alcanzado su valor final (estado estable). Por tanto,

$$V_R = IR = 0 \text{ V} \quad \text{y} \quad V_C = 12 \text{ V}$$

2. *Para la fuente de ca,*

$$\mathbf{Z} = 3\ \Omega - j\,4\ \Omega = 5\ \Omega \angle -53.13°$$

e $$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}} = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}} \text{ V} \angle 0°}{5\ \Omega \angle -53.13°} = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ A} \angle +53.13°$$

$$\mathbf{V}_R = (I \angle \theta)(R \angle 0°) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \text{ A} \angle +53.13°\right)(3\ \Omega \angle 0°)$$
$$= \frac{6}{\sqrt{2}} \text{ V} \angle +53.13°$$

y

$$\mathbf{V}_C = (I \angle \theta)(X_C \angle -90°) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \text{ A} \angle +53.13°\right)(4\ \Omega \angle -90°)$$
$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \text{ V} \angle -36.87°$$

En el dominio del tiempo,

$$i = \mathbf{0 + 2 \text{ sen}(2}t\mathbf{ + 53.13°)}$$

Observe que aunque el término de cd estaba presente en la expresión para el voltaje de entrada, el término de cd para la corriente en este circuito es cero:

$$v_R = \mathbf{0 + 6 \text{ sen}(2}t\mathbf{ + 53.13°)}$$

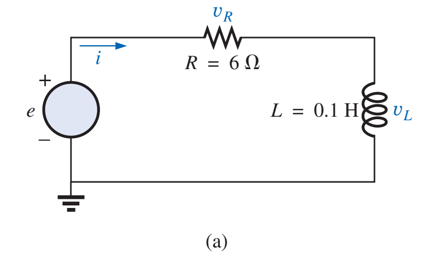
y $$v_C = \mathbf{12 + 8 \text{ sen}(2}t\mathbf{ - 36.87°)}$$

b. Ecuación (25.14): $I_{\text{rms}} = \sqrt{(0)^2 + \dfrac{(2\text{ A})^2}{2}} = \sqrt{2}\text{ V} = \mathbf{1.414\text{ A}}$

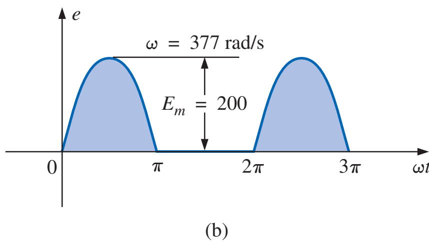
Ecuación (25.12): $V_{R_{\text{rms}}} = \sqrt{(0)^2 + \dfrac{(6\text{ V})^2}{2}} = \sqrt{18}\text{ V} = \mathbf{4.243\text{ V}}$

Ecuación (25.12): $V_{C_{\text{rms}}} = \sqrt{(12\text{ V})^2 + \dfrac{(8\text{ V})^2}{2}} = \sqrt{176}\text{ V} = \mathbf{13.267\text{ V}}$

c. $P = I_{\text{rms}}^2 R = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\text{ A}\right)^2 (3\ \Omega) = \mathbf{6\text{ W}}$



(a)



(b)

FIGURA 25.26
Ejemplo 25.8.

EJEMPLO 25.8 Encuentre la respuesta del circuito de la figura 25.26 a la entrada mostrada.

$e = 0.318E_m + 0.500E_m \text{ sen } \omega t - 0.212E_m \cos 2\omega t - 0.0424E_m \cos 4\omega t + \cdots$

Solución: Con propósitos de análisis, sólo se usarán los tres primeros términos para representar e. Convirtiendo los términos coseno a términos seno y sustituyendo E_m obtenemos:

$$e = 63.60 + 100.0 \text{ sen } \omega t - 42.40 \text{ sen}(2\omega t + 90°)$$

Usando notación fasorial, el circuito original toma la forma del mostrado en la figura 25.27.

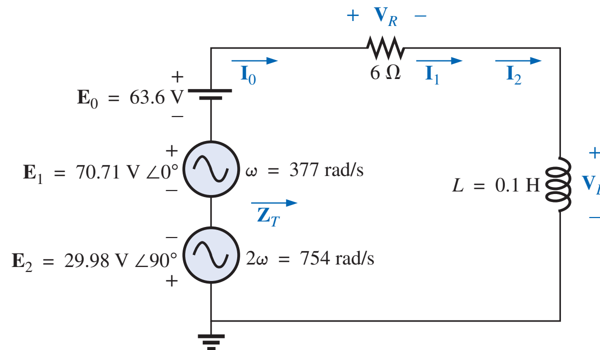


FIGURA 25.27
Circuito de la figura 25.26 con las componentes de la serie de Fourier en la entrada.

Aplicación de la superposición *Para el término de cd* ($E_0 = 63.6$ V):

$$X_L = 0 \qquad \text{(corto para cd)}$$
$$\mathbf{Z}_T = R\ \angle 0° = 6\ \Omega\ \angle 0°$$
$$I_0 = \frac{E_0}{R} = \frac{63.6\text{ V}}{6\ \Omega} = 10.60\text{ A}$$
$$V_{R_0} = I_0 R = E_0 = 63.60\text{ V}$$
$$V_{L_0} = 0$$

La potencia promedio es:

$$P_0 = I_0^2 R = (10.60\text{ A})^2 (6\ \Omega) = 674.2\text{ W}$$

Para el término fundamental ($\mathbf{E}_1 = 70.71\text{ V}\ \angle 0°$, $\omega = 377$):

$$X_{L_1} = \omega L = (377\text{ rad/s})(0.1\text{ H}) = 37.7\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_{T_1} = 6\ \Omega + j\,37.7\ \Omega = 38.17\ \Omega\ \angle 80.96°$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_{T_1}} = \frac{70.71\ \text{V}\ \angle 0°}{38.17\ \Omega\ \angle 80.96°} = 1.85\ \text{A}\ \angle -80.96°$$

$$\mathbf{V}_{R_1} = (I_1\ \angle\theta)(R\ \angle 0°) = (1.85\ \text{A}\ \angle -80.96°)(6\ \Omega\ \angle 0°) = 11.10\ \text{V}\ \angle -80.96°$$

$$\mathbf{V}_{L_1} = (I_1\ \angle\theta)(X_{L_1}\ \angle 90°) = (1.85\ \text{A}\ \angle -80.96°)(37.7\ \Omega\ \angle 90°) = 69.75\ \text{V}\ \angle 9.04°$$

La potencia promedio es:

$$P_1 = I_1^2 R = (1.85\ \text{A})^2(6\ \Omega) = 20.54\ \text{W}$$

Para el segundo armónico ($\mathbf{E}_2 = 29.98\ \text{V}\ \angle -90°$, $\omega = 754$): El ángulo de fase de $\mathbf{E}_2$ fue cambiado a $-90°$ para darle la misma polaridad que a los voltajes de entrada $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{E}_1$.

$$X_{L_2} = \omega L = (754\ \text{rad/s})(0.1\ \text{H}) = 75.4\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_{T_2} = 6\ \Omega + j\,75.4\ \Omega = 75.64\ \Omega\ \angle 85.45°$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_{T_2}} = \frac{29.98\ \text{V}\ \angle -90°}{75.64\ \Omega\ \angle 85.45} = 0.396\ \text{A}\ \angle -175.45°$$

$$\mathbf{V}_{R_2} = (I_2\ \angle\theta)(R\ \angle 0°) = (0.396\ \text{A}\ \angle -175.45°)(6\ \Omega\ \angle 0°) = 2.38\ \text{V}\ \angle -175.45°$$

$$\mathbf{V}_{L_2} = (I_2\ \angle\theta)(X_{L_2}\ \angle 90°) = (0.396\ \text{A}\ \angle -175.45°)(75.4\ \Omega\ \angle 90°) = 29.9\ \text{V}\ \angle -85.45°$$

La potencia promedio es:

$$P_2 = I_2^2 R = (0.396\ \text{A})^2(6\ \Omega) = 0.941\ \text{W}$$

El desarrollo de la serie de Fourier para i es:

$$i = \mathbf{10.6 + \sqrt{2}(1.85)\ sen(377\mathit{t} - 80.96°) + \sqrt{2}(0.396)\ sen(754\mathit{t} - 175.45°)}$$

e

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{(10.6\ \text{A})^2 + (1.85\ \text{A})^2 + (0.396\ \text{A})^2} = \mathbf{10.77\ A}$$

El desarrollo en serie de Fourier para v_R es:

$$v_R = \mathbf{63.6 + \sqrt{2}(11.10)\ sen(377\mathit{t} - 80.96°) + \sqrt{2}(2.38)\ sen(754\mathit{t} - 175.45°)}$$

y

$$V_{R_{\text{rms}}} = \sqrt{(63.6\ \text{V})^2 + (11.10\ \text{V})^2 + (2.38\ \text{V})^2} = \mathbf{64.61\ V}$$

El desarrollo de la serie de Fourier para v_L es:

$$v_L = \mathbf{\sqrt{2}(69.75)\ sen(377\mathit{t} + 9.04°) + \sqrt{2}(29.93)\ sen(754\mathit{t} - 85.45°)}$$

y $$V_{L_{\text{rms}}} = \sqrt{(69.75\ \text{V})^2 + (29.93\ \text{V})^2} = \mathbf{75.90\ V}$$

La potencia promedio total es:

$$P_T = I_{\text{rms}}^2 R = (10.77\ \text{A})^2(6\ \Omega) = \mathbf{695.96\ W} = P_0 + P_1 + P_2$$

25.4 SUMA Y RESTA DE FORMAS DE ONDA NO SENOIDALES

La expresión de la serie de Fourier para la forma de onda que resulta de la adición o la resta de dos formas de onda no senoidales puede encontrarse

usando álgebra fasorial si los términos que tienen la misma frecuencia son considerados por separado.

Por ejemplo, la suma de las dos siguientes formas de onda no senoidales se encuentra usando este método:

$$v_1 = 30 + 20 \text{ sen } 20t + \cdots + 5 \text{ sen}(60t + 30°)$$
$$v_2 = 60 + 30 \text{ sen } 20t + 20 \text{ sen } 40t + 10 \cos 60t$$

1. Términos de cd:

$$V_{T_0} = 30 \text{ V} + 60 \text{ V} = 90 \text{ V}$$

2. $\omega = 20$:

$$V_{T_{1(\text{máx})}} = 30 \text{ V} + 20 \text{ V} = 50 \text{ V}$$

y $$v_{T_1} = 50 \text{ sen } 20t$$

3. $\omega = 40$:

$$v_{T_2} = 20 \text{ sen } 40t$$

4. $\omega = 60$:

$$5 \text{ sen}(60t + 30°) = (0.707)(5) \text{ V } \angle 30° = 3.54 \text{ V } \angle 30°$$
$$10 \cos 60t = 10 \text{ sen}(60t + 90°) \Rightarrow (0.707)(10) \text{ V } \angle 90° = 7.07 \text{ V } \angle 90°$$

$$\mathbf{V}_{T_3} = 3.54 \text{ V } \angle 30° + 7.07 \text{ V } \angle 90° = 3.07 \text{ V} + j\,1.77 \text{ V} + j\,7.07 \text{ V} = 3.07 \text{ V} + j\,8.84 \text{ V}$$
$$\mathbf{V}_{T_3} = 9.36 \text{ V } \angle 70.85°$$

y $$v_{T_3} = 13.24 \text{ sen}(60t + 70.85°)$$

con:

$$v_T = v_1 + v_2 = \mathbf{90 + 50 \text{ sen } 20t + 20 \text{ sen } 40t + 13.24 \text{ sen}(60t + 70.85°)}$$

25.5 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Serie de Fourier El análisis por computadora empezará con una verificación de la forma de onda de la figura 25.17, demostrando que con sólo cuatro términos de una serie de Fourier es posible generar una forma de onda que tenga algunas características de una onda cuadrada. La onda cuadrada tiene un valor pico de 10 V a una frecuencia de 1 kHz, resultando en la siguiente serie de Fourier mediante la ecuación (25.9) (y reconociendo que $\omega = 2\pi f = 6283.19$ rad/s):

$$v = \frac{4}{\pi}(10 \text{ V})\left(\text{sen } \omega t + \frac{1}{3} \text{ sen } 3\omega t + \frac{1}{5} \text{ sen } 5\omega t + \frac{1}{7} \text{ sen } 7\omega t\right)$$
$$= 12.732 \text{ sen } \omega t + 4.244 \text{ sen } 3\omega t + 2.546 \text{ sen } 5\omega t + 1.819 \text{ sen } 7\omega t$$

Cada término de la serie de Fourier es tratado igual que una fuente independiente de ca, como se muestra en la figura 25.28, con su valor pico y su frecuencia aplicable. La suma de los voltajes fuente aparecerá en el resistor R y generará la forma de onda de la figura 25.29.

Cada fuente usó **VSIN**, y como queremos desplegar el resultado contra el tiempo, elegimos **Time Domain(Transient)** en **Simulation Settings**. Para cada fuente se requirió el cuadro de diálogo **Property Editor**, y se establecieron **AC**, **FREQ**, **PHASE**, **VAMPL** y **VOFF** (en 0 V), aunque debido a limitaciones de

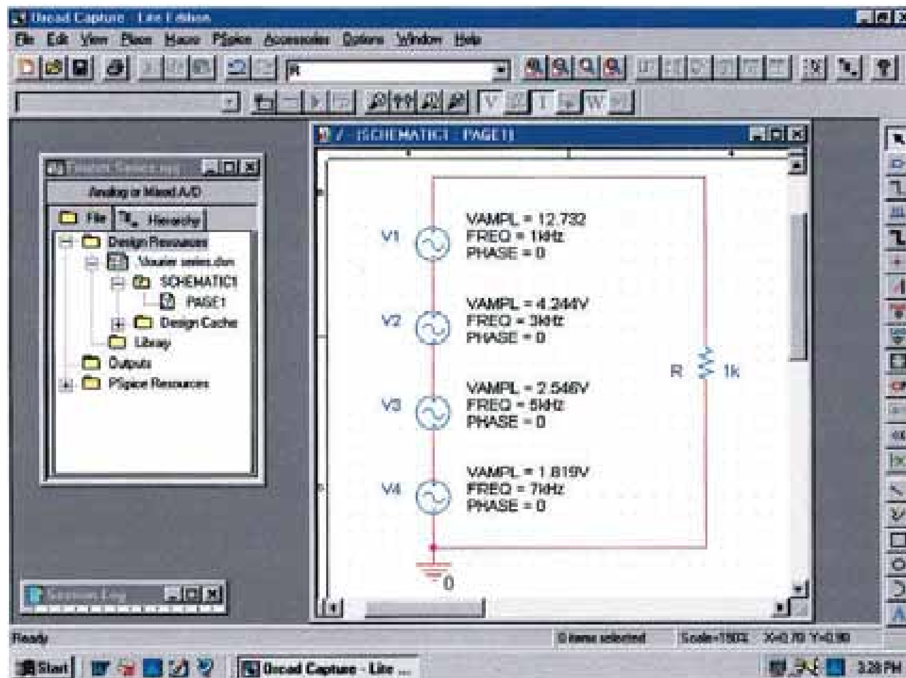


FIGURA 25.28
Uso de PSpice para aplicar cuatro términos del desarrollo de Fourier de una onda cuadrada de 10 V a un resistor de carga de 1 kΩ.

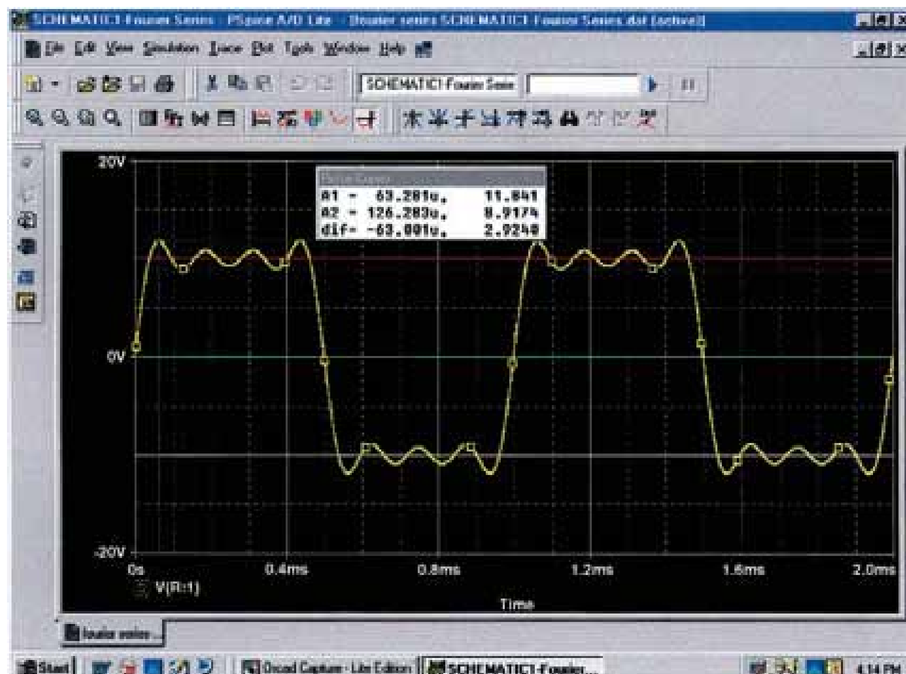


FIGURA 25.29
Forma de onda resultante del voltaje en el resistor R de la figura 25.28.

espacio sólo se desplegaron **VAMPL**, **FREQ** y **PHASE** en la figura 25.28. Bajo **Display** las cantidades restantes fueron establecidas en **Do Not Display**.

Run to time se fijó en 2 ms de manera que aparecieran dos ciclos de la frecuencia fundamental de 1 kHz. **Start saving data after** permanecerá en el valor predeterminado de 0 s, y **Maximum step size** será de 1 μs, aunque 2 ms/1000 = 2 μs, porque deseamos obtener puntos adicionales de la gráfica para la forma de onda compleja. Una vez que la ventana **SCHEMATIC1** aparece, **Trace-Add Trace-V(R:1)-OK** resultará en la forma de onda de la figura 25.29. Para engrosar la línea horizontal en 0 V se da clic derecho sobre ella, seleccionando **Properties**, y eligiendo luego el color verde y la línea más ancha. Haga clic en **OK** y resultará la línea más ancha de la figura 25.29, volviendo mucho más claro dónde se localiza la línea de 0 V. Mediante el mismo procedimiento, la curva se volvió amarilla y más ancha como se muestra en la misma figura. Usando los cursores, encontramos que el primer pico llegará a 11.84 V y luego descenderá a 8.920 V. El valor promedio de la forma de onda es claramente +10 V en la región positiva, como lo muestra en el programa la línea roja introducida usando **Plot-Label-Line**. En cualquier aspecto, la forma de onda está comenzando a tener las características de una onda cuadrada periódica con valor pico de 10 V y frecuencia de 1 kHz.

Componentes de Fourier Puede obtenerse una gráfica del espectro de frecuencia que revele la magnitud y la frecuencia de cada componente de una serie de Fourier regresando a **Plot** y seleccionando **Axis Settings** seguido por **X Axis**, y luego **Fourier** bajo **Processing Options**. Haga clic en **OK** y aparecerán algunos picos sobre la parte izquierda más lejana de la pantalla, con un espectro de frecuencia que se extiende desde 0 Hz hasta 600 kHz. Seleccionando de nuevo **Plot-Axis Settings**, nos situamos en **Data Range**, y eligiendo

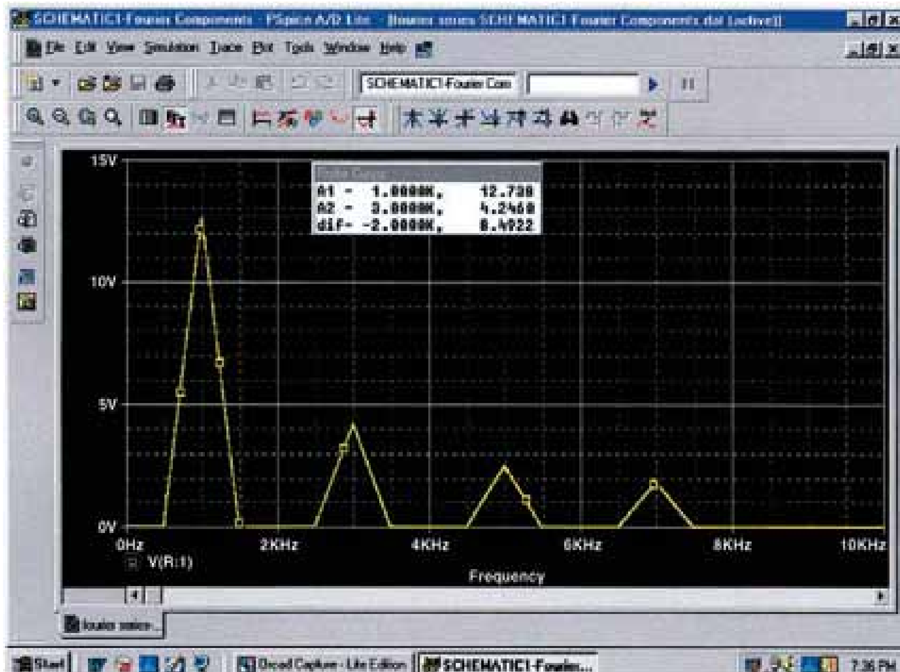


FIGURA 25.30
Componentes de Fourier de la forma de onda de la figura 25.29.

User Defined es posible cambiar el intervalo de 0 Hz a 10 kHz, ya que es éste el intervalo de interés para esta forma de onda. Haga clic en **OK** y se producirá la gráfica de la figura 25.30, que da la magnitud y la frecuencia de las componentes de la forma de onda. Usando el cursor izquierdo, encontramos que el pico más alto es de 12.738 V a 1 kHz, comparándose muy bien con la fuente **V1** que tiene un valor pico de 12.732 V a 1 kHz. Usando el cursor de clic derecho, podemos movernos hacia 3 kHz, y encontrar una magnitud de 4.246 V, comparándose de nuevo muy bien con la fuente **V2** que tiene un valor pico de 4.244 V.

PROBLEMAS

SECCIÓN 25.2 Serie de Fourier

1. Para las formas de onda de la figura 25.31, determine si en la representación de la serie de Fourier estarán presentes:
a. El término de cd.
b. Los términos coseno.
c. Los términos seno.
d. Los armónicos ordenados por pares.
e. Los armónicos ordenados por impares.

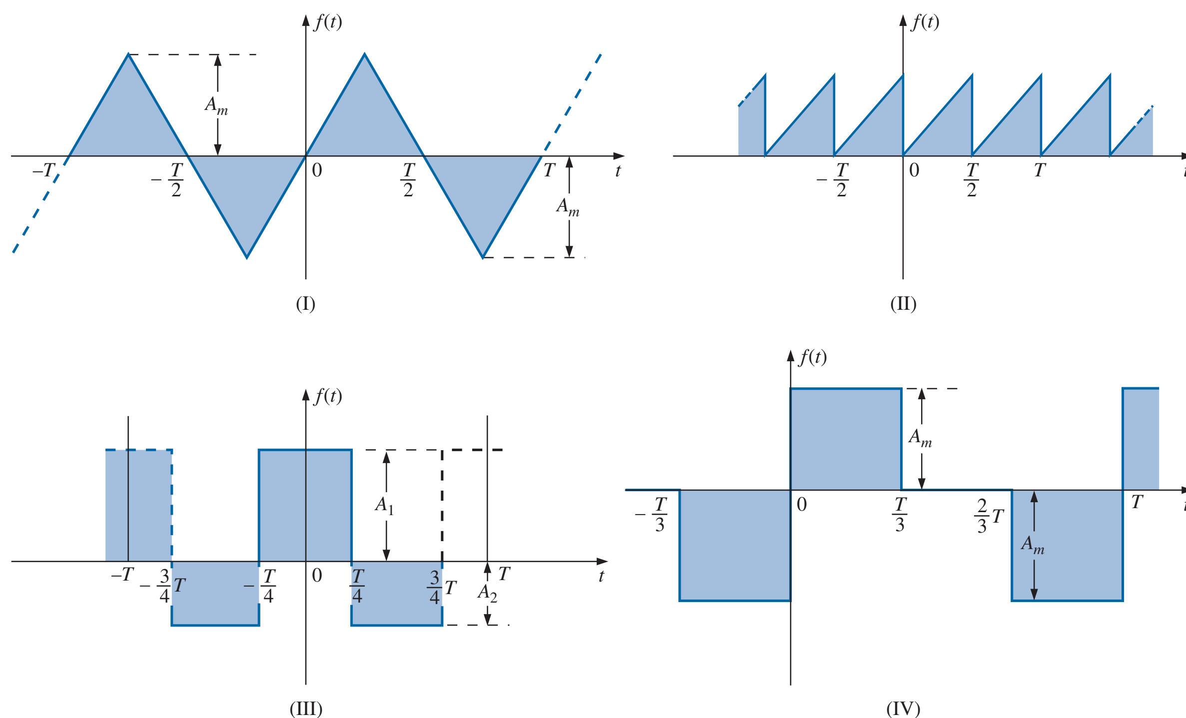


FIGURA 25.31
Problema 1.

2. Si la serie de Fourier para la forma de onda de la figura 25.32(a) es:

$$i = \frac{2I_m}{\pi}\left(1 + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{35}\cos 6\omega t + \cdots\right)$$

encuentre la representación de la serie de Fourier para las formas de onda (b) a (d).

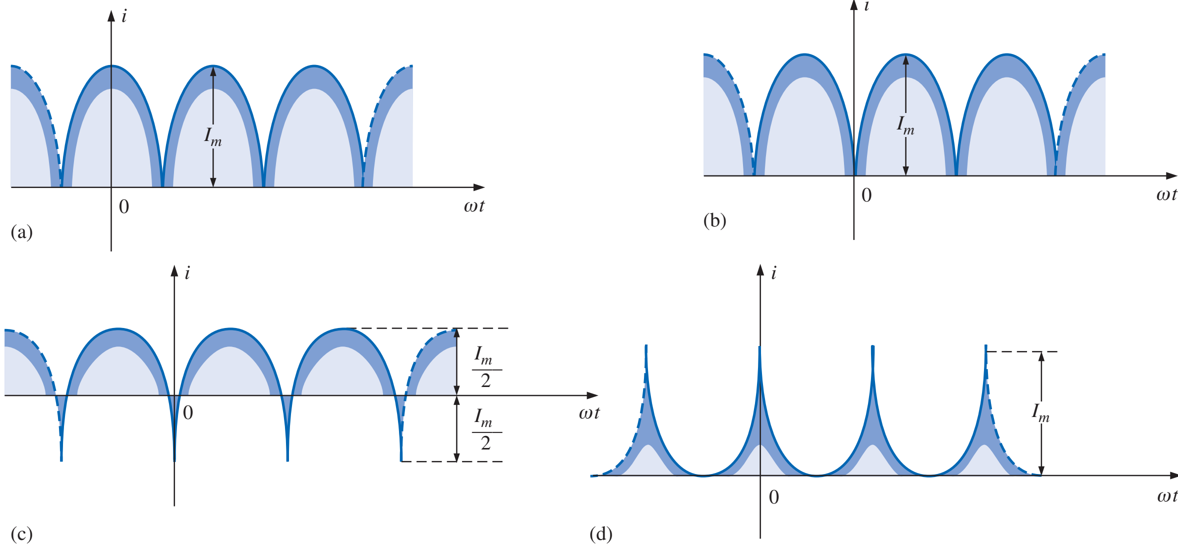


FIGURA 25.32
Problema 2.

3. Trace las siguientes formas de onda no senoidales con $\alpha = \omega t$ como la abscisa:
   a. $v = -4 + 2 \text{ sen } \alpha$ **b.** $v = (\text{sen } \alpha)^2$
   c. $i = 2 - 2 \cos \alpha$
4. Trace las siguientes formas de onda no senoidales con α como la abscisa:
   a. $i = 3 \text{ sen } \alpha - 6 \text{ sen } 2\alpha$
   b. $v = 2 \cos 2\alpha + \text{sen } \alpha$
5. Trace las siguientes formas de onda no senoidales con ωt como la abscisa:
   a. $i = 50 \text{ sen } \omega t + 25 \text{ sen } 3\omega t$
   b. $i = 50 \text{ sen } \alpha - 25 \text{ sen } 3\alpha$
   c. $i = 4 + 3 \text{ sen } \omega t + 2 \text{ sen } 2\omega t - 1 \text{ sen } 3\omega t$

SECCIÓN 25.3 Respuesta de un circuito a una entrada no senoidal

6. Encuentre los valores promedio y efectivo de las siguientes ondas no senoidales:
   a. $v = 100 + 50 \text{ sen } \omega t + 25 \text{ sen } 2\omega t$
   b. $i = 3 + 2 \text{ sen}(\omega t - 53^\circ) + 0.8 \text{ sen}(2\omega t - 70^\circ)$
7. Encuentre el valor rms de las siguientes ondas no senoidales:
   a. $v = 20 \text{ sen } \omega t + 15 \text{ sen } 2\omega t - 10 \text{ sen } 3\omega t$
   b. $i = 6 \text{ sen}(\omega t + 20^\circ) + 2 \text{ sen}(2\omega t + 30^\circ) - 1 \text{ sen}(3\omega t + 60^\circ)$
8. Encuentre la potencia promedio total hacia un circuito cuyo voltaje y corriente son los indicados en el problema 6.

9. Encuentre la potencia promedio total hacia un circuito cuyo voltaje y corriente son los indicados en el problema 7.

10. La representación de la serie de Fourier para el voltaje de entrada al circuito de la figura 25.33 es:

$$e = 18 + 30 \text{ sen } 400t$$

a. Encuentre la expresión no senoidal para la corriente *i*.
b. Calcule el valor rms de la corriente.
c. Encuentre la expresión para el voltaje en el resistor.
d. Calcule el valor rms del voltaje en el resistor.
e. Encuentre la expresión para el voltaje en el elemento reactivo.
f. Calcule el valor rms del voltaje en el elemento reactivo.
g. Encuentre la potencia promedio entregada al resistor.

11. Resuelva el problema 10 para:

$$e = 24 + 30 \text{ sen } 400t + 10 \text{ sen } 800t$$

12. Resuelva el problema 10 para el siguiente voltaje de entrada:

$$e = -60 + 20 \text{ sen } 300t - 10 \text{ sen } 600t$$

13. Resuelva el problema 10 para el circuito de la figura 25.34.

***14.** El voltaje de entrada de la figura 25.35(a) al circuito de la figura 25.35(b) es una señal rectificada de onda completa que tiene el siguiente desarrollo de serie de Fourier:

$$e = \frac{(2)(100 \text{ V})}{\pi}\left(1 + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t + \frac{2}{53}\cos 6\omega t + \cdots\right)$$

donde $\omega = 377$.

a. Encuentre la expresión de la serie de Fourier para el voltaje v_o usando sólo los primeros tres términos de la expresión.
b. Encuentre el valor rms de v_o.
c. Encuentre la potencia promedio entregada al resistor de 1 kΩ.

***15.** Encuentre la expresión de la serie de Fourier para el voltaje v_o de la figura 25.36.

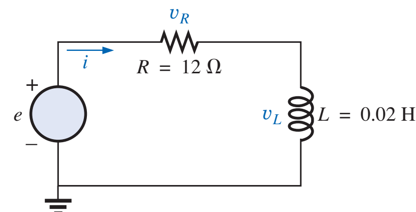


FIGURA 25.33
Problemas 10, 11 y 12.

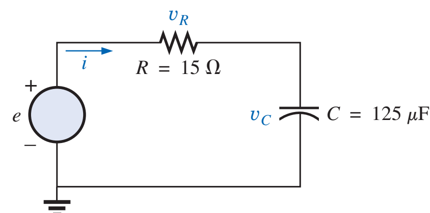
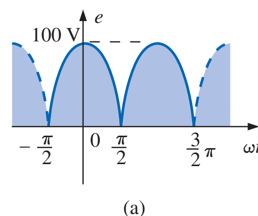
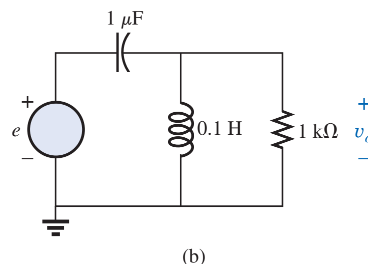


FIGURA 25.34
Problema 13.

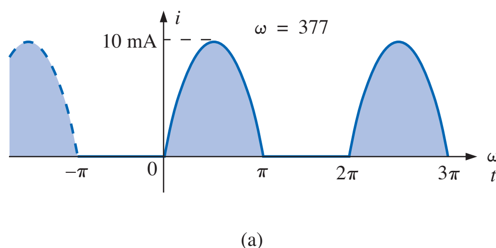


(a)

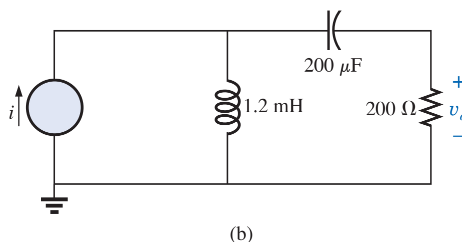


(b)

FIGURA 25.35
Problema 14.



(a)



(b)

FIGURA 25.36
Problema 15.

SECCIÓN 25.4 Suma y resta de formas de onda no senoidales

16. Efectúe las operaciones indicadas en las siguientes formas de onda no senoidales:

a.
$[60 + 70 \text{ sen } \omega t + 20 \text{ sen}(2\omega t + 90°) + 10 \text{ sen}(3\omega t + 60°)]$
$+ [20 + 30 \text{ sen } \omega t - 20 \cos 2\omega t + 5 \cos 3\omega t]$

b.
$[20 + 60 \text{ sen } \alpha + 10 \text{ sen}(2\alpha - 180°) + 5 \cos(3\alpha + 90°)]$
$- [5 - 10 \text{ sen } \alpha + 4 \text{ sen}(3\alpha - 30°)]$

17. Encuentre la expresión no senoidal para la corriente i_s del diagrama de la figura 25.37.

$$i_2 = 10 + 30 \text{ sen } 20t - 0.5 \text{ sen}(40t + 90°)$$
$$i_1 = 20 + 4 \text{ sen}(20t + 90°) + 0.5 \text{ sen}(40t + 30°)$$

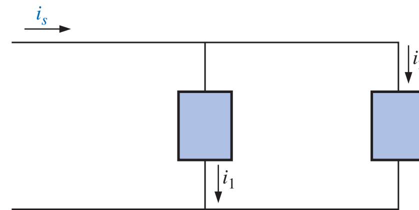


FIGURA 25.37
Problema 17.

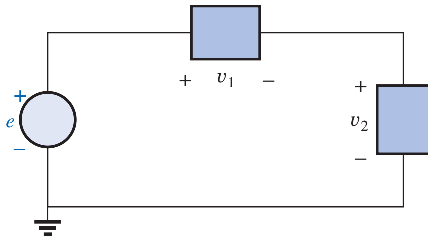


FIGURA 25.38
Problema 18.

18. Encuentre la expresión no senoidal para el voltaje e del diagrama de la figura 25.38.

$$v_1 = 20 - 200 \text{ sen } 600t + 100 \cos 1200t + 75 \text{ sen } 1800t$$
$$v_2 = -10 + 150 \text{ sen}(600t + 30°) + 50 \text{ sen}(1800t + 60°)$$

SECCIÓN 25.5 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

19. Trace la forma de onda de la figura 25.13 para dos o tres ciclos. Luego obtenga las componentes de Fourier, y compárelas con la señal aplicada.

20. Grafique una rectificación de media onda con valor pico de 20 V usando la ecuación (25.10). Use el término de cd, el término fundamental, y cuatro armónicos. Compare la forma de onda resultante con la forma ideal de la rectificación de media onda.

21. Demuestre el efecto de sumar dos términos más a la forma de onda de la figura 25.29, y genere el espectro de Fourier.

Lenguaje de programación (C++, QBASIC, Pascal, etc.)

22. Escriba un programa para obtener el desarrollo de Fourier resultante de la adición de dos formas de onda no senoidales.

23. Escriba un programa para determinar la suma de los 10 primeros términos de la ecuación (25.9) en $\omega t = \pi/2$, π y $(3/2)\pi$, y compare sus resultados con los valores determinados por la figura 25.15. Esto es, ingrese la ecuación (25.9) a la memoria, y calcule la suma de los términos en los puntos indicados antes.

24. Dada cualquier función no senoidal, escriba un programa que determine los valores promedio y rms de la forma de onda. El programa debe solicitar los datos requeridos a partir de la función no senoidal.

25. Escriba un programa que proporcione una solución general para la red de la figura 25.24 para un término único de cd y ca en el voltaje aplicado. En otras palabras, los valores de los parámetros están dados junto con los particulares relacionados con la señal aplicada, además de la expresión no senoidal para la corriente y el programa que genera cada voltaje.

GLOSARIO

Armónicos impares Términos del desarrollo de la serie de Fourier que tienen frecuencias que son múltiplos impares del componente fundamental.

Armónicos pares Términos del desarrollo de la serie de Fourier que tienen frecuencias que son múltiplos pares del componente fundamental.

Componente fundamental Término de frecuencia mínima requerido para representar una forma de onda particular en el desarrollo de la serie de Fourier.

Forma de onda no senoidal Cualquier forma de onda que difiera de la función senoidal fundamental.

Serie de Fourier Secuencia de términos, desarrollados en 1826 por el barón Jean Fourier, que pueden usarse para representar una función no senoidal.

Simetría de eje Función senoidal o no senoidal que tiene simetría con respecto al eje vertical.

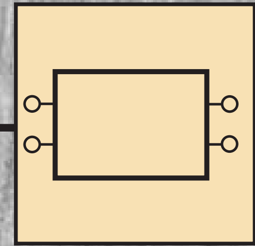
Simetría de media onda (de espejo) Función senoidal o no senoidal que satisface la relación:

$$f(t) = -f\left(\frac{T}{2} + t\right)$$

Simetría de punto Función senoidal o no senoidal que satisface la relación $f(\alpha) = -f(-\alpha)$.

Términos armónicos Términos del desarrollo de la serie de Fourier que tienen frecuencias que son múltiplos enteros de la componente fundamental.

26



Análisis de sistemas: una introducción

26.1 INTRODUCCIÓN

El creciente número de sistemas empaquetados para aplicar en los campos eléctrico, electrónico y de computación, en la actualidad requiere que aparezca de algún modo el análisis de sistemas en el programa de estudios de un curso introductorio. Aunque en este capítulo el tratamiento será superficial, el material presentará varios términos y técnicas importantes empleados en el análisis de sistemas. Es muy comprensible el creciente uso de sistemas empaquetados cuando consideramos las ventajas asociadas con tales estructuras: tamaño reducido, diseño complejo y probado, menor tiempo de desarrollo, costos reducidos en comparación con diseños discretos, etc. El uso de cualquier sistema empaquetado se limita sólo a la utilización adecuada de las terminales que cada uno proporciona. No está permitido introducirse a la estructura interna, lo cual también elimina las posibilidades de reparación de tales sistemas.

El análisis de sistemas incluye el desarrollo de modelos de dispositivos, sistemas o estructuras con dos, tres o varios puertos. En este capítulo, el énfasis estará enfocado sobre la configuración que se aplica más a menudo a las técnicas de modelado: el sistema de dos puertos de la figura 26.1.

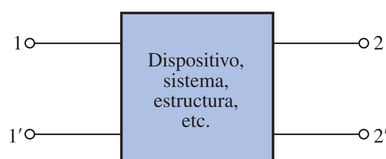
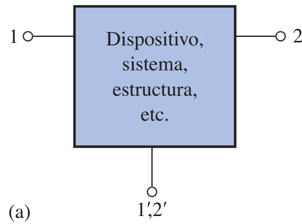
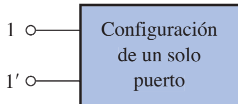


FIGURA 26.1
Sistema de dos puertos.







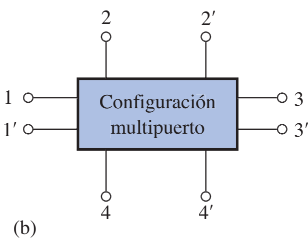


FIGURA 26.2
(a) Sistema de dos puertos; (b) sistema de un solo puerto y sistema multipuerto.

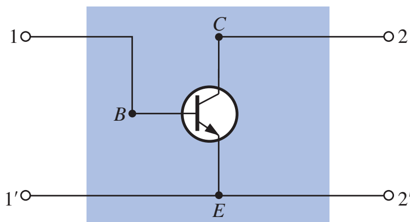


FIGURA 26.3
Configuración de dos puertos de un transistor.

Observe que en la figura 26.1 hay dos puertos de entrada, cada uno con un par de terminales. En algunos dispositivos, la **red de dos puertos** de la figura 26.1 puede verse como en la figura 26.2(a). El diagrama de bloques de la figura 26.2(a) indica simplemente que las terminales 1′ y 2′ son comunes, lo cual es un caso particular de la red general de dos puertos. En la figura 26.2(b) se muestran una **red de un solo puerto** y una red multipuerto. La primera se ha analizado en todo el texto, mientras que las características de la última se verán en el presente capítulo, y una cobertura más extensa quedará para un curso más avanzado.

La última parte de este capítulo presenta un grupo de ecuaciones (y, después, de redes) que nos permitirá modelar el dispositivo o sistema que aparece dentro de la estructura cerrada de la figura 26.1. Lo anterior significa que podremos establecer una red que presente las mismas características que en las terminales del sistema original, del dispositivo original, etc. Por ejemplo, en la figura 26.3 aparece un transistor entre las cuatro terminales externas. Mediante el análisis siguiente, encontraremos una combinación de elementos de red que nos permitirá sustituir el transistor por una red que se comporte de forma muy similar al dispositivo original para un grupo específico de condiciones operativas. Entonces, se aplican métodos como el análisis de mallas y de nodos para determinar las cantidades desconocidas. Los modelos, cuando se reducen a sus formas más simples según lo determinen las condiciones operativas, también proporcionan estimaciones muy rápidas del comportamiento de la red sin tener que aplicar una extensa derivación matemática. En otras palabras, una persona con experiencia en el uso de los modelos puede analizar en poco tiempo la operación de sistemas complejos y grandes. En muchos casos, tal vez los resultados sólo sean aproximaciones, pero a menudo vale la pena efectuar este cálculo rápido que requiere un esfuerzo mínimo.

El análisis de este capítulo se limita a los sistemas lineales (de valor fijo) con elementos bilaterales. Se desarrollan tres grupos de parámetros para la configuración con dos puertos, conocidos como **parámetros de impedancia (z), admitancia (y)** e **híbridos (h)**. La tabla 26.1 que se presenta al final del capítulo relaciona estos tres grupos de parámetros.

26.2 PARÁMETROS DE IMPEDANCIA Z_i Y Z_o

Para el sistema de dos puertos de la figura 26.4, $\mathbf{Z}_i$ es la **impedancia de entrada** entre las terminales 1 y 1′, y $\mathbf{Z}_o$ es la **impedancia de salida** entre las terminales 2 y 2′. Para redes multipuerto, puede definirse un valor de impedancia entre dos terminales cualesquiera (adyacentes o no) de la red.

La impedancia de entrada se define mediante la ley de Ohm de la manera siguiente:

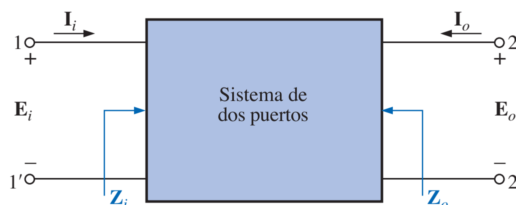


FIGURA 26.4
Definición de $\mathbf{Z}_i$ y $\mathbf{Z}_o$.



$$\mathbf{Z}_i = \frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{I}_i} \qquad \text{(ohms, } \Omega\text{)} \qquad \textbf{(26.1)}$$

donde $\mathbf{I}_i$ es la corriente resultante de la aplicación de un voltaje $\mathbf{E}_i$.

La impedancia de salida $\mathbf{Z}_o$ se define mediante:

$$\mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{I}_o}\Bigg|_{\mathbf{E}_i = 0\text{ V}} \qquad \text{(ohms, } \Omega\text{)} \qquad \textbf{(26.2)}$$

donde $\mathbf{I}_o$ es la corriente resultante de la aplicación de un voltaje $\mathbf{E}_o$ a las terminales de salida, con $\mathbf{E}_i$ igual a cero.

Observe que $\mathbf{I}_i$ e $\mathbf{I}_o$ se definen como entrando al "paquete". Ésta es una práctica muy común en varios métodos de análisis de sistemas para evitar preocupaciones con respecto a la dirección real de cada corriente, y para definir $\mathbf{Z}_i$ y $\mathbf{Z}_o$ como cantidades positivas en las ecuaciones (26.1) y (26.2), respectivamente. Si se elige $\mathbf{I}_o$ saliendo del sistema, $\mathbf{Z}_o$, tal como se define en la ecuación (26.2), deberá tener un signo negativo.

La figura 26.5 presenta una disposición experimental con el propósito de determinar $\mathbf{Z}_i$ para cualesquiera dos entradas. Se selecciona un resistor sensor R_s lo suficientemente pequeño como para no afectar la operación básica del sistema ni requerir un voltaje $\mathbf{E}_g$ demasiado grande para establecer el nivel deseado de $\mathbf{E}_i$. Bajo condiciones operativas, el voltaje en R_s es $\mathbf{E}_g - \mathbf{E}_i$, y la corriente a través del resistor sensor es:

$$\mathbf{I}_{R_s} = \frac{\mathbf{V}_{R_s}}{R_s} = \frac{\mathbf{E}_g - \mathbf{E}_i}{R_s}$$

Pero: $$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_{R_s} \quad \text{y} \quad \mathbf{Z}_i = \frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{I}_i} = \frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{I}_{R_s}}$$

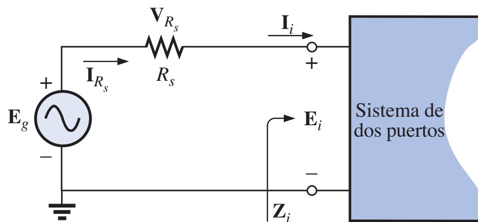


FIGURA 26.5
Determinación de $\mathbf{Z}_i$.

Por tanto, el único propósito del resistor sensor fue determinar $\mathbf{I}_i$ usando solamente mediciones de voltaje.

Conforme avancemos en este capítulo, recuerde que no podemos utilizar un ohmímetro para medir $\mathbf{Z}_i$ o $\mathbf{Z}_o$ porque estamos tratando sistemas de ca cuya impedancia puede variar con la frecuencia aplicada. Los ohmímetros pueden usarse para medir la resistencia en una red de cd o de ca, pero recuerde que sólo se emplean en una red sin energía, y su fuente interna es una batería de cd.

La impedancia de salida $\mathbf{Z}_o$ puede ser determinada experimentalmente usando el arreglo de la figura 26.6. Observe que se introduce otra vez un resistor sensor, donde $\mathbf{E}_g$ es un voltaje aplicado para establecer condiciones características de operación. Además, observe que la señal de entrada debe establecerse



en cero, como lo define la ecuación (26.2). El voltaje en el resistor sensor es $\mathbf{E}_g - \mathbf{E}_o$, y la corriente a través de este resistor es:

$$\mathbf{I}_{R_s} = \frac{\mathbf{V}_{R_s}}{R_s} = \frac{\mathbf{E}_g - \mathbf{E}_o}{R_s}$$

pero:
$$\mathbf{I}_o = \mathbf{I}_{R_s} \quad \text{y} \quad \mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{I}_o} = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{I}_{R_s}}$$

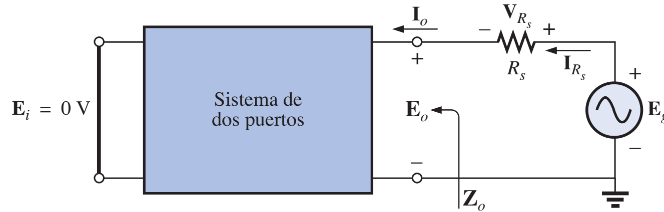


FIGURA 26.6
Determinación de $\mathbf{Z}_o$.

En la mayoría de las situaciones, $\mathbf{Z}_i$ y $\mathbf{Z}_o$ serán puramente resistivas, lo cual produce un ángulo de cero grados para cada impedancia. El resultado es que se puede usar un DMM o un osciloscopio para encontrar la magnitud requerida de la cantidad que se busca. Por ejemplo, tanto para $\mathbf{Z}_i$ como para $\mathbf{Z}_o$, $\mathbf{V}_{R_s}$ se mide directamente con el DMM, al igual que los niveles requeridos de $\mathbf{E}_g$, $\mathbf{E}_i$ o $\mathbf{E}_o$. Después se determina la corriente para cada caso con base en la ley de Ohm, y se calcula el nivel de impedancia mediante las ecuaciones (26.1) o (26.2).

Si usamos un osciloscopio, debemos estar más atentos al requerimiento de la tierra común. Por ejemplo, en la figura 26.5, $\mathbf{E}_g$ y $\mathbf{E}_i$ se miden con el osciloscopio porque tienen una tierra común. Si se intentara medir $\mathbf{V}_{R_s}$ directamente con la tierra del osciloscopio en la terminal superior de la entrada $\mathbf{E}_i$, se produciría un efecto de corto circuito a través de las terminales de entrada del sistema, debido a la tierra común entre la fuente y el osciloscopio. Si la impedancia de entrada del sistema se "pone en corto", la corriente $\mathbf{I}_i$ puede elevarse a niveles peligrosos debido a que la única resistencia en el circuito de entrada es el relativamente pequeño resistor sensor R_s. Al utilizar el DMM para no preocuparnos por la situación de la conexión a tierra, debemos asegurarnos de que el medidor esté diseñado para operar de manera adecuada en la frecuencia de interés. Casi todas las unidades comerciales se limitan a unos cuantos kilohertz.

Si la impedancia de entrada tiene un ángulo diferente de cero grados (puramente resistiva), no puede usarse un DMM para encontrar la componente reactiva en las terminales de entrada. La magnitud de la impedancia total será correcta si se mide como se describió antes, pero no se proporcionará el ángulo a partir del cual se determinan las componentes resistiva y reactiva. Si se usa un osciloscopio, la red debe conectarse como en la figura 26.7. Se exhiben en el osciloscopio los voltajes $\mathbf{E}_g$ y $\mathbf{V}_{R_s}$ al mismo tiempo, y se determina el ángulo de fase entre $\mathbf{E}_g$ y $\mathbf{V}_{R_s}$. Debido a que $\mathbf{V}_{R_s}$ e $\mathbf{I}_i$ están en fase, el ángulo determinado también será el ángulo entre $\mathbf{E}_g$ e $\mathbf{I}_i$. El ángulo que buscamos está entre $\mathbf{E}_i$ e $\mathbf{I}_i$, no entre $\mathbf{E}_g$ e $\mathbf{I}_i$, pero debido a que, por lo general, R_s se selecciona suficientemente pequeño, podemos suponer que la caída de voltaje en R_s es tan pequeña en comparación con $\mathbf{E}_g$ que $\mathbf{E}_i \cong \mathbf{E}_g$. La sustitución de los valores pico, pico a pico o rms a partir de las mediciones con el osciloscopio, junto con el ángulo recién calculado, permitirá determinar la magnitud y el ángulo para $\mathbf{Z}_i$, a partir

del cual las componentes resistiva y reactiva pueden ser determinadas usando unas cuantas relaciones geométricas básicas. La naturaleza reactiva (inductiva o capacitiva) de la impedancia de entrada se puede determinar cuando se calcula el ángulo entre $\mathbf{E}_i$ e $\mathbf{I}_i$. Para el osciloscopio de trazo dual, si $\mathbf{E}_g$ se adelanta a $\mathbf{V}_{R_s}$ ($\mathbf{E}_i$ se adelante a $\mathbf{I}_i$), la red es inductiva; si ocurre lo contrario, la red es capacitiva.

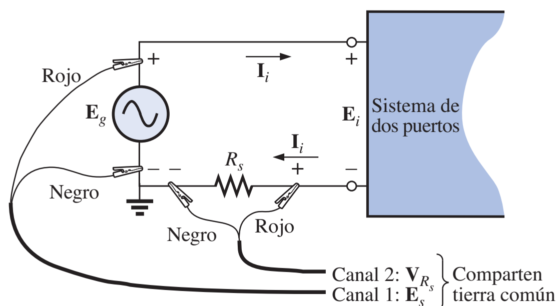


FIGURA 26.7
Determinación de $\mathbf{Z}_i$ usando un osciloscopio.

Para determinar el ángulo asociado con $\mathbf{Z}_o$, el resistor sensor debe moverse otra vez a la parte inferior para formar una tierra común con la fuente $\mathbf{E}_g$. Después, usando la aproximación $\mathbf{E}_g \cong \mathbf{E}_o$, se determinan la magnitud y el ángulo de $\mathbf{Z}_o$.

EJEMPLO 26.1 Dadas las mediciones DMM que aparecen en la figura 26.8, determine la impedancia de entrada $\mathbf{Z}_i$ para el sistema si se sabe que esta impedancia es puramente resistiva.

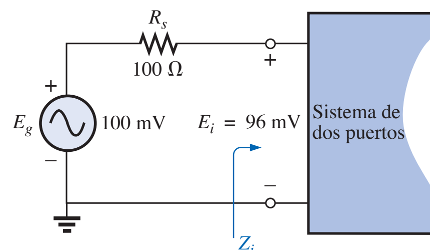


FIGURA 26.8
Ejemplo 26.1.

Solución:

$$V_{R_s} = E_g - E_i = 100\text{ mV} - 96\text{ mV} = 4\text{ mV}$$

$$I_i = I_{R_s} = \frac{V_{R_s}}{R_s} = \frac{4\text{ mV}}{100\ \Omega} = 40\ \mu\text{A}$$

$$Z_i = R_i = \frac{E_i}{I_i} = \frac{96\text{ mV}}{40\ \mu\text{A}} = \mathbf{2.4\ k\Omega}$$

EJEMPLO 26.2 Usando las medidas DMM proporcionadas en la figura 26.9, determine la impedancia de salida $\mathbf{Z}_o$ para el sistema si se sabe que esta impedancia es puramente resistiva.

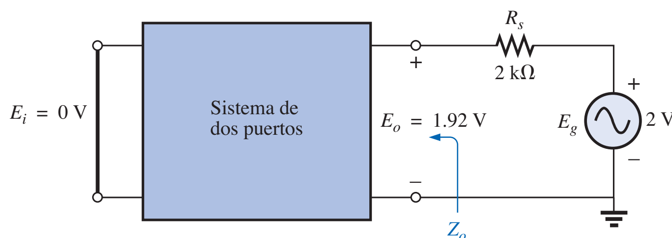


FIGURA 26.9
Ejemplo 26.2.



Solución:

$$V_{R_s} = E_g - E_o = 2\text{ V} - 1.92\text{ V} = 0.08\text{ V} = 80\text{ mV}$$

$$I_o = I_{R_s} = \frac{V_{R_s}}{R_s} = \frac{80\text{ mV}}{2\text{ k}\Omega} = 40\ \mu\text{A}$$

$$Z_o = \frac{E_o}{I_o} = \frac{1.92\text{ V}}{40\ \mu\text{A}} = \mathbf{48\ k\Omega}$$

EJEMPLO 26.3 Las características de entrada para el sistema de la figura 26.10(a) son desconocidas. Usando las mediciones de osciloscopio de la figura 26.10(b), determine la impedancia de entrada para el sistema. Si existe una componente reactiva, determine su magnitud y si es inductiva o capacitiva.

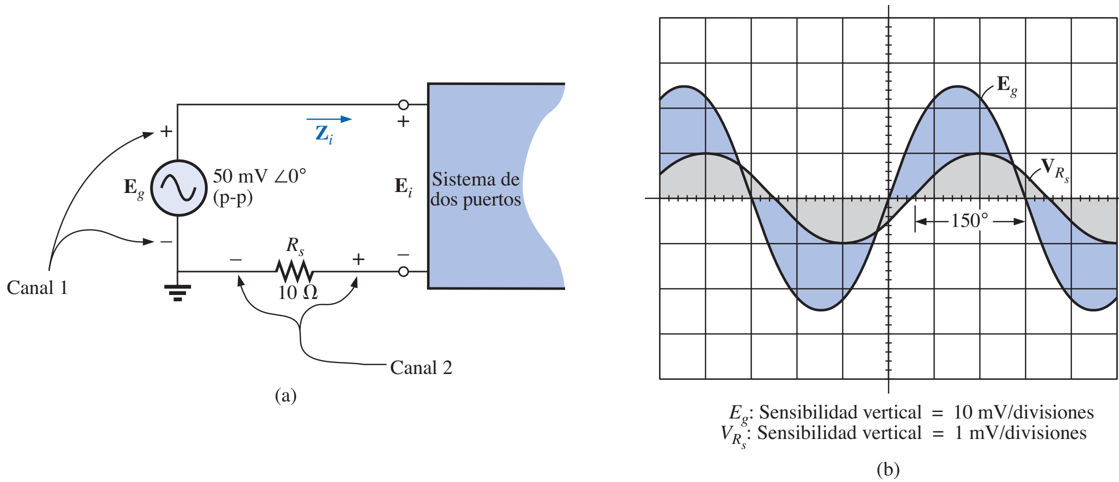


FIGURA 26.10
Ejemplo 26.3.

Solución: La magnitud de $\mathbf{Z}_i$:

$$I_{i(p\text{-}p)} = I_{R_{s(p\text{-}p)}} = \frac{V_{R_{s(p\text{-}p)}}}{R_s} = \frac{2\text{ mV}}{10\ \Omega} = 200\ \mu\text{A}$$

$$Z_i = \frac{E_i}{I_i} \cong \frac{E_g}{I_i} = \frac{50\text{ mV}}{200\ \mu\text{A}} = 250\ \Omega$$

El ángulo de $\mathbf{Z}_i$: el ángulo de fase entre $\mathbf{E}_g$ y $\mathbf{V}_{R_s}$ (o $\mathbf{I}_{R_s} = \mathbf{I}_i$) es:

$$180° - 150° = 30°$$

con $\mathbf{E}_g$ adelantando a $\mathbf{I}_i$, por lo que el sistema es inductivo. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_i &= 250\ \Omega\ \angle 30° \\ &= \mathbf{216.51\ \Omega + j\ 125\ \Omega} = R + j\,X_L\end{aligned}$$



26.3 GANANCIAS DE VOLTAGE A_{vNL}, A_v Y A_{vT}

La ganancia de voltaje para el sistema de dos puertos de la figura 26.11 se define mediante:

$$\mathbf{A}_{v_{NL}} = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_i} \tag{26.3}$$

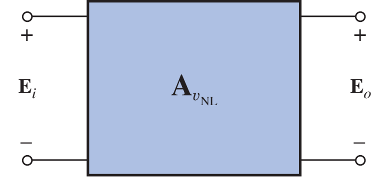


FIGURA 26.11
Definición de la ganancia sin carga $\mathbf{A}_{v_{NL}}$.

La letra mayúscula **A** empleada en la notación fue elegida a partir del término factor de *a*mplificación, con el subíndice *v* seleccionado para especificar que están implicados niveles de voltaje. El subíndice *NL* revela que la razón fue determinada bajo condiciones *sin carga*; es decir, que no fue aplicada una carga a las terminales de salida cuando la ganancia fue determinada. La ganancia de voltaje sin carga es la ganancia proporcionada normalmente con sistemas empaquetados ya que la carga conectada es una función de la aplicación.

La magnitud de la razón puede ser determinada usando un DMM o un osciloscopio. Sin embargo, el osciloscopio debe usarse para determinar la diferencia de fase entre los dos voltajes.

En la figura 26.12 ha sido introducida una carga para establecer una ganancia con carga que se denotará simplemente por $\mathbf{A}_v$ y será definida mediante:

$$\mathbf{A}_v = \left.\frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_i}\right|_{\text{con } R_L} \tag{26.4}$$

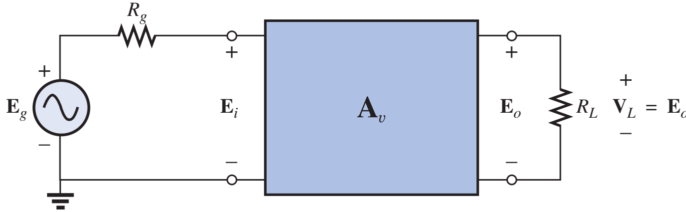


FIGURA 26.12
Definición de la ganancia de voltaje con carga $\mathbf{A}_v$ *(y* $\mathbf{A}_{v_T}$*).*

Para todos los sistemas de dos puertos, la ganancia con carga A_v ***siempre será menor que la ganancia sin carga.***

En otras palabras, la aplicación de una carga siempre reducirá la ganancia por debajo del valor del caso sin carga.

Una tercera ganancia de voltaje puede ser definida usando la figura 26.12 ya que tiene una fuente de voltaje aplicado con una resistencia interna asociada —situación que se encuentra a menudo en los sistemas electrónicos—. La ganancia total de voltaje del sistema es representada por $\mathbf{A}_{v_T}$ y se define mediante:

$$\mathbf{A}_{v_T} = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_g} \tag{26.5}$$

Ésta es la ganancia de voltaje de la fuente $\mathbf{E}_g$ a las terminales de salida $\mathbf{E}_o$. Debido a la pérdida de voltaje de señal en la resistencia de la fuente,

la ganancia de voltaje A_{v_T} ***es siempre menor que la ganancia de voltaje con carga*** A_v ***o que la ganancia de voltaje sin carga*** $A_{v_{NL}}$.



Si desarrollamos la ecuación (26.5) como sigue:

$$\mathbf{A}_{v_T} = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_g} = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_g}(1) = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_g}\left(\frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{E}_i}\right) = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_i} \cdot \frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{E}_g}$$

entonces: $$\mathbf{A}_{v_T} = \mathbf{A}_v \frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{E}_g} \qquad \text{(si está cargada)}$$

o bien: $$\mathbf{A}_{v_T} = \mathbf{A}_{v_{NL}} \frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{E}_g} \qquad \text{(si no está cargada)}$$

La relación entre $\mathbf{E}_i$ y $\mathbf{E}_g$ puede ser determinada a partir de la figura 26.12 si se reconoce que $\mathbf{E}_i$ está en la impedancia de entrada $\mathbf{Z}_i$, y entonces es aplicable la regla del divisor de voltaje como sigue:

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{Z}_i(\mathbf{E}_g)}{\mathbf{Z}_i + R_g}$$

o bien: $$\frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{E}_g} = \frac{\mathbf{Z}_i}{\mathbf{Z}_i + R_g}$$

Sustituir en las relaciones anteriores dará por resultado:

$$\mathbf{A}_{v_T} = \mathbf{A}_v \frac{\mathbf{Z}_i}{\mathbf{Z}_i + R_g} \qquad \text{(si está cargada)} \qquad \textbf{(26.6)}$$

$$\mathbf{A}_{v_T} = \mathbf{A}_{v_{NL}} \frac{\mathbf{Z}_i}{\mathbf{Z}_i + R_g} \qquad \text{(si no está cargada)} \qquad \textbf{(26.7)}$$

En la figura 26.13 se muestra un modelo de dos puertos equivalente para un sistema sin carga basado en las definiciones de $\mathbf{Z}_i$, $\mathbf{Z}_o$ y $\mathbf{A}_{v_{NL}}$. $\mathbf{Z}_i$ y $\mathbf{Z}_o$ aparecen como valores resistivos ya que esto es normal en la mayoría de los amplificadores electrónicos. Sin embargo, tanto $\mathbf{Z}_i$ como $\mathbf{Z}_o$ pueden tener componentes reactivas y no invalidar por ello la equivalencia del modelo.

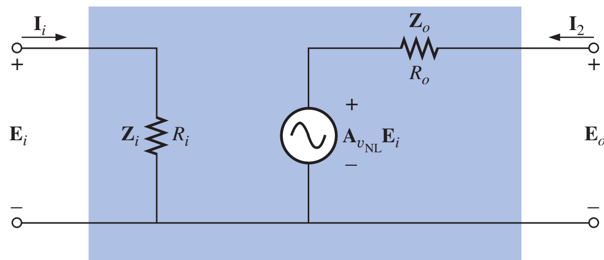


FIGURA 26.13
Modelo equivalente para un amplificador de dos puertos.

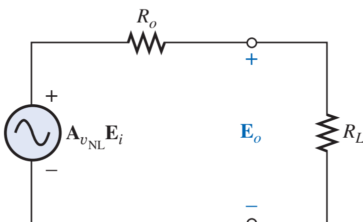


FIGURA 26.14
Aplicación de una carga a la salida de la figura 26.13.

La impedancia de entrada está definida por $\mathbf{Z}_i = \mathbf{E}_i/\mathbf{I}_i$ y el voltaje $\mathbf{E}_o = \mathbf{A}_{v_{NL}}\mathbf{E}_i$ en ausencia de una carga, resultando en $\mathbf{A}_{v_{NL}} = \mathbf{E}_o/\mathbf{E}_i$, como está definido. La impedancia de salida se define con $\mathbf{E}_i$ establecido en cero volts, resultando en $\mathbf{A}_{v_{NL}}\mathbf{E}_i = 0$ V, lo que permite el uso de un corto circuito equivalente para la fuente controlada. El resultado es $\mathbf{Z}_o = \mathbf{E}_o/\mathbf{I}_o$, como se definió, y los parámetros y estructura del modelo equivalente quedan validados.

Si la carga se aplica como en la figura 26.14, utilizar la regla del divisor de voltaje resultará en:



$$\mathbf{E}_o = \frac{R_L(\mathbf{A}_{v_{NL}}\mathbf{E}_i)}{R_L + R_o}$$

y
$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_i} = A_{v_{NL}}\frac{R_L}{R_L + R_o} \qquad \textbf{(26.8)}$$

Para cualquier valor de R_L o R_o, la razón $R_L/(R_L + R_o)$ debe ser menor que 1, estableciendo que $\mathbf{A}_v$ sea siempre menor que $\mathbf{A}_{v_{NL}}$, como se indicó. Además,

para una impedancia fija de salida (R_o), entre mayor es la resistencia de la carga (R_L), más cercana está la ganancia con carga al valor de la ganancia sin carga.

Un procedimiento experimental para determinar R_o puede ser desarrollado si resolvemos la ecuación (26.8) para la impedancia de salida R_o:

$$\mathbf{A}_v = \frac{R_L}{R_L + R_o}\mathbf{A}_{v_{NL}}$$

o bien:
$$\mathbf{A}_v(R_L + R_o) = R_L\mathbf{A}_{v_{NL}}$$
$$\mathbf{A}_vR_L + \mathbf{A}_vR_o = R_L\mathbf{A}_{v_{NL}}$$

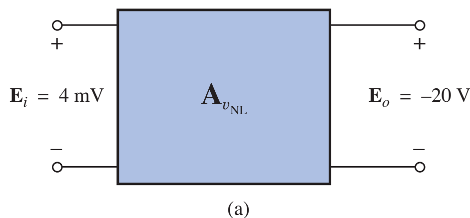
y
$$\mathbf{A}_vR_o = R_L\mathbf{A}_{v_{NL}} - \mathbf{A}_vR_L$$

con:
$$R_o = \frac{R_L(\mathbf{A}_{v_{NL}} - \mathbf{A}_v)}{\mathbf{A}_v}$$

o bien:
$$R_o = R_L\left(\frac{\mathbf{A}_{v_{NL}}}{\mathbf{A}_v} - 1\right) \qquad \textbf{(26.9)}$$

La ecuación (26.9) revela que la impedancia de salida R_o de un amplificador puede ser determinada midiendo primero la ganancia de voltaje $\mathbf{E}_o/\mathbf{E}_i$ sin carga para encontrar $\mathbf{A}_{v_{NL}}$, y midiendo entonces la ganancia con una carga R_L para encontrar $\mathbf{A}_v$. La sustitución de $\mathbf{A}_{v_{NL}}$, $\mathbf{A}_v$ y R_L en la ecuación (26.9) nos dará el valor de R_o.

EJEMPLO 26.4 Para el sistema de la figura 26.15(a) empleado en el amplificador cargado de la figura 26.15(b):



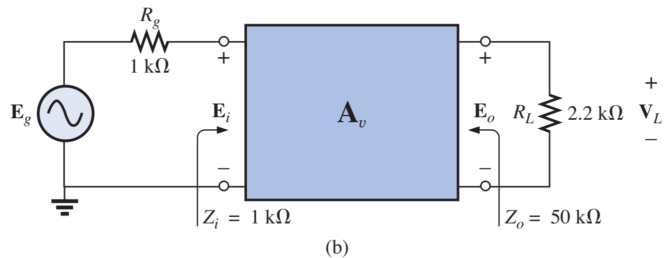


FIGURA 26.15
Ejemplo 26.4.

a. Determine la ganancia de voltaje sin carga $\mathbf{A}_{v_{NL}}$.
b. Determine la ganancia de voltaje con carga $\mathbf{A}_v$.
c. Calcule la ganancia de voltaje con carga $\mathbf{A}_{v_T}$.
d. Determine R_o a partir de la ecuación (26.9), y compárela con el valor especificado de la figura 26.15.



Soluciones:

a. $\mathbf{A}_{v_{NL}} = \dfrac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_i} = \dfrac{-20\text{ V}}{4\text{ mV}} = \mathbf{-5000}$

b. $\mathbf{A}_v = \mathbf{A}_{v_{NL}} \dfrac{R_L}{R_L + R_o} = (-5000)\left(\dfrac{2.2\text{ k}\Omega}{2.2\text{ k}\Omega + 50\text{ k}\Omega}\right)$

$= (-5000)(0.0421) = \mathbf{-210.73}$

c. $\mathbf{A}_{v_T} = \mathbf{A}_v \dfrac{\mathbf{Z}_i}{\mathbf{Z}_i + R_g} = (-210.73)\left(\dfrac{1\text{ k}\Omega}{1\text{ k}\Omega + 1\text{ k}\Omega}\right)$

$= (-210.73)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \mathbf{-105.36}$

d. $R_o = R_L\left(\dfrac{\mathbf{A}_{v_{NL}}}{\mathbf{A}_v} - 1\right) = 2.2\text{ k}\Omega\left(\dfrac{-5000}{-210.73} - 1\right)$

$= 2.2\text{ k}\Omega(23.727 - 1) = 2.2\text{ k}\Omega(22.727)$

$= \mathbf{50\text{ k}\Omega}$ como fue especificado

26.4 GANANCIAS DE CORRIENTE A_i Y A_{i_T} Y GANANCIA DE POTENCIA A_G

La ganancia de corriente de sistemas de dos puertos se calcula normalmente a partir de niveles de voltaje. Una ganancia sin carga no está definida para ganancia de corriente ya que la ausencia de R_L requiere que $\mathbf{I}_o = \mathbf{E}_o/R_L = 0$ A y $\mathbf{A}_i = \mathbf{I}_o/\mathbf{I}_i = 0$.

Sin embargo, en el sistema de la figura 26.16 ha sido aplicada una carga, e

$$\mathbf{I}_o = -\frac{\mathbf{E}_o}{R_L}$$

con:

$$\mathbf{I}_i = \frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{Z}_i}$$

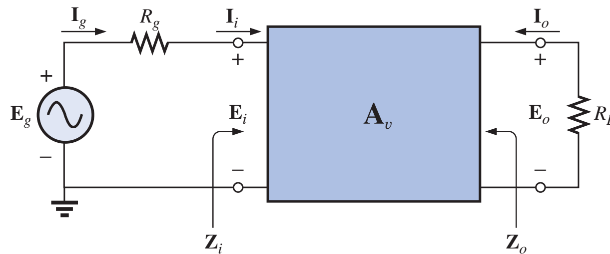


FIGURA 26.16
Definición de $\mathbf{A}_i$ y $\mathbf{A}_{i_T}$.

Observe la necesidad de un signo menos cuando $\mathbf{I}_o$ es definida, ello se debe a que la polaridad definida de $\mathbf{E}_o$ establecería la dirección opuesta para $\mathbf{I}_o$ a través de R_L.

La ganancia de corriente con carga es:

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mathbf{I}_o}{\mathbf{I}_i} = \frac{-\mathbf{E}_o/R_L}{\mathbf{E}_i/\mathbf{Z}_i} = -\frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_i}\left(\frac{\mathbf{Z}_i}{R_L}\right)$$



y

$$\mathbf{A}_i = -\mathbf{A}_v \frac{\mathbf{Z}_i}{R_L} \tag{26.10}$$

Por tanto, en general, la ganancia de corriente con carga puede obtenerse directamente a partir de la ganancia de voltaje con carga y la razón de valores de impedancia, $\mathbf{Z}_i$ sobre R_L.

Si la razón $\mathbf{A}_{i_T} = \mathbf{I}_o/\mathbf{I}_g$ fuese requerida, procederíamos como sigue:

$$\mathbf{I}_o = -\frac{\mathbf{E}_o}{R_L}$$

con:

$$\mathbf{I}_i = \frac{\mathbf{E}_g}{R_g + \mathbf{Z}_i}$$

y

$$\mathbf{A}_{i_T} = \frac{\mathbf{I}_o}{\mathbf{I}_g} = \frac{-\mathbf{E}_o/R_L}{\mathbf{E}_g/(R_g + \mathbf{Z}_i)} = -\left(\frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{E}_g}\right)\left(\frac{R_g + \mathbf{Z}_i}{R_L}\right)$$

o bien:

$$\mathbf{A}_{i_T} = \frac{\mathbf{I}_o}{\mathbf{I}_g} = -\mathbf{A}_{v_T}\left(\frac{R_g + \mathbf{Z}_i}{R_L}\right) \tag{26.11}$$

El resultado obtenido con las ecuaciones (26.10) o (26.11) será el mismo ya que $\mathbf{I}_g = \mathbf{I}_i$, pero ahora se tiene la opción de elegir entre la ganancia disponible o la que se prefiera emplear.

Volviendo a la figura 26.13 (repetida en la Figura 26.17), una ecuación para la ganancia de corriente puede ser determinada en términos de la ganancia de voltaje sin carga.

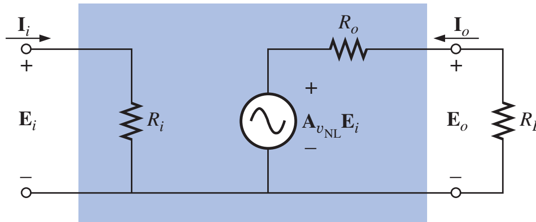


FIGURA 26.17
Desarrollo de una ecuación para $\mathbf{A}_i$ *en términos de* $\mathbf{A}_{v_{NL}}$.

Por la ley de Ohm:

$$\mathbf{I}_o = -\frac{\mathbf{A}_{v_{NL}}\mathbf{E}_i}{R_L + R_o}$$

pero:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{I}_i R_i$$

e

$$\mathbf{I}_o = -\frac{\mathbf{A}_{v_{NL}}(\mathbf{I}_i R_i)}{R_L + R_o}$$

de manera que:

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mathbf{I}_o}{\mathbf{I}_i} = -\mathbf{A}_{v_{NL}}\frac{R_i}{R_L + R_o} \tag{26.12}$$

El resultado es una ecuación para la ganancia de corriente con carga de un amplificador en términos de la ganancia de voltaje nominal sin carga y los elementos resistivos de la red.



Recuerde, de una conclusión anterior, que entre mayor es el valor de R_L, mayor es la ganancia de voltaje con carga. Para niveles de corriente, la ecuación (26.12) revela que

a mayor valor de R_L, menor es la ganancia de corriente de un amplificador cargado.

Por tanto, en el diseño de un amplificador, se debe balancear la ganancia deseada de voltaje con la ganancia de corriente y el nivel de potencia de salida de ca resultante.

Para el sistema de la figura 26.17, la potencia entregada a la carga está determinada por E_o^2/R_L, mientras que la potencia entregada en las terminales de entrada es E_i^2/R_i. Por tanto, la ganancia de potencia está definida por:

$$A_G = \frac{P_o}{P_i} = \frac{E_o^2/R_L}{E_i^2/R_i} = \frac{E_o^2}{E_i^2}\frac{R_i}{R_L} = \left(\frac{E_o}{E_i}\right)^2\frac{R_i}{R_L}$$

y

$$A_G = A_v^2\frac{R_i}{R_L} \tag{26.13}$$

Desarrollando la conclusión,

$$A_G = (A_v)\left(A_v\frac{R_i}{R_L}\right) = (A_v)(-A_i)$$

por lo que:

$$A_G = -A_vA_i \tag{26.14}$$

No se preocupe acerca del signo menos. A_v o A_i serán negativos para asegurar que la ganancia de potencia sea positiva, como se obtuvo a partir de la ecuación (26.13).

Si sustituimos $A_v = -A_iR_L/R_i$ [de la ecuación (26.10)] en la ecuación (26.14), obtendremos:

$$A_G = -A_vA_i = -\left(\frac{-A_iR_L}{R_i}\right)A_i$$

o bien:

$$A_G = A_i^2\frac{R_L}{R_i} \tag{26.15}$$

la cual tiene un formato similar al de la ecuación (26.13), pero ahora A_G está dada en términos de la ganancia de corriente del sistema.

La última ganancia de potencia por ser definida es la siguiente:

$$A_{G_T} = \frac{P_L}{P_g} = \frac{E_o^2/R_L}{E_gI_g} = \frac{E_o^2/R_L}{E_g^2/(R_g + R_i)} = \left(\frac{E_o}{E_g}\right)^2\left(\frac{R_g + R_i}{R_L}\right)$$

o bien:

$$A_{G_T} = A_{v_T}^2\left(\frac{R_g + R_i}{R_L}\right) \tag{26.16}$$

Desarrollando:

$$A_{G_T} = A_{v_T}\left(A_{v_T}\frac{R_g + R_i}{R_L}\right)$$

y

$$A_{G_T} = -A_{v_T}A_{i_T} \tag{26.17}$$

EJEMPLO 26.5 Dado el sistema de la figura 26.18 con sus datos nominales:

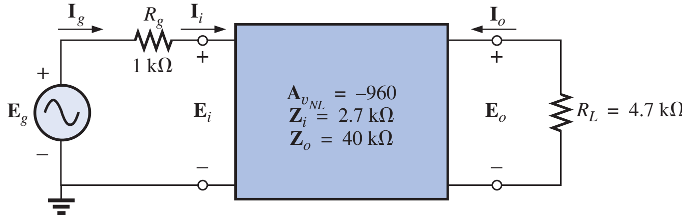


FIGURA 26.18
Ejemplo 26.5.

a. Determine $\mathbf{A}_v$.
b. Calcule $\mathbf{A}_i$.
c. Incremente R_L al doble de su valor actual, y observe el efecto sobre $\mathbf{A}_v$ y $\mathbf{A}_i$.
d. Encuentre $\mathbf{A}_{i_T}$.
e. Calcule A_G.
f. Determine A_i a partir de la ecuación (26.1), y compárelo con el valor obtenido en el inciso (b).

Soluciones:

a. $$\mathbf{A}_v = \mathbf{A}_{v_{NL}}\frac{R_L}{R_L + R_o} = (-960)\left(\frac{4.7\text{ k}\Omega}{4.7\text{ k}\Omega + 40\text{ k}\Omega}\right) = \mathbf{-100.94}$$

b. $$\mathbf{A}_i = -\mathbf{A}_{v_{NL}}\frac{R_i}{R_L + R_o} = -(-960)\left(\frac{2.7\text{ k}\Omega}{4.7\text{ k}\Omega + 40\text{ k}\Omega}\right) = \mathbf{57.99}$$

c. $R_L = 2(4.7\text{ k}\Omega) = 9.4\text{ k}\Omega$

$$\mathbf{A}_v = \mathbf{A}_{v_{NL}}\left(\frac{R_L}{R_L + R_o}\right) = (-960)\left(\frac{9.4\text{ k}\Omega}{9.4\text{ k}\Omega + 40\text{ k}\Omega}\right)$$

$= \mathbf{-182.67}$ contra -100.94, lo cual es un incremento considerable

$$\mathbf{A}_i = -\mathbf{A}_{v_{NL}}\left(\frac{R_i}{R_L + R_o}\right) = -(-960)\left(\frac{2.7\text{ k}\Omega}{40\text{ k}\Omega + 9.4\text{ k}\Omega}\right)$$

$= \mathbf{52.47}$ contra 57.99

lo cual es una caída en valor pero no tan considerable como el cambio en $\mathbf{A}_v$.

d. $\mathbf{A}_{i_T} = \mathbf{A}_i = \mathbf{57.99}$ como el obtenido en el inciso (b)

Sin embargo, $$\mathbf{A}_{i_T} = -\mathbf{A}_{v_T}\left(\frac{R_g + R_i}{R_L}\right)$$

$$= -\left[\mathbf{A}_v\frac{R_i}{(R_i + R_g)}\right]\left[\frac{(R_g + R_i)}{R_L}\right]$$

$$= -\mathbf{A}_v\frac{R_i}{R_L} = -(-100.94)\left(\frac{2.7\text{ k}\Omega}{4.7\text{ k}\Omega}\right)$$

$= \mathbf{57.99}$ también

e. $$A_G = A_v^2\frac{R_i}{R_L} = (100.94)^2\left(\frac{2.7\text{ k}\Omega}{4.7\text{ k}\Omega}\right) = \mathbf{5853.19}$$



f. $A_G = -A_v A_i$

$$\text{o } A_i = \frac{A_G}{A_v} = -\frac{(5853.19)}{(-100.94)}$$

$= \mathbf{57.99}$ como se encontró en el inciso (b)

26.5 SISTEMAS EN CASCADA

Al considerar sistemas en cascada, como en la figura 26.19, lo más importante por recordar es que

las ecuaciones para sistemas en cascada emplean el voltaje con carga y ganancias de corriente para cada etapa y no los niveles nominales sin cargas.

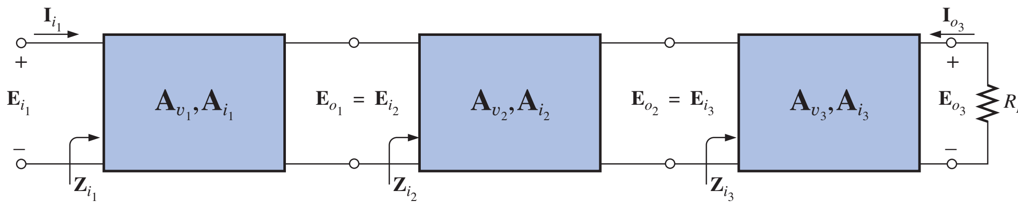


FIGURA 26.19
Sistema en cascada.

Muy a menudo se emplean las ganancias marcadas como sin carga, resultando en enormes ganancias totales y altas expectativas no razonables para el sistema. Además, recuerde que la impedancia de entrada de la etapa 3 puede afectar la impedancia de entrada de la etapa 2 y, por tanto, la carga de la etapa 1.

De modo que, en general, las ecuaciones para sistemas en cascada inicialmente parecen ofrecer un alto nivel de sencillez para el análisis. Sin embargo, el lector debe estar consciente de que cada término debe ser cuidadosamente evaluado antes de usar la ecuación.

La ganancia total de voltaje para el sistema de la figura 26.19 es:

$$\mathbf{A}_{v_T} = \mathbf{A}_{v_1} \cdot \mathbf{A}_{v_2} \cdot \mathbf{A}_{v_3} \qquad \textbf{(26.18)}$$

donde, como se indicó líneas arriba, el factor de amplificación de cada etapa es determinado bajo condiciones con cargas.

La ganancia total de corriente para el sistema de la figura 26.19 es:

$$\mathbf{A}_{i_T} = \mathbf{A}_{i_1} \cdot \mathbf{A}_{i_2} \cdot \mathbf{A}_{i_3} \qquad \textbf{(26.19)}$$

donde, de nuevo, la ganancia de cada etapa es determinada bajo condiciones con cargas (conectadas).

La ganancia de corriente entre dos etapas cualesquiera también puede ser determinada usando una ecuación desarrollada antes en el capítulo. Para sistemas en cascada, la ecuación tiene el siguiente formato general:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_v \frac{Z_i}{R_L} \qquad \textbf{(26.20)}$$

donde $\mathbf{A}_v$ es la ganancia de voltaje con carga correspondiente a la ganancia de corriente con carga deseada. Es decir, si la ganancia abarca desde la primera



hasta la tercera etapas, entonces la ganancia de voltaje sustituido comprenderá también desde la primera hasta la tercera etapas. La impedancia de entrada $\mathbf{Z}_i$ es para la primera etapa de interés, y R_L es la carga sobre la última etapa de interés.

Por ejemplo, para el amplificador de tres etapas de la figura 26.19,

$$\mathbf{A}_{i_T} = \mathbf{A}_{v_T}\frac{Z_{i_1}}{R_L}$$

mientras que para las primeras dos etapas:

$$\mathbf{A}'_i = \mathbf{A}'_v\frac{Z_{i_1}}{Z_{i_3}}$$

donde: $$\mathbf{A}'_i = \frac{\mathbf{I}_{o_2}}{\mathbf{I}_{i_1}} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}'_v = \frac{\mathbf{E}_{o_2}}{\mathbf{E}_{i_1}}$$

La ganancia total de potencia está determinada por:

$$A_{G_T} = A_{v_T}A_{i_T} \tag{26.21}$$

mientras que la ganancia entre etapas específicas es simplemente el producto de las ganancias de voltaje y corriente para cada sección. Por ejemplo, para las primeras dos etapas de la figura 26.19,

$$A'_G = A'_{v_2} \cdot A'_{i_2}$$

donde: $$A'_{v_2} = A_{v_1} \cdot A_{v_2} \quad \text{y} \quad A'_{i_2} = A_{i_1} \cdot A_{i_2}$$

EJEMPLO 26.6 Para el sistema en cascada de la figura 26.20, con sus parámetros nominales sin carga:

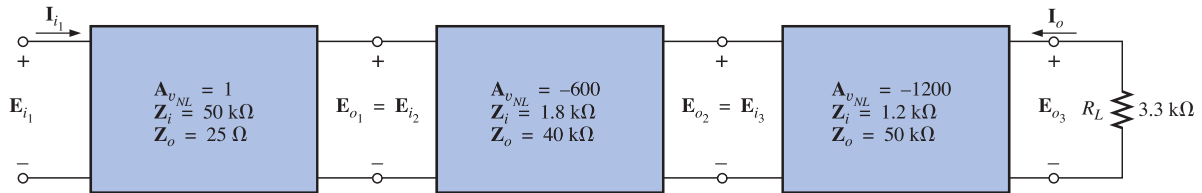


FIGURA 26.20
Ejemplo 26.6.

a. Determine las ganancias de voltaje y corriente con carga para cada etapa, y trace de nuevo el sistema de la figura 26.20 con los parámetros con carga.
b. Calcule la ganancia total de voltaje y corriente.
c. Encuentre la ganancia total de potencia del sistema usando la ecuación (26.21).
d. Calcule la ganancia de voltaje y corriente para las dos primeras etapas usando las ecuaciones (26.18) y (26.19).
e. Determine la ganancia de corriente para las dos primeras etapas usando la ecuación (26.20), y compare su respuesta con el resultado del inciso (d).
f. Calcule la ganancia de potencia para las dos primeras etapas usando la ecuación (26.21).
g. Determine la ganancia de potencia para las dos primeras etapas usando la ecuación (26.13). Compare esta respuesta con el resultado del inciso (f).
h. Calcule la ganancia incorrecta de voltaje para todo el sistema usando la ecuación (26.18) y el valor nominal sin carga para cada etapa. Compare esta respuesta con el resultado del inciso (b).



Soluciones:

a. $$\mathbf{A}_{v_1} = \mathbf{A}_{v_{NL1}}\frac{R_L}{R_L + R_o} = \mathbf{A}_{v_{NL1}}\frac{Z_{i_2}}{Z_{i_2} + R_{o_1}} = (1)\frac{1.8\text{ k}\Omega}{1.8\text{ k}\Omega + 25\ \Omega}$$
$$= \mathbf{0.986}$$

$$\mathbf{A}_{v_2} = \mathbf{A}_{v_{NL2}}\frac{\mathbf{Z}_{i_3}}{Z_{i_3} + R_{o_2}} = (-600)\frac{1.2\text{ k}\Omega}{1.2\text{ k}\Omega + 40\text{ k}\Omega} = \mathbf{-17.476}$$

$$\mathbf{A}_{v_3} = \mathbf{A}_{v_{NL3}}\frac{R_L}{R_L + R_{o_3}} = (-1200)\frac{3.3\text{ k}\Omega}{3.3\text{ k}\Omega + 50\text{ k}\Omega} = \mathbf{-74.296}$$

$$\mathbf{A}_{i_1} = -\mathbf{A}_{v_{NL}}\frac{R_i}{R_L + R_o} = -\mathbf{A}_{v_{NL1}}\frac{Z_{i_1}}{Z_{i_2} + R_{o_1}} = -(1)\frac{50\text{ k}\Omega}{1.8\text{ k}\Omega + 25\ \Omega}$$
$$= \mathbf{-27.397}$$

$$\mathbf{A}_{i_2} = -\mathbf{A}_{v_{NL2}}\frac{Z_{i_2}}{Z_{i_3} + R_{o_2}} = -(-600)\frac{1.8\text{ k}\Omega}{1.2\text{ k}\Omega + 40\text{ k}\Omega} = \mathbf{26.214}$$

$$\mathbf{A}_{i_3} = -\mathbf{A}_{v_{NL3}}\frac{Z_{i_3}}{R_L + R_{o_3}} = -(-1200)\frac{1.2\text{ k}\Omega}{3.3\text{ k}\Omega + 50\text{ k}\Omega} = \mathbf{27.017}$$

Observe la figura 26.21.

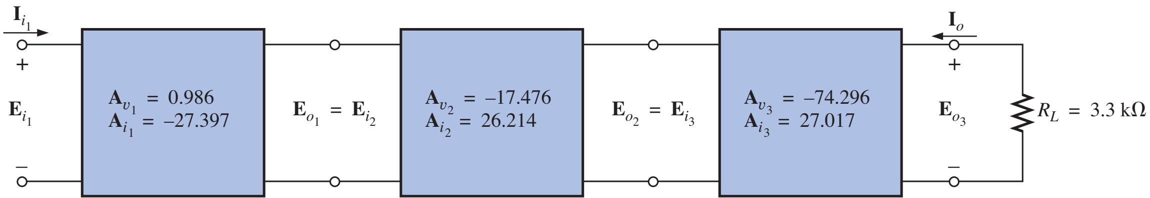


FIGURA 26.21
Solución al ejemplo 26.6.

b. $$\mathbf{A}_{v_T} = \frac{\mathbf{E}_{o_3}}{\mathbf{E}_{i_1}} = \mathbf{A}_{v_1}\cdot\mathbf{A}_{v_2}\cdot\mathbf{A}_{v_3} = (0.986)(-17.476)(-74.296)$$
$$= \mathbf{1280.22}$$

$$\mathbf{A}_{i_T} = \frac{\mathbf{I}_{o_3}}{\mathbf{I}_{i_1}} = \mathbf{A}_{i_1}\cdot\mathbf{A}_{i_2}\cdot\mathbf{A}_{i_3} = (-27.397)(26.214)(27.017)$$
$$= \mathbf{-19{,}403.20}$$

c. $A_{G_T} = -A_{v_T}\cdot A_{i_T} = -(1280.22)(-19{,}403.20) = \mathbf{24.84 \times 10^6}$

d. $A'_{v_2} = \mathbf{A}_{v_1}\cdot\mathbf{A}_{v_2} = (0.986)(-17.476) = \mathbf{-17.231}$

$A'_{i_2} = \mathbf{A}_{i_1}\cdot\mathbf{A}_{i_2} = (-27.397)(26.214) = \mathbf{-718.185}$

e. $$\mathbf{A}'_{i_2} = \mathbf{A}_v\frac{\mathbf{Z}_i}{R_L} = \mathbf{A}'_{v_2}\frac{\mathbf{Z}_{i_1}}{\mathbf{Z}_{i_3}} = (-17.231)\frac{50\text{ k}\Omega}{1.2\text{ k}\Omega}$$
$$= \mathbf{-717.958} \qquad \text{contra } -718.185$$

la diferencia se debe al nivel de precisión usado en los cálculos.

f. $A'_{G_2} = A'_{v_2}\cdot A'_{i_2} = (-17.231)(-718.185) = \mathbf{12{,}375.05}$

g. $$A'_{G_2} = A_v^2\frac{R_i}{R_L} = (A'_{v_2})^2\frac{R_{i_1}}{Z_{i_3}} = (-17.231)^2\frac{50\text{ k}\Omega}{1.2\text{ k}\Omega} = \mathbf{12{,}371.14}$$



h. $\mathbf{A}_{v_T} = \mathbf{A}_{v_1} \cdot \mathbf{A}_{v_2} \cdot \mathbf{A}_{v_3} = (1)(-600)(-1200) = 7.2 \times 10^5$
720,000 : 1280.22 = 562.40 : 1
lo cual es, desde luego, una diferencia considerable en los resultados.

26.6 PARÁMETROS DE IMPEDANCIA (z)

Para la configuración de dos puertos de la figura 26.22, están especificadas cuatro variables. En la mayoría de los casos, si dos variables cualesquiera están especificadas, las dos restantes pueden ser determinadas. Estas cuatro variables pueden relacionarse mediante las siguientes ecuaciones:

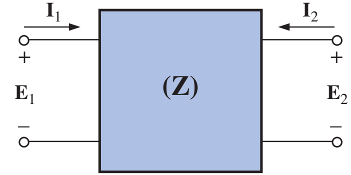


FIGURA 26.22
Parámetros de impedancia para una configuración de dos puertos.

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad \textbf{(26.22a)}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \qquad \textbf{(26.22b)}$$

Los **parámetros de impedancia** $\mathbf{z}_{11}$, $\mathbf{z}_{12}$ y $\mathbf{z}_{22}$ están medidos en ohms.

Para modelar el sistema, cada parámetro de impedancia debe ser determinado estableciendo una variable particular en cero.

z_{11}

Para $\mathbf{z}_{11}$, si $\mathbf{I}_2$ se establece en cero, como se muestra en la figura 26.23, la ecuación (26.22a) resulta en:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}(0)$$

y

$$\mathbf{z}_{11} = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_1}\bigg|_{\mathbf{I}_2 = 0} \quad \text{(ohms, } \Omega) \qquad \textbf{(26.23)}$$

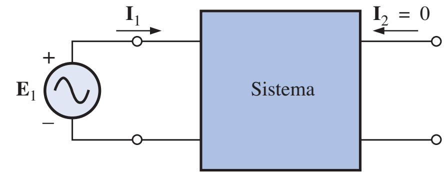


FIGURA 26.23
Determinación de $\mathbf{z}_{11}$.

La ecuación (26.23) revela que con $\mathbf{I}_2$ igual a cero, el parámetro de impedancia está determinado por la razón resultante de $\mathbf{E}_1$ a $\mathbf{I}_1$. Como $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{I}_1$ son cantidades de entrada, con $\mathbf{I}_2$ establecida en cero, el parámetro $\mathbf{z}_{11}$ formalmente se denota en la siguiente forma:

$\mathbf{z}_{11}$ = parámetro de impedancia de entrada a circuito abierto

z_{12}

Para $\mathbf{z}_{12}$, $\mathbf{I}_1$ se establece en cero, y la ecuación (26.22a) resulta en:

$$\mathbf{z}_{12} = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_2}\bigg|_{\mathbf{I}_1 = 0} \quad \text{(ohms, } \Omega) \qquad \textbf{(26.24)}$$

Para la mayoría de los sistemas donde deben compararse cantidades de entrada y salida, la razón de interés es usualmente la de la cantidad de salida dividida entre la cantidad de entrada. En este caso, lo *inverso* es cierto, resultando lo siguiente:

$\mathbf{z}_{12}$ = parámetro de impedancia de transferencia inversa a circuito abierto

El término *transferencia* está incluido para indicar que $\mathbf{z}_{12}$ relacionará una cantidad de entrada con una de salida (para la condición $\mathbf{I}_1 = 0$). La configuración de red para determinar $\mathbf{z}_{12}$ se muestra en la figura 26.24.

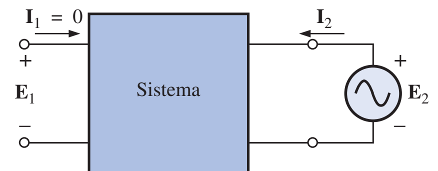


FIGURA 26.24
Determinación de $\mathbf{z}_{12}$.



Para una fuente aplicada $\mathbf{E}_2$, la razón $\mathbf{E}_1/\mathbf{I}_2$ determinará $\mathbf{z}_{12}$ con $\mathbf{I}_1$ establecida en cero.

$\mathbf{z}_{21}$

Para determinar $\mathbf{z}_{21}$, establezca $\mathbf{I}_2$ igual a cero y encuentre la razón $\mathbf{E}_2/\mathbf{I}_1$ de acuerdo con la ecuación (26.22b). Es decir,

$$\mathbf{z}_{21} = \left.\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2 = 0} \quad \text{(ohms, } \Omega\text{)} \qquad \textbf{(26.25)}$$

En este caso, las cantidades de entrada y de salida son de nuevo las variables determinantes, requiriendo el término *transferencia* en la nomenclatura. Sin embargo, la razón es de una cantidad de salida a una de entrada, por lo que se aplica el término descriptivo *directa*, y

$\mathbf{z}_{21}$ = parámetro de impedancia de transferencia directa a circuito abierto

La red que la determina se muestra en la figura 26.25. Para un voltaje aplicado $\mathbf{E}_1$, se determina $\mathbf{z}_{21}$ mediante la razón $\mathbf{E}_2/\mathbf{I}_1$ con $\mathbf{I}_2$ establecida en cero.

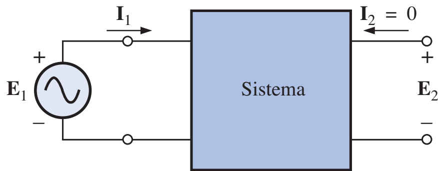


FIGURA 26.25
Determinación de $\mathbf{z}_{21}$.

$\mathbf{z}_{22}$

El parámetro restante, $\mathbf{z}_{22}$, está determinado por:

$$\mathbf{z}_{22} = \left.\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1 = 0} \quad \text{(ohms, } \Omega\text{)} \qquad \textbf{(26.26)}$$

de acuerdo con la ecuación (26.22b) con $\mathbf{I}_1$ establecida en cero. Como ésta es la razón del voltaje de salida a la corriente de salida con $\mathbf{I}_1$ establecida en cero, tiene la terminología

$\mathbf{z}_{22}$ = parámetro de impedancia de salida a circuito abierto

La red requerida se muestra en la figura 26.26. Para un voltaje aplicado $\mathbf{E}_2$, se determina $\mathbf{z}_{22}$ por medio de la razón resultante $\mathbf{E}_2/\mathbf{I}_2$ con $\mathbf{I}_1 = 0$.

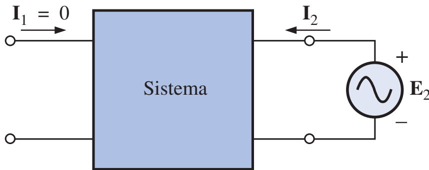


FIGURA 26.26
Determinación de $\mathbf{z}_{22}$.

EJEMPLO 26.7 Determine los parámetros de impedancia (**z**) para la red T de la figura 26.27.

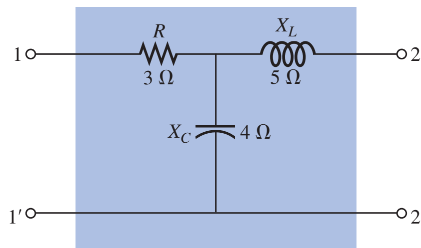


FIGURA 26.27
Configuración T.

Solución Para $\mathbf{z}_{11}$, la red se verá como en la figura 26.28, con $\mathbf{Z}_1 = 3\ \Omega\ \angle 0°$, $\mathbf{Z}_2 = 5\ \Omega\ \angle 90°$, y $\mathbf{Z}_3 = 4\ \Omega\ \angle -90°$:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}$$

Así:

$$\mathbf{z}_{11} = \left.\frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2 = 0}$$

y

$$\mathbf{z}_{11} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3 \qquad \textbf{(26.27)}$$

Para $\mathbf{z}_{12}$, la red se verá como en la figura 26.29, y

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_3$$



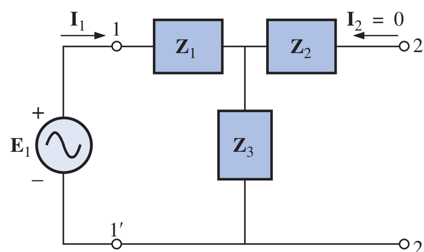


FIGURA 26.28
Determinación de $\mathbf{z}_{11}$.

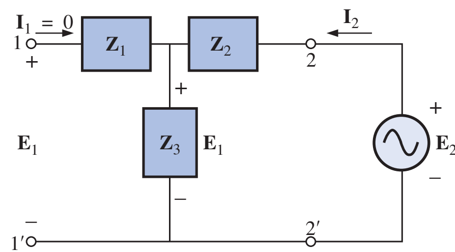


FIGURA 26.29
Determinación de $\mathbf{z}_{12}$.

Entonces: $$\mathbf{z}_{12} = \left.\frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1 = 0} = \frac{\mathbf{I}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{I}_2}$$

y $$\mathbf{z}_{12} = \mathbf{Z}_3 \qquad \textbf{(26.28)}$$

Para $\mathbf{z}_{21}$, la red requerida aparece en la figura 26.30, y

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_3$$

Entonces, $$\mathbf{z}_{21} = \left.\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2 = 0} = \frac{\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_3}{\mathbf{I}_1}$$

y $$\mathbf{z}_{21} = \mathbf{Z}_3 \qquad \textbf{(26.29)}$$

Para $\mathbf{z}_{22}$, la configuración determinante se muestra en la figura 26.31, e

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$$

Entonces: $$\mathbf{z}_{22} = \left.\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1 = 0} = \frac{\mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)}{\mathbf{I}_2}$$

y $$\mathbf{z}_{22} = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 \qquad \textbf{(26.30)}$$

Observe que para la configuración T, $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$. Para $\mathbf{Z}_1 = 3\ \Omega\ \angle 0°$, $\mathbf{Z}_2 = 5\ \Omega\ \angle 90°$, y $\mathbf{Z}_3 = 4\ \Omega\ \angle -90°$, tenemos:

$$\mathbf{z}_{11} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3 = \mathbf{3\ \Omega - \mathit{j}\ 4\ \Omega}$$

$$\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21} = \mathbf{Z}_3 = 4\ \Omega\ \angle -90° = \mathbf{-\mathit{j}\ 4\ \Omega}$$

$$\mathbf{z}_{22} = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 = 5\ \Omega\ \angle 90° + 4\ \Omega\ \angle -90° = 1\ \Omega\ \angle 90° = \mathbf{\mathit{j}\ 1\ \Omega}$$

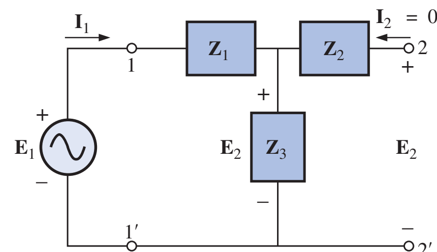


FIGURA 26.30
Determinación de $\mathbf{z}_{21}$.

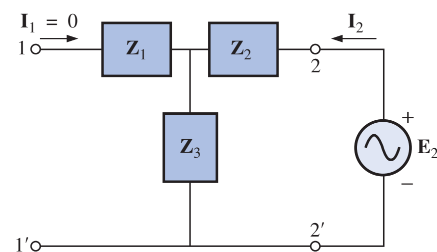


FIGURA 26.31
Determinación de $\mathbf{z}_{22}$.

Para un conjunto de parámetros de impedancia, el comportamiento en las terminales (externo) del dispositivo o red dentro de la configuración de la figura 26.22 está determinado. Un *circuito equivalente* para el sistema puede ser desarrollado usando los parámetros de impedancia y las ecuaciones (26.22a) y (26.22b). Dos posibilidades para los parámetros de impedancia aparecen en la figura 26.32.

Aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff a los lazos de entrada y salida de la red de la figura 26.32(a) resulta en:

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 - \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 = 0$$

y $$\mathbf{E}_2 - \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 - \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 = 0$$



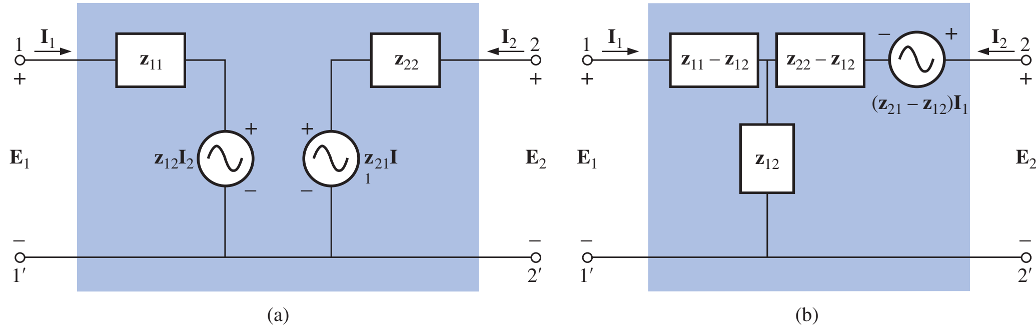


FIGURA 26.32

Dos posibles redes equivalentes de parámetros **z**, *de dos puertos.*

las cuales, reordenadas, se convierten en:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

coincidieron con las ecuaciones (26.22a) y (26.22b).

Para la red de la figura 26.32(b),

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{11} - \mathbf{z}_{12}) - \mathbf{z}_{12}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = 0$$

y
$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{21} - \mathbf{z}_{12}) - \mathbf{I}_2(\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}) - \mathbf{z}_{12}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) = 0$$

las cuales, reordenadas, son:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{11} - \mathbf{z}_{12} + \mathbf{z}_{12}) + \mathbf{I}_2\mathbf{z}_{12}$$
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{I}_1(\mathbf{z}_{21} - \mathbf{z}_{12} + \mathbf{z}_{12}) + \mathbf{I}_2(\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12} + \mathbf{z}_{12})$$

y
$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

En cada red, observe la necesidad de una fuente de voltaje controlada por corriente, esto es, una fuente de voltaje cuya magnitud está determinada por una corriente particular de la red.

La utilidad de los parámetros de impedancia y las redes equivalentes resultantes pueden describirse considerando el sistema de la figura 26.33(a), el cual contiene un dispositivo (o sistema) para el que los parámetros de impedancia

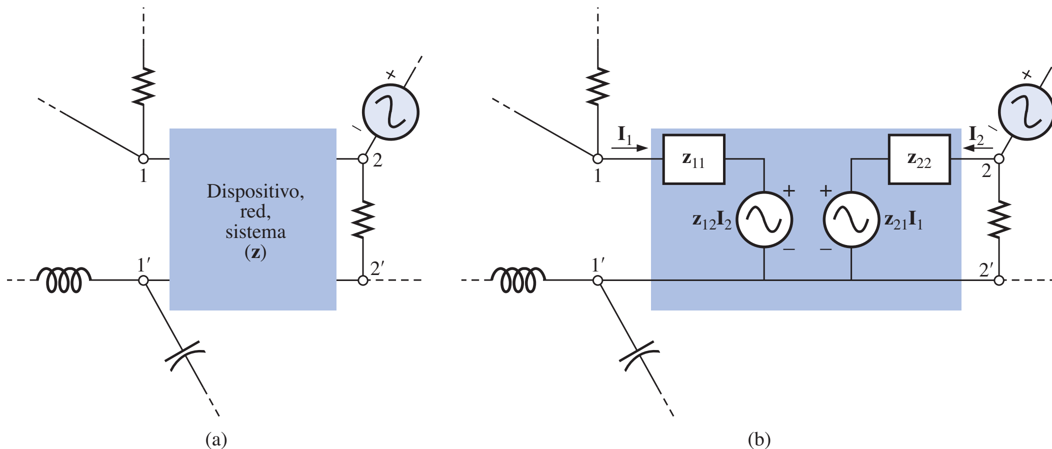


FIGURA 26.33

Sustitución de la red equivalente de parámetros **z** *en un sistema complejo.*



han sido determinados. Como se muestra en la figura 26.33(b), la red equivalente para el dispositivo (o sistema) puede ser sustituida entonces, y métodos como el análisis de mallas, el análisis de nodos, etc., pueden ser empleados para determinar las cantidades desconocidas requeridas. El dispositivo mismo puede reemplazarse entonces por un circuito equivalente para obtener de manera más directa las soluciones deseadas empleando menos esfuerzo que el requerido usando sólo las características del dispositivo.

EJEMPLO 26.8 Trace el circuito equivalente en la forma que muestra la figura 26.32(a) usando los parámetros de impedancia determinados en el ejemplo 26.7.

Solución: El circuito aparece en la figura 26.34.

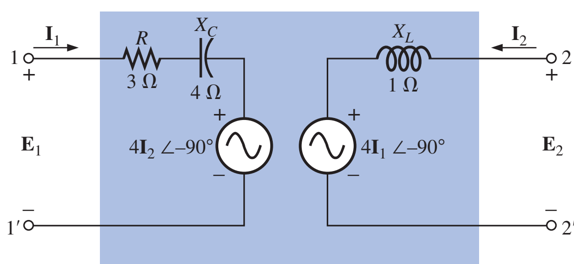


FIGURA 26.34
Ejemplo 26.8.

26.7 PARÁMETROS DE ADMITANCIA (y)

Las ecuaciones que relacionan las cuatro variables terminales de la figura 26.22 también pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{E}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{E}_2 \qquad \textbf{(26.31a)}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{E}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{E}_2 \qquad \textbf{(26.31b)}$$

Observe que en este caso cada término de cada ecuación tiene las unidades de corriente, en comparación con unidades de voltaje para cada término de las ecuaciones (26.22a) y (26.22b). Además, la unidad de cada coeficiente está en siemens, en comparación con los ohm empleados para los parámetros de impedancia.

Los parámetros de impedancia fueron determinados estableciendo una corriente particular igual a cero por medio de una condición de circuito abierto. Para los **parámetros de admitancia (y)** de las ecuaciones (26.31a) y (26.31b), un voltaje se establece igual a cero por medio de una condición de corto circuito.

La terminología aplicada a cada uno de los parámetros de admitancia resulta directamente de los términos descriptivos aplicados a los parámetros de impedancia. Las ecuaciones para cada uno son determinadas directamente de las ecuaciones (26.31a) y (26.31b) estableciendo un voltaje particular igual a cero.



y_{11}

$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{E}_1}\right|_{\mathbf{E}_2 = 0} \quad \text{(siemens, S)} \tag{26.32}$$

$\mathbf{y}_{11}$ = ***parámetro de admitancia de entrada a corto circuito***

La red para su determinación aparece en la figura 26.35.

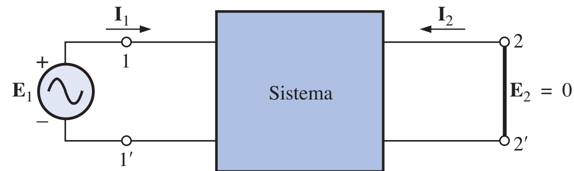


FIGURA 26.35
Determinación de $\mathbf{y}_{11}$.

y_{12}

$$\mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{E}_2}\right|_{\mathbf{E}_1 = 0} \quad \text{(siemens, S)} \tag{26.33}$$

$\mathbf{y}_{12}$ = ***parámetro de admitancia de transferencia inversa a corto circuito***

La red para determinar $\mathbf{y}_{12}$ aparece en la figura 26.36.

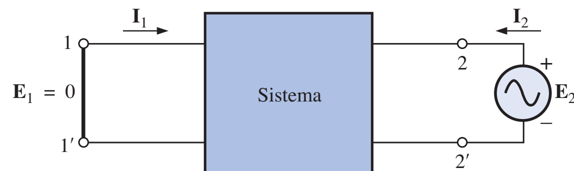


FIGURA 26.36
Determinación de $\mathbf{y}_{12}$.

y_{21}

$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{E}_1}\right|_{\mathbf{E}_2 = 0} \quad \text{(siemens, S)} \tag{26.34}$$

$\mathbf{y}_{21}$ = ***parámetro de admitancia de transferencia directa a corto circuito***

La red para determinar $\mathbf{y}_{21}$ aparece en la figura 26.37.

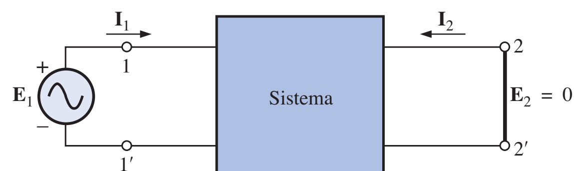


FIGURA 26.37
Determinación de $\mathbf{y}_{21}$.



$\mathbf{y}_{22}$

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{E}_2}\bigg|_{\mathbf{E}_1 = 0} \qquad \text{(siemens, S)} \tag{26.35}$$

$\mathbf{y}_{22}$ = parámetro de admitancia de salida a corto circuito

La red requerida aparece en la figura 26.38.

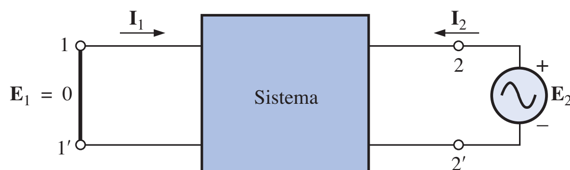


FIGURA 26.38
Determinación de $\mathbf{y}_{22}$.

EJEMPLO 26.9 Determine los parámetros de admitancia para la red π de la figura 26.39.

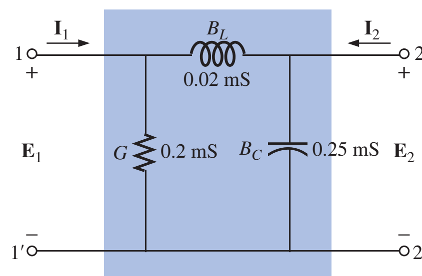


FIGURA 26.39
Red π.

Solución: La red para $\mathbf{y}_{11}$ aparecerá como se muestra en la figura 26.40, con:

$$\mathbf{Y}_1 = 0.2 \text{ mS } \angle 0° \qquad \mathbf{Y}_2 = 0.02 \text{ mS } \angle -90° \qquad \mathbf{Y}_3 = 0.25 \text{ mS } \angle 90°$$

Usamos:
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{E}_1\mathbf{Y}_T = \mathbf{E}_1(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)$$

con:
$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{E}_1}\bigg|_{\mathbf{E}_2 = 0}$$

e
$$\mathbf{y}_{11} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \tag{26.36}$$

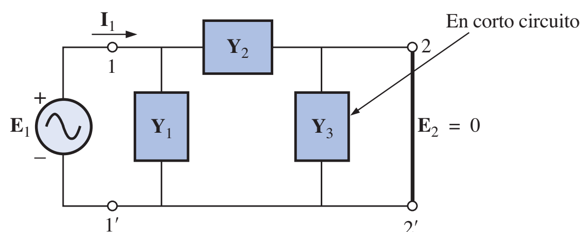


FIGURA 26.40
Determinación de $\mathbf{y}_{11}$.

La red para determinar $\mathbf{y}_{12}$ aparece en la figura 26.41. $\mathbf{Y}_1$ está en corto circuito; por lo que $\mathbf{I}_{\mathbf{Y}_2} = \mathbf{I}_1$, e

$$\mathbf{I}_{\mathbf{Y}_2} = \mathbf{I}_1 = -\mathbf{E}_2\mathbf{Y}_2$$

El signo menos resulta de que la dirección definida de $\mathbf{I}_1$ en la figura 26.41 es opuesta a la dirección real del flujo debido a la fuente aplicada $\mathbf{E}_2$; es decir,

$$\mathbf{y}_{12} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{E}_2}\bigg|_{\mathbf{E}_1 = 0}$$



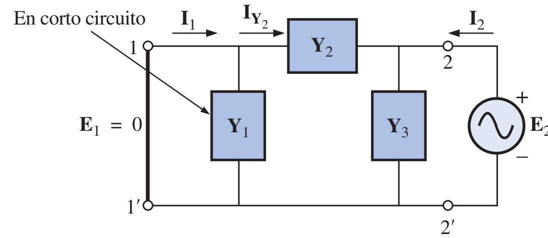


FIGURA 26.41
Determinación de $\mathbf{y}_{12}$.

e $$\mathbf{y}_{12} = -\mathbf{Y}_2 \tag{26.37}$$

La red empleada para $\mathbf{y}_{21}$ se muestra en la figura 26.42. En este caso, $\mathbf{Y}_3$ está en corto circuito, resultando en:

$$\mathbf{I}_{Y_2} = \mathbf{I}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{Y_2} = \mathbf{I}_2 = -\mathbf{E}_1\mathbf{Y}_2$$

con: $$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{E}_1}\right|_{\mathbf{E}_2 = 0}$$

e $$\mathbf{y}_{21} = -\mathbf{Y}_2 \tag{26.38}$$

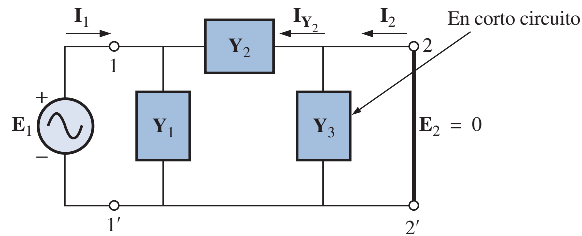


FIGURA 26.42
Determinación de $\mathbf{y}_{21}$.

Observe que para la configuración π, $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$, ya se esperaba esta relación debido a que los parámetros de impedancia para la red T eran tales: $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$. Una red T puede ser convertida directamente a una red π usando la transformación Y-Δ.

La red para determinar $\mathbf{y}_{22}$ aparece en la figura 26.43, y

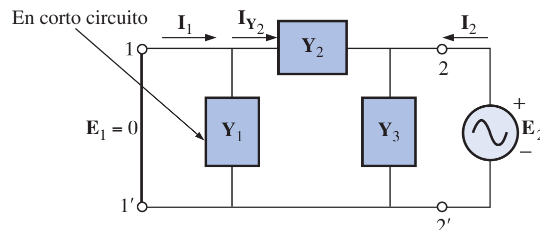


FIGURA 26.43
Determinación de $\mathbf{y}_{22}$.



$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{E}_2(\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)$$

Entonces,

$$\mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{E}_2}\right|_{\mathbf{E}_1 = 0}$$

e

$$\boxed{\mathbf{y}_{22} = \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3} \qquad \textbf{(26.39)}$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$\mathbf{Y}_1 = 0.2 \text{ mS} \angle 0°$$
$$\mathbf{Y}_2 = 0.02 \text{ mS} \angle -90°$$
$$\mathbf{Y}_3 = 0.25 \text{ mS} \angle 90°$$

$$\mathbf{y}_{11} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$$
$$= \mathbf{0.2\ mS} - \boldsymbol{j}\ \mathbf{0.02\ mS}\ (\boldsymbol{L})$$
$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21} = -\mathbf{Y}_2 = -(-j\,0.02 \text{ mS})$$
$$= \boldsymbol{j}\ \mathbf{0.02\ mS}\ (\boldsymbol{C})$$
$$\mathbf{y}_{22} = \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 = -j\,0.02 \text{ mS} + j\,0.25 \text{ mS}$$
$$= \boldsymbol{j}\ \mathbf{0.23\ mS}\ (\boldsymbol{C})$$

Observe las similitudes entre los resultados para $\mathbf{y}_{11}$ e $\mathbf{y}_{22}$ en la red π comparados con $\mathbf{z}_{11}$ y $\mathbf{z}_{22}$ en la red T.

Dos redes que satisfacen las relaciones de las ecuaciones (26.31a) y (26.31b) en sus terminales se muestran en la figura 26.44. Observe el uso de ramas pa-

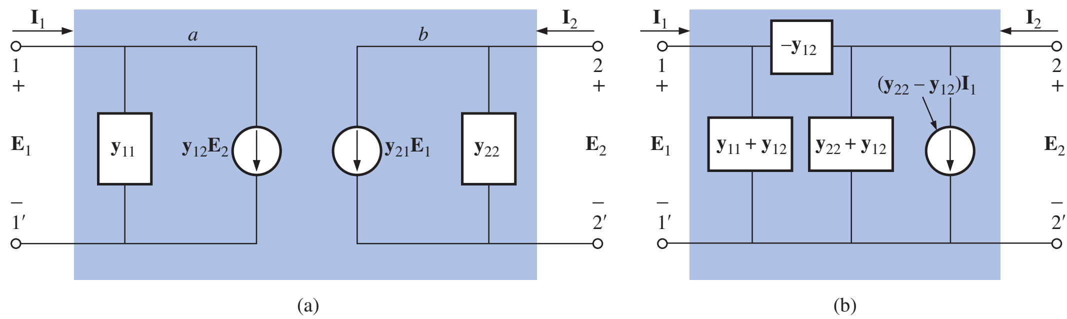


FIGURA 26.44
Dos posibles redes equivalentes de parámetros **y***, de dos puertos.*

ralelas ya que cada término de las ecuaciones (26.31a) y (26.31b) tiene las unidades de corriente, y la ruta más directa al circuito equivalente es una aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff en forma inversa. Esto es, se encuentra la red que satisface la relación de la ley de corriente de Kirchhoff. Para los parámetros de impedancia, cada término tenía las unidades de volts, por lo que la ley de voltaje de Kirchhoff fue aplicada en forma inversa para determinar la combinación en serie de elementos en el circuito equivalente de la figura 26.44(a).

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff a la red de la figura 26.44(a), tenemos:



$$\text{Nodo } a: \quad \overbrace{\mathbf{I}_1}^{\text{Entrando}} = \overbrace{\mathbf{y}_{11}\mathbf{E}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{E}_2}^{\text{Saliendo}}$$
$$\text{Nodo } b: \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{22}\mathbf{E}_2 + \mathbf{y}_{21}\mathbf{E}_1$$

que, cuando se reordenan, son las ecuaciones (26.31a) y (26.31b).

Para los resultados del ejemplo 26.9, aparecerá la red de la figura 26.45 si se emplea la red equivalente de la figura 26.44(a).

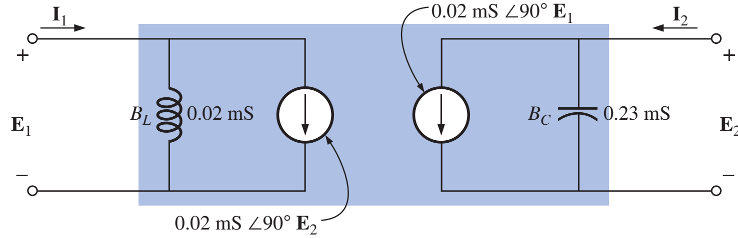


FIGURA 26.45
Red equivalente para los resultados del ejemplo 26.9.

26.8 PARÁMETROS HÍBRIDOS (h)

Los **parámetros híbridos (h)** son empleados ampliamente en el análisis de redes de transistores. El término *híbrido* se deriva de que estos parámetros tienen una mezcla de unidades (conjunto híbrido) en vez de una sola unidad de medición como ohms o siemens, usadas para los parámetros **z** e **y**, respectivamente. Las ecuaciones que definen a los parámetros híbridos tienen una mezcla de variables de corriente *y* voltaje en un lado, como sigue:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{E}_2 \tag{26.40a}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{E}_2 \tag{26.40b}$$

Para determinar los parámetros híbridos, será necesario establecer las condiciones de corto circuito y de circuito abierto, dependiendo del parámetro deseado.

$\mathbf{h}_{11}$

$$\mathbf{h}_{11} = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_1}\bigg|_{\mathbf{E}_2 = 0} \qquad \text{(ohms, } \Omega\text{)} \tag{26.41}$$

$\mathbf{h}_{11}$ = parámetro de impedancia de entrada a corto circuito

La red para su determinación se muestra en la figura 26.46.

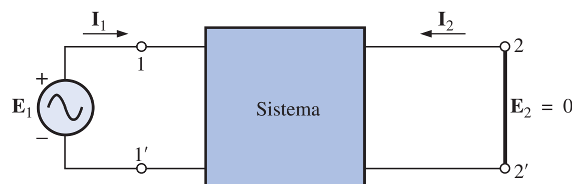


FIGURA 26.46
Determinación de $\mathbf{h}_{11}$.



$\mathbf{h}_{12}$

$$\mathbf{h}_{12} = \left.\frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{E}_2}\right|_{\mathbf{I}_1 = 0} \quad \text{(sin dimensiones)} \qquad \textbf{(26.42)}$$

$\mathbf{h}_{12}$ = parámetro razón de voltaje de transferencia inversa a circuito abierto

La red empleada para determinar $\mathbf{h}_{12}$ se muestra en la figura 26.47.

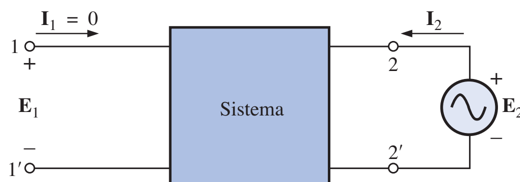


FIGURA 26.47
Determinación de $\mathbf{h}_{12}$.

$\mathbf{h}_{21}$

$$\mathbf{h}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{E}_2 = 0} \quad \text{(sin dimensiones)} \qquad \textbf{(26.43)}$$

$\mathbf{h}_{21}$ = parámetro razón de corriente de transferencia directa a corto circuito

La red para su determinación aparece en la figura 26.48.

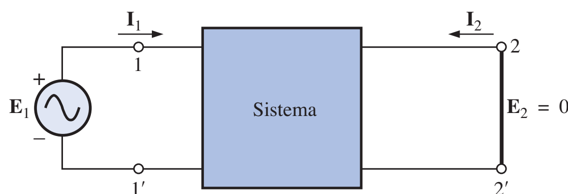


FIGURA 26.48
Determinación de $\mathbf{h}_{21}$.

$\mathbf{h}_{22}$

$$\mathbf{h}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{E}_2}\right|_{\mathbf{I}_1 = 0} \quad \text{(siemens, S)} \qquad \textbf{(26.44)}$$

$\mathbf{h}_{22}$ = parámetro de admitancia de salida a circuito abierto

La red empleada para determinar $\mathbf{h}_{22}$ se muestra en la figura 26.49.

La notación de subíndices para los parámetros híbridos se reduce a lo siguiente en la mayoría de las aplicaciones. La letra seleccionada es la que aparece en negritas en la descripción precedente de cada parámetro:

$$\mathbf{h}_{11} = \mathbf{h}_i \qquad \mathbf{h}_{12} = \mathbf{h}_r \qquad \mathbf{h}_{21} = \mathbf{h}_f \qquad \mathbf{h}_{22} = \mathbf{h}_o$$



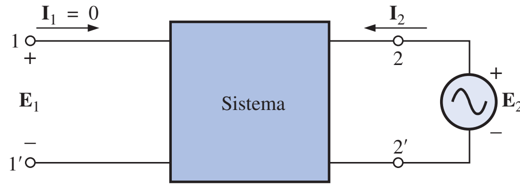


FIGURA 26.49
Determinación de $\mathbf{h}_{22}$.

El circuito híbrido equivalente aparece en la figura 26.50. Como la unidad de medida para cada término de la ecuación (26.40a) es el volt, la ley de voltaje de Kirchhoff fue aplicada inversamente para obtener el circuito de entrada en serie indicado. La unidad de medida para cada término de la ecuación (26.40b) tiene las unidades de corriente, resultando en los elementos en paralelo del circuito de salida obtenido al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff en forma inversa.

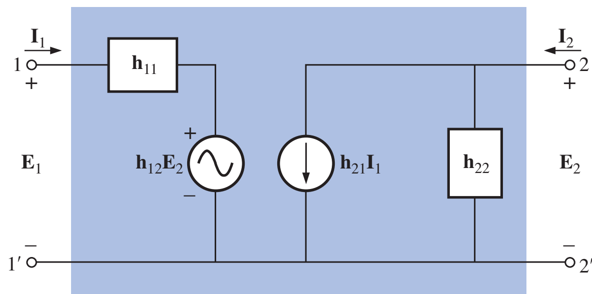


FIGURA 26.50
Red equivalente de parámetros híbridos, de dos puertos.

Observe que el circuito de entrada tiene una fuente de voltaje controlada por voltaje cuyo voltaje de control es el de salida, mientras que el circuito de salida tiene una fuente de corriente controlada por corriente cuya corriente de control es la del circuito de entrada.

EJEMPLO 26.10 Para el circuito híbrido equivalente de la figura 26.51:

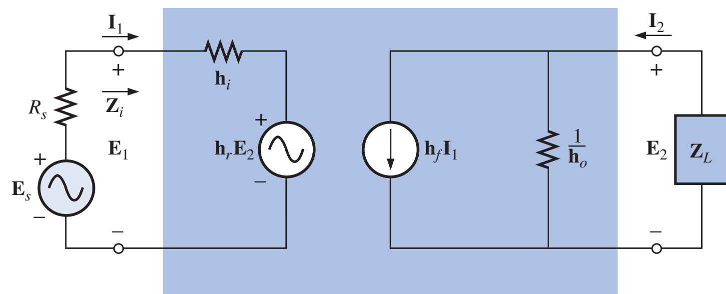


FIGURA 26.51
Ejemplo 26.10.

a. Determine la razón de corriente (ganancia) $\mathbf{A}_i = \mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$.
b. Determine la razón de voltaje (ganancia) $\mathbf{A}_v = \mathbf{E}_2/\mathbf{E}_1$.



Soluciones:

a. Usando la regla del divisor de corriente obtenemos:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{(1/\mathbf{h}_o)\mathbf{h}_f\mathbf{I}_1}{(1/\mathbf{h}_o) + \mathbf{Z}_L} = \frac{\mathbf{h}_f\mathbf{I}_1}{1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L}$$

y

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{h}_f}{1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L} \qquad \textbf{(26.45)}$$

b. Aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff al circuito de entrada resulta en:

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{h}_i\mathbf{I}_1 - \mathbf{h}_r\mathbf{E}_2 = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{h}_r\mathbf{E}_2}{\mathbf{h}_i}$$

Y aplicando la ley de corriente de Kirchhoff al circuito de salida:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_f\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_o\mathbf{E}_2$$

Sin embargo,

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_L}$$

por lo que:

$$-\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_L} = \mathbf{h}_f\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_o\mathbf{E}_2$$

Sustituyendo para $\mathbf{I}_1$ obtenemos:

$$-\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_L} = \mathbf{h}_f\left(\frac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{h}_r\mathbf{E}_2}{\mathbf{h}_i}\right) + \mathbf{h}_o\mathbf{E}_2$$

o bien:

$$\mathbf{h}_i\mathbf{E}_2 = -\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L\mathbf{E}_1 + \mathbf{h}_r\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L\mathbf{E}_2 - \mathbf{h}_i\mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L\mathbf{E}_2$$

y

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_r\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L + \mathbf{h}_i\mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L) = -\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L\mathbf{E}_1$$

con el resultado de que:

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = \frac{-\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L}{\mathbf{h}_i(1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L) - \mathbf{h}_r\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L} \qquad \textbf{(26.46)}$$

EJEMPLO 26.11 Para un transistor en particular, $\mathbf{h}_i = 1\ \text{k}\Omega$, $\mathbf{h}_r = 4 \times 10^{-4}$, $\mathbf{h}_f = 50$ y $\mathbf{h}_o = 25\ \mu\text{s}$. Determine la ganancia de corriente y de voltaje si $\mathbf{Z}_L$ es una carga resistiva de 2 kΩ.

Solución:

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mathbf{h}_f}{1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L} = \frac{50}{1 + (25\ \mu\text{S})(2\ \text{k}\Omega)}$$

$$= \frac{50}{1 + (50 \times 10^{-3})} = \frac{50}{1.050} = \mathbf{47.62}$$

$$\mathbf{A}_v = \frac{-\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L}{\mathbf{h}_i(1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L) - \mathbf{h}_r\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L}$$

$$= \frac{-(50)(2\ \text{k}\Omega)}{(1\ \text{k}\Omega)(1.050) - (4 \times 10^{-4})(50)(2\ \text{k}\Omega)}$$

$$= \frac{-100 \times 10^3}{(1.050 \times 10^3) - (0.04 \times 10^3)} = -\frac{100}{1.01} = \mathbf{-99}$$

El signo menos indica simplemente un desplazamiento de fase de 180° entre $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_1$ para las polaridades definidas en la figura 26.51.



26.9 IMPEDANCIAS DE ENTRADA Y DE SALIDA

Las impedancias de entrada y de salida serán determinadas ahora para el circuito híbrido equivalente y un circuito de parámetros **z** equivalente. La impedancia de entrada siempre puede ser determinada por la razón de voltaje de entrada a la corriente de entrada con o sin una carga aplicada. La impedancia de salida es siempre determinada con el voltaje o la corriente de fuente establecidos en cero. En la sección previa encontramos que para el circuito híbrido equivalente de la figura 26.51,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{h}_i\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_r\mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{E}_2 = -\mathbf{I}_2\mathbf{Z}_L$$

e

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{\mathbf{h}_f}{1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L}$$

Sustituyendo para $\mathbf{I}_2$ en la segunda ecuación (usando la relación de la última ecuación), tenemos:

$$\mathbf{E}_2 = -\left(\frac{\mathbf{h}_f\mathbf{I}_1}{1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L}\right)\mathbf{Z}_L$$

por lo que la primera ecuación toma la forma:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{h}_i\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_r\left(-\frac{\mathbf{h}_f\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_L}{1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L}\right)$$

y

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}_1\left(\mathbf{h}_i - \frac{\mathbf{h}_r\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L}{1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L}\right)$$

Entonces,

$$\mathbf{Z}_i = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{h}_i - \frac{\mathbf{h}_r\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L}{1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L} \qquad \textbf{(26.47)}$$

Para la impedancia de salida, estableceremos el voltaje de fuente en cero, pero conservaremos su resistencia interna R_s como se muestra en la figura 26.52.

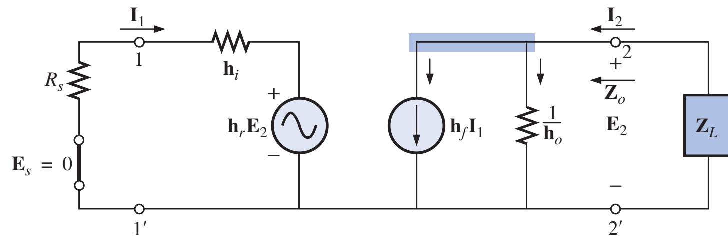


FIGURA 26.52
Determinación de $\mathbf{Z}_o$ *para la red equivalente híbrida.*

Como:
$$\mathbf{E}_s = 0$$

entonces,
$$\mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{h}_r\mathbf{E}_2}{\mathbf{h}_i + R_s}$$

A partir del circuito de salida,

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_f\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_o\mathbf{E}_2$$

o bien:
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_f\left(-\frac{\mathbf{h}_r\mathbf{E}_2}{\mathbf{h}_i + R_s}\right) + \mathbf{h}_o\mathbf{E}_2$$



e
$$\mathbf{I}_2 = \left(-\frac{\mathbf{h}_r\mathbf{h}_f}{\mathbf{h}_i + R_s} + \mathbf{h}_o\right)\mathbf{E}_2$$

Así,
$$\mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{1}{\mathbf{h}_o - \dfrac{\mathbf{h}_r\mathbf{h}_f}{\mathbf{h}_i + R_s}} \tag{26.48}$$

EJEMPLO 26.12 Determine $\mathbf{Z}_i$ y $\mathbf{Z}_o$ para el transistor que tiene los parámetros del ejemplo 26.11 si $R_s = 1\ \text{k}\Omega$.

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_i &= \mathbf{h}_i - \frac{\mathbf{h}_r\mathbf{h}_f\mathbf{Z}_L}{1 + \mathbf{h}_o\mathbf{Z}_L} = 1\ \text{k}\Omega - \frac{0.04\ \text{k}\Omega}{1.050}\\ &= 1 \times 10^3 - 0.0381 \times 10^3 = \mathbf{961.9\ \Omega}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_o &= \frac{1}{\mathbf{h}_o - \dfrac{\mathbf{h}_r\mathbf{h}_f}{\mathbf{h}_i + R_s}} = \frac{1}{25\ \mu\text{S} - \dfrac{(4 \times 10^{-4})(50)}{1\ \text{k}\Omega + 1\ \text{k}\Omega}}\\ &= \frac{1}{25 \times 10^{-6} - 10 \times 10^{-6}} = \frac{1}{15 \times 10^{-6}}\\ &= \mathbf{66.67\ k\Omega}\end{aligned}$$

Para el circuito de parámetros **z** equivalente de la figura 26.53,

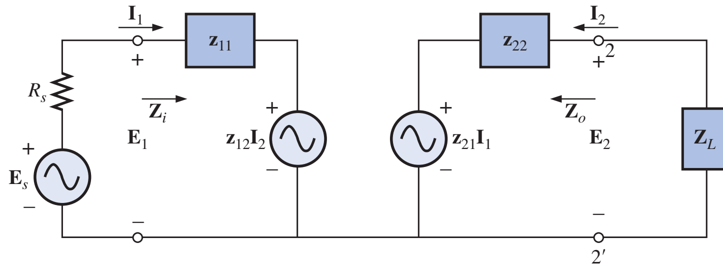


FIGURA 26.53
Determinación de $\mathbf{Z}_i$ *para la red equivalente de parámetros* **z**.

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1}{\mathbf{z}_{22} + \mathbf{Z}_L}$$

e
$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2}{\mathbf{z}_{11}}$$

o bien:
$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\left(-\frac{\mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1}{\mathbf{z}_{22} + \mathbf{Z}_L}\right)$$

y
$$\mathbf{Z}_i = \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{z}_{11} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{22} + \mathbf{Z}_L} \tag{26.49}$$

Para la impedancia de salida, $\mathbf{E}_s = 0$, e



$$\mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2}{R_s + \mathbf{z}_{11}} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}_2 - \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1}{\mathbf{z}_{22}}$$

o bien: $$\mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 + \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 = \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 + \mathbf{z}_{21}\left(-\frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2}{R_s + \mathbf{z}_{11}}\right)$$

y $$\mathbf{E}_2 = \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_2}{R_s + \mathbf{z}_{11}}$$

Así, $$\mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{I}_2} = \mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{R_s + \mathbf{z}_{11}} \tag{26.50}$$

26.10 CONVERSIÓN ENTRE PARÁMETROS

Las ecuaciones que relacionan los parámetros **z** e **y** pueden ser determinadas directamente a partir de las ecuaciones (26.22) y (26.31). Para las ecuaciones (26.31a) y (26.31b),

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{E}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{E}_2$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{E}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{E}_2$$

Por medio de determinantes obtenemos:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\begin{vmatrix}\mathbf{I}_1 & \mathbf{y}_{12}\\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{y}_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12}\\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22}\end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{y}_{22}\mathbf{I}_1 - \mathbf{y}_{12}\mathbf{I}_2}{\mathbf{y}_{11}\mathbf{y}_{22} - \mathbf{y}_{12}\mathbf{y}_{21}}$$

Sustituyendo la notación:

$$\Delta_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{11}\mathbf{y}_{22} - \mathbf{y}_{12}\mathbf{y}_{21}$$

tenemos: $$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{y}_{22}}{\Delta_{\mathbf{y}}}\mathbf{I}_1 - \frac{\mathbf{y}_{12}}{\Delta_{\mathbf{y}}}\mathbf{I}_2$$

la cual, cuando se relaciona con la ecuación (26.22a),

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$

indica que:

$$\mathbf{z}_{11} = \frac{\mathbf{y}_{22}}{\Delta_{\mathbf{y}}} \quad \text{y} \quad \mathbf{z}_{12} = -\frac{\mathbf{y}_{12}}{\Delta_{\mathbf{y}}}$$

y, similarmente,

$$\mathbf{z}_{21} = -\frac{\mathbf{y}_{21}}{\Delta_{\mathbf{y}}} \quad \text{y} \quad \mathbf{z}_{22} = \frac{\mathbf{y}_{11}}{\Delta_{\mathbf{y}}}$$

Para la conversión de los parámetros **z** al dominio de la admitancia, se aplican determinantes a las ecuaciones (26.22a) y (26.22b). Los parámetros de impedancia pueden encontrarse en términos de los parámetros híbridos formando primero el determinante para $\mathbf{I}_1$ a partir de las ecuaciones híbridas:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{E}_2$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{E}_2$$

Es decir,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix}\mathbf{E}_1 & \mathbf{h}_{12}\\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{h}_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12}\\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22}\end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{h}_{22}}{\Delta_{\mathbf{h}}}\mathbf{E}_1 - \frac{\mathbf{h}_{12}}{\Delta_{\mathbf{h}}}\mathbf{I}_2$$



y $$\frac{\mathbf{h}_{22}}{\Delta_\mathbf{h}}\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}_1 + \frac{\mathbf{h}_{12}}{\Delta_\mathbf{h}}\mathbf{I}_2$$

o bien: $$\mathbf{E}_1 = \frac{\Delta_\mathbf{h}\mathbf{I}_1}{\mathbf{h}_{22}} + \frac{\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{22}}\mathbf{I}_2$$

la cual, cuando se relaciona con la ecuación de parámetros de impedancia,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$

indica que:

$$\mathbf{z}_{11} = \frac{\Delta_\mathbf{h}}{\mathbf{h}_{22}} \quad \text{y} \quad \mathbf{z}_{12} = \frac{\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{22}}$$

Las conversiones restantes se dejan como ejercicio para el lector. En la tabla 26.1 se presenta una tabla completa de conversiones.

TABLA 26.1
Conversiones entre los parámetros **z**, **y** *y* **h**.

A ↓ \ De →	**z**	**y**	**h**
z	$\begin{matrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\mathbf{y}_{22}}{\Delta_\mathbf{y}} & \frac{-\mathbf{y}_{12}}{\Delta_\mathbf{y}} \\ \frac{-\mathbf{y}_{21}}{\Delta_\mathbf{y}} & \frac{\mathbf{y}_{11}}{\Delta_\mathbf{y}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_\mathbf{h}}{\mathbf{h}_{22}} & \frac{\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{22}} \\ \frac{-\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{22}} & \frac{1}{\mathbf{h}_{22}} \end{matrix}$
y	$\begin{matrix} \frac{\mathbf{z}_{22}}{\Delta_\mathbf{z}} & \frac{-\mathbf{z}_{12}}{\Delta_\mathbf{z}} \\ \frac{-\mathbf{z}_{21}}{\Delta_\mathbf{z}} & \frac{\mathbf{z}_{11}}{\Delta_\mathbf{z}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{\mathbf{h}_{11}} & \frac{-\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{11}} \\ \frac{\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{11}} & \frac{\Delta_\mathbf{h}}{\mathbf{h}_{11}} \end{matrix}$
h	$\begin{matrix} \frac{\Delta_\mathbf{z}}{\mathbf{z}_{22}} & \frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{22}} \\ \frac{-\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{22}} & \frac{1}{\mathbf{z}_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{\mathbf{y}_{11}} & \frac{-\mathbf{y}_{12}}{\mathbf{y}_{11}} \\ \frac{\mathbf{y}_{21}}{\mathbf{y}_{11}} & \frac{\Delta_\mathbf{y}}{\mathbf{y}_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{matrix}$

26.11 ANÁLISIS POR COMPUTADORA

PSpice

Red híbrida equivalente–Ganancia de voltaje El análisis por computadora de esta sección se limitará a una sesión práctica en el uso de fuentes controladas. El sistema por analizarse es la red híbrida equivalente de la figura 26.54. La ganancia de voltaje y la impedancia de salida serán determinadas mediante un esquemático.

Usando la ecuación (26.46), la magnitud y la fase del voltaje de salida se determinan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_v &= \frac{-\mathbf{h}_f R_L}{\mathbf{h}_i(1 + \mathbf{h}_o R_L) - \mathbf{h}_r\mathbf{h}_f R_L} \\
&= \frac{-(50)(2\ \text{k}\Omega)}{(1\ \text{k}\Omega)(1 + (25 \times 10^{-6}\ \text{S})(2\ \text{k}\Omega)) - (4 \times 10^{-4})(50)(2\ \text{k}\Omega)} \\
&= \frac{-100 \times 10^3}{(1\ \text{k}\Omega)(1 + 50 \times 10^{-3}) - 40} = \frac{-100 \times 10^3}{1050 - 40} = -99.01
\end{aligned}$$



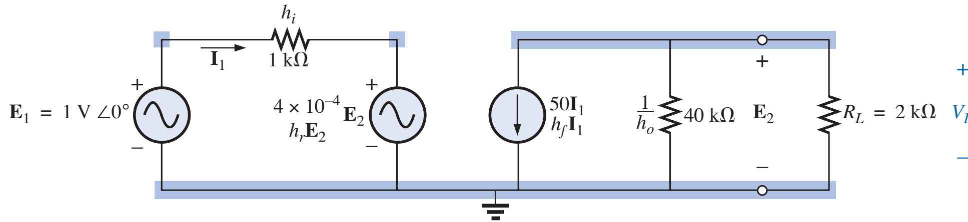


FIGURA 26.54
Modelo híbrido equivalente a ser examinado bajo la condición de carga conectada usando PSpice.

y
$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_1} = \frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{E}_1}$$

por lo que:
$$\mathbf{V}_L = \mathbf{A}_v\mathbf{E}_1 = (-99.01)(1\text{ V}\angle 0°)$$
$$= \mathbf{99.01\text{ V}\angle 180°}$$

La representación esquemática ha sido establecida como se muestra en la figura 26.55. Observe que una **CCCS** y una **VCVS** deben usarse junto con la fuente de ca **VSIN**. La mayor parte de la construcción y el establecimiento de las distintas componentes por medio del cuadro de diálogo **Property Editor** es bastante directa. Sin embargo, el lector debe ser muy cuidadoso al establecer las conexiones para las variables de control. Cuando cruce una línea, asegúrese completamente de que no aparezca un pequeño punto donde cruce la línea; de otra manera, se hará una conexión. Sólo haga clic en el alambre en posición antes de cruzar la línea, y luego haga clic de nuevo en la construcción de alambre después de cruzar la línea.

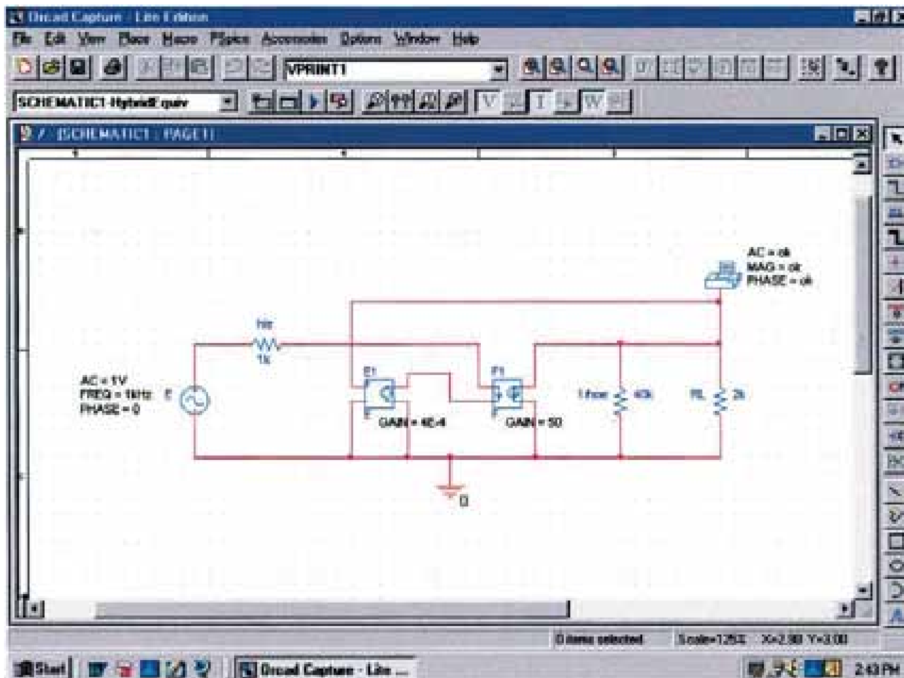


FIGURA 26.55
Uso de PSpice para analizar la red de la figura 26.54.



Los **Simulation Settings** fueron **AC Sweep, Start** y **End Frequency** a 1 kHz, y 1 en **Point/Decade**. Seleccione **PSpice-View Output File**, haga clic en **OK**, y ejecute la simulación. Resulta el listado **AC ANALYSIS** de la figura 26.56. Se tiene una concordancia exacta entre la solución teórica dada antes y el análisis por computadora.

Red híbrida equivalente–Impedancia de salida Para la impedancia de salida, la fuente aplicada **VSIN** se establece en 0 V reemplazándola por una conexión directa de 0 Ω. Luego se aplica una fuente de corriente de 1 A como se muestra en la figura 26.57. La fuente de corriente **ISRC** fue seleccionada

```
82:
83:  ** Profile: "SCHEMATIC1-HybridEquiv"  [ C:\PSpice\hybridequivalent-SCHEMATIC1-HybridEquiv.s
    im ]
84:
85:
86:  ****     AC ANALYSIS                      TEMPERATURE =   27.000 DEG C
87:
88:
89: ******************************************************************************
90:
91:
92:
93:   FREQ        VM(N00869)  VP(N00869)
94:
95:
96:    1.000E+03   9.901E+01   1.800E+02
97:
```

FIGURA 26.56
Archivo de salida para el voltaje en el resistor de carga de la figura 26.55.

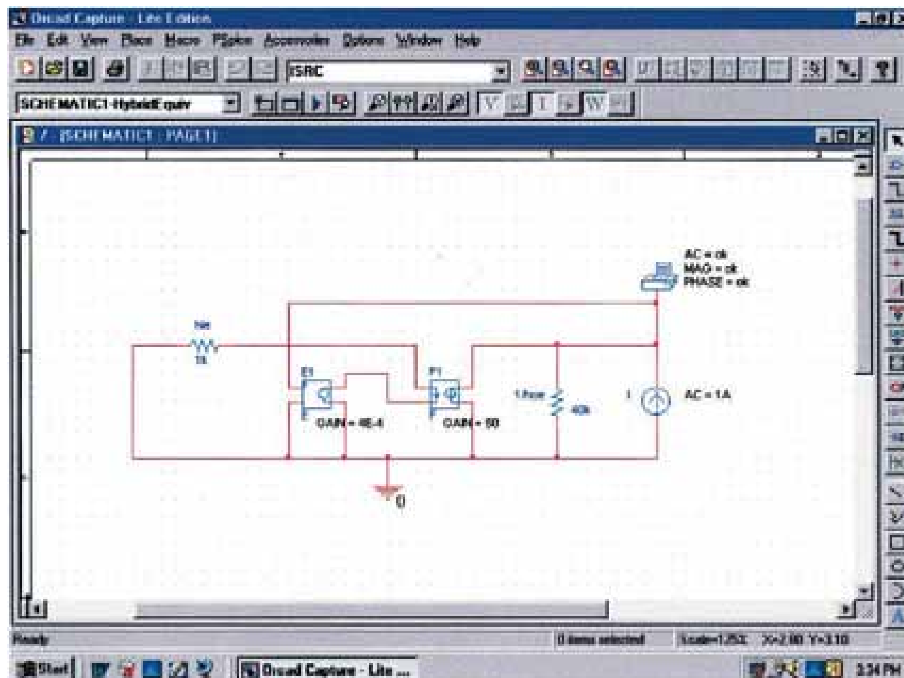


FIGURA 26.57
Modificación del esquema de la figura 26.55 para determinar la impedancia de salida de la red.



porque tiene la flecha en el símbolo. Todo lo demás en la red permanece igual, así que no hay necesidad de reconstruirla por completo. Sólo haga los cambios y ejecute la simulación. Ni siquiera la simulación tiene que ser cambiada ya que los parámetros elegidos permanecerán iguales. A la fuente de corriente se le dio una magnitud de 1 A de manera que la magnitud del voltaje **VPRINT1** fuese también la magnitud de la impedancia de salida. Los resultados de la figura 26.58 indican una impedancia de salida de 200 kΩ. El siguiente análisis teórico revela que la impedancia de salida es, efectivamente, de 200 kΩ:

$$\mathbf{Z}_o = \frac{1}{\mathbf{h}_o - \dfrac{\mathbf{h}_r\mathbf{h}_f}{\mathbf{h}_i + R_s}} = \frac{1}{25 \times 10^{-6}\,\text{S} - \dfrac{(4 \times 10^{-4})(50)}{1\,\text{k}\Omega + 0}}$$

$$= \frac{1}{25 \times 10^{-6}\,\text{S} - 20 \times 10^{-6}\,\text{S}} = \frac{1}{5 \times 10^{-6}\,\text{S}} = \mathbf{200\,k\Omega}$$

```
 ** Profile: "SCHEMATIC1-HybridEquiv"  [ C:\PSpice\hybridequivalent-schematic1-hybridequiv.s
im ]


 ****     AC ANALYSIS                      TEMPERATURE =   27.000 DEG C


******************************************************************************



  FREQ        VM(N00869)  VP(N00869)


   1.000E+03   2.000E+05   0.000E+00

```

FIGURA 26.58
Archivo de salida para el voltaje en la fuente de corriente de 1 A (e impedancia de salida) de la red de la figura 26.57.

PROBLEMAS

SECCIÓN 26.2 Parámetros de impedancia $\mathbf{Z}_i$ y $\mathbf{Z}_o$

1. Dados los niveles de voltaje indicados en la figura 26.59, determine la magnitud de la impedancia de entrada $\mathbf{Z}_i$.

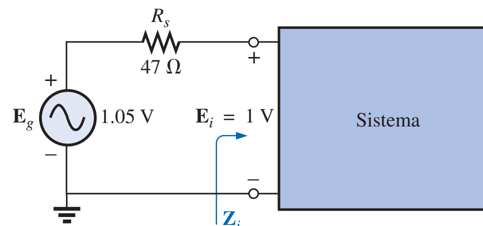


FIGURA 26.59
Problema 1.



2. Para un sistema con:

$$\mathbf{E}_i = 120 \text{ V } \angle 0° \quad \text{e} \quad \text{I}_i = 6.2 \text{ A } \angle -10.8°$$

determine la impedancia de entrada en forma rectangular. A una frecuencia de 60 Hz, determine los valores nominales de los parámetros.

3. Para el sistema multipuerto de la figura 26.60:

a. Determine la magnitud de $\mathbf{I}_{i_1}$ si $\mathbf{E}_{i_1} = 20$ mV.

b. Encuentre $\mathbf{Z}_{i_2}$ usando la información proporcionada.

c. Calcule la magnitud de $\mathbf{E}_{i_3}$.

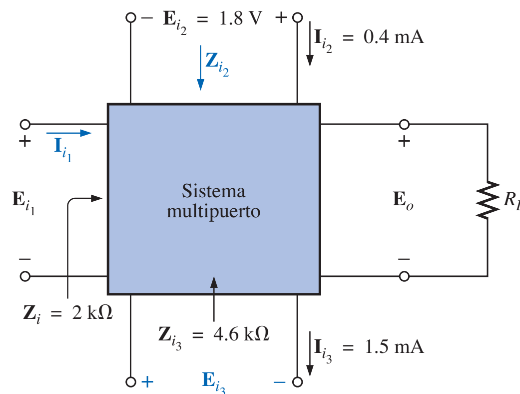


FIGURA 26.60
Problema 3.

4. Dados los niveles de voltaje indicados en la figura 26.61, determine $\mathbf{Z}_o$.

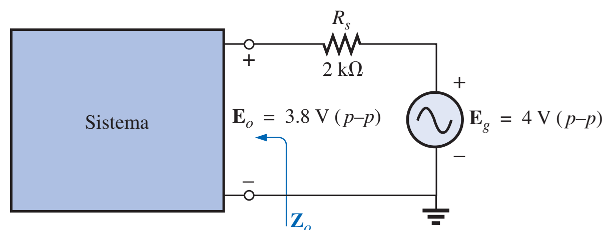


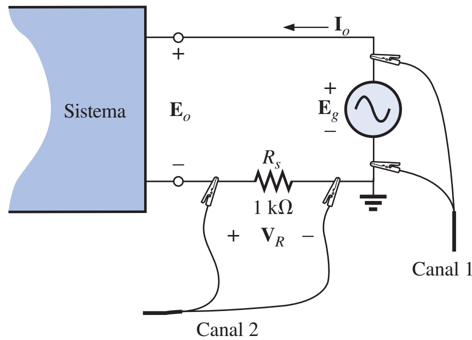
FIGURA 26.61
Problemas 4, 5 y 6.

5. Para la configuración de la figura 26.61, determine $\mathbf{Z}_o$ si $e_g =$ 2 sen 377t y $v_R = 40 \times 10^{-3}$ sen 377t, con $R_s = 0.91$ kΩ.

6. Determine $\mathbf{Z}_o$ para el sistema de la figura 26.61 si $E_g = 1.8$ V (p-p) y $E_o = 0.6$ V rms.



7. Determine la impedancia de salida para el sistema de la figura 26.62 dadas las medidas que indica el osciloscopio.



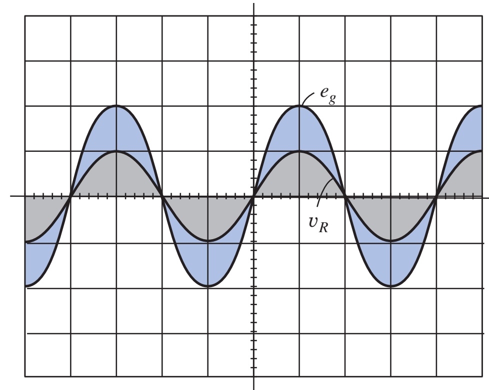


FIGURA 26.62
Problema 7.

SECCIÓN 26.3 Ganancias de voltaje $A_{v_{NL}}$, A_v y A_{v_T}

8. Dado el sistema de la figura 26.63, determine la ganancia de voltaje sin carga $A_{v_{NL}}$.

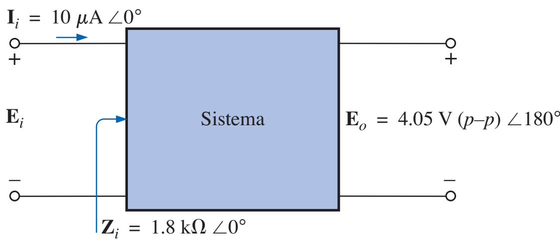


FIGURA 26.63
Problema 8.

9. Para el sistema de la figura 26.64:
   a. Determine $A_v = E_o/E_i$.
   b. Encuentre $A_{v_T} = E_o/E_g$.

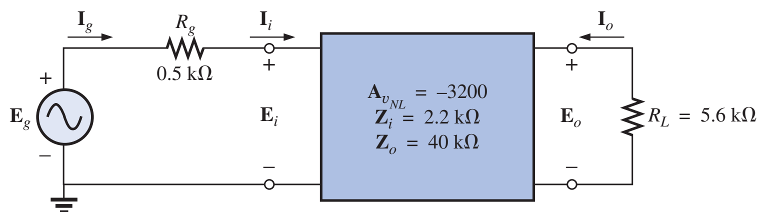


FIGURA 26.64
Problemas 9, 12 y 13.



10. Para el sistema de la figura 26.65(a), el voltaje de salida sin carga es de −1440 mV, con 1.2 mV aplicados en las terminales de entrada. En la figura 26.65(b), una carga de 4.7 kΩ es aplicada al mismo sistema, y el voltaje de salida cae a −192 mV, con la misma señal de entrada aplicada. ¿Cuál es la impedancia de salida del sistema?

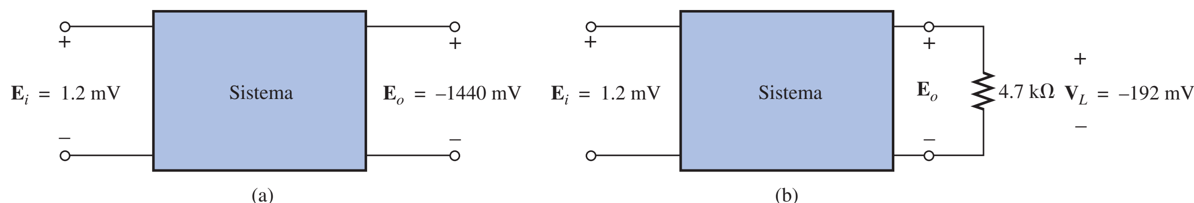


FIGURA 26.65
Problema 10.

***11.** Para el sistema de la figura 26.66, si

$\mathbf{A}_v = -160 \qquad \mathbf{I}_o = 4 \text{ mA} \angle 0° \qquad \mathbf{E}_g = 70 \text{ mV} \angle 0°$

a. Determine la ganancia de voltaje sin carga.
b. Encuentre la magnitud de $\mathbf{E}_i$.
c. Determine $\mathbf{Z}_i$.

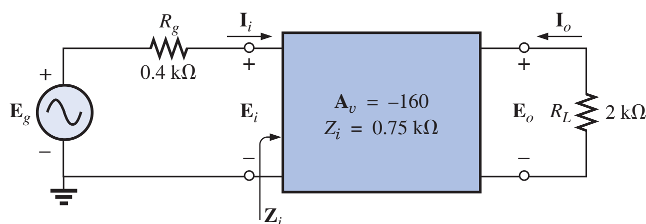


FIGURA 26.66
Problemas 11 y 14.

SECCIÓN 26.4 Ganancias de corriente A_i y A_{i_T} y ganancia de potencia A_G

12. Para el sistema de la figura 26.64:
a. Determine $\mathbf{A}_i = \mathbf{I}_o/\mathbf{I}_i$.
b. Encuentre $\mathbf{A}_{i_T} = \mathbf{I}_o/\mathbf{I}_g$.
c. Compare los resultados de los incisos (a) y (b), y explique las diferencias entre ellos.

13. Para el sistema de la figura 26.64:
a. Determine A_G usando la ecuación (26.13), y compare el valor con el resultado obtenido usando la ecuación (26.14).
b. Encuentre A_{G_T} usando la ecuación (26.16), y compare el valor con el resultado obtenido usando la ecuación (26.17).

14. Para el sistema de la figura 26.66:
a. Determine la magnitud de $\mathbf{A}_i = \mathbf{I}_o/\mathbf{I}_i$.
b. Encuentre la ganancia de potencia $A_{G_T} = P_L/P_g$.



SECCIÓN 26.5 Sistemas en cascada

15. Para el sistema de dos etapas de la figura 26.67:

a. Determine la ganancia total de voltaje $\mathbf{A}_{v_T} = \mathbf{V}_L/\mathbf{E}_i$.

b. Encuentre la ganancia total de corriente $\mathbf{A}_{i_T} = \mathbf{I}_o/\mathbf{I}_i$.

c. Encuentre la ganancia de corriente de cada etapa $\mathbf{A}_{i_1}$ y $\mathbf{A}_{i_2}$.

d. Determine la ganancia total de corriente usando los resultados del inciso (c), y compárela con el resultado obtenido en el inciso (b).

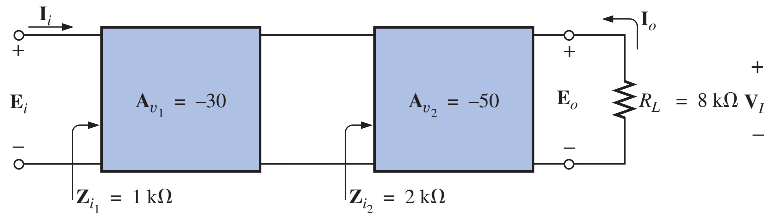


FIGURA 26.67
Problema 15.

***16.** Para el sistema de la figura 26.68:

a. Determine $\mathbf{A}_{v_2}$ si $\mathbf{A}_{v_T} = -6912$.

b. Determine $\mathbf{Z}_{i_2}$ usando la información proporcionada.

c. Encuentre $\mathbf{A}_{i_3}$ y $\mathbf{A}_{i_T}$ usando la información proporcionada en la figura 26.68.

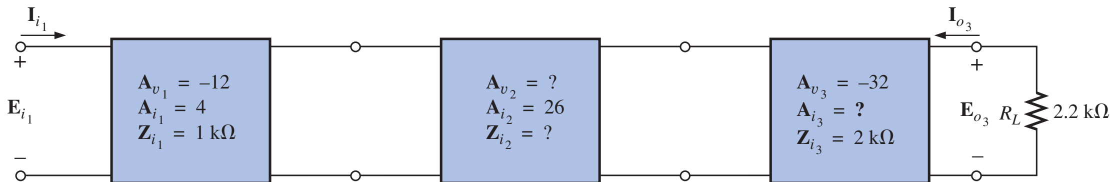


FIGURA 26.68
Problema 16.

SECCIÓN 26.6 Parámetros de impedancia (z)

17. a. Determine los parámetros de impedancia (**z**) para la red π de la figura 26.69.

b. Trace el circuito de parámetros **z** equivalente (usando cualquier forma de la figura 26.32).

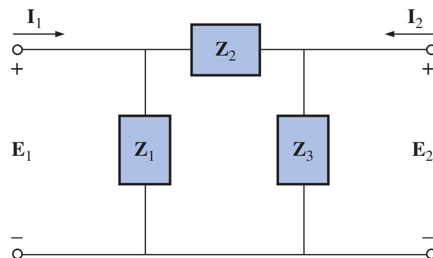


FIGURA 26.69
Problemas 17 y 21.



18. **a.** Determine los parámetros de impedancia (**z**) para la red de la figura 26.70.
b. Trace el circuito de parámetros **z** equivalente (usando cualquier forma de la figura 26.32).

SECCIÓN 26.7 Parámetros de admitancia (y)

19. **a.** Determine los parámetros de admitancia (**y**) para la red T de la figura 26.71.
b. Trace el circuito equivalente de parámetros **y** (usando cualquier forma de la figura 26.44).

20. **a.** Determine los parámetros de admitancia (**y**) para la red de la figura 26.72.
b. Trace el circuito equivalente de parámetros **y** (usando cualquier forma de la figura 26.44).

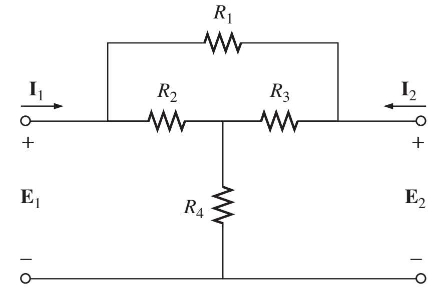


FIGURA 26.70
Problemas 18 y 22.

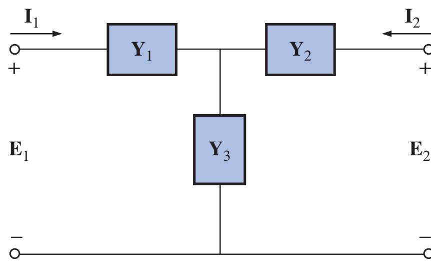


FIGURA 26.71
Problemas 19 y 23.

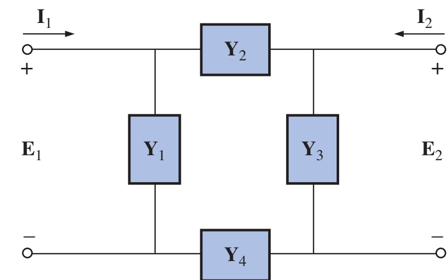


FIGURA 26.72
Problemas 20 y 24.

SECCIÓN 26.8 Parámetros híbridos (h)

21. **a.** Determine los parámetros **h** para la red de la figura 26.69.
b. Trace el circuito híbrido equivalente.

22. **a.** Determine los parámetros **h** para la red de la figura 26.70.
b. Trace el circuito híbrido equivalente.

23. **a.** Determine los parámetros **h** para la red de la figura 26.71.
b. Trace el circuito híbrido equivalente.

24. **a.** Determine los parámetros **h** para la red de la figura 26.72.
b. Trace el circuito híbrido equivalente.

25. Para el circuito híbrido equivalente de la figura 26.73:
a. Determine la ganancia de corriente $A_i = \mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$.
b. Determine la ganancia de voltaje $A_v = \mathbf{E}_2/\mathbf{E}_1$.

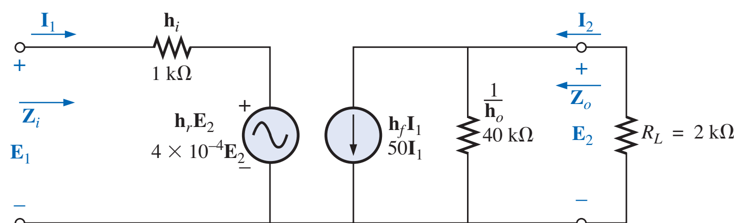


FIGURA 26.73
Problemas 25 y 26.



SECCIÓN 26.9 Impedancias de entrada y de salida

26. Para el circuito híbrido equivalente de la figura 26.73:
  a. Determine la impedancia de entrada.
  b. Determine la impedancia de salida.

27. Determine las impedancias de entrada y de salida para el circuito de parámetros **z** equivalente de la figura 26.74.

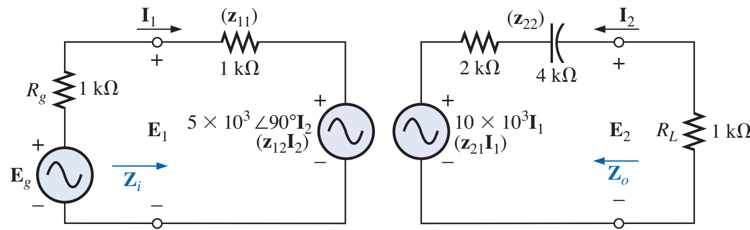


FIGURA 26.74
Problemas 27, 32 y 34.

28. Determine la expresión para la impedancia de entrada y de salida del circuito de parámetros **y** equivalente.

SECCIÓN 26.10 Conversión entre parámetros

29. Determine los parámetros **h** para los siguientes parámetros **z**:

$$\mathbf{z}_{11} = 4\ \text{k}\Omega$$
$$\mathbf{z}_{12} = 2\ \text{k}\Omega$$
$$\mathbf{z}_{21} = 3\ \text{k}\Omega$$
$$\mathbf{z}_{22} = 4\ \text{k}\Omega$$

30. **a.** Determine los parámetros **z** para los siguientes parámetros **h**:

$$\mathbf{h}_{11} = 1\ \text{k}\Omega$$
$$\mathbf{h}_{12} = 2 \times 10^{-4}$$
$$\mathbf{h}_{21} = 100$$
$$\mathbf{h}_{22} = 20 \times 10^{-6}\ \text{S}$$

  b. Determine los parámetros **y** para los parámetros híbridos indicados en el inciso (a).

SECCIÓN 26.11 Análisis por computadora

PSpice o Electronics Workbench

31. Para $\mathbf{E}_1 = 4\ \text{V} \angle 30°$, determine $\mathbf{E}_2$ en una carga resistiva de 2 kΩ entre 2 y 2′ para la red de la figura 26.34.

32. Para $\mathbf{E}_g = 2\ \text{V} \angle 0°$, determine $\mathbf{E}_2$ para la red de la figura 26.74.

33. Determine $\mathbf{Z}_i$ para la red de la figura 26.34 con una carga resistiva de 2 kΩ desde 2 hasta 2′.

34. Determine $\mathbf{Z}_i$ para la red de la figura 26.74.



GLOSARIO

Impedancia de entrada Impedancia que aparece en las terminales de entrada de un sistema.

Impedancia de salida Impedancia que aparece en las terminales de salida de un sistema con la fuente energizante igual a cero.

Parámetros de admitancia (y) Conjunto de parámetros, con unidades en siemens, que pueden ser usados para establecer una red de dos puertos equivalente para un sistema.

Parámetros de impedancia (z) Conjunto de parámetros, con unidades en ohms, que pueden ser usados para establecer una red de dos puertos equivalente para un sistema.

Parámetros híbridos (h) Conjunto de parámetros mezclados (ohms, siemens, algunos sin unidades) que pueden ser usados para establecer una red de dos puertos equivalente para un sistema.

Red de dos puertos Red que tiene dos pares de terminales de acceso.

Red de un solo puerto Red que tiene un solo conjunto de terminales de acceso.

Apéndices

APÉNDICE A
PSpice, Electronics Workbench, Mathcad y C++

APÉNDICE B
Factores de conversión

APÉNDICE C
Determinantes

APÉNDICE D
Código de colores para capacitores tubulares moldeados (picofarads)

APÉNDICE E
El alfabeto griego

APÉNDICE F
Conversiones de parámetros magnéticos

APÉNDICE G
Condiciones de máxima transferencia de potencia

APÉNDICE H
Respuestas a problemas de numeración impar seleccionados

Apéndice A

PSpice, Electronics Workbench, Mathcad y C++

A.1 PSpice

El paquete de software PSpice utilizado a lo largo de este libro proviene de los programas desarrollados en la Universidad de California en Berkeley, EUA, a principios de la década de 1970. SPICE son las siglas de Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis (Programa de simulación con énfasis en circuitos integrados). Aunque distintas empresas han configurado SPICE para su uso particular, Cadence Design Systems ofrece tanto una versión comercial como una de demostración de OrCAD. Las versiones comerciales o profesionales utilizadas por las compañías de ingeniería pueden resultar muy costosas, por lo cual, Cadence ofrece una distribución libre de la versión demostrativa para presentar una introducción de la capacidad del paquete de simulación. Para esta décima edición del libro, se utilizó la familia OrCAD en su versión 9.2 Lite Edition (la más reciente). Es posible obtener una copia gratis de esta versión llamando al 1-888-671-9500 (en Estados Unidos) o escribiendo a la siguiente dirección de Cadence Design Systems en 13221 SW 68th Parkway, Suite 200, Portland, OR 97223, EUA. También puede ordenarse por Internet en http://www.pcb.cadence.com/Product/Schematic/evalrequest.asp

Los requisitos mínimos del sistema son los siguientes:

Computadora personal Pentium a 90 MHz
32 MB de memoria en RAM
Espacio en disco duro:
  CIS de captura 89 MB
  Layout Plus 66 MB
  PSpice A/D 46 MB
Pantalla VGA de 256 colores con resolución de 800 × 600
Microsoft Windows 95/98 o Windows NT 4.0 Service Pack 3
Lector de CD-ROM con velocidad 4×
Audio de 16 bits (recomendado)

A.2 Electronics Workbench

Multisim es un producto de Electronics Workbench. Para la presente edición se utilizó Multisim 2001 Versión académica (la nomenclatura 6.2 se abandonó y se reemplazó por 2001). Las personas que deseen adquirir una copia de la edición estudiantil de esta versión de Electronics Workbench pueden llamar al 1-800-263-5552 (en Estados Unidos) o escribir a la empresa en la dirección 111 Peter Street, Suite 801, Toronto, Ontario, Canadá M5V 2H1. Los maestros que necesiten adquirir múltiples copias de la edición estudiantil deberán contactar a su representante de ventas local de Prentice Hall o visitar el sitio web de Prentice Hall en http://www.prenhall.com.

Los requisitos mínimos del sistema para la versión estudiantil son los siguientes:

Computadora personal Pentium a 166 Mhz o superior
32 MB de memoria en RAM (se recomiendan 64 MB de memoria en RAM)
Espacio en disco duro de 100 MB (mínimo)
Windows 95/98/NT
Resolución mínima de la pantalla de 800 × 600
Lector de CD-ROM

A.3 Mathcad

Mathcad es un producto de MathSoft Engineering & Education, Inc., ubicada en 101 Main Street, Cambridge, MA 02142-1521, EUA. La dirección de internet es http://www.mathsoft.com. Para esta edición del libro se utilizó Mathcad 2000. Aunque este programa se vende en 99.95 dólares estadounidenses, existe un descuento especial para academias y universidades. Un profesor o un representante de compras de la institución interesada podrá solicitar el precio de descuento llamando a 1-800-628-4223 (en Estados Unidos) o escribiendo a sales-info@mathsoft.com. Los estudiantes también pueden ordenarlo utilizando la misma dirección de correo electrónico o adquirirlo en línea en http:///www.mathcad.com/buy/ o en http://www.edu.com.

Los requisitos mínimos del sistema para Mathcad 2000 Profesional son los siguientes:

Procesador Pentium a 90 MHz o superior
Windows 95/98/NT 4.0 o superior
32 MB de memoria en RAM como mínimo (se recomiendan 48 MB o más)
Espacio en disco duro de 160 MB para una instalación mínima o 290 MB para una instalación completa
Capacidad gráfica SVGA o superior
Lector de CD-ROM

A.4 C++

La versión de C++ utilizada en este libro es Borland C++ 4.0, producida por Borland Software Corporation de Scotts Valley, CA, EUA. La dirección de internet de esta compañía es http://www.borland.com.

Los requisitos mínimos del sistema para C++ son los siguientes:

4 MB de RAM como mínimo (se recomiendan 8 MB o más)
Espacio en disco duro de 2 MB para una instalación mínima o 90 MB para una instalación completa
Lector de CD-ROM
Capacidad gráfica SVGA o superior
Windows 3.1 o superior

Apéndice B

Factores de conversión

Para convertir de	A	Multiplicar por
Btus	Caloría-gramos	251.996
	Ergs	1.054×10^{10}
	Pie-libras	777.649
	Hp-horas	0.000393
	Joules	1054.35
	Kilowatt-horas	0.000293
	Watt-segundos	1054.35
Centímetros	Unidades Angström	1×10^{8}
	Pies	0.0328
	Pulgadas	0.3937
	Metros	0.01
	Millas	6.214×10^{-6}
	Milímetros	10
Mils circulares	Centímetros cuadrados	5.067×10^{-6}
	Pulgadas cuadradas	7.854×10^{-7}
Pulgadas cúbicas	Centímetros cúbicos	16.387
	Galones (líquidos, EUA)	0.00433
Metros cúbicos	Pies cúbicos	35.315
Días	Horas	24
	Minutos	1440
	Segundos	86,400
Dinas	Galones (líquidos, EUA)	264.172
	Newtons	0.00001
	Libras	2.248×10^{-6}
Electrón-volts	Ergs	1.60209×10^{-12}
Ergs	Dina-centímetros	1.0
	Electrón-volts	6.242×10^{11}
	Pie-libras	7.376×10^{-8}
	Joules	1×10^{-7}
	Kilowatt-horas	2.777×10^{-14}
Pies	Centímetros	30.48
	Metros	0.3048
Pie-candelas	Lúmenes/pie cuadrado	1.0
	Lúmenes/metro cuadrado	10.764
Pie-libras	Dina-centímetros	1.3558×10^{7}
	Ergs	1.3558×10^{7}
	Caballos de fuerza-horas	5.050×10^{-7}
	Joules	1.3558
	Newton-metros	1.3558

Para convertir de	A	Multiplicar por
Galones (líquidos, EUA)	Pulgadas cúbicas Litros Onzas Pintas	231 3.785 128 8
Gauss	Maxwells/centímetro cuadrado Líneas/centímetro cuadrado Líneas/pulgada cuadrada	1.0 1.0 6.4516
Gilberts	Ampere-vueltas	0.7958
Gramos	Dinas Onzas Libras	980.665 0.0353 0.0022
Caballo de fuerza	Btus/hora Ergs/segundo Pie-libras/segundo Joules/segundo Watts	2547.16 7.46×10^{9} 550.221 746 746
Horas	Segundos	3600
Pulgadas	Unidades Angström Centímetros Pies Metros	2.54×10^{8} 2.54 0.0833 0.0254
Joules	Btus Ergs Pie-libras Caballo de fuerza-horas Kilowatt-horas Watt-segundos	0.000948 1×10^{7} 0.7376 3.725×10^{-7} 2.777×10^{-7} 1.0
Kilogramos	Dinas Onzas Libras	980,665 35.2 2.2
Líneas	Maxwells	1.0
Líneas/centímetro cuadrado	Gauss	1.0
Líneas/pulgada cuadrada	Gauss Webers/pulgada cuadrada	0.1550 1×10^{-8}
Litros	Centímetros cúbicos Pulgadas cúbicas Galones (líquidos, EUA) Onzas (líquidos, EUA) Cuartos (líquidos, EUA)	1000.028 61.025 0.2642 33.815 1.0567
Lúmenes	Candelas de potencia (esféricas)	0.0796
Lúmenes/centímetro cuadrado	Lamberts	1.0
Lúmenes/pie cuadrado	Pie-candelas	1.0

Para convertir de	A	Multiplicar por
Maxwells	Líneas	1.0
	Webers	1×10^{-8}
Metros	Unidades Angström	1×10^{10}
	Centímetros	100
	Pies	3.2808
	Pulgadas	39.370
	Millas	0.000621
Millas	Pies	5280
	Kilómetros	1.609
	Metros	1609.344
Millas/hora	Kilómetros/hora	1.609344
Newton-metros	Dina-centímetros	1×10^{7}
	Kilogramo-metros	0.10197
Oersteds	Ampere-vueltas/pulgada	2.0212
	Ampere-vueltas/metro	79.577
	Gilberts/centímetros	1.0
Cuartos (líquidos, EUA)	Centímetros cúbicos	946.353
	Pulgadas cúbicas	57.75
	Galones (líquidos, EUA)	0.25
	Litros	0.9463
	Pintas (líquidos, EUA)	2
	Onzas (líquidos, EUA)	32
Radianes	Grados	57.2958
Slugs	Kilogramos	14.5939
	Libras	32.1740
Watts	Btus/hora	3.4144
	Ergs/segundo	1×10^{7}
	Caballo de fuerza	0.00134
	Joules/segundo	1.0
Webers	Líneas	1×10^{8}
	Maxwells	1×10^{8}
Años	Días	365
	Horas	8760
	Minutos	525,600
	Segundos	3.1536×10^{7}

Apéndice C

Determinantes

Los determinantes se utilizan para obtener soluciones matemáticas de las incógnitas en dos o más ecuaciones simultáneas. Una vez que el procedimiento se comprende correctamente, es posible obtener las soluciones con un mínimo de tiempo y esfuerzo y, por lo general, con menos errores que al utilizar otros métodos.

Considere las siguientes ecuaciones, donde x y y son las incógnitas y a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son constantes:

Col. 1		Col. 2		Col. 3	
a_1x	$+$	b_1y	$=$	c_1	**(C.1a)**
a_2x	$+$	b_2y	$=$	c_2	**(C.1b)**

Por supuesto que es posible resolver una variable en la ecuación (C.1a) y sustituirla en la ecuación (C.1b). Es decir, al resolver para x en la ecuación (C.1a),

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

y al sustituir el resultado en la ecuación (C.1b),

$$a_2\left(\frac{c_1 - b_1y}{a_1}\right) + b_2y = c_2$$

Ahora es posible resolver para y, dado que es la única variable restante, y luego sustituir en cualquier ecuación para obtener x. Esto es aceptable para dos ecuaciones, pero se vuelve un proceso tedioso y extenso para tres o más ecuaciones simultáneas.

La utilización de determinantes para resolver x y y requiere que se establezcan los siguientes formatos para cada variable:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{C.2}$$

(Col. 1, Col. 2 sobre las columnas de cada determinante)

Observe primero que sólo aparecen constantes dentro de los corchetes verticales y que el denominador en cada expresión es el mismo. De hecho, el denominador lo constituyen simplemente los coeficientes de x y y en la misma disposición que en las ecuaciones (C.1a) y (C.1b). Al resolver para x, se reemplazan los coeficientes de x en el numerador por las constantes a la derecha del signo de igual en las ecuaciones (C.1a) y (C.1b), y sólo se repiten los coeficientes de la variable y. Al resolver para y, se reemplazan los coeficientes de y en el numerador por las constantes a la derecha del signo de igual, y se repiten los coeficientes de x.

Cada configuración en el numerador y en el denominador de las ecuaciones (C.2) se denomina *determinante* (D), el cual puede evaluarse de forma numérica en la siguiente forma:

$$\text{Determinante} = D \quad \overset{\text{Col. 1} \;\; \text{Col. 2}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{C.3}$$

El valor desarrollado se obtiene al multiplicar primero el elemento superior izquierdo por el inferior derecho y restando luego el producto de los elementos inferior izquierdo por el superior derecho. Este determinante en particular se denomina determinante de *segundo orden*, dado que contiene dos renglones y dos columnas.

Al utilizar determinantes, es importante recordar que las columnas de las ecuaciones, como se indica en las ecuaciones (C.1a) y (C.1b), deben colocarse en el mismo orden dentro de la configuración de determinante. Es decir, dado que a_1 y a_2 están en la columna 1 de las ecuaciones (C.1a) y (C.1b), deberán situarse en la columna 1 del determinante. (Lo mismo es aplicable para b_1 y b_2.)

Al desarrollar la expresión completa para x y y tenemos lo siguiente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{C.4a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{C.4b}$$

EJEMPLO C.1 Evalúe los siguientes determinantes:

a. $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (3)(2) = 8 - 6 = \mathbf{2}$

b. $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (6)(-1) = 8 + 6 = \mathbf{14}$

c. $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (0)(4) - (-2)(-2) = 0 - 4 = \mathbf{-4}$

d. $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = (0)(10) - (3)(0) = \mathbf{0}$

EJEMPLO C.2 Resuelva para x y y:

$$2x + y = 3$$
$$3x + 4y = 2$$

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(4) - (2)(1)}{(2)(4) - (3)(1)} = \frac{12 - 2}{8 - 3} = \frac{10}{5} = \mathbf{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{(2)(2) - (3)(3)}{5} = \frac{4 - 9}{5} = \frac{-5}{5} = \mathbf{-1}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2x + y &= (2)(2) + (-1) \\ &= 4 - 1 = 3 \qquad \text{(se comprueba)} \\ 3x + 4y &= (3)(2) + (4)(-1) \\ &= 6 - 4 = 2 \qquad \text{(se comprueba)} \end{aligned}$$

EJEMPLO C.3 Resuelva para x y y:

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 3 \\ 3x - 2y &= -2 \end{aligned}$$

Solución: En este ejemplo, observe el efecto del signo menos y el uso de paréntesis para asegurar que se obtenga el signo apropiado en cada producto.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(-2) - (-2)(2)}{(-1)(-2) - (3)(2)}$$

$$= \frac{-6 + 4}{2 - 6} = \frac{-2}{-4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{(-1)(-2) - (3)(3)}{-4}$$

$$= \frac{2 - 9}{-4} = \frac{-7}{-4} = \mathbf{\frac{7}{4}}$$

EJEMPLO C.4 Resuelva para x y y:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 4y \\ 20y &= -1 + 3x \end{aligned}$$

Solución: En este caso, las ecuaciones deben colocarse primero en el formato de las ecuaciones (C.1a) y (C.1b):

$$\begin{aligned} x + 4y &= 3 \\ -3x + 20y &= -1 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(20) - (-1)(4)}{(1)(20) - (-3)(4)}$$

$$= \frac{60 + 4}{20 + 12} = \frac{64}{32} = \mathbf{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{32} = \frac{(1)(-1) - (-3)(3)}{32}$$

$$= \frac{-1 + 9}{32} = \frac{8}{32} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

El uso de determinantes no se limita a la solución de dos ecuaciones simultáneas, también pueden aplicarse a cualquier cantidad de ecuaciones lineales simultáneas. Primero analizaremos un método abreviado que es aplicable únicamente a determinantes de tercer orden, dado que la mayoría de los problemas en el libro están limitados a este nivel de dificultad. Luego veremos el procedimiento general para resolver cualquier cantidad de ecuaciones simultáneas.

Considere las tres ecuaciones simultáneas siguientes:

Col. 1		Col. 2		Col. 3		Col. 4
a_1x	$+$	b_1y	$+$	c_1z	$=$	d_1
a_2x	$+$	b_2y	$+$	c_2z	$=$	d_2
a_3x	$+$	b_3y	$+$	c_3z	$=$	d_3

donde x, y y z son las incógnitas, y $a_{1,2,3}$, $b_{1,2,3}$, $c_{1,2,3}$ y $d_{1,2,3}$ son las constantes.

La configuración de determinante para x, y y z puede obtenerse de una forma similar a la utilizada para dos ecuaciones simultáneas. Es decir, para resolver x, se obtiene el determinante en el numerador al reemplazar la columna 1 con los elementos a la derecha del signo de igual. El denominador es el determinante de los coeficientes de las incógnitas (lo mismo aplica para y y z). Nuevamente, el denominador es el mismo para cada incógnita.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D}$$

donde:
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Un método abreviado para evaluar el determinante de tercer orden consiste en repetir las primeras dos columnas del determinante a la derecha de éste y luego sumar los productos sobre diagonales específicas como se muestra a continuación:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

4(−) 5(−) 6(−)

1(+) 2(+) 3(+)

Los productos de las diagonales 1, 2 y 3 son positivos y tienen las siguientes magnitudes:

$$+a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3$$

Los productos de las diagonales 4, 5 y 6 son negativos y tienen las siguientes magnitudes:

$$-a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

La solución total es la suma de las diagonales 1, 2 y 3 menos la suma de las diagonales 4, 5 y 6:

$$+(a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1) \qquad \textbf{(C.5)}$$

Precaución: **¡Este método de desarrollo es adecuado sólo para determinantes de tercer orden!** No podrá aplicarse a sistemas de cuarto orden o superiores.

EJEMPLO C.5 Evalúe el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{matrix}$$

(−) (−) (−)

(+) (+) (+)

Solución:

$$[(1)(1)(2) + (2)(0)(0) + (3)(-2)(4)] - [(0)(1)(3) + (4)(0)(1) + (2)(-2)(2)]$$
$$= (2 + 0 - 24) - (0 + 0 - 8) = (-22) - (-8)$$
$$= -22 + 8 = \mathbf{-14}$$

EJEMPLO C.6 Resuelva para *x*, *y* y *z*:

$$1x + 0y - 2z = -1$$
$$0x + 3y + 1z = +2$$
$$1x + 2y + 3z = 0$$

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}}$$

$$= \frac{[(-1)(3)(3) + (0)(1)(0) + (-2)(2)(2)] - [(0)(3)(-2) + (2)(1)(-1) + (3)(2)(0)]}{[(1)(3)(3) + (0)(1)(1) + (-2)(0)(2)] - [(1)(3)(-2) + (2)(1)(1) + (3)(0)(0)]}$$

$$= \frac{(-9 + 0 - 8) - (0 - 2 + 0)}{(9 + 0 + 0) - (-6 + 2 + 0)}$$

$$= \frac{-17 + 2}{9 + 4} = \mathbf{-\frac{15}{13}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}}{13}$$

$$= \frac{[(1)(2)(3) + (-1)(1)(1) + (-2)(0)(0)] - [(1)(2)(-2) + (0)(1)(1) + (3)(0)(-1)]}{13}$$

$$= \frac{(6 - 1 + 0) - (-4 + 0 + 0)}{13}$$

$$= \frac{5 + 4}{13} = \mathbf{\frac{9}{13}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}}{13}$$

$$= \frac{[(1)(3)(0) + (0)(2)(1) + (-1)(0)(2)] - [(1)(3)(-1) + (2)(2)(1) + (0)(0)(0)]}{13}$$

$$= \frac{(0 + 0 + 0) - (-3 + 4 + 0)}{13}$$

$$= \frac{0 - 1}{13} = -\mathbf{\frac{1}{13}}$$

o bien, a partir de $0x + 3y + 1z = +2$,

$$z = 2 - 3y = 2 - 3\left(\frac{9}{13}\right) = \frac{26}{13} - \frac{27}{13} = -\mathbf{\frac{1}{13}}$$

Comprobación:

$$\left.\begin{aligned} 1x + 0y - 2z &= -1 \\ 0x + 3y + 1z &= +2 \\ 1x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -\frac{15}{13} + 0 + \frac{2}{13} &= -1 \\ 0 + \frac{27}{13} + \frac{-1}{13} &= +2 \\ -\frac{15}{13} + \frac{18}{13} + \frac{-3}{13} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} -\frac{13}{13} &= -1 \quad \checkmark \\ \frac{26}{13} &= +2 \quad \checkmark \\ -\frac{18}{13} + \frac{18}{13} &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

El método general para determinantes de tercer orden o de órdenes superiores requiere que el determinante se desarrolle de la siguiente forma. Existe más de un desarrollo que generará el resultado correcto, pero esta forma es la que se utiliza normalmente cuando el material se presenta por primera vez.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \underset{\text{Factor multiplicador}}{a_1} \underbrace{\left(+\underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Menor}}\right)}_{\text{Cofactor}} + \underset{\text{Factor multiplicador}}{b_1} \underbrace{\left(-\underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{Menor}}\right)}_{\text{Cofactor}} + \underset{\text{Factor multiplicador}}{c_1} \underbrace{\left(+\underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{Menor}}\right)}_{\text{Cofactor}}$$

Este desarrollo se obtuvo al multiplicar los elementos del primer renglón de D por sus cofactores correspondientes. No es requisito que el primer renglón se utilice como los factores multiplicadores. De hecho, cualquier *renglón* o *columna* (no diagonales) puede utilizarse para desarrollar un determinante de tercer orden.

El signo de cada cofactor está indicado por la posición de los factores multiplicadores (a_1, b_1 y c_1 en este caso) como en el siguiente formato estándar:

$$\begin{vmatrix} + \rightarrow & - & + \\ \downarrow & & \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Observe que puede obtenerse el signo adecuado para cada elemento con sólo asignar al elemento superior izquierdo un signo positivo y cambiando luego de signo a medida que se avanza horizontal o verticalmente a la posición adyacente.

Para el determinante D, los elementos tendrían los siguientes signos:

$$\begin{vmatrix} a_1^{(+)} & b_1^{(-)} & c_1^{(+)} \\ a_2^{(-)} & b_2^{(+)} & c_2^{(-)} \\ a_3^{(+)} & b_3^{(-)} & c_3^{(+)} \end{vmatrix}$$

Los menores asociados con cada factor multiplicador se obtienen al cubrir el renglón y la columna en la que se ubica el factor multiplicador y escribiendo un determinante de segundo orden que incluya los elementos restantes en las mismas posiciones relativas que tienen en el determinante de tercer orden.

Considere los cofactores asociados con a_1 y b_1 en el desarrollo de D. El signo es positivo para a_1 y negativo para b_1 como lo determina el formato estándar. Al seguir el procedimiento señalado antes, podremos obtener los menores de a_1 y b_1 de la siguiente forma:

$$a_{1(\text{menor})} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$b_{1(\text{menor})} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Se indicó que podría utilizarse cualquier renglón o columna para desarrollar el determinante de tercer orden, y que se obtendría el mismo resultado. Al utilizar la primera columna de D, obtendremos el desarrollo:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\left(+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right) + a_2\left(-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right) + a_3\left(+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right)$$

La elección adecuada del renglón o la columna con frecuencia puede reducir de forma efectiva la cantidad de trabajo requerido para desarrollar el determinante de tercer orden. Por ejemplo, en los siguientes determinantes, la primera columna y el tercer renglón, respectivamente, reducirán el número de cofactores en el desarrollo:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2\left(+\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}\right) + 0 + 0 = 2(28 - 30)$$

$$= \mathbf{-4}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\left(+\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}\right) + 0 + 3\left(+\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 2(32 - 42) + 3(6 - 8) = 2(-10) + 3(-2)$$

$$= \mathbf{-26}$$

EJEMPLO C.7 Desarrolle los siguientes determinantes de tercer orden:

a. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\left(+ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) + 3\left(- \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) + 2 + \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$

$$= 1[6 - 1] + 3[-(6 - 3)] + 2[2 - 6]$$
$$= 5 + 3(-3) + 2(-4)$$
$$= 5 - 9 - 8$$
$$= \mathbf{-12}$$

b. $D = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2\left(-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right) + 8\left(+\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\right)$

$$= 0 + 2[-(0 - 24)] + 8[(20 - 0)]$$
$$= 0 + 2(24) + 8(20)$$
$$= 48 + 160$$
$$= \mathbf{208}$$

Apéndice D

CÓDIGO DE COLORES PARA CAPACITADORES TUBULARES MOLDEADOS (PICOFARADS)

Color	Cifra significativa	Multiplicador decimal	Tolerancia ±%
Negro	0	1	20
Café	1	10	—
Rojo	2	100	—
Naranja	3	1000	30
Amarillo	4	10,000	40
Verde	5	10^5	5
Azul	6	10^6	—
Violeta	7	—	—
Gris	8	—	—
Blanco	9	—	10

Nota: El nivel del voltaje se identifica mediante un número de un dígito para niveles de hasta 900 V, y por un número de dos dígitos para niveles superiores a 900 V. Dos ceros siguen a la cifra del voltaje.

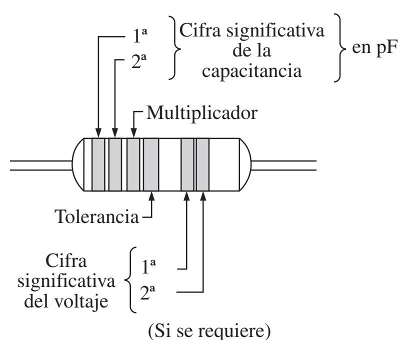


FIGURA D.1

Apéndice E

El alfabeto griego

Letra	Mayúscula	Minúscula	Utilizada para designar
Alfa	Α	α	Área, ángulos, coeficientes
Beta	Β	β	Ángulos, coeficientes, densidad de flujo
Gamma	Γ	γ	Gravedad específica, conductividad
Delta	Δ	δ	Densidad, variación
Épsilon	Ε	ϵ	Base de los logaritmos naturales
Zeta	Ζ	ζ	Coeficientes, coordenadas, impedancia
Eta	Η	η	Eficiencia, coeficiente de histéresis
Theta	Θ	θ	Ángulo de fase, temperatura
Iota	Ι	ι	
Kappa	Κ	κ	Constante dieléctrica, susceptibilidad
Lambda	Λ	λ	Longitud de onda
Mu	Μ	μ	Factor de amplificación, micro, permeabilidad
Nu	Ν	ν	Reluctividad
Xi	Ξ	ξ	
Ómicron	Ο	o	
Pi	Π	π	3.1416
Rho	Ρ	ρ	Resistividad
Sigma	Σ	σ	Sumatoria
Tau	Τ	τ	Constante de tiempo
Ípsilon	Υ	υ	
Phi	Φ	ϕ	Ángulos, flujo magnético
Chi	Χ	χ	
Psi	Ψ	ψ	Flujo dieléctrico, diferencia de fase
Omega	Ω	ω	Ohms, velocidad angular

Apéndice F

CONVERSIONES DE PARÁMETROS MAGNÉTICOS

	SI (MKS)	CGS	Inglés
Φ	webers (Wb) 1 Wb	maxwells $= 10^8$ maxwells	líneas $= 10^8$ líneas
B	Wb/m^2 $1\ \text{Wb/m}^2$	gauss (maxwells/cm^2) $= 10^4$ gauss	líneas/pulg^2 $= 6.452 \times 10^4\ \text{líneas/pulg}^2$
A	$1\ \text{m}^2$	$= 10^4\ \text{cm}^2$	$= 1550\ \text{pulg}^2$
μ_o	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/Am	= 1 gauss/oersted	= 3.20 líneas/Am
$\mathscr{F}$	NI (ampere-vueltas, At) 1 At	$0.4\pi NI$ (gilberts) = 1.257 gilberts	NI (At) 1 gilbert = 0.7958 At
H	NI/l (At/m) 1 At/m	$0.4\pi NI/l$ (oersteds) $= 1.26 \times 10^{-2}$ oersted	NI/l (At/pulg) $= 2.54 \times 10^{-2}$ At/pulg
H_g	$7.97 \times 10^5 B_g$ (At/m)	B_g (oersteds)	$0.313B_g$ (At/pulg)

Apéndice G

CONDICIONES DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

Deducción de las condiciones de máxima transferencia de potencia para la situación donde el componente resistivo de la carga es ajustable pero la reactancia de carga está fija en magnitud.*

Para el circuito de la figura G.1, la potencia entregada a la carga está determinada por:

$$P = \frac{V_{R_L}^2}{R_L}$$

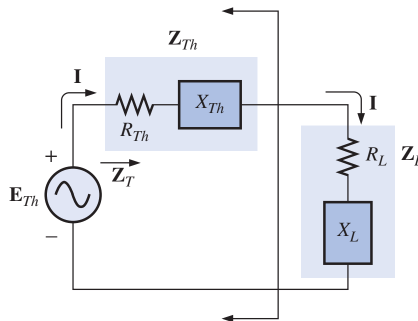


FIGURA G.1

Al aplicar la regla del divisor de voltaje:

$$\mathbf{V}_{R_L} = \frac{R_L \mathbf{E}_{Th}}{R_L + R_{Th} + X_{Th}\angle 90° + X_L \angle 90°}$$

La magnitud de $\mathbf{V}_{R_L}$ está determinada por:

$$V_{R_L} = \frac{R_L E_{Th}}{\sqrt{(R_L + R_{Th})^2 + (X_{Th} + X_L)^2}}$$

y

$$V_{R_L}^2 = \frac{R_L^2 E_{Th}^2}{(R_L + R_{Th})^2 + (X_{Th} + X_L)^2}$$

con:

$$P = \frac{V_{R_L}^2}{R_L} = \frac{R_L E_{Th}^2}{(R_L + R_{Th})^2 + (X_{Th} + X_L)^2}$$

Utilizando diferenciación (cálculo), la potencia máxima se transferirá cuando $dP/dR_L = 0$. El resultado de la operación anterior es tal que:

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \qquad \text{[Ecuación (18.21)]}$$

La magnitud de la impedancia total del circuito es:

$$Z_T = \sqrt{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}$$

Sustituir esta ecuación para R_L y aplicar algunas maniobras algebraicas resultará en:

$$Z_T = 2R_L(R_L + R_{Th})$$

*Con sincero agradecimiento por los comentarios del profesor Harry J. Franz del Beaver Campus of Pennsylvania State University.

y la potencia a la carga R_L será:

$$P = I^2 R_L = \frac{E_{Th}^2}{Z_T^2} R_L = \frac{E_{Th}^2 R_L}{2R_L(R_L + R_{Th})}$$

$$= \frac{E_{Th}^2}{4\left(\frac{R_L + R_{Th}}{2}\right)}$$

$$= \frac{E_{Th}^2}{4R_{promedio}}$$

con $$R_{promedio} = \frac{R_L + R_{Th}}{2}$$

Apéndice H

RESPUESTAS A PROBLEMAS DE NUMERACIÓN IMPARES SELECCIONADOS

Capítulo 1

5. 3 h
7. CGS
9. MKS = CGS = 20°C
K = SI = 293.15
11. 45.72 cm
13. **(a)** 15×10^{3} **(b)** 30×10^{-3}
(c) 7.4×10^{6} **(d)** 6.8×10^{-6}
(e) 402×10^{-6} **(f)** 200×10^{-12}
15. **(a)** 10^{4} **(b)** 10
(c) 10^{9} **(d)** 10^{-2}
(e) 10 **(f)** 10^{31}
17. **(a)** 10^{-1} **(b)** 10^{-4}
(c) 10^{9} **(d)** 10^{-9}
(e) 10^{42} **(f)** 10^{3}
19. **(a)** 10^{6} **(b)** 10^{-2}
(c) 10^{32} **(d)** 10^{-63}
21. **(a)** 10^{-6} **(b)** 10^{-3}
(c) 10^{-8} **(d)** 10^{9}
(e) 10^{-16} **(f)** 10^{-1}
23. **(a)** 0.006 **(b)** 400
(c) 5000, 5, 0.005
(d) 0.0003, 0.3, 300
25. **(a)** 90 s **(b)** 144 s
(c) 50×10^{3} μs
(d) 160 mm **(e)** 120 ns
(f) 41.898 días **(g)** 1.02 m
27. **(a)** 2.54 m **(b)** 1.219 m
(c) 26.7 N **(d)** 0.1348 libras
(e) 4921.26 pies
(f) 3.2187 m **(g)** 8530.17 yardas
29. 670.62×10^{6} mph
31. 2.045 s
33. 67.06 días
35. $900
37. 345.6 m
39. 47.29 min/milla
41. **(a)** 4.74×10^{-3} Btu
(b) 7.098×10^{-4} m^3
(c) 1.2096×10^{5} s
(d) 2113.38 pintas
43. 5.000
45. 2.949

Capítulo 2

3. **(a)** 18 mN **(b)** 2 mN
(c) 180 μN
7. **(a)** 72 mN
(b) $Q_1 = 20$ μC, $Q_2 = 40$ μC
9. 3.1 A
11. 90 C
13. 0.5 A
15. 1.194 A > 1 A (sí)
17. **(a)** 1.248 millones
(b) 0.936 millones, sol. = (a)
19. 252 J
21. 4 C
23. 3.533 V
25. 5 A
27. 25 h
29. 0.773 h
31. 60 Ah : 40 Ah = 1.5 : 1, 50% más con 60 Ah
33. 545.45 mA, 129.6 kJ
43. 600 C

Capítulo 3

1. **(a)** 500 mils **(b)** 10 mils
(c) 4 mils **(d)** 1000 mils
(e) 240 mils **(f)** 3.937 mils
3. **(a)** 0.04 pulg **(b)** 0.03 pulg
(c) 0.2 pulg **(d)** 0.025 pulg
(e) 0.00278 pulg **(f)** 0.009 pulg
5. 73.33 Ω
7. 3.581 pies
9. **(a)** $R_{plata} > R_{cobre} > R_{aluminio}$
(b) plata 9.9 Ω,
cobre 1.037 Ω,
aluminio 0.34 Ω
11. **(a)** 21.71 $\mu\Omega$ **(b)** 35.59 $\mu\Omega$
(c) se incrementa **(d)** disminuye
13. 942.28 mΩ
15. **(a)** #8: 1.1308 Ω. #18: 11.493 Ω
(b) #18: #8 = 10.164 1:1 ≅ 10:1.
#18: #8 = 1:10.164 ≅ 1:10
17. **(a)** 1.087 mA/CM
(b) 1.384 kA/$pulg^2$
(c) 3.6127 $pulg^2$
19. **(a)** 21.71 $\mu\Omega$ **(b)** 35.59 $\mu\Omega$
21. 0.15 pulg
23. 2.409 Ω
25. 3.67 Ω
27. 0.046 Ω
29. **(a)** 40.29°C **(b)** −195.61°C
31. **(a)** $\alpha_{20} \cong 0.00393$
(b) 83.61°C
33. 1.751 Ω
35. 142.86
41. −30°C: 10.2 kΩ
100°C: 10.15 kΩ
43. 6.5 kΩ
47. **(a)** Rojo Rojo Café Plata
(b) Amarillo Violeta Rojo Plata
(c) Azul Gris Naranja Plata
(d) Blanco Café Verde Plata
49. Sí
51. **(a)** 0.1566 S **(b)** 0.0955 S
(c) 0.0219 S
57. **(a)** 10 pc: 3 kΩ 100 pc: 0.4 kΩ
(b) negativo **(c)** escalas no logarítmicas
(d) −321.43 Ω/pc

Capítulo 4

1. 15 V
3. 4 kΩ
5. 72 mV
7. 54.55 Ω
9. 28.571 Ω
11. 1.2 kΩ
13. **(a)** 12.632 Ω **(b)** 4.1 MJ
17. 800 V
19. 1 W
21. **(a)** 57,600 J
(b) 16×10^{-3} kWh
23. 2 s
25. 196 μW
27. 4 A
29. 9.61 V
31. 0.833 A, 144.06 Ω
33. **(a)** 0.133 mA **(b)** 66.5 mAh
35. **(c)** ≅ 70.7 mA
37. **(a)** 12 kW
(b) 10,130 W < 12,000 W (sí)
39. 16.34 A
41. **(a)** 238 W **(b)** 17.36%
43. **(a)** 1657.78 W
(b) 15.07 A
(c) 19.38 A
45. 65.25%
47. 80%
49. **(a)** 17.9%
(b) 76.73%, incremento del 328.66%
51. **(a)** 1350 J
(b) *W* se duplica, *P* es el mismo
53. 6.67 h
55. **(a)** 50 kW **(b)** 240.38 A
(c) 90 kWh
57. $2.19

Capítulo 5

1. **(a)** 20 Ω, 3 A
(b) 1.63 MΩ , 6.135 μA
(c) 110 Ω, 318.2 mA
(d) 10 kΩ, 12 mA

3. **(a)** 16 V **(b)** 4.2 V
5. **(a)** 0.388 A (CW)
(b) 2.087 A (CCW)
7. **(a)** 5 V **(b)** 70 V
9. 3.28 mA, 7.22 V
11. **(a)** 70.6 Ω, 85 mA (CCW),
$V_1 = 2.8045$ V,
$V_2 = 0.4760$ V,
$V_3 = 0.850$ V,
$V_4 = 1.870$ V
(b)-(c) $P_1 = 0.2384$ W,
$P_2 = 0.0405$ W,
$P_3 = 0.0723$ W,
$P_4 = 0.1590$ W
(d) Todos $\frac{1}{2}$ W
13. **(a)** 225 Ω, 0.533 A
(b) 8 W
(c) 15 V
15. Todos $\underset{+-}{V_{ab}}$
(a) 66.67 V **(b)** −8 V
(c) 20 V **(d)** 0.18 V
17. **(a)** 12 V **(b)** 24 V
(c) 60 Ω **(d)** 0.4 A
(e) 60 Ω
19. **(a)** $R_s = 80$ Ω
(b) 0.2 W < $\frac{1}{4}$ W
21. $R_1 = 3$ kΩ, $R_2 = 15$ kΩ
23. **(a)** $R_1 = 0.4$ kΩ, $R_2 = 1.2$ kΩ,
$R_3 = 4.8$ kΩ
(b) $R_1 = 0.4$ MΩ,
$R_2 = 1.2$ MΩ,
$R_3 = 4.8$ MΩ
25. **(a)** I (CW) = 6.667 A,
$V = 20$ V
(b) I (CW) = 1 A,
$V = 10$ V
27. **(a)** 20 V, 26 V, 35 V,
−12 V, 0 V
(b) −6 V, −47 V, 9 V
(c) −15 V, −38 V
29. $V_0 = 0$ V, $V_4 = 10$ V,
$V_7 = 4$ V, $V_{10} = 20$ V,
$V_{23} = 6$ V, $V_{30} = -8$ V,
$V_{67} = 0$ V, $V_{56} = -6$ V,
I(arriba) = 1.5 A
31. 2 Ω
33. 100 Ω
35. 1.52%

Capítulo 6

1. **(a)** 2, 3, 4 **(b)** 2, 3 **(c)** 1, 4
3. **(a)** 6 Ω, 0.1667 S
(b) 1 kΩ, 1 mS
(c) 2.076 kΩ, 0.4817 mS
(d) 1.333 Ω, 0.75 S
(e) 9.948 Ω, 100.525 mS
(f) 0.6889 Ω, 1.4516 S
5. **(a)** 18 Ω **(b)** $R_1 = R_2 = 24$ Ω
7. 120 Ω
9. **(a)** 0.8571 Ω, 1.1667 S
(b) $I_s = 1.05$ A, $I_1 = 0.3$ A,
$I_2 = 0.15$ A, $I_3 = 0.6$ A
(d) $P_1 = 0.27$ W,
$P_2 = 0.135$ W,
$P_3 = 0.54$ W,
$P_{entregada} = 0.945$ W
(e) R_1, $R_2 = \frac{1}{2}$ W, $R_3 = 1$ W
11. **(a)** 66.67 mA **(b)** 225 Ω
(c) 8 W
13. **(a)** $I_s = 7.5$ A, $I_1 = 1.5$ A
(b) $I_s = 9.6$ mA, $I_1 = 0.8$ mA
15. 1260 W
17. **(a)** 4 mA **(b)** 24 V
(c) 18.4 mA
19. **(a)** $I_1 = 3$ mA, $I_2 = 1$ mA,
$I_3 = 1.5$ mA
(b) $I_2 = 4$ μA, $I_3 = 1.5$ μA,
$I_4 = 5.5$ μA, $I_1 = 6$ μA
21. **(a)** $R_1 = 5$ Ω, $R_2 = 10$ Ω
(b) $E = 12$ V, $I_2 = 1.333$ A,
$I_3 = 1$ A, $R_3 = 12$ Ω,
$I = 4.333$ A
(c) $I_1 = 64$ mA, $I_3 = 16$ mA,
$I_2 = 20$ mA, $R = 3.2$ kΩ,
$I = 36$ mA
(d) $E = 30$ V, $I_1 = 1$ A,
$I_2 = I_3 = 0.5$ A,
$R_2 = R_3 = 60$ Ω,
$P_{R_2} = 15$ W
23. **(a)** $I_1 = 4$ A, $I_2 = 8$ A
(b) $I_1 = 2$ A, $I_2 = 4$ A,
$I_3 = 1$ A, $I_4 = 1.333$ A
(c) $I_1 = 272.73$ mA,
$I_2 = 227.27$ mA,
$I_3 = 90.91$ mA,
$I_4 = 500$ mA
(d) $I_2 = 4.5$ A, $I_3 = 8.5$ A,
$I_4 = 8.5$ A
25. **(a)** $I = 4$ A, $I_2 = 4$ A,
$I_1 = 3$ A
27. $R_1 = 6$ kΩ, $R_2 = 1.5$ kΩ,
$R_3 = 0.5$ kΩ
29. $I = 3$ A, $R = 2$ Ω
31. **(a)** 6.13 V
(b) 9 V
(c) 9 V
33. **(a)** 4 V **(b)** 3.997 V
(c) 3.871 V **(d)** 3 V
(e) R_m lo más grande posible
35. ¡No! Fuente de 4 V invertida

Capítulo 7

1. **(a)** serie: E, R_1 y R_4,
paralelo: R_2 y R_3
(b) serie: E y R_1,
paralelo: R_2 y R_3
(c) serie: E, R_1 y R_5;
R_3 y R_4
paralelo: ninguna
(d) serie: R_6 y R_7,
paralelo: E, R_1 y R_4;
R_2 y R_5
3. **(a)** sí (KCL) **(b)** 3 A
(c) sí (KCL) **(d)** 4 V
(e) 2 Ω **(f)** 5 A
(g) $P_1 = 12$ W, $P_2 = 18$ W,
$P_{entregada} = 50$ W
5. **(a)** 4 Ω
(b) $I_s = 9$ A, $I_1 = 6$ A, $I_2 = 3$ A
(c) 6 V
7. $I_1 = 6$ A, $I_2 = 16$ A, $I_3 = 0.8$ A,
$I = 22$ A
9. **(a)** 4 A
(b) $I_2 = 1.333$ A, $I_3 = 0.6665$ A
(c) $V_a = 8$ V, $V_b = 4$ V
11. **(a)** 5 Ω, 16 A
(b) $I_{R_2} = 8$ A, $I_3 = I_9 = 4$ A
(c) $I_8 = 1$ A **(d)** 14 V
13. **(a)** $V_G = 1.9$ V, $V_s = 3.65$ V
(b) $I_1 = I_2 = 7.05$ μA,
$I_D = 2.433$ mA
(c) 6.268 V
(d) 8.02 V
15. **(a)** 0.6 A
(b) 28 V
17. **(a)** $I_2 = 1.667$ A, $I_6 = 1.111$ A,
$I_8 = 0$ A
19. **(a)** 1.882 Ω
(b) $V_1 = V_4 = 32$ V
(c) 8 A ←
(d) 1.882 Ω
21. **(a)** 6.75 A
(b) 32 V
23. 8.333 Ω
25. **(a)** 24 A
(b) 8 A
(c) $V_3 = 48$ V, $V_5 = 24$ V,
$V_7 = 16$ V
(d) $P(R_7) = 128$ W,
$P(E) = 5760$ W
27. 4.44 W
29. **(a)** 64 V
(b) $R_{L_2} = 4$ kΩ,
$R_{L_3} = 3$ kΩ
(c) $R_1 = 0.5$ kΩ,
$R_2 = 1.2$ kΩ,
$R_3 = 2$ kΩ
31. **(a)** sí **(b)** $R_1 = 750$ Ω,
$R_2 = 250$ Ω
(c) $R_1 = 745$ Ω, $R_2 = 255$ Ω
33. **(a)** 1 mA **(b)** $R_{desvío} = 5$ mΩ
35. **(a)** $R_s = 300$ kΩ
(b) 20,000
37. 0.05 μA

Capítulo 8

1. 28 V
3. **(a)** $I_1 = 12$ A, $I_s = 11$ A
   (b) $V_s = 24$ V, $V_3 = 6$ V
5. **(a)** 3 A, 6 Ω **(b)** 4.091 mA, 2.2 kΩ
7. **(a)** 8 A **(b)** 8 A
9. 9.6 V, 2.4 A
11. **(a)** 5.4545 mA, 2.2 kΩ
    (b) 17.375 V **(c)** 5.375 V
    (d) 2.443 mA
13. **(I)** CW: $I_{R_1} = 1.445$ mA,
    abajo: $I_{R_3} = 9.958$ mA,
    CCW: $I_{R_2} = 8.513$ mA
    (II) CW: $I_{R_1} = 2.0316$ mA,
    izquierda: $I_{R_2} = 0.8$ mA,
    CW: $I_{R_3} = I_{R_4} = 1.2316$ mA
15. **(d)** izquierda: 63.694 mA
17. **(a)** CW: $I_{R_1} = -\frac{1}{7}$ A,
    CW: $I_{R_2} = -\frac{5}{7}$ A,
    $I_{R_3} = \frac{4}{7}$ A (abajo)
    (b) CW: $I_{R_1} = -3.0625$ A,
    CW: $I_{R_3} = 0.1875$ A,
    $I_{R_2} = 3.25$ A (arriba)
19. **(I)** CW: $I_1 = 1.8701$ A,
    CW: $I_2 = -8.5484$ A,
    $V_{ab} = -22.74$ V
    (II) CW: $I_2 = 1.274$ A,
    CW: $I_3 = 0.26$ A,
    $V_{ab} = -0.904$ V
21. **(a)** 72.16 mA, −4.433 V
    (b) 1.953 A, −7.257 V
23. **(a)** Todos CW
    $I_1 = 0.0321$ mA,
    $I_2 = -0.8838$ mA,
    $I_3 = -0.968$ mA,
    $I_4 = -0.639$ mA
    (b) Todos CW
    $I_1 = -3.8$ A,
    $I_2 = -4.2$ A,
    $I_3 = 0.2$ A
25. **(a)** CW,
    $I_1 = -\frac{1}{7}$ A, $I_2 = -\frac{5}{7}$ A
    (b) CW,
    $I_1 = -3.0625$ A,
    $I_2 = 0.1875$ A
27. **(I)** **(a)** CW
    (b) $I_1 = 1.871$ A,
    $I_2 = -8.548$ A
    (c) $I_{R_1} = 1.871$ A,
    $I_{R_2} = -8.548$ A,
    $I_{R_3} = 10.419$ A
29. $I_{5\Omega}$ (CW) = 1.9535 A,
    $V_a = -7.26$ V
31. **(a)** Todos CW,
    $I_1 = 0.0321$ mA,
    $I_2 = -0.8838$ mA,
    $I_3 = -0.968$ mA,
    $I_4 = -0.639$ mA
    (b) Todos CW,
    $I_1 = 3.8$ A, $I_2 = -4.2$ A,
    $I_3 = 0.2$ A
33. **(I)** **(b)** $V_1 = -14.86$ V,
    $V_2 = -12.57$ V
    (c) $V_{R_1} = V_{R_4} = V_1 = -14.86$ V,
    $V_{R_2} = V_2 = -12.57$ V,
    $V_{R_3} = 9.71$ V (+ −)
    (II) **(b)** $V_1 = -2.556$ V,
    $V_2 = 4.03$ V
    (c) $V_{R_1} = V_1 = -2.556$ V,
    $V_{R_2} = V_{R_5} = V_2 = 4.03$ V,
    $V_{R_4} = V_{R_3} = V_2 - V_1 = 6.586$ V
35. **(I)** $V_1 = 7.238$ V,
    $V_2 = -2.453$ V,
    $V_3 = 1.405$ V
    (II) $V_1 = -6.64$ V,
    $V_2 = 1.288$ V,
    $V_3 = 10.676$ V
37. **(a)** $V_1 = 10.083$ V,
    $V_2 = 6.944$ V,
    $V_3 = -17.056$ V
    (b) $V_1 = 48$ V, $V_2 = 64$ V
39. **(b)** **(I)** $V_1 = -14.86$ V,
    $V_2 = -12.57$ V
    (II) $V_1 = -2.556$ V,
    $V_2 = 4.03$ V
    (c) **(I)** $V_{R_1} = V_{R_4} = -14.86$ V,
    $V_{R_2} = -12.57$ V,
    $V_{R_3} = V_1 + 12 - V_2 = 9.71$ V
    (II) $V_{R_1} = -2.556$ V,
    $V_{R_2} = V_{R_5} = 4.03$ V,
    $V_{R_3} = V_{R_4} = V_2 - V_1 = 6.586$ V
41. **(I)** $V_1 = -5.311$ V,
    $V_2 = -0.6219$ V,
    $V_3 = 3.751$ V,
    $V_{-5A} = -5.311$ V
    (II) $V_1 = -6.917$ V,
    $V_2 = 12$ V,
    $V_3 = 2.3$ V,
    $V_{5A} = V_2 - V_1 = 18.917$ V,
    $V_{2A} = V_3 - V_2 = -9.7$ V
43. **(b)** $V_{R_5} = 0.1967$ V
    (c) no
    (d) no
45. **(b)** $I_{R_s} = 0$ A
    (c) no
    (d) no
47. **(a)** 3.33 mA
    (b) 1.177 A
49. **(a)** 133.33 mA
    (b) 7 A
51. **(b)** 0.833 mA
53. 4.2 Ω

Capítulo 9

1. **(a)** CW: $I_{R_1} = \frac{5}{6}$ A, $I_{R_2} = 0$ A,
   CW: $I_{R_3} = \frac{5}{6}$ A
   (b) E_1: 5.33 W, E_2: 0.333 W
   (c) 8.333 W **(d)** no
3. **(a)** abajo: 4.4545 mA
   (b) abajo: 3.11 A
5. **(a)** 6 Ω, 6 V
   (b) 2 Ω: 0.75 A,
   30 Ω: 0.1667 A,
   100 Ω: 0.0566 A
7. **(I)** 2 Ω, 84 V **(II)** 1.579 kΩ, −1.149 V
9. **(I)** 45 Ω, −5 V **(II)** 2.055 kΩ, 16.772 V
11. 4.041 kΩ, 9.733 V
13. **(I):** 14 Ω, 2.571 A,
    (II): 7.5 Ω, 1.333 A
15. **(a)** 9.756 Ω, 0.95 A
    (b) 2 Ω, 30 A
17. **(a)** 10 Ω, 0.2 A
    (b) 4.033 kΩ, 2.9758 mA
19. **(I)** **(a)** 14 Ω
    (b) 23.14 W
    (II) **(a)** 7.5 Ω
    (b) 3.33 W
21. **(a)** 9.756 Ω, 2.2 W
    (b) 2 Ω, 450 W
23. 0 Ω
25. 500 Ω
27. 39.3 μA, 220 mV
29. 2.25 A, 6.075 V
35. **(a)** 0.357 mA **(b)** 0.357 mA
    (c) sí

Capítulo 10

1. 9×10^3 N/C
3. 70 μF
5. 50 V/m
7. 8×10^3 V/m
9. 937.5 pF
11. mica
13. **(a)** 10^6 V/m **(b)** 4.96 μC
    (c) 0.0248 μF
15. 29,035 V
17. **(a)** 0.5 s **(b)** $20(1 - e^{-t/0.5})$
    (c) 1τ: 12.64 V, 3τ: 19 V,
    5τ: 19.87 V
    (d) $i_C = 0.2 \times 10^{-3} e^{-t/0.5}$
    $v_R = 20e^{-t/0.5}$
19. **(a)** 5.5 ms
    (b) $100(1 - e^{-t/(5.5\times10^{-3})})$
    (c) 1τ: 63.21 V, 3τ: 95.02 V,
    5τ: 99.33 V
    (d)
    $i_C = 18.18 \times 10^{-3} e^{-t/(5.5\times10^{-3})}$
    $v_R = 60e^{-t/(5.5\times10^{-3})}$
21. **(a)** 10 ms

(b) $50(1 - e^{-t/(10\times10^{-3})})$
(c) $10 \times 10^{-3}e^{-t/(10\times10^{-3})}$
(d) $v_C \cong 50$ V, $i_C = 0$ A
(e) $v_C = 50e^{-t/(4\times10^{-3})}$,
$i_C = -25 \times 10^{-3}e^{-t/(4\times10^{-3})}$

23. **(a)** $80(1 - e^{-t/(1\times10^{-6})})$
(b) $0.8 \times 10^{-3}e^{-t/(1\times10^{-6})}$
(c) $v_C = 80e^{-t/(4.9\times10^{-6})}$,
$i_C = 0.163 \times 10^{-3}e^{-t/(4.9\times10^{-6})}$

25. **(a)** 10 μs **(b)** 3 kA **(c)** sí

27. **(a)** $v_C = 52$ V $- 40$ V $e^{-t/123.8\text{ms}}$,
$i_C = 2.198$ mA $e^{-t/123.8\text{ms}}$

29. 1.386 μs

31. $R = 54.567$ kΩ

33. **(a)** $v_C = 60(1 - e^{-t/0.2\text{s}})$,
0.5 s: 55.07 V, 1 s: 59.596 V,
$i_C = 60 \times 10^{-3}\ e^{-t/0.2\text{s}}$,
0.5 s: 4.93 mA,
1 s: 0.404 mA,
$v_{R_1} = 60\ e^{-t/0.2\text{s}}$,
0.5 s: 4.93 V, 1 s: 0.404 V
(b) $t = 0.405$ s, 1.387 s largo

35. **(a)** 19.634 V
(b) 2.31 s
(c) 1.155 s

37. **(a)** $v_C = 3.275(1 - e^{-t/52.68\text{ms}})$,
$i_C = 1.216 \times 10^{-3}\ e^{-t/52.68\text{ms}}$

39. **(a)** $v_C = 27.2 - 25.2\ e^{-t/18.26\text{ms}}$,
$i_C = 3.04$ mA $e^{-t/18.26\text{ms}}$

41. 0–4 ms: 0.3 mA,
4–6 ms: 0.9 mA,
6–7 ms: 3 mA,
7–10 ms: 0 mA,
10–13 ms: −3.2 mA,
13–15 ms: 1.8 mA

43. 0–4 ms: 0 V,
4–6 ms: −8 V,
6–16 ms: 20 V,
16–18 ms: 0 V,
18–20 ms: −12 V,
20–25 ms: 0 V

45. $V_1 = 10$ V, $Q_1 = 60\ \mu$C,
$V_2 = 6.67$ V, $Q_2 = 40\ \mu$C,
$V_3 = 3.33$ V, $Q_3 = 40\ \mu$C

47. **(a)** 56.54 V
(b) 42.405 V
(c) 14.135 V
(d) 43.46 V
(e) 433.44 ms

49. 8640 pJ

51. **(a)** 5 J
(b) 0.1 C
(c) 200 A
(d) 10 kW
(e) 10 s

Capítulo 11

1. Φ: 5×10^4 maxwells,
5×10^4 líneas. B: 8 gauss,
51.616 líneas

3. **(a)** 0.04 T

5. 952.4×10^3 At/Wb

7. 2624.67 At/m

9. 2.133 A

11. **(a)** $N_1 = 60$ t
(b) 13.34×10^{-4} Wb/Am

13. 2.687 A

15. 1.35 N

17. **(a)** 2.028 A **(b)** ≅2 N

19. 6.1×10^{-3} Wb

21. **(a)** $B = 1.5(1 - e^{-H/700\text{At/m}})$
(c) $H = -700 \log_e(1 - B/1.5\text{ T})$
(e) Ecuación: 40.1 mA

Capítulo 12

1. 4.25 V

3. 14 vueltas

5. 15.65 μH

7. **(a)** 2.5 V **(b)** 0.3 V
(c) 200 V

9. 0−3 ms: 0 V. 3−8 ms: 1.6 V,
8−13 ms: −1.6 V,
13−14 ms: 0 V,
14−15 ms: 8 V,
15−16 ms: –8 V,
16−17 ms: 0 V

11. 0−5 μs: 4 mA. 10 μs: −8 mA,
12 μs: 4 mA. 12−16 μs: 4 mA,
24 μs: 0 mA

13. **(a)** 2.27 μs
(b) $5.45 \times 10^{-3}(1 - e^{-t/2.27\mu\text{s}})$
(c) $v_L = 12e^{-t/2.27\mu\text{s}}$,
$v_R = 12(1 - e^{-t/2.27\mu\text{s}})$
(d) i_L: $1\tau = 3.45$ mA,
$3\tau = 5.179$ mA,
$5\tau = 5.413$ mA,
v_L: $1\tau = 4.415$ V,
$3\tau = 0.598$ V,
$5\tau = 0.081$ V

15. **(a)** $i_L = 4.186$ mA −
3.814 mA $e^{-t/13.95\mu\text{s}}$),
$v_L = -32.8$ V $e^{-t/13.95\mu\text{s}}$

17. **(a)** $v_L = 20$ V $e^{-t/1\mu\text{s}}$,
$i_L = 2$ mA$(1 - e^{-t/1\mu\text{s}})$
(b) $i_L = 2$ mA $e^{-t/0.5\mu\text{s}}$,
$v_L = -40$ V $e^{-t/0.5\mu\text{s}}$

19. **(a)** $i_L = 6$ mA$(1 - e^{-t/0.5\mu\text{s}})$,
$v_L = 12$ V $e^{-t/0.5\mu\text{s}}$
(b) $i_L = 5.188$ mA $e^{-t/83.3ns}$,
$v_L = -62.256$ V $e^{-t/83.3ns}$

21. 25.68 μs

23. **(a)** $i_L = 3.638 \times$
$10^{-3}\ (1 - e^{-t/6.676\mu\text{s}})$,
$v_L = 5.45\ e^{-t/6.676\mu\text{s}}$
(b) 2.825 mA, 1.2186 V
(c) $i_L = 2.825 \times$
$10^{-3}e^{-t/2.128\mu\text{s}}$,
$v_L = -13.27\ e^{-t/2.128\mu\text{s}}$

25. **(a)** 0.243 V
(b) 29.47 V
(c) 18.96 V
(d) 2.025 ms

27. **(a)** 20 V
(b) 12 μA
(c) 5.376 μs
(d) 0.366 V

29. $i_L = -3.478$ mA −
7.432 mA $e^{-t/173.9\mu\text{s}}$
$v_L = 51.28$ V $e^{-t/173.9\mu\text{s}}$

31. **(a)** 8 H
(b) 4 H

33. L: 4 H, 2 H
R: 5.7 kΩ, 9.1 kΩ

35. $V_1 = 16$ V, $V_2 = 0$ V,
$I_1 = 4$ mA

37. $V_1 = 10$ V,
$I_1 = 2$ A,
$I_2 = 1.33$ A

39. $W_C = 360\ \mu$J,
$W_L = 12$ J

Capítulo 13

1. **(a)** 10 ms **(b)** 2 **(c)** 100 Hz
(d) amplitud = 5 V,
$V_{p\text{-}p} = 6.67$ V

3. 10 ms, 100 Hz

5. **(a)** 60 Hz **(b)** 100 Hz
(c) 29.41 Hz **(d)** 40 kHz

7. 0.25 s

9. $T = 50\ \mu$s

11. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** $\frac{2}{3}\pi$
(d) $\frac{3}{2}\pi$ **(e)** 0.989π **(f)** 1.228π

13. **(a)** 3.14 rad/s
(b) 20.94×10^3 rad/s
(c) 1.57×10^6 rad/s
(d) 157.1 rad/s

15. **(a)** 120 Hz, 8.33 ms
(b) 1.34 Hz, 746.27 ms
(c) 954.93 Hz, 1.05 ms
(d) 9.95×10^{-3} Hz, 100.5 s

17. 104.7 rad/s

23. 0.4755 A

25. 11.537°, 168.463°

29. **(a)** v adelanta a i por 10°
(b) i adelanta a v por 70°
(c) i adelanta a v por 80°
(d) i adelanta a v por 150°

31. **(a)** $v = 25\ \text{sen}(\omega t + 30°)$
(b)
$i = 3 \times 10^{-3}\ \text{sen}(6.28 \times 10^3 t - 60°)$

33. $\frac{1}{3}$ ms

35. 0.388 ms

37. **(a)** 0.4 ms

(b) 2.5 kHz
(c) −25 mV
39. (a) 1.875 V (b) −4.778 mA
41. (a) 40 μs
(b) 25 kHz
(c) 17.13 mV
43. (a) 2 sen 377t
(b) 100 sen 377t
(c) 84.87×10^{-3} sen 377t
(d) 33.95×10^{-6} sen 377t
45. 2.16 V
47. 0 V
49. (a) $T = 40\ \mu$s, $f = 25$ kHz, $V_{\text{promedio}} = 20$ mV, $V_{\text{rms}} = 34.6$ mV
(b) $T = 100\ \mu$s, $f = 10$ kHz, $V_{\text{promedio}} = -0.3$ V, $V_{\text{rms}} = 367$ mV

Capítulo 14

3. (a) 3770 cos 377t
(b) 452.4 cos(754t + 20°)
(c) 4440.63 cos(157t − 20°)
(d) 200 cos t
5. (a) 210 sen 754t
(b) 14.8 sen(400t − 120°)
(c) 42×10^{-3} sen(ωt + 88°)
(d) 28 sen(ωt + 180°)
7. (a) 1.592 H (b) 2.654 H
(c) 0.8414 H
9. (a) 100 sen(ωt + 90°)
(b) 8 sen(ωt + 150°)
(c) 120 sen(ωt − 120°)
(d) 60 sen(ωt + 190°)
11. (a) 1 sen(ωt − 90°)
(b) 0.6 sen(ωt − 70°)
(c) 0.8 sen(ωt + 10°)
(d) 1.6 sen(377t + 130°)
13. (a) ∞ Ω (b) 530.79 Ω
(c) 265.39 Ω (d) 17.693 Ω
(e) 1.327 Ω
15. (a) 9.31 Hz (b) 4.66 Hz
(c) 18.62 Hz (d) 1.59 Hz
17. (a) 6×10^{-3} sen(200t + 90°)
(b) 33.96×10^{-3} sen(377t + 90°)
(c) 44.94×10^{-3} sen(374t + 300°)
(d) 56×10^{-3} sen(ωt + 160°)
19. (a) 1334 sen(300t − 90°)
(b) 37.17 sen(377t − 90°)
(c) 127.2 sen 754t
(d) 100 sen(1600t − 170°)
21. (a) C (b) $L = 254.78$ mH
(c) $R = 5\ \Omega$
25. 318.47 mH
27. 5.067 nF
29. (a) 0 W (b) 0 W
(c) 122.5 W
31. 192 W
33. 40 sen(ωt − 50°)
35. (a) 2 sen(157t − 60°)
(b) 318.47 mH (c) 0 W
37. (a) $i_1 = 2.828$ sen($10^4 t$ + 150°), $i_2 = 11.312$ sen($10^4 t$ + 150°)
(b) $i_s = 14.14$ sen($10^4 t$ + 150°)
39. (a) 5 ∠36.87°
(b) 2.83 ∠45°
(c) 16.38 ∠77.66°
(d) 806.23 ∠82.87°
(e) 1077.03 ∠21.80°
(f) 0.00658 ∠81.25°
(g) 11.78 ∠−49.82°
(h) 8.94 ∠153.43°
(i) 61.85 ∠−104.04°
(j) 101.53 ∠−39.81°
(k) 4326.66 ∠123.69°
(l) 25.495×10^{-3} ∠−78.69°
41. (a) 15.033 ∠86.19°
(b) 60.208 ∠4.76°
(c) 0.30 ∠88.09°
(d) 2002.5 ∠−87.14°
(e) 86.182 ∠93.73°
(f) 38.694 ∠−94°
43. (a) 11.8 + j 7
(b) 151.9 + j 49.9
(c) 4.72×10^{-6} + j 71
(d) 5.2 + j 1.6
(e) 209.3 + j 311
(f) −21.2 + j 12
(g) 7.03 + j 9.93
(h) 95.698 + j 22.768
45. (a) 6 ∠−50°
(b) 0.2×10^{-3} ∠140°
(c) 109 ∠−230°
(d) 76.471 ∠−80°
(e) 4 ∠0°
(f) 0.71 ∠−16.49°
(g) 4.21×10^{-3} ∠161.1°
(h) 18.191 ∠−50.91°
47. (a) $x = 4$, $y = 3$
(b) $x = 4$
(c) $x = 3$, $y = 6$ o $x = 6$, $y = 3$
(d) 30°
49. (a) 56.569 sen(377t + 20°)
(b) 169.68 sen 377t
(c) 11.314×10^{-3} sen(377t + 120°)
(d) 7.07 sen(377t + 90°)
(e) 1696.8 sen(377t − 120°)
(f) 6000 sen(377t − 180°)
51. $i_1 = 2.537 \times 10^{-5}$ sen(ωt + 96.79°)
53. $i_T = 18 \times 10^{-3}$ sen 377t

Capítulo 15

1. (a) 6.8 Ω ∠0°
(b) 754 Ω ∠90°
(c) 15.7 Ω ∠90°
(d) 265.25 Ω ∠−90°
(e) 318.47 Ω ∠−90°
(f) 200 Ω ∠0°
3. (a) 88×10^{-3} sen ωt
(b) 9.045 sen(377t + 150°)
(c) 2547.02 sen(157t − 50°)
5. (a) 4.24 Ω ∠−45°
(b) 3.04 kΩ ∠80.54°
(c) 1617.56 Ω ∠88.33°
7. (a) 10 Ω ∠36.87°
(c) $\mathbf{I}$ = 10 A ∠−36.87°, $\mathbf{V}_R$ = 80 V ∠−36.87°, $\mathbf{V}_L$ = 60 V ∠53.13°
(f) 800 W (g) 0.8 atrasado
9. (a) 1660.27 Ω ∠−73.56°
(b) 8.517 mA ∠73.56°
(c) $\mathbf{V}_R$ = 4.003 V ∠73.56°, $\mathbf{V}_L$ = 13.562 V ∠−16.44°
(d) 34.09 mW, 0.283 adelantado
11. (a) 3.16 kΩ ∠18.43°
(c) 3.18 μF, 6.37 H
(d) $\mathbf{I}$ = 1.3424 mA ∠41.57°, $\mathbf{V}_R$ = 4.027 V ∠41.57°, $\mathbf{V}_L$ = 2.6848 V ∠131.57°, $\mathbf{V}_C$ = 1.3424 V ∠−48.43°
(g) 5.406 mW
(h) 0.9487 atrasado
13. (a) 40 mH (b) 220 Ω
15. (a) $\mathbf{V}_1$ = 37.97 V ∠−51.57°, $\mathbf{V}_2$ = 113.92 V ∠38.43°
(b) $\mathbf{V}_1$ = 55.80 V ∠26.55°, $\mathbf{V}_2$ = 12.56 V ∠−63.45°
17. (a) $\mathbf{I}$ = 39 mA ∠126.65°, $\mathbf{V}_R$ = 1.17 V ∠126.65°, $\mathbf{V}_C$ = 25.86 V ∠36.65°
(b) 0.058 adelantado
(c) 45.63 mW
(g) $\mathbf{Z}_T$ = 30 Ω − j 512.2 Ω
19. $\mathbf{Z}_T$ = 3.2 Ω + j 2.4 Ω
25. (a) $\mathbf{Z}_T$ = 3 Ω + j 8 Ω, $\mathbf{Y}_T$ = 41.1 mS − j 109.5 mS
(b) $\mathbf{Z}_T$ = 60 Ω − j 70 Ω, $\mathbf{Y}_T$ = 7.1 mS + j 8.3 mS
(c) $\mathbf{Z}_T$ = 200 Ω − j 100 Ω, $\mathbf{Y}_T$ = 4 mS + j 2 mS
27. (a) $\mathbf{Y}_T$ = 538.52 mS ∠−21.8°
(c) $\mathbf{E}$ = 3.71 V ∠21.8°, $\mathbf{I}_R$ = 1.855 A ∠21.8°, $\mathbf{I}_L$ = 0.742 A ∠−68.2°
(f) 6.88 W
(g) 0.928 atrasado
(h) e = 5.25 sen(377t + 21.8°), i_R = 2.62 sen(377t + 21.8°), i_L = 1.049 sen(377t − 68.2°), i_s = 2.828 sen 377t
29. (a) $\mathbf{Y}_T$ = 129.96 mS ∠−50.31°
(c) $\mathbf{I}_s$ = 7.8 A ∠−50.31°, $\mathbf{I}_R$ = 5 A ∠0°, $\mathbf{I}_L$ = 6 A ∠−90°

(f) 300 W
(g) 0.638 atrasado
(h) $e = 84.84 \text{ sen } 377t$,
$i_R = 7.07 \text{ sen } 377t$,
$i_L = 8.484 \text{ sen}(377t - 90°)$,
$i_s = 11.03 \text{ sen}(377t - 50.31°)$

31. **(a)** $\mathbf{Y}_T = 0.416 \text{ mS } \angle 36.897°$
(c) $L = 10.61$ H, $C = 1.326\ \mu$F
(d) $\mathbf{E} = 8.498 \text{ V } \angle -56.897°$,
$\mathbf{I}_R = 2.833 \text{ mA } \angle -56.897°$,
$\mathbf{I}_L = 2.125 \text{ mA } \angle -146.897°$,
$\mathbf{I}_C = 4.249 \text{ mA } \angle 33.103°$
(g) 24.078 mW
(h) 0.8 adelantado
(i)
$e = 12.016 \text{ sen}(377t - 56.897°)$,
$i_R = 4 \text{ sen}(377t - 56.897°)$,
$i_L = 3 \text{ sen}(377t - 146.897°)$,
$i_C = 6 \text{ sen}(377t + 33.103°)$

33. **(a)** $\mathbf{I}_1 = 18.09 \text{ A } \angle 65.241°$,
$\mathbf{I}_2 = 8.528 \text{ A } \angle -24.759°$
(b) $\mathbf{I}_1 = 11.161 \text{ A } \angle 0.255°$,
$\mathbf{I}_2 = 6.656 \text{ A } \angle 153.690°$

39. **(a)** $R_p = 94.73\ \Omega$,
$X_p = 52.1\ \Omega\ (C)$
(b) $R_p = 4\ \text{k}\Omega$,
$X_p = 4\ \text{k}\Omega\ (C)$

41. **(a)** $\mathbf{E} = 176.68 \text{ V } \angle 36.44°$,
$\mathbf{I}_R = 0.803 \text{ A } \angle 36.44°$,
$\mathbf{I}_L = 2.813 \text{ A } \angle -53.56°$
(b) 0.804 atrasado
(c) 141.86 W
(f) $\mathbf{I}_C = 1.11 \text{ A } \angle 126.43°$
(g) $\mathbf{Z}_T = 142.15\ \Omega + j\ 104.96\ \Omega$

43. $R = 4\ \Omega$, $X_L = 3.774\ \Omega$

Capítulo 16

1. **(a)** $1.2\ \Omega \angle 90°$
(b) $10 \text{ A } \angle -90°$
(c) $10 \text{ A } \angle -90°$
(d) $\mathbf{I}_2 = 6 \text{ A } \angle -90°$,
$\mathbf{I}_3 = 4 \text{ A } \angle -90°$
(e) $60 \text{ V } \angle 0°$

3. **(a)** $\mathbf{Z}_T = 3.87\ \Omega \angle -11.817°$,
$\mathbf{Y}_T = 0.258 \text{ S } \angle 11.817°$
(b) $15.504 \text{ A } \angle 41.817°$
(c) $3.985 \text{ A } \angle 82.826°$
(d) $47.809 \text{ V } \angle -7.174°$
(e) 910.71 W

5. **(a)** $0.375 \text{ A } \angle 25.346°$
(b) $70.711 \text{ V } \angle -45°$
(c) 33.9 W

7. **(a)** $1.423 \text{ A } \angle 18.259°$
(b) $26.574 \text{ V } \angle 4.763°$
(c) 54.074 W

9. **(a)** $\mathbf{Y}_T = 0.099 \text{ S } \angle -9.709°$
(b) $\mathbf{V}_1 = 20.4 \text{ V } \angle 30°$,
$\mathbf{V}_2 = 10.887 \text{ V } \angle 58.124°$
(c) $1.933 \text{ A } \angle 11.109°$

11. $33.201 \text{ A } \angle 38.89°$

13. 139.71 mW

Capítulo 17

3. **(a)** $\mathbf{Z} = 21.93\ \Omega \angle -46.85°$,
$\mathbf{E} = 10.97 \text{ V } \angle 13.15°$
(b) $\mathbf{Z} = 5.15\ \Omega \angle 59.04°$,
$\mathbf{E} = 10.3 \text{ V } \angle 179.04°$

5. **(a)** $5.15 \text{ A } \angle -24.5°$
(b) $0.442 \text{ A } \angle 143.48°$

7. **(a)** $13.07 \text{ A } \angle -33.71°$
(b) $48.33 \text{ A } \angle -77.57°$

9. $-3.165 \times 10^{-3}\ \mathbf{V} \angle 137.29°$

11. $\mathbf{I}_{1\text{k}\Omega} = 10 \text{ mA } \angle 0°$
$\mathbf{I}_{2\text{k}\Omega} = 1.667 \text{ mA } \angle 0°$

13. $\mathbf{I}_L = 1.378 \text{ mA } \angle -56.31°$

15. **(a)** $\mathbf{V}_1 = 19.86 \text{ V } \angle 43.8°$,
$\mathbf{V}_2 = 8.94 \text{ V } \angle 106.9°$
(b) $\mathbf{V}_1 = 19.78 \text{ V } \angle 132.48°$,
$\mathbf{V}_2 = 13.37 \text{ V } \angle 98.78°$

17. $\mathbf{V}_1 = 220 \text{ V } \angle 0°$,
$\mathbf{V}_2 = 96.664 \text{ V } \angle -12.426°$,
$\mathbf{V}_3 = 100 \text{ V } \angle 90°$

19. (izquierda) $\mathbf{V}_1 = 14.62 \text{ V } \angle -5.86°$,
(superior) $\mathbf{V}_2 = 35.03 \text{ V } \angle -37.69°$,
(derecha) $\mathbf{V}_3 = 32.4 \text{ V } \angle -73.34°$,
(en medio) $\mathbf{V}_4 = 5.677 \text{ V } \angle 23.53°$

21. $\mathbf{V}_1 = 4.372 \text{ V } \angle -128.66°$,
$\mathbf{V}_2 = 2.253 \text{ V } \angle 17.628°$

23. $\mathbf{V}_1 = -10.667 \text{ V } \angle 0°$,
$\mathbf{V}_2 = -6 \text{ V } \angle 0°$

25. $-2451.92\mathbf{E}_i$

27. **(a)** No
(b) $1.76 \text{ mA } \angle -71.54°$
(c) $7.03 \text{ V } \angle -18.46°$

29. Balanceado

31. $R_x = R_2R_3/R_1$,
$L_x = R_2L_3/R_1$

33. **(a)** $11.57 \text{ A } \angle -67.13°$
(b) $36.9 \text{ A } \angle 23.87°$

Capítulo 18

1. **(a)** $6.095 \text{ A } \angle -32.115°$
(b) $3.77 \text{ A } \angle -93.8°$

3. $i = 0.5\text{ A} + 1.581 \text{ sen}(\omega t - 26.565°)$

5. $6.261 \text{ mA } \angle -63.43°$

7. $-22.09 \text{ V } \angle 6.34°$

9. $19.62 \text{ V } \angle 53°$

11. $\mathbf{V}_s = 10 \text{ V } \angle 0°$

13. **(a)** $\mathbf{Z}_{Th} = 21.312\ \Omega \angle 32.196°$,
$\mathbf{E}_{Th} = 2.131 \text{ V } \angle 32.196°$
(b) $\mathbf{Z}_{Th} = 6.813\ \Omega \angle -54.228°$,
$\mathbf{E}_{Th} = 57.954 \text{ V } \angle 11.099°$

15. **(a)** $\mathbf{Z}_{Th} = 4\ \Omega \angle 90°$,
$\mathbf{E}_{Th} = 4 \text{ V} + 10 \text{ V } \angle 0°$
(b) $\mathbf{I} = 0.5 \text{ A} +$
$1.11 \text{A} \angle -26.565°$

17. **(a)** $\mathbf{Z}_{Th} = 4.472\ \text{k}\Omega \angle -26.565°$,
$\mathbf{E}_{Th} = 31.31 \text{ V } \angle -26.565°$
(b) $\mathbf{I} = 6.26 \text{ mA } \angle 63.435°$

19. $\mathbf{Z}_{Th} = 4.44\ \text{k}\Omega \angle -0.031°$
$\mathbf{E}_{Th} = -444.45 \times 10^3 \mathbf{I} \angle 0.255°$

21. $\mathbf{Z}_{Th} = 5.099\ \text{k}\Omega \angle -11.31°$
$\mathbf{E}_{Th} = -50 \text{ V } \angle 0°$

23. $\mathbf{Z}_{Th} = -39.215\ \Omega \angle 0°$
$\mathbf{E}_{Th} = 20 \text{ V } \angle 53°$

25. $\mathbf{Z}_{Th} = 607.42\ \Omega \angle 0°$
$\mathbf{E}_{Th} = 1.62 \text{ V } \angle 0°$

27. **(a)** $\mathbf{Z}_N = 21.312\ \Omega \angle 32.196°$,
$\text{I}_N = 0.1 \text{ A } \angle 0°$
(b) $\mathbf{Z}_N = 6.813\ \Omega \angle -54.228°$,
$\mathbf{I}_N = 8.506 \text{ A } \angle 65.324°$

29. **(a)** $\mathbf{Z}_N = 9.66\ \Omega \angle 14.93°$,
$\mathbf{I}_N = 2.15 \text{ A } \angle -42.87°$
(b) $\mathbf{Z}_N = 4.37\ \Omega \angle 55.67°$,
$\mathbf{I}_N = 22.83 \text{ A } \angle -34.65°$

31. **(a)** $\mathbf{Z}_N = 9\ \Omega \angle 0°$,
$\mathbf{I}_N = 1.333 \text{ A} + 2.667 \text{ A } \angle 0°$
(b) $12 \text{ V} + 2.65 \text{ V } \angle -83.66°$

33. $\mathbf{Z}_N = 5.1\ \text{k}\Omega \angle -11.31°$,
$\mathbf{I}_N = -1.961 \times 10^{-3}\ \mathbf{V} \angle 11.31°$

35. $\mathbf{Z}_N = 5.1\ \text{k}\Omega \angle -11.31°$,
$\mathbf{I}_N = 9.81 \text{ mA } \angle 11.31°$

37. $\mathbf{Z}_N = 6.63\ \text{k}\Omega \angle 0°$
$\mathbf{I}_N = 0.792 \text{ mA } \angle 0°$

39. **(a)** $\mathbf{Z}_L = 8.32\ \Omega \angle 3.18°$,
1198.2 W
(b) $\mathbf{Z}_L = 1.562\ \Omega \angle -14.47°$,
1.614 W

41. $40\ \text{k}\Omega$, 25 W

43. **(a)** $9\ \Omega$ **(b)** 20 W

45. **(a)** $1.414\ \text{k}\Omega$ **(b)** 0.518 W

49. $25.77 \text{ mA } \angle 104.4°$

Capítulo 19

1. **(a)** 120 W
(b) $Q_T = 0$ VAR, $S_T = 120$ VA
(c) 0.5 A
(d) $I_1 = \frac{1}{6}$ A, $I_2 = \frac{1}{3}$ A

3. **(a)** 400 W, −400 VAR (*C*),
565.69 VA, 0.7071 adelantado
(c) $5.66 \text{ A } \angle 135°$

5. **(a)** 500 W, −200 VAR (*C*),
538.52 VA
(b) 0.928 adelantado
(d) $10.776 \text{ A } \angle 21.875°$

7. **(a)** *R*: 200 W, *L*,*C*: 0 W
(b) *R*: 0 VAR, *C*: 80 VAR,
L: 100 VAR
(c) *R*: 200 VA, *C*: 80 VA,
L: 100 VA
(d) 200 W, 20 VAR (*L*),
200.998 VA, 0.995 (atrasado)
(f) $10.05 \text{ A } \angle -5.73°$

9. **(a)** R: 38.99 W, L: 0 W, C: 0 W
(b) R: 0 VAR, L: 126.74 VAR, C: 46.92 VAR
(c) R: 38.99 VA, L: 126.74 VA, C: 46.92 VA
(d) 38.99 W, 79.82 VAR (L), 88.83 VA, 0.439 (atrasado)
(f) 0.31 J
(g) $W_L = 0.32$ J, $W_C = 0.12$ J

11. **(a)** $\mathbf{Z} = 2.30\ \Omega + j\ 1.73\ \Omega$
(b) 4000 W

13. **(a)** 900 W, 0 VAR, 900 VA, 1
(b) 9 A $\angle 0°$
(d) $\mathbf{Z}_1$: $R = 0\ \Omega$, $X_C = 20\ \Omega$, $\mathbf{Z}_2$: $R = 2.83\ \Omega$, $X = 0\ \Omega$, $\mathbf{Z}_3$: $R = 5.66\ \Omega$, $X_L = 4.717\ \Omega$

15. **(a)** 1100 W, 2366.26 VAR, 2609.44 VA, 0.4215 (adelantado)
(b) 521.89 V $\angle -65.07°$
(c) $\mathbf{Z}_1$: $R = 1743.38\ \Omega$, $X_C = 1307.53\ \Omega$, $\mathbf{Z}_2$: $R = 43.59\ \Omega$, $X_C = 99.88\ \Omega$

17. **(a)** 7.81 kVA
(b) 0.640 (atrasado)
(c) 65.08 A
(d) 1105 μF
(e) 41.67 A

19. **(a)** 128.14 W
(b) a-b: 42.69 W, b-c: 64.03 W, a-c: 106.72 W, a-d: 106.72 W, c-d: 0 W, d-e: 0 W, f-e: 21.34 W

21. **(a)** 5 Ω, 132.03 mH
(b) 10 Ω
(c) 15 Ω, 262.39 mH

Capítulo 20

1. **(a)** $\omega_s = 250$ rad/s, $f_s = 39.79$ Hz
(b) $\omega_s = 3535.53$ rad/s, $f_s = 562.7$ Hz
(c) $\omega_s = 21{,}880$ rad/s, $f_s = 3482.31$ Hz

3. **(a)** $X_L = 40\ \Omega$
(b) $I = 10$ mA
(c) $V_R = 20$ mV, $V_L = 400$ mV, $V_C = 400$ mV
(d) $Q_s = 20$ (alto)
(e) $L = 1.27$ mH, $C = 0.796\ \mu$F
(f) $BW = 250$ Hz
(g) $f_2 = 5.125$ kHz, $f_1 = 4.875$ kHz

5. **(a)** $BW = 400$ Hz
(b) $f_2 = 6200$ Hz, $f_1 = 5800$ Hz
(c) $X_L = X_C = 45\ \Omega$
(d) $P_{\text{HPF}} = 375$ mW

7. **(a)** $Q_s = 10$
(b) $X_L = 20\ \Omega$
(c) $L = 1.59$ mH, $C = 3.98\ \mu$F
(d) $f_2 = 2100$ Hz, $f_1 = 1900$ Hz

9. $L = 13.26$ mH, $C = 27.07$ nF, $f_2 = 8460$ Hz, $f_1 = 8340$ Hz

11. **(a)** $f_s = 1$ MHz
(b) $BW = 160$ kHz
(c) $R = 720\ \Omega$, $L = 0.7162$ mH, $C = 35.37$ pF
(d) $R_l = 56.25\ \Omega$

13. **(a)** $f_p = 159.155$ kHz
(b) $V_C = 4$ V
(c) $I_L = I_C = 40$ mA
(d) $Q_p = 20$

15. **(a)** $f_s = 11{,}253.95$ Hz
(b) $Q_l = 1.77$ (no)
(c) $f_p = 9{,}280.24$ Hz, $f_m = 10{,}794.41$ Hz
(d) $X_L = 5.83\ \Omega$, $X_C = 8.57\ \Omega$
(e) $Z_{T_p} = 12.5\ \Omega$
(f) $V_C = 25$ mV
(g) $Q_p = 1.46$, $BW = 6.356$ kHz
(h) $I_C = 2.92$ mA, $I_L = 3.54$ mA

17. **(a)** $X_C = 30\ \Omega$
(b) $Z_{T_P} = 225\ \Omega$
(c) $\mathbf{I}_C = 0.6$ A $\angle 90°$, $\mathbf{I}_L \cong 0.6$ A $\angle -86.19°$
(d) $L = 0.239$ mH, $C = 265.26$ nF
(e) $Q_p = 7.5$, $BW = 2.67$ kHz

19. **(a)** $f_s = 7.118$ kHz, $f_p = 6.647$ kHz, $f_m = 7$ kHz
(b) $X_L = 20.88\ \Omega$, $X_C = 23.94\ \Omega$
(c) $Z_{T_P} = 55.56\ \Omega$
(d) $Q_p = 2.32$, $BW = 2.865$ kHz
(e) $I_L = 99.28$ mA, $I_C = 92.73$ mA
(f) $V_C = 2.22$ V

21. **(a)** $f_p = 3558.81$ Hz
(b) $V_C = 138.2$ V
(c) $P = 691$ mW
(d) $BW = 575.86$ Hz

23. **(a)** $X_L = 98.54\ \Omega$
(b) $Q_l = 8.21$
(c) $f_p = 8.05$ kHz
(d) $V_C = 4.83$ V
(e) $f_2 = 8.55$ kHz, $f_1 = 7.55$ kHz

25. $R_s = 3.244$ kΩ, $C = 31.66$ nF

27. **(a)** $f_p = 251.65$ kHz
(b) $Z_{T_p} = 4.444$ kΩ
(c) $Q_p = 14.05$
(d) $BW = 17.91$ kHz
(e) 20 nF: $f_p = 194.93$ kHz, $Z_{Tp} = 49.94\ \Omega$, $Q_p = 2.04$, $BW = 95.55$ kHz
(f) 1 nF: $f_p = 251.65$ kHz, $Z_{Tp} = 13.33$ kΩ, $Q_p = 21.08$, $BW = 11.94$ kHz
(g) Red: $L/C = 100 \times 10^3$, inciso (e): $L/C = 1 \times 10^3$, inciso (f): $L/C = 400 \times 10^3$
(h) sí, $L/C \uparrow$, $BW \downarrow$

Capítulo 21

1. **(a)** 0.2 H
(b) $e_p = 1.6$ V, $e_s = 5.12$ V
(c) $e_p = 15$ V, $e_s = 24$ V

3. **(a)** 158.02 mH
(b) $e_p = 24$ V, $e_s = 1.8$ V
(c) $e_p = 15$ V, $e_s = 24$ V

5. **(a)** 3.125 V **(b)** 391.02 μWb

7. 56.31 Hz

9. 400 Ω

11. $12{,}000t$

13. **(a)** 3
(b) 2.78 W

15. **(a)** 360.56 Ω $\angle 86.82°$
(b) 332.82 mA $\angle -86.82°$
(c) $\mathbf{V}_{R_e} = 6.656$ V $\angle -86.82°$, $\mathbf{V}_{X_e} = 13.313$ V $\angle 3.18°$, $\mathbf{V}_{X_L} = 106.50$ V $\angle 3.18°$

19. 1.354 H

21. $\mathbf{I}_1(R_1 + j\ X_{L_1}) + \mathbf{I}_2(j\ X_m) = \mathbf{E}_1$
$\mathbf{I}_1(j\ X_m) + \mathbf{I}_2(j\ X_{L_2} + R_L) = 0$

23. **(a)** 20 **(b)** 83.33 A **(c)** 4.167 A
(d) $a = \frac{1}{20}$, $I_s = 4.167$ A, $I_p = 83.33$ A

25. **(a)** 25 V $\angle 0°$, 5 A $\angle 0°$
(b) 80 Ω $\angle 0°$ **(c)** 20 Ω $\angle 0°$

27. **(a)** $\mathbf{E}_2 = 40$ V $\angle 60°$, $\mathbf{I}_2 = 3.33$ A $\angle 60°$, $\mathbf{E}_3 = 30$ V $\angle 60°$, $\mathbf{I}_3 = 3$ A $\angle 60°$
(b) $R_1 = 64.52\ \Omega$

29. $[\mathbf{Z}_1 + \mathbf{X}_{L_1}]\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_{M_{12}}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{M_{13}}\mathbf{I}_3 = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{Z}_{M_{12}}\mathbf{I}_1 - [\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{X}_{L_2}]\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_3 = 0$, $\mathbf{Z}_{M_{13}}\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 + [\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4 + \mathbf{X}_{L_3}]\mathbf{I}_3 = 0$

Capítulo 22

1. **(a)** 120.1 V **(b)** 120.1 V
(c) 12.01 A **(d)** 12.01 A

3. **(a)** 120.1 V **(b)** 120.1 V
(c) 16.98 A **(d)** 16.98 A

5. **(a)** $\theta_2 = -120°$, $\theta_3 = 120°$
(b) $\mathbf{V}_{an} = 120$ V $\angle 0°$, $\mathbf{V}_{bn} = 120$ V $\angle -120°$, $\mathbf{V}_{cn} = 120$ V $\angle 120°$
(c) $\mathbf{I}_{an} = 8$ A $\angle -53.13°$, $\mathbf{I}_{bn} = 8$ A $\angle -173.13°$, $\mathbf{I}_{cn} = 8$ A $\angle 66.87°$
(e) 8 A **(f)** 207.85 V

7. $V_\phi = 127$ V, $I_\phi = 8.98$ A, $I_L = 8.98$ A

9. **(a)** $\mathbf{E}_{AN} = 12.7\text{ kV} \angle -30°$,
$\mathbf{E}_{BN} = 12.7\text{ kV} \angle -150°$,
$\mathbf{E}_{CN} = 12.7\text{ kV} \angle 90°$
(b) $\mathbf{I}_{an} = 11.285\text{ A} \angle -97.54°$,
$\mathbf{I}_{bn} = 11.285\text{ A} \angle -217.54°$,
$\mathbf{I}_{cn} = 11.285\text{ A} \angle 22.46°$
(c) $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_\phi$
(d) $\mathbf{V}_{an} = 12{,}154.28\text{ V} \angle -29.34°$,
$\mathbf{V}_{bn} = 12{,}154.28\text{ V} \angle -149.34°$,
$\mathbf{V}_{cn} = 12{,}154.28\text{ V} \angle 90.66°$
11. **(a)** 120.1 V **(b)** 208 V
(c) 13.364 A **(d)** 23.15 A
13. **(a)** $\theta_2 = -120°$, $\theta_3 = +120°$
(b) $\mathbf{V}_{ab} = 208\text{ V} \angle 0°$,
$\mathbf{V}_{bc} = 208\text{ V} \angle -120°$,
$\mathbf{V}_{ca} = 208\text{ V} \angle 120°$
(d) $\mathbf{I}_{ab} = 9.455\text{ A} \angle 0°$,
$\mathbf{I}_{bc} = 9.455\text{ A} \angle -120°$,
$\mathbf{I}_{ca} = 9.455\text{ A} \angle 120°$
(e) 16.376 A **(f)** 120.1 V
15. **(a)** $\theta_2 = -120°$, $\theta_3 = 120°$
(b) $\mathbf{V}_{ab} = 208\text{ V} \angle 0°$,
$\mathbf{V}_{bc} = 208\text{ V} \angle -120°$,
$\mathbf{V}_{ca} = 208\text{ V} \angle 120°$
(d) $\mathbf{I}_{ab} = 86.67\text{ A} \angle -36.87°$,
$\mathbf{I}_{bc} = 86.67\text{ A} \angle -156.87°$,
$\mathbf{I}_{ca} = 86.67\text{ A} \angle 83.13°$
(e) 150.11 A **(f)** 120.1 V
17. **(a)** $\mathbf{I}_{ab} = 15.325\text{ A} \angle -73.30°$,
$\mathbf{I}_{bc} = 15.325\text{ A} \angle -193.30°$,
$\mathbf{I}_{ca} = 15.325\text{ A} \angle 46.7°$
(b) $\mathbf{I}_{Aa} = 26.54\text{ A} \angle -103.31°$,
$\mathbf{I}_{Bb} = 26.54\text{ A} \angle 136.68°$,
$\mathbf{I}_{Cc} = 26.54\text{ A} \angle 16.69°$
(c) $\mathbf{E}_{AB} = 17{,}013.6\text{ V} \angle -0.59°$,
$\mathbf{E}_{BC} = 17{,}013.77\text{ V} \angle -120.59°$,
$\mathbf{E}_{CA} = 17{,}013.87\text{ V} \angle 119.41°$
19. **(a)** 208 V **(b)** 120.09 V
(c) 7.076 A **(d)** 7.076 A
21. $V_\phi = 69.28\text{ V}$, $I_\phi = 2.89\text{ A}$,
$I_L = 2.89\text{ A}$
23. $V_\phi = 69.28\text{ V}$, $I_\phi = 5.77\text{ A}$,
$I_L = 5.77\text{ A}$
25. **(a)** 440 V **(b)** 440 V
(c) 29.33 A **(d)** 50.8 A
27. **(a)** $\theta_2 = -120°$, $\theta_3 = +120°$
(b) $\mathbf{V}_{ab} = 100\text{ V} \angle 0°$,
$\mathbf{V}_{bc} = 100\text{ V} \angle -120°$,
$\mathbf{V}_{ca} = 100\text{ V} \angle 120°$
(d) $\mathbf{I}_{ab} = 5\text{ A} \angle 0°$,
$\mathbf{I}_{bc} = 5\text{ A} \angle -120°$,
$\mathbf{I}_{ca} = 5\text{ A} \angle 120°$
(e) 8.66 A
29. **(a)** $\theta_2 = -120°$, $\theta_3 = 120°$
(b) $\mathbf{V}_{ab} = 100\text{ V} \angle 0°$,
$\mathbf{V}_{bc} = 100\text{ V} \angle -120°$,
$\mathbf{V}_{ca} = 100\text{ V} \angle 120°$
(d) $\mathbf{I}_{ab} = 7.072\text{ A} \angle 45°$,
$\mathbf{I}_{bc} = 7.072\text{ A} \angle -75°$,
$\mathbf{I}_{ca} = 7.072\text{ A} \angle 165°$
(e) 12.25 A
31. 2160 W, 0 VAR, 2160 VA,
$F_p = 1$
33. 7210.67 W, 7210. 67 VAR (*C*),
10,197.42 VA, 0.707 adelantado
35. 7.263 kW, 7.263 kVAR,
10.272 kVA, 0.707 atrasado
37. 287.93 W, 575.86 VAR (*L*),
643.83 VA, 0.4472 atrasado
39. 900 W, 1200 VAR (*L*), 1500 VA,
0.6 atrasado
41. $\mathbf{Z}_\phi = 12.98\ \Omega - j\ 17.31\ \Omega$
43. **(a)** 9237.6 V **(b)** 80 A
(c) 1276.8 kW
(d) 0.576 atrasado
(e) $\mathbf{I}_{Aa} = 80\text{ A} \angle -54.83°$
(f) $\mathbf{V}_{an} = 7773.45\text{ V} \angle -4.87°$
(g) $\mathbf{Z}_\phi = 62.52\ \Omega + j\ 74.38\ \Omega$
(h) F_p (sistema completo) = 0.576,
F_p (carga) = 0.643 (ambos atrasados)
(i) 93.98%
45. **(b)** $P_T = 5899.64\text{ W}$,
$P_{\text{medidor}} = 1966.55\text{ W}$
49. **(a)** 120.09 V
(b) $I_{an} = 8.492\text{ A}$, $I_{bn} = 7.076\text{ A}$,
$I_{cn} = 42.465\text{ A}$
(c) 4928.5 W, 4928.53 VAR (*L*),
6969.99 VA, 0.7071 atrasado
(d) $\mathbf{I}_{an} = 8.492\text{ A} \angle -75°$
$\mathbf{I}_{bn} = 7.076\text{ A} \angle -195°$
$\mathbf{I}_{cn} = 42.465\text{ A} \angle 45°$
(e) $\mathbf{I}_N = 34.712\text{ A} \angle -42.972°$

Capítulo 23

1. **(a)** izquierda: 1.54 kHz,
derecha: 5.623 kHz
(b) abajo: 0.2153 V,
arriba: 0.5248 V
3. **(a)** 1000 **(b)** 10^{12}
(c) 1.585 **(d)** 1.096
(e) 10^{10} **(f)** 1513.56
(g) 10.023 **(h)** 1,258,925.41
5. 1.681
7. −0.301
9. **(a)** 1.845
(b) 18.45
11. 13.01
13. 38.49
15. 24.08 dB_s
19. **(a)** $0.1f_c$: 0.995, $0.5f_c$: 0.894,
f_c: 0.707, $2f_c$: 0.447,
$10f_c$: 0.0995
(b) $0.1f_c$: −5.71°, $0.5f_c$: −26.57°,
f_c: −45°, $2f_c$: −63.43°,
$10f_c$: −84.29°
21. $C = 0.265\ \mu\text{F}$,
250 Hz: $A_v = 0.895$,
$\theta = -26.54°$,
1000 Hz: $A_v = 0.4475$,
$\theta = -63.41°$
23. **(a)** $f_c = 3.617\text{ kHz}$,
f_c: $A_v = 0.707$, $\theta = 45°$,
$2f_c$: $A_v = 0.894$, $\theta = 26.57°$,
$0.5f_c$: $A_v = 0.447$, $\theta = 63.43°$,
$10f_c$: $A_v = 0.995$, $\theta = 5.71°$,
$\frac{1}{10}f_c$: $A_v = 0.0995$,
$\theta = 84.29°$
25. $R = 795.77\ \Omega \rightarrow 797\ \Omega$,
f_c: $A_v = 0.707$, $\theta = 45°$,
1 kHz: $A_v = 0.458$, $\theta = 63.4°$,
4 kHz: $A_v \cong 0.9$, $\theta = 26.53°$
27. **(a)** $f_{c_1} = 795.77\text{ Hz}$,
$f_{c_2} = 1989.44\text{ Hz}$,
f_{c_1}: $V_o = 0.656V_i$,
f_{c_2}: $V_o = 0.656V_i$,
$f_{\text{centro}} = 1392.60\text{ Hz}$:
$V_o = 0.711V_i$,
500 Hz: $V_o = 0.516V_i$,
4 kHz: $V_o = 0.437V_i$
(b) $BW \cong 2.9\text{ kHz}$,
$f_{\text{centro}} = 1.94\text{ kHz}$
29. **(a)** $f_s = 100.658\text{ kHz}$
(b) $Q_s = 18.39$, $BW = 5473.52\text{ Hz}$
(c) f_s: $A_v = 0.93$,
$f_1 = 97{,}921.24\text{ Hz}$,
$f_2 = 103{,}394.76\text{ Hz}$,
$f = 95\text{ kHz}$: $A_v = 0.392$,
$f = 105\text{ kHz}$: $A_v = 0.5$
(d) $f = f_s$, $V_o = 0.93\text{ V}$,
$f = f_1 = f_2$, $V_o = 0.658\text{ V}$
31. **(a)** $Q_s = 12.195$
(b) $BW = 410\text{ Hz}$,
$f_2 = 5205\text{ Hz}$,
$f_1 = 4795\text{ Hz}$
(c) f_s: $V_o = 0.024V_i$
(d) f_s: V_o sigue $0.024V_i$
33. **(a)** $f_p = 726.44\text{ kHz}$ (banda de atenuación)
$f = 2.013\text{ MHz}$ (pasa-banda)
35. **(a-b)** $f_c = 6772.55\text{ Hz}$
(c) f_c: −3 dB, $\frac{1}{2}f_c$: −6.7 dB,
$2f_c$: −0.969 dB,
$\frac{1}{10}f_c$: −20.04 dB,
$10f_c$: −0.043 dB
(d) f_c: 0.707, $\frac{1}{2}f_c$: 0.4472,
$2f_c$: 0.894
(e) f_c: 45°, $\frac{1}{2}f_c$: 63.43°, $2f_c$: 26.57°
37. **(a-b)** $f_c = 13.26\text{ kHz}$
(c) f_c: −3 dB, $\frac{1}{2}f_c$: −0.97 dB,
$2f_c$: −6.99 dB

$\frac{1}{10}f_c$: −0.043 dB,
$10f_c$: −20.04 dB
(d) f_c: 0.707, $\frac{1}{2}f_c$: 0.894,
$2f_c$: 0.447
(e) f_c: −45°, $\frac{1}{2}f_c$: −26.57°,
$2f_c$: −63.43°

39. **(a)** f_1 = 663.15 Hz, f_c = 468.1 Hz
$0 < f < f_c$: +6 dB/octava,
$f > f_c$: −3.03 dB
(b) f_1: 45°, f_c: 54.78°, $\frac{1}{2}f_1$: 63.43°,
$2f_1$: 84.29°

41. **(a)** f_1 = 19,894.37 Hz
f_c = 1,989.44 Hz
$0 < f < f_c$: 0 dB,
$f_c < f < f_1$: −6 dB/octava,
$f > f_1$: −20 dB
(b) f_c: −39.29°,
10 kHz: −52.06°,
f_1: −39.29°

43. **(a)** f_1 = 964.58 Hz,
f_c = 7,334.33 Hz,
$0 < f < f_1$: −17.62 dB,
$f_1 < f < f_c$: +6 dB/octava,
$f > f_c$: 0 dB
(b) f_1: 39.35°, 1.3 kHz: 43.38°,
f_c: 39.35°

45. **(a)** f = 180 Hz ≅ −3 dB,
f = 18 kHz: −3.105 dB
(b) 100 Hz: 97°,
1.8 kHz: 0.12° ≅ 0°,
18 kHz: −61.8°

47. $\mathbf{A}_v = -120/[(1 - j\,50/f)(1 - j\,200/f)(1 - jf/36\text{ kHz})]$

49. f_c = 2 kHz, $0 < f < f_c$: 0 dB,
$f > f_c$: −6 dB/octava

51. f_1 = 1 kHz, f_2 = 2 kHz,
f_3 = 3 kHz,
$0 < f < f_1$: 0 dB,
$f_1 < f < f_2$: +6 dB/octava,
$f_2 < f < f_3$: +12 dB/octava,
$f > f_3$: 13.06 dB

53. **(a)** woofer: 0.673, tweeter: 0.678
(b) woofer: 0.015, tweeter: 0.337
(c) intervalo medio: 0.998 ≅ 1

Capítulo 24

1. **(a)** tendencia positiva **(b)** 2 V
(c) 0.2 ms **(d)** 6 V **(e)** 6.5%

3. **(a)** tendencia positiva
(b) 10 mV
(c) 3.2 ms **(d)** 20 mV
(e) 3.4%

5. V_2 de $(V_1 - V_2)/V$ = 0.1 es 13.571 mV

7. **(a)** 120 μs **(b)** 8.333 kHz
(c) máximo = 440 mV,
mínimo = 80 mV

9. prf = 125 kHz,
ciclo de trabajo = 62.5%

11. **(a)** 8 μs
(b) 2 μs
(c) 125 kHz
(d) 0 V
(e) 3.464 mV

13. 18.88 mV

15. 117 mV

17. $v_o = 4(1 + e^{-t/20\text{ms}})$

19. $i_C = -8 \times 10^{-3} e^{-t}$

21. $i_C = 4 \times 10^{-3} e^{-t/0.2\text{ms}}$
(a) $5\tau = T/2$ **(b)** $5\tau = \frac{1}{5}(T/2)$
(c) $5\tau = 10(T/2)$

23. $0 - T/2$: v_C = 20 V,
$T/2 - T$: $v_C = 20e^{-t/\tau}$,
$T - \frac{3}{2}T$: $v_C = 20(1 - e^{-t/\tau})$,
$\frac{3}{2}T - T$: $v_C = 20e^{-t/\tau}$

25. $\mathbf{Z}_p$ = 4.573 MΩ ∠−59.5°,
$\mathbf{Z}_s$ = 0.507 MΩ ∠−59.5°

Capítulo 25

1. (I) **a.** no **b.** no **c.** sí **d.** no
e. sí
(II) **a.** sí **b.** sí **c.** sí **d.** sí
e. no
(III) **a.** sí **b.** sí **c.** no **d.** sí
e. sí
(IV) **a.** no **b.** no **c.** sí **d.** sí
e. sí

7. **(a)** 19.04 V **(b)** 4.53 A

9. 71.872 W

11. **(a)** $i = 2 + 2.08\,\text{sen}(400t - 33.69) + 0.5\,\text{sen}(800t - 53.13°)$
(b) 2.508 A
(c) $v_R = 24 + 24.96\,\text{sen}(400t + 33.69°) + 6\,\text{sen}(800t - 53.13°)$
(d) 30.092 A
(e) $v_L = 16.64\,\text{sen}(400t + 56.31°) + 8\,\text{sen}(800t + 36.87°)$
(f) 13.055 V **(g)** 75.481 W

13. **(a)** $i = 1.2\,\text{sen}(400t + 53.13°)$
(b) 0.848 A
(c) $v_R = 18\,\text{sen}(400t + 53.13°)$
(d) 12.73 V
(e) $v_C = 18 + 23.98\,\text{sen}(400t - 36.87°)$
(f) 24.73 V **(g)** 10.79 W

15. $v_o = 2.257 \times 10^{-3}\,\text{sen}(377t + 93.66°) + 1.923 \times 10^{-3}\,\text{sen}(754t + 1.64°)$

17. $i_T = 30 + 30.27\,\text{sen}(20t + 7.59°) + 0.5\,\text{sen}(40t - 30°)$

Capítulo 26

1. Z_i = 986.84 Ω

3. **(a)** I_{i_1} = 10 μA
(b) Z_{i_2} = 4.5 kΩ
(c) E_{i_3} = 6.9 V

5. Z_o = 44.59 kΩ

7. Z_o = 10 kΩ

9. **(a)** $\mathbf{A}_v$ = −392.98
(b) $\mathbf{A}_{v_T}$ = −320.21

11. **(a)** $\mathbf{A}_{v_{NL}}$ = −2398.8
(b) $\mathbf{E}_i$ = 50 mV
(c) $\mathbf{Z}_i$ = 1 kΩ

13. **(a)** $\mathbf{A}_G = 6.067 \times 10^4$
(b) $\mathbf{A}_{G_T} = 4.94 \times 10^4$

15. **(a)** $\mathbf{A}_{v_T}$ = 1500
(b) $\mathbf{A}_{i_T}$ = 187.5
(c) $\mathbf{A}_{i_1}$ = 15, $\mathbf{A}_{i_2}$ = 12.5
(d) $\mathbf{A}_{i_T}$ = 187.5

17. **(a)** $\mathbf{z}_{11} = (\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3)/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)$,
$\mathbf{z}_{12} = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)$,
$\mathbf{z}_{21} = \mathbf{z}_{12}$,
$\mathbf{z}_{22} = (\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3)/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)$

19. **(a)** $\mathbf{y}_{11} = (\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)/(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)$,
$\mathbf{y}_{12} = -\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2/(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)$,
$\mathbf{y}_{21} = \mathbf{y}_{12}$,
$\mathbf{y}_{22} = (\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_3)/(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)$

21. $\mathbf{h}_{11} = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$,
$\mathbf{h}_{21} = -\mathbf{Z}_1/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$,
$\mathbf{h}_{12} = \mathbf{Z}_1/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$,
$\mathbf{h}_{22} = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)/(\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3)$

23. $\mathbf{h}_{11} = (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)/(\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)$,
$\mathbf{h}_{21} = -\mathbf{Y}_2/(\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)$,
$\mathbf{h}_{12} = \mathbf{Y}_2/(\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)$,
$\mathbf{h}_{22} = \mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_3/(\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)$

25. **(a)** 47.62 **(b)** −99

27. $\mathbf{Z}_i$ = 9,219.5 Ω ∠−139.4°,
$\mathbf{Z}_o$ = 29.07 kΩ ∠−86.05°

29. $\mathbf{h}_{11}$ = 2.5 kΩ, $\mathbf{h}_{12}$ = 0.5,
$\mathbf{h}_{21}$ = −0.75, $\mathbf{h}_{22}$ = 0.25 mS

Índice

***Nota:* Los números en negritas están en la página del Glosario.**

D

E

F

G

H

I

S

U

V

W

Y

Resumen de ecuaciones que acompaña al libro
INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE CIRCUITOS, décima edición, por Robert L. Boylestad

ca

Formas de onda alternas senoidales

Onda senoidal $v = V_m$ sen α, $\alpha = \omega t = 2\pi ft$, $f = 1/T$, 1 radián = 57.3°, radianes = $(\pi/180°) \times$ (grados), grados = $(180°/\pi) \times$ (radianes) **Identidades** sen$(\omega t + 90°) = \cos \omega t$, sen $\omega t = \cos[\omega t - (\pi/2)]$, sen$(-\alpha) = -$sen α, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ **Valor promedio** $G =$ suma algebraica de áreas/longitud de curva **Valor efectivo (rms)** $I_{rms} = 0.707 I_m$, $I_m = \sqrt{2} I_{rms}$, $I_{rms} = \sqrt{\text{área } [i(t)]^2/T}$

Los elementos básicos y los fasores

***R*:** $I_m = V_m/R$, en fase ***L*:** $X_L = \omega L$, v_L adelanta a i_L por 90° ***C*:** $X_C = 1/\omega C$, i_C adelanta a v_C por 90° **Potencia** $P = (V_m I_m/2) \cos\theta = V_{rms} I_{rms} \cos\theta$ ***R*:** $P = V_{rms} I_{rms} = I^2_{rms} R = V^2_{rms}/R$ **Factor de potencia** $F_p = \cos\theta = P/V_{rms} I_{rms}$ **Forma rectangular** $\mathbf{C} = A \pm jB$ **Forma polar** $\mathbf{C} = C\angle\theta$ **Conversiones** $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\theta = \tan^{-1}(B/A)$, $A = C\cos\theta$, $B = C$ sen θ **Operaciones** $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$, $1/j = -j$, $\mathbf{C}_1 \pm \mathbf{C}_2 = (\pm A_1 \pm A_2) + j(\pm B_1 \pm B_2)$, $\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 = C_1 C_2 \angle\theta_1 + \theta_2$, $\mathbf{C}_1/\mathbf{C}_2 = (C_1/C_2)\angle\theta_1 - \theta_2$

Circuitos de ca en serie y en paralelo

Elementos $R\angle 0°$, $X_L \angle 90°$, $X_C \angle -90°$ **En serie** $\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_N$, $\mathbf{I}_s = \mathbf{E}/\mathbf{Z}_T$, $F_p = R/Z_T$ **Regla del divisor de voltaje** $\mathbf{V}_x = \mathbf{Z}_x\mathbf{E}/\mathbf{Z}_T$ **En paralelo** $\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \cdots + \mathbf{Y}_N$, $\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$, $G\angle 0°$, $B_L\angle -90°$, $B_C \angle 90°$, $F_p = \cos\theta_T = G/Y_T$ **Regla del divisor de corriente** $\mathbf{I}_1 = \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_T/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$, $\mathbf{I}_2 = \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_T/(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2)$ **Circuitos equivalentes** $R_s = R_p X_p^2/(X_p^2 + R_p^2)$, $X_s = R_p^2 X_p/(X_p^2 + R_p^2)$, $R_p = (R_s^2 + X_s^2)/R_s$, $X_p = (R_s^2 + X_s^2)/X_s$

Redes de ca en serie-paralelo:

Utilice impedancias de bloque y obtenga una solución general para una red reducida. Luego sustituya los valores numéricos. El método general es similar al de las redes de cd.

Métodos de análisis y temas seleccionados (ca)

Conversiones de fuentes $\mathbf{E} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{Z}_s = \mathbf{Z}_p$, $\mathbf{I} = \mathbf{E}/\mathbf{Z}_s$
Redes puente $\mathbf{Z}_1/\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_2/\mathbf{Z}_4$ **Δ-Y, Y-Δ conversiones**
Vea cobertura de cd, reemplazando R por $\mathbf{Z}$.

Teoremas de redes

Revise el contenido de cd.

Teorema de Thévenin (fuentes dependientes) $\mathbf{E}_{oc} = \mathbf{E}_{Th}$, $\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{E}_{oc}/\mathbf{I}_{sc}$, $\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{E}_g/\mathbf{I}_g$ **Teorema de Norton** (fuentes dependientes) $\mathbf{I}_{sc} = \mathbf{I}_N$, $\mathbf{Z}_N = \mathbf{E}_{oc}/\mathbf{I}_{sc}$, $\mathbf{Z}_N = \mathbf{E}_g/\mathbf{I}_g$ **Teorema de máxima transferencia de potencia** $Z_L = Z_{Th}$, $\theta_L = -\theta_{Th_Z}$, $P_{máx} = E^2_{Th}/4R_{Th}$

Potencia (ca)

R: $P = VI = V_m I_m/2 = I^2 R = V^2/R$ **Potencia aparente** $S = VI$, $P = S\cos\theta$, $F_p = \cos\theta = P/S$ **Potencia reactiva** $Q = VI$ sen θ L: $Q_L = VI = I^2 X_L = V^2/X_L$, C: $Q_C = VI = I^2 X_C = V^2/X_C$, $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$, $F_p = P_T/S_T$

Resonancia

En serie $X_L = X_C$, $f_s = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, $Z_{T_s} = R$, $Q_l = X_L/R_l$, $Q_s = X_L/R = (1/R)\sqrt{L/C}$, $V_{L_s} = Q_s E$, $V_{C_s} = Q_s E$, $P_{HPF} = (1/2)P_{máx}$, $f_1 = (1/2\pi)[-R/2L + (1/2)\sqrt{(R/L)^2 + 4/LC}]$, f_2 (utilice $-R/2L$), $BW = f_2 - f_1 = R/2\pi L = f_s/Q_s$ **En paralelo** $X_{L_p} = X_C$, $X_{L_p} = (R_l^2 + X_L^2)/X_L$, $f_p = [1/(2\pi\sqrt{LC})]\sqrt{1 - (R_l^2 C/L)}$, $Z_{T_p} = R_s \| R_p$, $R_p = (R_l^2 + X_L^2)/R_l$ $Q_p = (R_s \| R_p)X_{L_p}$, $BW = f_2 - f_1 = f_p/Q_p$ ***Q* ≥ 10:** $Z_{T_p} \cong R_s \| Q^2 R_l$, $X_{L_p} \cong X_L$, $X_L = X_C$, $f_p \cong 1/(2\pi\sqrt{LC})$, $Q_p = Q_l$, $I_L = I_C \cong QI_T$, $BW = f_p/Q_p = R_l/2\pi L$

Transformadores

Inductancia mutua $M = k\sqrt{L_p L_s}$ **Núcleo de hierro** $E_p = 4.44 f N_p \Phi_m$, $E_s = 4.44 f N_s \Phi_m$, $E_p/E_s = N_p/N_s$, $a = N_p/N_s$, $I_p/I_s = N_s/N_p$, $\mathbf{Z}_p = a^2\mathbf{Z}_L$, $E_p I_p = E_s I_s$, $P_i = P_o$ (ideal) **Núcleo de aire** $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_p + [\omega(M)^2/(\mathbf{Z}_s + \mathbf{Z}_L)]$

Sistemas polifásicos

Y-Y sistema $I_{\phi g} = I_L = I_{\phi L}$, $V_\phi = E_\phi$, $E_L = \sqrt{3}\,V_\phi$ **Y-Δ sistema** $V_\phi = E_L$, $I_L = \sqrt{3} I_\phi$ **Δ-Δ sistema** $V_\phi = E_L = E_\phi$, $I_L = \sqrt{3} I_\phi$ **Δ-Y sistema** $E_L = \sqrt{3} V_\phi$, $I_\phi = I_L$, $E_L = E_\phi$ **Potencia** $P_T = 3P_\phi$, $Q_T = 3Q_\phi$, $S_T = 3S_\phi = \sqrt{3} E_L I_L$, $F_p = P_T/S_T$

Decibeles, filtros y diagramas de Bode

Logaritmos $N = b^x$, $x = \log_b N$, $\log_e x = 2.3 \log_{10} x$, $\log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b$, $\log_{10} a/b = \log_{10} a - \log_{10} b$, $\log_{10} a^n = n\log_{10} a$, $\text{dB} = 10\log_{10} P_2/P_1$, $\text{dB}_v = 20\log_{10} V_2/V_1$ **Filtros *R-C*** (pasa-altos) $f_c = 1/(2\pi RC)$, $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i = R/\sqrt{R^2 + X_C^2}\,\angle\tan^{-1}(X_C/R)$ (pasa-bajos) $f_c = 1/(2\pi RC)$, $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i = X_C/\sqrt{R^2 + X_C^2}\,\angle -\tan^{-1 R/X_C}$ **Octava** 2 : 1, 6 dB/octava **Década** 10 : 1, 20 dB/década

Formas de onda de pulso y la respuesta *R-C*

% inclinación $= [(V_1 - V_2)/V] \times 100\%$ con $V = (V_1 + V_2)/2$
Frecuencia de repetición de pulso (frp) $= 1/T$
Ciclo de trabajo $= (t_p/T) \times 100\%$
$V_{promedio}$ = (ciclo de servicio)(valor pico) + (1 − ciclo de servicio) × (V_b)
Circuitos *R-C* $v_C = V_i + (V_f - V_i)(1 - e^{-t/RC})$
Atenuador compensado $R_p C_p = R_s C_s$

Circuitos no senoidales

Serie de Fourier $f(\alpha) = A_0 + A_1$ sen $\omega t + A_2$ sen $2\omega t + \cdots + A_n$ sen $n\omega t + B_1 \cos\omega t + B_2 \cos 2\omega t + \cdots + B_n \cos n\omega t$ **Función par** $f(\alpha) = f(-\alpha)$, sin términos B_n **Función impar** $f(\alpha) = -f(-\alpha)$, sin términos A_n, sin armónicas impares si $f(t) = f[(T/2) + t]$, sin armónicas pares si $f(t) = -f[(T/2) + t]$ **Valor efectivo (rms)** $V_{(rms)} = \sqrt{V_0^2 + (V_{m_1}^2 + \cdots + V_{m_n}^2 + V'^2_{m_1} + \cdots + V'^2_{m_n})/2}$ **Potencia** $P_T = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos\theta + \cdots + V_n I_n \cos\theta_n = I_{rms}{}^2 R = V_{rms}{}^2/R$

Valores estándar de resistores

Ohms (Ω)					Kilohms (kΩ)		Megaohms (MΩ)	
0.10	**1.0**	**10**	**100**	**1000**	**10**	**100**	**1.0**	**10.0**
0.11	1.1	11	110	1100	11	110	1.1	11.0
0.12	**1.2**	**12**	**120**	**1200**	**12**	**120**	**1.2**	**12.0**
0.13	1.3	13	130	1300	13	130	1.3	13.0
0.15	**1.5**	**15**	**150**	**1500**	**15**	**150**	**1.5**	**15.0**
0.16	1.6	16	160	1600	16	160	1.6	16.0
0.18	**1.8**	**18**	**180**	**1800**	**18**	**180**	**1.8**	**18.0**
0.20	2.0	20	200	2000	20	200	2.0	20.0
0.22	**2.2**	**22**	**220**	**2200**	**22**	**220**	**2.2**	**22.0**
0.24	2.4	24	240	2400	24	240	2.4	
0.27	**2.7**	**27**	**270**	**2700**	**27**	**270**	**2.7**	
0.30	3.0	30	300	3000	30	300	3.0	
0.33	**3.3**	**33**	**330**	**3300**	**33**	**330**	**3.3**	
0.36	3.6	36	360	3600	36	360	3.6	
0.39	**3.9**	**39**	**390**	**3900**	**39**	**390**	**3.9**	
0.43	4.3	43	430	4300	43	430	4.3	
0.47	**4.7**	**47**	**470**	**4700**	**47**	**470**	**4.7**	
0.51	5.1	51	510	5100	51	510	5.1	
0.56	**5.6**	**56**	**560**	**5600**	**56**	**560**	**5.6**	
0.62	6.2	62	620	6200	62	620	6.2	
0.68	**6.8**	**68**	**680**	**6800**	**68**	**680**	**6.8**	
0.75	7.5	75	750	7500	75	750	7.5	
0.82	**8.2**	**82**	**820**	**8200**	**82**	**820**	**8.2**	
0.91	9.1	91	910	9100	91	910	9.1	

Resumen de ecuaciones que acompaña al libro

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE CIRCUITOS, décima edición, por Robert L. Boylestad

cd

Introducción

Conversiones 1 metro = 100 cm = 39.37 pulg, 1 pulg = 2.54 cm, 1 yarda = 0.914 m = 3 pie, 1 milla = 5280 pie, °F = 9/5°C + 32, °C = 5/9(°F − 32), K = 273.15 + °C **Notación científica** 10^{12} = tera = T, 10^9 = giga = G, 10^6 = mega = M, 10^3 = kilo = k, 10^{-3} = mili = m, 10^{-6} = micro = μ, 10^{-9} = nano = n, 10^{-12} = pico = p **Potencias de diez** $1/10^n = 10^{-n}$, $1/10^{-n} = 10^n$, $(10^n)(10^m) = 10^{n+m}$, $10^n/10^m = 10^{n-m}$, $(10^n)^m = 10^{nm}$

Corriente y voltaje

Ley de Coulomb $F = kQ_1Q_2/r^2$, $k = 9 \times 10^9$ N·m²/C², Q = coulombs (C), r = metros (m) **Corriente** $I = Q/t$ (amperes), t = segundos (s), $Q_e = 1.6 \times 10^{-19}$ C **Voltaje** $V = W/Q$ (volts), W = joules (J)

Resistencia

Alambre circular $R = \rho l/A$ (ohms), ρ = resistividad, l = pies, $A_{CM} = (d_{mils})^2$, ρ(Cu) = 10.37 **Unidades métricas** l = cm, A = cm², ρ(Cu) = 1.724×10^{-6} ohm-cm **Temperatura** $(|T| + T_1)/R_1 = (|T| + T_2)/R_2$, $R_1 = R_{20}[1 + \alpha_{20}(T_1 - 20°C)]$, α_{20}(Cu) = 0.00393 **Código de colores** Bandas 1–3: 0 = negro, 1 = café, 2 = rojo, 3 = naranja, 4 = amarillo, 5 = verde, 6 = azul, 7 = violeta, 8 = gris, 9 = blanco, Banda 3: 0.1 = oro, 0.01 = plata, Banda 4: 5% = oro, 10% = plata, 20% = sin banda, Banda 5: 1% = café, 0.1% = rojo, 0.01% = naranja, 0.001% = amarillo **Conductancia** $G = 1/R$ siemens (S)

Ley de Ohm, potencia y energía

Ley de Ohm $I = E/R$, $E = IR$, $R = E/I$ **Potencia** $P = W/t = VI = I^2R = V^2/R$ (watts), 1 hp = 746 W
Eficiencia $\eta\% = (P_o/P_i) \times 100\%$, $\eta_T = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdots \eta_n$
Energía $W = Pt$, W (kWh) = $[P(\text{W}) \cdot t(\text{h})]/1000$

Circuitos en serie

$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N$, $R_T = NR$, $I = E/R_T$, $V = IR$
Ley de voltaje de Kirchhoff $\Sigma_{\circlearrowright} V = 0$, $\Sigma_{\circlearrowright} V_{\text{subidas}} = \Sigma_{\circlearrowright} V_{\text{caídas}}$
Regla del divisor de voltaje $V_x = R_xE/R_T$

Circuitos en paralelo

$R_T = 1/(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + \cdots + 1/R_N)$, $R_T = R/N$, $R_T = R_1R_2/(R_1 + R_2)$, $I = EG_T = E/R_T$
Ley de corriente de Kirchhoff $\Sigma I_{\text{entrada}} = \Sigma I_{\text{salida}}$
Regla del divisor de corriente $I_x = (R_T/R_x)I$, (Dos elementos en paralelo): $I_1 = R_2I/(R_1 + R_2)$, $I_2 = R_1I/(R_1 + R_2)$

Métodos de análisis y temas seleccionados (cd)

Conversiones de fuentes $E = IR_p$, $R_s = R_p$, $I = E/R_s$

Determinantes $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

Redes puente $R_1/R_3 = R_2/R_4$ **Δ-Y conversiones** $R' = R_A + R_B + R_C$, $R_3 = R_AR_B/R'$, $R_2 = R_AR_C/R'$, $R_1 = R_BR_C/R'$, $R_Y = R_\Delta/3$
Y-Δ conversiones $R'' = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3$, $R_C = R''/R_3$, $R_B = R''/R_2$, $R_A = R''/R_1$, $R_\Delta = 3R_Y$

Teoremas de redes

Superposición Fuentes de voltaje (corto circuito equivalente), fuentes de corriente (circuito abierto equivalente)
Teorema de Thévenin R_{Th}: (todas las fuentes en cero), E_{Th}: (voltaje de circuito abierto en las terminales)
Teorema de máxima transferencia de potencia $R_L = R_{Th} = R_N$, $P_{\text{máx}} = E_{Th}^2/4R_{Th} = I_N^2R_N/4$

Capacitores

Capacitancia $C = Q/V = \epsilon A/d = 8.85 \times 10^{-12}\epsilon_r A/d$ farads (F), $C = \epsilon_r C_o$ **Intensidad del campo eléctrico** $\mathscr{E} = V/d = Q/\epsilon A$ (volts/metro) **Transitorios** (en carga) $i_C = (E/R)e^{-t/\tau}$, $\tau = RC$, $v_C = E(1 - e^{-t/\tau})$, (en descarga) $v_C = Ee^{-t/\tau}$, $i_C = (E/R)e^{-t/RC}$
$\boldsymbol{i_C}$ $i_{C\text{promedio}} = C(\Delta v_C/\Delta t)$ **En serie** $Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_3$, $1/C_T = (1/C_1) + (1/C_2) + (1/C_3) + \cdots + (1/C_N)$, $C_T = C_1C_2/(C_1 + C_2)$
En paralelo $Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$, $C_T = C_1 + C_2 + C_3$
Energía $W_C = (1/2)CV^2$

Circuitos magnéticos

Densidad de flujo $B = \Phi/A$ (webers/m²) **Permeabilidad** $\mu = \mu_r\mu_o$ (Wb/A·m) **Reluctancia** $\mathscr{R} = l/\mu A$ (rels) **Ley de Ohm** $\Phi = \mathscr{F}/\mathscr{R}$ (webers)
Fuerza magnetomotriz $\mathscr{F} = NI$ (ampere-vueltas) **Fuerza magnetizadora** $H = \mathscr{F}/l = NI/l$ **Ley de circuitos de Ampère** $\Sigma_{\circlearrowright} \mathscr{F} = 0$
Flujo $\Sigma\, \Phi_{\text{de entrada}} = \Sigma\, \Phi_{\text{de salida}}$ **Núcleo de aire** $H_g = 7.96 \times 10^5\, B_g$

Inductores

Autoinductancia $L = N^2\mu A/l$ (henrys), $L = \mu_r L_o$
Voltaje inducido $e_{L\text{ promedio}} = L(\Delta i/\Delta t)$ **Transitorios** (almacenamiento) $i_L = I_m(1 - e^{-t/\tau})$, $I_m = E/R$, $\tau = L/R$, $v_L = Ee^{-t/\tau}$ (decaimiento), $v_L = [1 + (R_2/R_1)]Ee^{-t/\tau'}$, $\tau' = L/(R_1 + R_2)$, $i_L = I_me^{-t/\tau'}$, $I_m = E/R_1$
En serie $L_T = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N$ **En paralelo** $1/L_T = (1/L_1) + (1/L_2) + (1/L_3) + \cdots + (1/L_N)$, $L_T = L_1L_2/(L_1 + L_2)$
Energía $W_L = 1/2(LI^2)$

Alfabeto griego

Letra	Mayúscula	Minúscula	Letra	Mayúscula	Minúscula
Alfa	A	α	Ni	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gamma	Γ	γ	Ómicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ϵ	Rho	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Theta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ
Kappa	K	κ	Chi	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mi	M	μ	Omega	Ω	ω

Prefijos

Factores de multiplicación	Prefijo SI	Símbolo SI
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^9	giga	G
1 000 000 = 10^6	mega	M
1 000 = 10^3	kilo	k
0.001 = 10^{-3}	mili	m
0.000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0.000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p